Cálculo diferencial

Todas las demostraciones, explicadas paso a paso

Cálculo I · según el programa de la Facultad de Ciencias, UNAM

Guillermo Izquierdo

con revisión de Claude Opus 5.5 (Anthropic)

PyPro · pypro.mx · 2026

Prólogo

Este libro tiene un objetivo sencillo de decir y difícil de cumplir: **demostrar todo**. Cada teorema del cálculo diferencial que aparece aquí se demuestra completo, paso a paso, sin «es fácil ver», sin «se deja al lector» y sin usar nada que no se haya demostrado antes.

El recorrido sigue el programa de **Cálculo Diferencial e Integral I** de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM: los números reales, las funciones, los límites de sucesiones y de funciones, la continuidad y la derivada, hasta los polinomios de Taylor. El orden de los temas es el del programa oficial.

Cómo está hecho

- **Todo parte de axiomas.** Los números reales se presentan como un campo ordenado y completo (axiomas K1–K9, O1–O3 y S). Cada resultado posterior se apoya solo en esos axiomas y en lo ya demostrado.
- **Cada paso dice qué usa.** Las justificaciones aparecen entre paréntesis con el número del resultado que se aplica, por ejemplo «(C1-032.T2)». El número indica la clase (C1-032) y la pieza dentro de ella (T2 = segundo teorema).
- **Lo provisional se declara.** Dos cosas se usan antes de poder demostrarlas, y siempre se marcan con ⚠: los hechos geométricos de la trigonometría (se demuestran en *Cálculo II* a partir de la integral) y el principio de elección numerable, que casi todos los cursos usan sin decirlo.
- **Intuición primero, formalidad siempre.** Cada capítulo abre con una situación cotidiana (un viaje en carretera, el termómetro de la cocina, una regla y una lupa) y dice dónde falla la analogía. Después viene la definición o el teorema formal, su demostración y un contraejemplo por cada hipótesis, para que se vea por qué está ahí.

Cómo leerlo

Cada capítulo corresponde a una clase en video del curso *Cálculo diferencial: todas las demostraciones, explicadas paso a paso* de PyPro (pypro.mx). Se puede leer solo, pero funciona mejor junto con el video:

el video da la idea y la imagen; el libro da cada detalle por escrito.

Los recuadros ayudan a orientarse:

- **Teorema, definición, axioma:** el enunciado exacto, tal como se usa después.
- **Idea:** la estrategia de la demostración en una o dos frases.
- **En la vida diaria:** la situación cotidiana y el límite de la analogía.
- **Cuidado:** errores frecuentes y lo que pasa si se quita una hipótesis.

Al final de cada capítulo hay ejercicios con sus respuestas.

Agradecimientos

A la **Facultad de Ciencias de la UNAM**, por un plan de estudios extraordinario y por haber formado a tantas generaciones de matemáticas y matemáticos. Este libro sigue su programa de Cálculo Diferencial e Integral I y no existiría sin él.

A los creadores de **Claude**, en Anthropic, por su esfuerzo de condensar el conocimiento del mundo en un modelo capaz de revisar, cuestionar y verificar cada línea de una demostración. Claude Opus 5.5 revisó la estructura lógica de este libro: que cada enunciado esté completo, que ningún paso use algo no demostrado y que no haya contradicciones entre capítulos.

A quienes estudian este material: las demostraciones son la parte del cálculo que más se salta y la que más enseña.

Guillermo Izquierdo

Índice general

Prólogo I

Agradecimientos III

C1-001 · Los tres problemas del cálculo 1

C1-002 · Axiomas de campo 8

C1-003 · Axiomas de orden y desigualdades 16

C1-004 · Valor absoluto 25

C1-005 · Naturales e inducción 32

C1-006 · Supremo e ínfimo 48

C1-007 · Propiedad arquimediana y densidad 54

C1-008 · $\sqrt{2}$ existe y es irracional 59

C1-009 · Expansiones decimales 66

C1-010 · Funciones y sus gráficas 73

C1-011 · Operaciones, composición e inversas 78

C1-012 · Sucesiones convergentes 83

C1-013 · Álgebra de límites de sucesiones 89

C1-014 · Sándwich y monótonas 95

C1-015 · Subsucesiones y Bolzano–Weierstrass 102

C1-016 · Sucesiones de Cauchy 107

C1-017 · Límite de una función: ε–δ **112**

C1-018 · Álgebra de límites **118**

C1-019 · Límite por sucesiones **123**

C1-020 · Límites laterales, al infinito e infinitos **129**

C1-021 · El límite sen x / x **139**

C1-022 · Funciones continuas **147**

C1-023 · Teorema de Bolzano (valor intermedio) **154**

C1-024 · Teorema de Weierstrass **161**

C1-025 · Continuidad uniforme y teorema de Heine **167**

C1-026 · Continuidad de la inversa **173**

C1-027 · Razón de cambio y recta tangente **180**

C1-028 · Derivable implica continua **185**

C1-029 · Reglas de derivación **191**

C1-030 · Regla de la cadena **197**

C1-031 · Derivada de la inversa, implícita y orden superior **201**

C1-032 · Fermat y Rolle **207**

C1-033 · Teorema del Valor Medio **213**

C1-034 · Consecuencias del TVM, máximos, mínimos y concavidad **217**

C1-035 · Trazado de curvas y optimización **225**

C1-036 · Método de Newton **230**

C1-037 · TVM de Cauchy y regla de L'Hôpital **235**

C1-038 · Polinomios de Taylor y residuo de Lagrange **244**

C1-001 · Los tres problemas del cálculo

Motivación

Sales del kilómetro 0 en el instante $t = 0$. Un GPS registra tu posición y te dice que, a las t horas, estás en el kilómetro

$$s(t) = 50t^2, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Nadie te dejó ver el velocímetro. Con esa sola fórmula te hacemos tres preguntas:

1. ¿Qué marcaba la aguja del velocímetro *exactamente* a la 1:00?
2. Si en lugar del GPS solo tuvieras la gráfica del velocímetro, ¿cómo sabrías cuánto recorriste en la primera hora?
3. ¿A qué hora exacta pasaste por el kilómetro 100?

Las tres parecen preguntas de secundaria. Las tres esconden la misma dificultad: su respuesta es un número al que solo se llega *acercándose*, y para que ese número exista hace falta que la recta numérica no tenga huecos.

Este capítulo plantea las tres preguntas con precisión; el resto del curso construye, paso a paso y sin trampas, las herramientas para contestarlas.

> **Dónde falla la analogía**
> Un GPS real mide en instantes sueltos y redondea a metros. La función s es un modelo: da la posición en *todo* instante y con todos los decimales. El cálculo trabaja con el modelo, no con el aparato.

Primera pregunta: velocidad instantánea y recta tangente

La velocidad promedio en un tramo es distancia entre tiempo. En el tramo que va de la 1:00 a la hora $1 + h$ (con $h \neq 0$) el promedio es

$$\begin{aligned}\frac{s(1+h) - s(1)}{h} &= \frac{50(1 + 2h + h^2) - 50}{h} \\ &= \frac{100h + 50h^2}{h} \\ &= 100 + 50h.\end{aligned}$$

Para $h = 0.1$ vale 105; para $h = 0.01$, 100.5; para $h = 0.001$, 100.05.

> ⚠ **Cuidado**
>
> No podemos poner $h = 0$: la expresión se volvería $0/0$, y en los números reales solo los elementos distintos de 0 tienen inverso (axioma K8, capítulo C1-002).

Lo que sí podemos decir es que los promedios se acercan a 100 tanto como queramos. Si queremos quedar a menos de una tolerancia $\tau > 0$ de 100, basta tomar $0 < |h| < \tau/50$, porque entonces

$$|(100 + 50h) - 100| = 50|h| < \tau.$$

Ese número, 100 km/h, es lo que llamaremos la **velocidad instantánea** a la 1:00.

En la gráfica de s, el cociente anterior es la pendiente de la recta secante que pasa por $(1, 50)$ y por $(1 + h, s(1 + h))$. Cuando h se encoge, la secante gira y se pega a una recta que solo roza la curva en $(1, 50)$: la **recta tangente**, de pendiente 100.

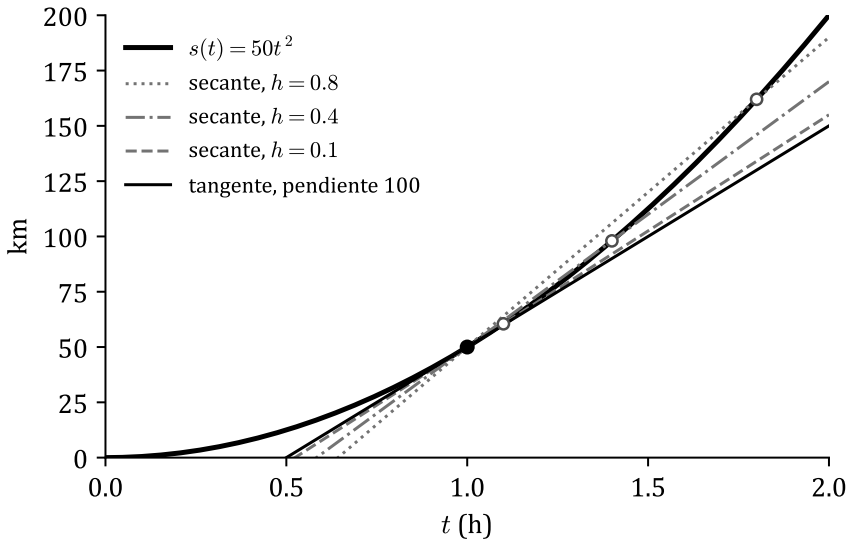


Figura 1: Secantes de $s(t) = 50t^2$ por $(1, 50)$ y $(1+h, s(1+h))$ (círculos blancos) con $h = 0.8,\ 0.4,\ 0.1$, y la tangente de pendiente 100.

Velocidad instantánea y pendiente de la tangente son, entonces, el mismo problema. La pregunta precisa es:

> **Pregunta P1**
> ¿Existe un número L tal que $\dfrac{s(1+h) - s(1)}{h}$ queda tan cerca de L como se quiera, con tal de que $h \neq 0$ sea suficientemente pequeño?

Para contestarla en general hace falta la noción de límite (C1-017) y, con ella, la de derivada (C1-027).

Segunda pregunta: distancia y área

Supón ahora que solo tienes la gráfica del velocímetro, $v(t) = 100t$ (la velocidad que acabamos de descubrir, calculada en cada instante; se justificará en C1-028).

Si la velocidad fuera constante en un tramo, la distancia sería velocidad por tiempo: el área de un rectángulo. Como no es constante, partimos la primera hora en n tramos iguales de duración $1/n$.

En el tramo $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ la velocidad está entre $100\frac{k}{n}$ y $100\frac{k+1}{n}$, de modo que la distancia real queda entre la **suma inferior** y la **suma superior**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 100\,\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = 50 - \frac{50}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 100\,\frac{k+1}{n}\cdot\frac{1}{n} = 50 + \frac{50}{n},$$

donde usamos $1 + 2 + \cdots + m = m(m+1)/2$ (se demuestra en C1-005.T4).

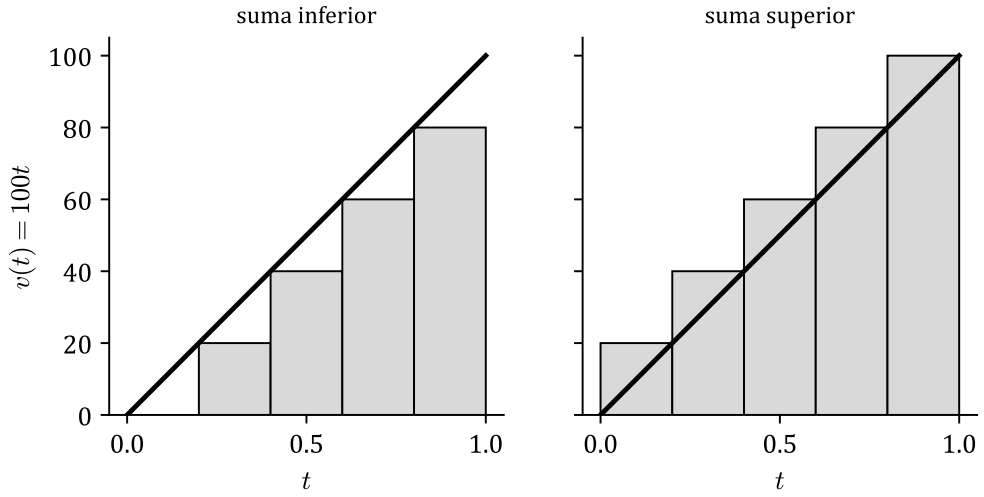


Figura 2: Sumas inferior (izquierda) y superior (derecha) de $v(t) = 100t$ en $[0, 1]$ con $n = 5$ tramos.

- Con $n = 10$ las sumas valen 45 y 55.
- Con $n = 100$ valen 49.5 y 50.5.

Hay un único número que queda entre todas las sumas inferiores y todas las superiores: 50, justo lo que marca el GPS, $s(1) = 50$. La distancia recorrida es el área bajo la gráfica de la velocidad.

> **Pregunta P2**
> ¿Existe un único número que quede entre todas las sumas inferiores y todas las superiores?

La herramienta para contestarla es el supremo (C1-006), y la respuesta general es la integral (C2-002).

Tercera pregunta: un número que no es fracción

Pasas por el kilómetro 100 cuando $50t^2 = 100$, es decir, cuando $t^2 = 2$. Con la regla y la lupa buscamos ese instante:

- $1.4^2 = 1.96$ y $1.5^2 = 2.25$;
- acercando la lupa, $1.41^2 = 1.9881$ y $1.42^2 = 2.0164$;
- otra vez, $1.414^2 = 1.999396$ y $1.415^2 = 2.002225$.

El extremo izquierdo de cada ventana tiene cuadrado menor que 2, el derecho mayor que 2, y las ventanas se encogen. Ningún decimal finito da exactamente 2, y en C1-008.T1 demostraremos algo más fuerte: **ninguna fracción** p/q cumple $(p/q)^2 = 2$.

Si solo existieran las fracciones, nunca pasarías por el kilómetro 100, aunque empezaste antes y terminaste después. La hora aproximada es $t \approx 1.41421$ h, unos 1 h 24 min 51 s.

> **Pregunta P3**
> ¿Existe un número $t > 0$ con $t^2 = 2$?

En los racionales, no. En los reales, sí (C1-008.T2), y la razón es una propiedad que los racionales no tienen: el axioma del supremo S (C1-006), que dice, en palabras, que la recta numérica no tiene huecos.

Lo que haremos

Las tres preguntas piden un número al que se llega acercándose, y las tres necesitan una recta sin huecos. Por eso el curso empieza por los cimientos:

- las reglas de las operaciones (C1-002);
- las del orden (C1-003);
- la distancia $|a - b|$ (C1-004);
- los naturales y la inducción (C1-005);
- el axioma del supremo (C1-006).

Con ellos se define qué significa «acercarse» para sucesiones (C1-012) y para funciones (C1-017), y

entonces P1 se vuelve la derivada (C1-027) y P2 la integral (Cálculo II).

Definiciones

— (capítulo de motivación; las definiciones formales empiezan en C1-002).

Resultados

— (capítulo de motivación; no hay resultados formales en TEOREMAS-C1 para C1-001).

Ejemplos que funcionan y que no

Ejemplo 1 (sí funciona)
Para $s(t) = 50t^2$ en $t = 1$, los promedios $100 + 50h$ quedan a menos de τ de 100 en cuanto $0 < |h| < \tau/50$.

⚠ Ejemplo 2 (no se vale dividir entre cero)

«Velocidad = 0 km/0 h» no es un número: 0 no tiene inverso multiplicativo (K8 solo lo garantiza para $a \neq 0$).

Ejemplo 3 (un viaje con salto)
Si $s(t) = 50t^2$ para $t < 1$ y $s(t) = 50t^2 + 10$ para $t \geq 1$ (un «teletransporte» de 10 km a la 1:00), el promedio en $[1 - h, 1]$ con $0 < h < 1$ es

$$\frac{s(1) - s(1-h)}{h} = \frac{60 - 50(1-h)^2}{h} = \frac{10}{h} + 100 - 50h,$$

que vale 195 para $h = 0.1$ y 1,099.5 para $h = 0.01$: no se acerca a ningún número. Sin continuidad no hay velocidad instantánea (se formaliza en C1-028).

> **Ejemplo 4 (sin reales no hay respuesta)**
> Las ventanas $[1.4, 1.5] \supset [1.41, 1.42] \supset \cdots$ tienen extremos racionales, pero no se encogen hacia ninguna fracción (C1-008.C1).

Ejercicios

1. Calcula la velocidad promedio de $s(t) = 50t^2$ en $[2, 2+h]$ para $h \neq 0$ y di a qué número se acerca.
2. Para $s(t) = 50t^2$, ¿qué tan pequeño debe ser $|h|$ para que el promedio en $[1, 1+h]$ quede a menos de 0.5 km/h de 100?
3. Calcula las sumas inferior y superior de $v(t) = 100t$ en $[0, 1]$ con $n = 4$ tramos.
4. Explica por qué la frase «a las 2:00 llevas 200 km en 2 h, así que el velocímetro marca 100 km/h» confunde dos preguntas distintas.
5. Con la lupa, encuentra dos decimales con tres cifras después del punto entre los que esté la hora del km 50 (es decir, $50t^2 = 50$) y explica por qué esta vez la lupa no hace falta.

Respuestas

1. $\dfrac{50(2+h)^2 - 200}{h} = 200 + 50h$; se acerca a 200 km/h.
2. $|(100 + 50h) - 100| = 50|h| < 0.5$ si $0 < |h| < 0.01$.
3. Inferior: $100 \cdot \frac{0+1+2+3}{16} = 37.5$; superior: $100 \cdot \frac{1+2+3+4}{16} = 62.5$.
4. $200/2$ es el promedio desde la salida (pregunta sobre un tramo largo); el velocímetro responde la pregunta P1 en $t = 2$, cuyo valor es 200 km/h (ejercicio 1).
5. $t^2 = 1$ tiene la solución exacta $t = 1$, una fracción: por ejemplo $0.999 < 1 < 1.001$, y $t = 1$ ya es la respuesta exacta.

C1-002 · Axiomas de campo

Motivación

Un juego de mesa trae un reglamento de nueve reglas. A mitad de partida alguien afirma que «multiplicar por cero siempre da cero», y otro jugador pregunta en qué regla dice eso. No está en ninguna.

Sin embargo, si las nueve reglas son las correctas, la afirmación se puede *deducir* de ellas, y entonces nadie puede discutirla.

Con los números reales haremos exactamente eso. En lugar de aceptar de golpe todo el álgebra de la secundaria, fijamos nueve reglas para la suma y el producto, los axiomas de campo, y deducimos de ellas cada propiedad que usaremos.

La pregunta que guía el capítulo es: ¿por qué $a \cdot 0 = 0$, si nadie lo puso en las reglas?

> **Dónde falla la analogía**
> Un juego puede cambiar su reglamento entre partidas; los axiomas se fijan una vez y, a partir de ahí, todo lo demás se demuestra.

Definiciones

Axioma C1-002.Ax1 (campo)

$\mathbb{R}$ es un conjunto con dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- K1 $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- K2 $a + b = b + a$;
- K3 existe $0 \in \mathbb{R}$ con $a + 0 = a$;
- K4 para cada a existe $-a$ con $a + (-a) = 0$;
- K5 $(ab)c = a(bc)$;
- K6 $ab = ba$;

- K7 existe $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, con $a \cdot 1 = a$;
- K8 para cada $a \neq 0$ existe a^{-1} con $aa^{-1} = 1$;
- K9 $a(b + c) = ab + ac$.

Definición C1-002.D1

$a - b := a + (-b)$; si $b \neq 0$, $a/b := a \cdot b^{-1}$; $a^2 := a \cdot a$; $2 := 1 + 1$.

En las demostraciones usamos libremente las reglas de la igualdad: si $x = y$, entonces $x + z = y + z$ y $zx = zy$ (se opera con el mismo objeto).

Eso no es un axioma de $\mathbb{R}$, sino lógica: x y y son el mismo número.

Resultados

Teorema C1-002.T1 (cancelación)

Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

Idea

Se suma $-a$ (o se multiplica por a^{-1}) en los dos lados y se reacomoda.

Demostración.

1. Supongamos $a + b = a + c$. Sumando $-a$ por la izquierda, $(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$.
2. Entonces $((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$ (K1).
3. Como $(-a) + a = a + (-a) = 0$, queda $0 + b = 0 + c$ (K2, K4).
4. Luego $b + 0 = c + 0$ (K2), y así $b = c$ (K3).
5. Supongamos ahora $ab = ac$ con $a \neq 0$. Existe a^{-1} (K8).
6. Multiplicando por la izquierda, $a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$, es decir, $(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$ (K5).
7. Como $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$, queda $1 \cdot b = 1 \cdot c$ (K6, K8).
8. Luego $b \cdot 1 = c \cdot 1$ (K6), y así $b = c$ (K7). ■

Teorema C1-002.T2 (unicidad)

El 0 y el 1 son únicos; para cada a, $-a$ es único; para $a \neq 0$, a^{-1} es único.

> **Idea**
> Dos candidatos se comparan con el propio axioma, o con la cancelación.

Demostración.

1. Sea $0'$ un número con $a + 0' = a$ para todo a. Tomando $a = 0$, $0 + 0' = 0$.
2. Aplicando K3 a $a = 0'$, $0' + 0 = 0'$.
3. Como $0 + 0' = 0' + 0$ (K2), se sigue $0 = 0'$.
4. Si $1'$ cumple $a \cdot 1' = a$ para todo a, entonces $1 \cdot 1' = 1$ y $1' \cdot 1 = 1'$ (K7).
5. Como $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1$ (K6), se sigue $1 = 1'$.
6. Si b cumple $a + b = 0$, entonces $a + b = a + (-a)$ (K4), y así $b = -a$ (C1-002.T1).
7. Si $a \neq 0$ y b cumple $ab = 1$, entonces $ab = aa^{-1}$ (K8), y así $b = a^{-1}$ (C1-002.T1). ■

La unicidad es la herramienta de este capítulo:

- para probar que un número x es $-y$, basta verificar $y + x = 0$;
- para probar que x es y^{-1} ($y \neq 0$), basta $yx = 1$.

Teorema C1-002.T3

Para todo a, $a \cdot 0 = 0$.

> **Idea**
> $a \cdot 0$ sumado consigo mismo da $a \cdot 0$; se cancela.

Demostración.

1. $0 + 0 = 0$ (K3 con $a = 0$).
2. Entonces $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0$ (K9, paso 1).

3. Además $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ (K3).
4. Así $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ (pasos 2 y 3).
5. Por lo tanto $a \cdot 0 = 0$ (C1-002.T1). ■

Esto responde la pregunta del juego de mesa: «multiplicar por cero da cero» no estaba en el reglamento, pero se deduce de K3, K9 y la cancelación.

Teorema C1-002.T4

$-(-a) = a$; $(-a)b = -(ab)$; $(-a)(-b) = ab$.

> **Idea**
> En cada caso se verifica que la suma con el número correspondiente da 0 y se usa la unicidad.

Demostración.

1. $(-a) + a = a + (-a) = 0$ (K2, K4); luego a es un inverso aditivo de $-a$, y $-(-a) = a$ (C1-002.T2).
2. Se tiene

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= ba + b(-a) \\ &= b(a + (-a)) \\ &= b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   (K6, K9, K4, C1-002.T3).
3. Por lo tanto $(-a)b = -(ab)$ (C1-002.T2).
4. Aplicando el paso 3 con $-b$ en lugar de b, y luego con los papeles de a y b cambiados (K6):

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(a(-b)) \\ &= -((-b)a) \\ &= -(-(ba)) \\ &= ba \\ &= ab \end{aligned}$$

   (paso 3, K6, paso 3, paso 1, K6). ■

Teorema C1-002.T5

Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Idea

Si $a \neq 0$, se multiplica por a^{-1}.

Demostración.

1. Supongamos $ab = 0$. Si $a = 0$, no hay nada que probar.
2. Si $a \neq 0$, existe a^{-1} (K8).
3. Entonces

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 && \text{(K7)} \\ &= b(aa^{-1}) && \text{(K8)} \\ &= (ba)a^{-1} && \text{(K5)} \\ &= (ab)a^{-1} && \text{(K6)} \\ &= 0 \cdot a^{-1} && \text{(hipótesis)} \\ &= a^{-1} \cdot 0 && \text{(K6)} \\ &= 0 && \text{(C1-002.T3).} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema C1-002.T6 (identidades)

$-0 = 0$; $-(a + b) = -a - b$; si $a \neq 0$: $a^{-1} \neq 0$ y $(a^{-1})^{-1} = a$; si $a, b \neq 0$: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$; $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$ y $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b, d \neq 0$.

Idea

Todas salen de la unicidad (C1-002.T2): se verifica que el candidato suma 0 o multiplica 1.

Demostración.

(i) $-0 = 0$.

1. $0 + 0 = 0$ (K3): el 0 es inverso aditivo de 0, y por lo tanto $-0 = 0$ (C1-002.T2).

(ii) $-(a + b) = -a - b$.

1. Se tiene

$$\begin{aligned}(a + b) + ((-a) + (-b)) &= a + \big((b + (-b)) + (-a)\big) \\ &= a + (0 + (-a)) \\ &= a + (-a) \\ &= 0.\end{aligned}$$

   En el primer paso se reasoció (K1) y se conmutó $(-a) + (-b) = (-b) + (-a)$ (K2); luego K4; en el tercero, $0 + (-a) = (-a) + 0 = -a$ (K2, K3); al final, K4.
2. Por lo tanto $-(a + b) = (-a) + (-b)$ (C1-002.T2), que es $-a - b$ (C1-002.D1).

(iii) Si $a \neq 0$: $a^{-1} \neq 0$ y $(a^{-1})^{-1} = a$.

1. Si fuera $a^{-1} = 0$, tendríamos $1 = aa^{-1} = a \cdot 0 = 0$ (K8, C1-002.T3), contra K7. Luego $a^{-1} \neq 0$.
2. Además $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ (K6, K8): a es inverso multiplicativo de a^{-1}.
3. Por lo tanto $(a^{-1})^{-1} = a$ (C1-002.T2).

(iv) Si $a, b \neq 0$: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

1. $ab \neq 0$, pues si $ab = 0$ sería $a = 0$ o $b = 0$ (C1-002.T5).
2. Reacomodando los cuatro factores (K5, K6):

$$\begin{aligned}(ab)(a^{-1}b^{-1}) &= (aa^{-1})(bb^{-1}) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

   (K8, K7).
3. Por lo tanto $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ (C1-002.T2).

(v) Las reglas de las fracciones, con $b, d \neq 0$.

1. $bd \neq 0$ (C1-002.T5).

2. Para cualquier x,

$$\begin{aligned}\frac{xd}{bd} &= (xd)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(iv)}\\ &= (xb^{-1})(dd^{-1}) && \text{(K5, K6)}\\ &= xb^{-1}\cdot 1 && \text{(K8)}\\ &= \frac{x}{b} && \text{(K7).}\end{aligned}$$

3. Con $x = a$ queda $a/b = (ad)/(bd)$; del mismo modo (con los papeles de b y d cambiados y K6), $c/d = (bc)/(bd)$.
4. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1}\\ &= (ad + bc)(bd)^{-1}\\ &= \frac{ad + bc}{bd}\end{aligned}$$

   (paso 3, K9 y K6, C1-002.D1).
5. Finalmente, $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$ (K5, K6, (iv)). ■

Por qué cada hipótesis

Las piezas de este capítulo tienen pocas hipótesis, y cada una cuenta.

⚠ $a \neq 0$ en la cancelación del producto (C1-002.T1)

Sin ella falla: $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$ (ambos valen 0 por C1-002.T3) y $1 \neq 2$ (si $1 = 2 = 1 + 1$, cancelando 1 tendríamos $0 = 1$, contra K7).

⚠ $1 \neq 0$ en K7

Sin ella, el conjunto $\{0\}$ con $0 + 0 = 0$ y $0 \cdot 0 = 0$ cumpliría todos los demás axiomas, y ahí todo número sería 0.

⚠ Los axiomas de campo no deciden si $1 + 1 = 0$

El conjunto {par, impar}, con la suma y el producto de la paridad («impar + impar = par», «impar · impar = impar», etc.), cumple K1-K9 con $0 =$ par y $1 =$ impar, y en él $1 + 1 = 0$.

Por eso hacen falta los axiomas de orden (C1-003).

Ejercicios

1. Demuestra que $(a - b) + b = a$ para todos a, b.
2. Demuestra que $a(b - c) = ab - ac$.
3. Demuestra que, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$ y $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
4. Demuestra que si $x^2 = x$, entonces $x = 0$ o $x = 1$.
5. En el campo {par, impar}, calcula $-$impar y impar^{-1}. ¿Qué axioma de orden dirías que falla ahí? (Se responde de verdad en C1-003.)

Respuestas

1. $(a + (-b)) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a$ por K1, K2, K4 y K3.
2. $a(b + (-c)) = ab + a(-c)$ (K9) y $a(-c) = (-c)a = -(ca) = -(ac)$ (K6, C1-002.T4, K6); luego $a(b - c) = ab + (-(ac)) = ab - ac$.
3. Si $-a = 0$, entonces $a = -(-a) = -0 = 0$ (C1-002.T4, C1-002.T6). Además $(-a)(-(a^{-1})) = aa^{-1} = 1$ (C1-002.T4, K8), y por C1-002.T2, $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
4. $x^2 = x = x \cdot 1$ (K7). Si $x \neq 0$, por C1-002.T1, $x = 1$. Si no, $x = 0$.
5. impar + impar = par = 0, así que $-$impar = impar; impar · impar = impar = 1, así que impar^{-1} = impar. Si hubiera positivos, 1 sería positivo (C1-003.T5) y $1 + 1 = 0$ también lo sería (O2), contra O1.

C1-003 · Axiomas de orden y desigualdades

Motivación

En la mañana el termómetro de la cocina marca -2 °C y al mediodía 6 °C: la lectura de la mañana es menor, $-2 < 6$. Si a las dos lecturas les cambias el signo obtienes 2 y -6, y ahora la desigualdad apunta al otro lado: $2 > -6$.

Todos aprendimos que «multiplicar por un negativo voltea la desigualdad», y también que $1 > 0$. Pero los axiomas de campo (C1-002) no dicen nada de comparar números; de hecho, son compatibles con $1 + 1 = 0$. ¿De dónde salen, entonces, estas reglas?

En este capítulo agregamos tres axiomas que describen a los números positivos y deducimos de ellos todas las reglas de las desigualdades, incluida $1 > 0$ y la herramienta que usaremos en cada demostración con ε: si $a \le b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a \le b$.

> **Dónde falla la analogía**
> El termómetro tiene un rango finito y marcas de un grado. En $\mathbb{R}$ no hay primer ni último número, y entre dos lecturas distintas siempre hay otra (C1-003.T8).

Definiciones

Axioma C1-003.Ax1 (orden)

Existe $P \subset \mathbb{R}$ (los positivos) tal que:

- O1 para cada a se cumple exactamente una de $a = 0$, $a \in P$, $-a \in P$;
- O2 $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$;
- O3 $a, b \in P \Rightarrow ab \in P$.

Definición C1-003.D1

$a > b :\Leftrightarrow a - b \in P$; $a < b :\Leftrightarrow b > a$; $a \leq b :\Leftrightarrow a < b$ o $a = b$. (Y $a \geq b :\Leftrightarrow b \leq a$.)

Observación (lectura de C1-003.D1)

Para todos x, y:

1. $x > 0 \Leftrightarrow x \in P$, y $x < 0 \Leftrightarrow -x \in P$;
2. $-(x - y) = y - x$;
3. $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Demostración.

1. Para (1): $-0 = 0$ (C1-002.T6), así que $x - 0 = x + 0 = x$ (K3); y $0 - x = 0 + (-x) = -x$ (K2, K3).
2. Para (2):

$$\begin{aligned}(x - y) + (y - x) &= x + ((-y) + y) + (-x)\\ &= x + 0 + (-x)\\ &= x + (-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

   (K1, K2, K4, K3); por lo tanto $-(x - y) = y - x$ (C1-002.T2).
3. Para (3), si $x = y$: $x - y = x + (-x) = 0$ (K4).
4. Si $x + (-y) = 0$, entonces x es inverso aditivo de $-y$; también lo es y, porque $(-y) + y = 0$ (K2, K4).
5. Por lo tanto $x = y$ (C1-002.T2). ■

Resultados

Teorema C1-003.T1 (tricotomía)

Para a, b se cumple exactamente una de $a < b$, $a = b$, $a > b$.

> **Idea**
> Es O1 aplicado al número $a - b$.

Demostración.

1. Para el número $a - b$ se cumple exactamente una de: $a - b = 0$, $a - b \in P$, $-(a - b) \in P$ (O1).
2. La primera equivale a $a = b$ (observación (3)).
3. La segunda es $a > b$ (C1-003.D1).
4. Como $-(a - b) = b - a$ (observación (2)), la tercera es $b > a$, es decir, $a < b$. ■

Teorema C1-003.T2 (transitividad)

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demostración.

1. Por hipótesis, $b - a \in P$ y $c - b \in P$; luego $(c - b) + (b - a) \in P$ (O2).
2. Se tiene

$$\begin{aligned}(c - b) + (b - a) &= c + ((-b) + b) + (-a) \\ &= c + 0 + (-a) \\ &= c - a\end{aligned}$$

   (K1, K2, K4, K3).
3. Luego $c - a \in P$, es decir, $a < c$. ■

Teorema C1-003.T3

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Demostración.

1. $-(a + c) = (-a) + (-c)$ (C1-002.T6).

2. Entonces

$$\begin{aligned}(b+c)-(a+c) &= b+c+(-a)+(-c)\\ &= (b+(-a))+(c+(-c))\\ &= b-a\end{aligned}$$

   (K1, K2, K4, K3).
3. Esa diferencia está en P por hipótesis. ■

Teorema C1-003.T4

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

> **Idea**
> La diferencia de los productos es un producto de positivos.

Demostración.

1. $-(ac) = (-a)c$ (C1-002.T4, K6), y entonces

$$\begin{aligned}bc-ac &= bc+(-a)c\\ &= (b+(-a))c\\ &= (b-a)c\end{aligned}$$

   (K9, K6).
2. Si $c > 0$: $c \in P$ (observación (1)) y $b - a \in P$, así que $(b-a)c \in P$ (O3); es decir, $ac < bc$.
3. Si $c < 0$: $-c \in P$ (observación (1)).
4. $(b-a)(-c) = -((b-a)c) = -(bc-ac) = ac-bc$ (C1-002.T4, K6, paso 1, observación (2)).
5. $(b-a)(-c) \in P$ (O3); luego $ac - bc \in P$, es decir, $ac > bc$. ■

Teorema C1-003.T5

Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$. En particular $1 > 0$.

Demostración.

1. Sea $a \neq 0$. Entonces $a \in P$ o $-a \in P$ (O1).

2. Si $a \in P$, entonces $a^2 = aa \in P$ (O3).
3. Si $-a \in P$, entonces $(-a)(-a) \in P$ (O3), y $(-a)(-a) = aa = a^2$ (C1-002.T4).
4. En ambos casos $a^2 \in P$, es decir, $a^2 > 0$ (observación (1)).
5. Como $1 \neq 0$ y $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ (K7), se sigue $1 > 0$. ■

Teorema C1-003.T6

Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$.

Demostración.

1. $a + c < b + c$ (C1-003.T3).
2. $c + b < d + b$, es decir, $b + c < b + d$ (C1-003.T3, K2).
3. Luego $a + c < b + d$ (C1-003.T2).
4. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$: $b > 0$ (C1-003.T2).
5. $ac < bc$ (C1-003.T4 con $c > 0$).
6. $bc < bd$ (C1-003.T4 con $b > 0$, K6).
7. Luego $ac < bd$ (C1-003.T2). ■

Teorema C1-003.T7

Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$. Si $0 < a < b$, entonces $0 < 1/b < 1/a$.

> **Idea**
> Si a^{-1} fuera negativo, -1 sería positivo; para la segunda parte, $1/a - 1/b = (b - a)\, a^{-1}b^{-1}$.

Demostración.

1. Sea $a > 0$. Entonces $a \neq 0$ (O1), y $a^{-1} \neq 0$ (C1-002.T6).
2. Supongamos $a^{-1} < 0$, es decir, $-a^{-1} \in P$.
3. Entonces $a(-a^{-1}) \in P$ (O3), y $a(-a^{-1}) = -(aa^{-1}) = -1$ (C1-002.T4, K6, K8). Así $-1 \in P$.
4. Pero $1 \in P$ (C1-003.T5), y O1 aplicado a 1 prohíbe que 1 y -1 estén ambos en P.
5. Luego $a^{-1} \not< 0$, y como $a^{-1} \neq 0$, se tiene $a^{-1} > 0$ (C1-003.T1).
6. Finalmente $1/a = 1 \cdot a^{-1} = a^{-1}$ (K6, K7).
7. Sea ahora $0 < a < b$. Entonces $b > 0$ (C1-003.T2), y $a^{-1}, b^{-1} > 0$ (primera parte).

8. Se tiene

$$(b-a)(a^{-1}b^{-1}) = a^{-1}(bb^{-1}) - (aa^{-1})b^{-1}$$
$$= a^{-1} - b^{-1}$$

(K9, C1-002.T4, K5, K6, K8, K7).

9. El producto $(b-a)(a^{-1}b^{-1})$ está en P (O3). Luego $1/b < 1/a$, y $0 < 1/b$ por la primera parte. ■

Teorema C1-003.T8

$2 > 0$, y si $a < b$, entonces $a < (a+b)/2 < b$.

Demostración.

1. $1 \in P$ (C1-003.T5), luego $2 = 1 + 1 \in P$ (O2).
2. Sea $a < b$. Entonces $a + a < a + b$ y $a + b < b + b$ (C1-003.T3, K2).
3. $a + a = a \cdot 1 + a \cdot 1 = a(1+1) = 2a$ (K7, K9, K6), e igual $b + b = 2b$; así $2a < a + b < 2b$.
4. $1/2 > 0$ (C1-003.T7), y por lo tanto

$$(2a)\tfrac{1}{2} < (a+b)\tfrac{1}{2} < (2b)\tfrac{1}{2}$$

(C1-003.T4).

5. $(2a)\frac{1}{2} = a(2 \cdot 2^{-1}) = a$ (K5, K6, K8, K7), e igual con b; y $(a+b)\frac{1}{2} = (a+b)/2$ (C1-002.D1).
6. Luego $a < (a+b)/2 < b$. ■

Teorema C1-003.T9 (complementos)

(a) Las versiones con ≤ de C1-003.T2-T6:

- $a \le b,\ b \le c \Rightarrow a \le c$;
- $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$;
- $a \le b,\ c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$ y $a \le b,\ c \le 0 \Rightarrow ac \ge bc$;
- $a^2 \ge 0$ para todo a;
- $a \le b,\ c \le d \Rightarrow a + c \le b + d$ y $0 \le a \le b,\ 0 \le c \le d \Rightarrow ac \le bd$.

(b) $a < b \Rightarrow -b < -a$.

(c) Para $a, b \ge 0$: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

(d) Si $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración.

(a) En cada caso se separa la igualdad.

1. Transitividad: si $a = b$ o $b = c$, la conclusión es una hipótesis; si no, $a < b < c$ y $a < c$ (C1-003.T2). Del mismo modo, $a < b \leq c$ o $a \leq b < c$ implican $a < c$.
2. Suma: si $a = b$, $a + c = b + c$; si no, C1-003.T3.
3. Producto: si $a = b$, $ac = bc$; si $c = 0$, $ac = 0 = bc$ (C1-002.T3, K6); si no, C1-003.T4.
4. Cuadrado: si $a = 0$, $a^2 = 0 \cdot 0 = 0$ (C1-002.T3); si no, C1-003.T5.
5. Suma de dos desigualdades: $a + c \leq b + c \leq b + d$ (versión $\leq$ de C1-003.T3 dos veces, con K2) y la transitividad $\leq$.
6. Producto de dos desigualdades: $b \geq 0$ por transitividad; $ac \leq bc$ (pues $c \geq 0$) y $bc \leq bd$ (pues $b \geq 0$, con K6), y la transitividad $\leq$.

(b)

1. Sumando $c = (-a) + (-b)$: $a + (-a) + (-b) < b + (-a) + (-b)$ (C1-003.T3).
2. El lado izquierdo es $-b$ y el derecho es $-a$ (K1, K2, K4, K3).

(c) Sean $a, b \geq 0$.

1. ($\Rightarrow$) Si $a < b$, entonces $b > 0$ (por (a)).
2. Si $a = 0$, $a^2 = 0 < b^2$ (C1-002.T3, C1-003.T5).
3. Si $a > 0$, aplicar C1-003.T6 con $0 < a < b$ dos veces da $a^2 < b^2$.
4. ($\Leftarrow$) Si $a^2 < b^2$ y no fuera $a < b$, sería $b \leq a$ (C1-003.T1).
5. Por (a) con $0 \leq b \leq a$ dos veces, $b^2 \leq a^2$; esto contradice $a^2 < b^2$ (C1-003.T1).

(d)

1. Supongamos que $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y que no se cumple $a \leq b$; entonces $b < a$ (C1-003.T1).
2. $b < (a + b)/2 < a$ (C1-003.T8).

3. Sea $\varepsilon := (a+b)/2 - b$; sumando $-b$ en $b < (a+b)/2$ se obtiene $\varepsilon > 0$ (C1-003.T3).
4. $b + \varepsilon = (a+b)/2 < a$ (K1, K2, K4, K3, paso 2).
5. Esto contradice $a \leq b + \varepsilon$ (C1-003.T1). Luego $a \leq b$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ $c > 0$ en C1-003.T4

Con $c < 0$ la desigualdad se voltea (segunda parte del teorema): $-2 < 6$ pero $(-2)(-1) = 2 > -6 = 6(-1)$. Con $c = 0$ ambos productos son 0.

⚠ $0 < a$ y $0 < c$ en la segunda parte de C1-003.T6

Sin ellas falla: $-3 < -1$ y $-3 < -1$, pero $(-3)(-3) = 9 > 1 = (-1)(-1)$.

⚠ $a, b \geq 0$ en C1-003.T9(c)

Sin ella falla: $-3 < 1$ y $(-3)^2 = 9 > 1$.

⚠ $a > 0$ en C1-003.T7

Con $0 > a$ también $1/a$ es negativa: $a = -2$, $1/a = -1/2 < 0$.

⚠ «para todo $\varepsilon > 0$» en C1-003.T9(d)

Para un solo ε falla: $a = 1.5$, $b = 1$, $\varepsilon = 1$ cumple $a \leq b + \varepsilon$ y $a > b$.

Ejercicios

1. Demuestra que si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.
2. Demuestra que si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
3. Demuestra que si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $a + c < b + d$.
4. Demuestra que si $a \geq 0$ y $a \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.
5. Encuentra $a < b$ tales que $1/a < 1/b$. ¿Qué hipótesis de C1-003.T7 no cumplen?

Respuestas

1. $-a, -b \in P$ (observación (1)); por O3 y C1-002.T4, $ab = (-a)(-b) \in P$.
2. Por C1-003.T4 con $c = a > 0$ en $a < 1$: $a \cdot a < 1 \cdot a = a$.
3. $a + c < b + c$ (C1-003.T3) y $b + c \leq b + d$ (C1-003.T9(a)); luego $a + c < b + d$ (C1-003.T9(a), forma mixta).
4. Por C1-003.T9(d) con $b = 0$ (y K3), $a \leq 0$; con $a \geq 0$ y C1-003.T1, $a = 0$.
5. $a = -1 < b = 1$: $1/a = -1 < 1 = 1/b$. No se cumple $0 < a$.

C1-004 · Valor absoluto

Motivación

Imagina una carretera recta con kilómetros marcados. Sales del km 30, te pasas la salida y llegas al km 80, das vuelta en U y terminas en el km 50.

- En el primer tramo te desplazaste $a = 80 - 30 = 50$ km hacia adelante.
- En el segundo, $b = 50 - 80 = -30$ km (el signo dice que fue hacia atrás).
- El odómetro, que no distingue sentidos, suma $50 + 30 = 80$ km.
- Pero entre el punto de salida y el de llegada hay solo 20 km.

¿Puede existir un viaje de dos tramos en el que el odómetro marque *menos* que la distancia entre salida y llegada?

La herramienta para medir «cuánto sin importar el sentido» es el valor absoluto, y la respuesta a la pregunta es la desigualdad del triángulo: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Será la desigualdad más usada del curso: cada vez que digamos que un número está «a menos de ε» de otro, la usaremos.

> **Dónde falla la analogía**
> Un viaje real tiene muchos tramos y curvas; aquí la carretera es una recta y el viaje tiene dos tramos rectos. (Para n tramos se generaliza por inducción, C1-005.)

Definiciones

Definición C1-004.D1

$|a| := a$ si $a \geq 0$; $|a| := -a$ si $a < 0$.

La distancia entre x y y en la recta es $|x - y|$.

Definición C1-004.D2

Para $a < b$:

- $(a, b) := \{x : a < x < b\}$, $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$;
- $[a, b) := \{x : a \leq x < b\}$, $(a, b] := \{x : a < x \leq b\}$;
- $(a, \infty) := \{x : x > a\}$, $[a, \infty) := \{x : x \geq a\}$;
- $(-\infty, b) := \{x : x < b\}$, $(-\infty, b] := \{x : x \leq b\}$, y $\mathbb{R}$.

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un **intervalo** si $x, y \in I$ y $x < z < y$ implican $z \in I$. Un **punto interior** de I es un $a \in I$ tal que $(a - r, a + r) \subset I$ para algún $r > 0$.

Ejemplo
$(0, 1)$ es un intervalo: si $0 < x < z < y < 1$, por C1-003.T2, $0 < z < 1$.
Y todo $a \in (0, 1)$ es interior: con r el menor de a y $1 - a$ (ambos positivos), $(a - r, a + r) \subset (0, 1)$.

Resultados

Teorema C1-004.T1

$|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|-a| = |a|$; $-|a| \leq a \leq |a|$.

Demostración. Hay tres casos (C1-003.T1).

1. Si $a > 0$: $|a| = a > 0$.
2. En ese caso $-a < -0 = 0$ (C1-003.T9(b), C1-002.T6), así que $|-a| = -(-a) = a = |a|$ (C1-004.D1, C1-002.T4).
3. Y $a \leq |a|$ (igualdad), mientras que $-|a| = -a < 0 < a$ (C1-003.T2).

4. Si $a = 0$: $|0| = 0$, y $|-0| = |0|$ porque $-0 = 0$ (C1-002.T6); además $-|0| = 0 \leq 0 \leq 0$.
5. Si $a < 0$: $-a > -0 = 0$ (C1-003.T9(b), C1-002.T6), así que $|a| = -a > 0$, y $|-a| = -a = |a|$.
6. En ese caso $a < 0 < -a = |a|$ y $-|a| = -(-a) = a$ (C1-002.T4).
7. En los tres casos $|a| \geq 0$ y $-|a| \leq a \leq |a|$.
8. Como $|a| > 0$ cuando $a \neq 0$, se tiene $|a| = 0$ solo si $a = 0$ (C1-003.T1). ■

Teorema C1-004.T2

$|ab| = |a||b|$.

Demostración.

1. Si $a = 0$ o $b = 0$, ambos lados valen 0 (C1-002.T3, C1-004.T1).
2. Si $a, b > 0$: $ab > 0$ (O3) y $|ab| = ab = |a||b|$.
3. Si $a > 0 > b$: $ab < 0 \cdot a = 0$ (C1-003.T4), así que $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$ (C1-002.T4, K6).
4. El caso $a < 0 < b$ es igual intercambiando los papeles (K6).
5. Si $a, b < 0$: $ab = (-a)(-b) > 0$ (C1-002.T4, O3), así que $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$. ■

Teorema C1-004.T3

Para todo r: $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$, y $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

> **Idea**
> x está entre $-|x|$ y $|x|$; si $|x|$ queda abajo de r, también x y $-x$.

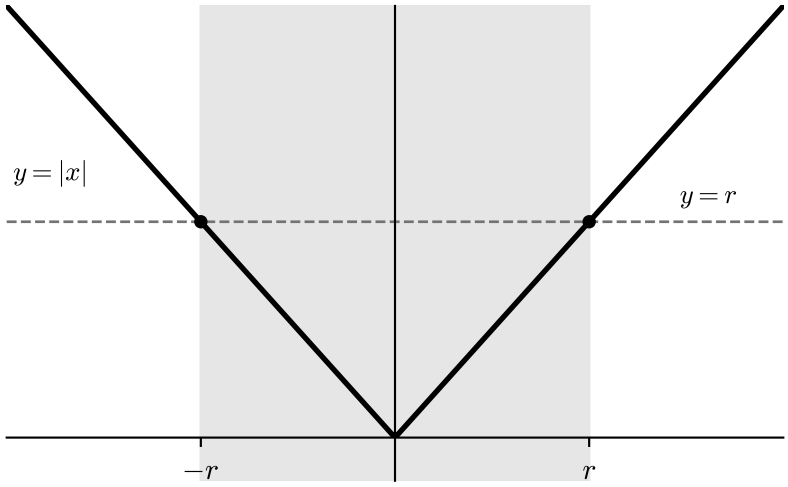


Figura 3: La franja $|x| < r$: los x cuya gráfica $y = |x|$ queda bajo la altura r son exactamente los de $(-r, r)$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Supongamos $|x| < r$. Como $x \leq |x|$ (C1-004.T1), se tiene $x < r$ (C1-003.T9(a)).
2. Además $-r < -|x|$ (C1-003.T9(b)) y $-|x| \leq x$ (C1-004.T1); luego $-r < x$.
3. ($\Leftarrow$) Supongamos $-r < x < r$. Si $x \geq 0$, $|x| = x < r$.
4. Si $x < 0$, $|x| = -x$; de $-r < x$ sale $-x < -(-r) = r$ (C1-003.T9(b), C1-002.T4).
5. En ambos casos $|x| < r$.
6. La versión con $\leq$ es la misma demostración con las versiones $\leq$ de C1-003.T9(a) y (b). ■

Observa que si $r \leq 0$, los dos lados de cada equivalencia son falsos (salvo $x = 0 = r$ en la versión $\leq$), y la demostración no necesita separar ese caso.

Teorema C1-004.T4 (desigualdad del triángulo)
Para todos a, b, $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$.

> **Idea**
> Encerramos a y b entre su valor absoluto y su negativo, sumamos los dos encierros y leemos el resultado con C1-004.T3.

Demostración.

1. $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ (C1-004.T1).
2. Sumando las desigualdades (C1-003.T9(a)):

$$(-|a|) + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

3. El lado izquierdo es $-(|a| + |b|)$ (C1-002.T6).
4. Con $r = |a| + |b|$ se tiene $-r \leq a + b \leq r$, y por lo tanto $|a + b| \leq |a| + |b|$ (C1-004.T3). ■

Teorema C1-004.T5

$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

> **Idea**
> Se escribe $a = (a - b) + b$ y se aplica el triángulo en los dos sentidos.

Demostración.

1. $a = (a - b) + b$ (K1, K2, K4, K3).
2. $|a| \leq |a - b| + |b|$ (C1-004.T4); sumando $-|b|$, $|a| - |b| \leq |a - b|$ (C1-003.T9(a)).
3. Intercambiando a y b: $|b| - |a| \leq |b - a|$.
4. $|b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$ (observación de C1-003, C1-004.T1).
5. Del paso 3, $-|a - b| \leq -(|b| - |a|) = |a| - |b|$ (C1-003.T9(b), observación (2) de C1-003).
6. Así $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, y por lo tanto $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ (C1-004.T3). ■

Teorema C1-004.T6

$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$; si $b \neq 0$, $|a/b| = |a|/|b|$; $|a|^2 = a^2$; $|a| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 \leq 1$.

Demostración.

(i)

1. $(a - b) + (b - c) = a - c$ (K1-K4), y C1-004.T4 da la desigualdad.

(ii) Sea $b \neq 0$.

1. $|b| \neq 0$ (C1-004.T1).
2. $1 > 0$ (C1-003.T5), así que $|1| = 1$.
3. $|b|\,|b^{-1}| = |bb^{-1}| = |1| = 1$ (C1-004.T2, K8, paso 2); luego $|b^{-1}| = |b|^{-1}$ (C1-002.T2).
4. Por lo tanto $|a/b| = |ab^{-1}| = |a|\,|b|^{-1} = |a|/|b|$ (C1-004.T2).

(iii)

1. $|a|^2 = |a||a| = |aa| = |a^2|$ (C1-004.T2).
2. Como $a^2 \geq 0$ (C1-003.T9(a)), $|a^2| = a^2$.

(iv)

1. Como $|a| \geq 0$ y $1 \geq 0$: $|a| < 1 \Leftrightarrow |a|^2 < 1$ (C1-003.T9(c)).
2. $|a| = 1 \Rightarrow |a|^2 = 1$ es directa ($1 \cdot 1 = 1$).
3. Recíprocamente, si $|a|^2 = 1$ y $|a| \neq 1$, sería $|a| < 1$ o $|a| > 1$ (C1-003.T1), y entonces $|a|^2 < 1$ o $|a|^2 > 1$ (C1-003.T9(c)), contra C1-003.T1.
4. Juntando, $|a| \leq 1 \Leftrightarrow |a|^2 \leq 1 \Leftrightarrow a^2 \leq 1$ (paso (iii)). ■

Por qué cada hipótesis

La desigualdad del triángulo no tiene hipótesis: vale para todos los reales. Lo que sí importa es no «reforzarla».

⚠ **No es una igualdad**
Con $a = 1, b = -1$: $\|a + b\| = 0 < 2 = \|a\| + \|b\|$. La igualdad vale exactamente cuando $ab \geq 0$ (ejercicio 3): en el viaje, cuando no hay vuelta en U.

⚠ **No se puede restar del mismo modo**
«$\|a - b\| \leq \|a\| - \|b\|$» es falsa: $a = 1, b = -1$ da $2 \leq 0$. Lo correcto es C1-004.T5.

⚠ $b \neq 0$ **en C1-004.T6(ii)**

Sin ella a/b no está definido (C1-002.D1).

Ejercicios

1. Demuestra que $|a-b| < \varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$.
2. Demuestra que $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$.
3. Demuestra que $|a+b| = |a|+|b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.
4. Resuelve $|x-3| < 2$ y escribe el conjunto solución como intervalo.
5. Tú estás a 50 km del km 0 y tu amiga a 30 km del km 0. ¿Cuál es la menor y la mayor distancia posible entre ustedes? Justifica con C1-004.T4 y C1-004.T5.

Respuestas

1. Por C1-004.T3, $|a-b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a-b < \varepsilon$; sumando b (C1-003.T3), $\Leftrightarrow b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$.
2. $|a+b+c| \leq |a+b|+|c| \leq |a|+|b|+|c|$ (C1-004.T4 dos veces y C1-003.T9(a)).
3. Si $ab \geq 0$, a y b tienen el mismo signo (o uno es 0): si ambos ≥ 0, $|a+b| = a+b = |a|+|b|$; si ambos ≤ 0, $|a+b| = -(a+b) = |a|+|b|$. Si $ab < 0$, digamos $a > 0 > b$: $a+b < a = |a|$ y $-(a+b) < -b = |b|$; como $|a+b|$ es $a+b$ o $-(a+b)$, y $|a|, |b| > 0$, en ambos casos $|a+b| < |a|+|b|$ (C1-003.T2, C1-003.T3).
4. $-2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$: el intervalo $(1, 5)$.
5. Con $|a| = 50$, $|b| = 30$: $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big| = 20$ (C1-004.T5) y $|a-b| \leq |a|+|-b| = 80$ (C1-004.T4, C1-004.T1). Se alcanzan con $a = 50, b = 30$ y con $a = 50, b = -30$.

C1-005 · Naturales e inducción

Motivación

Una fila de fichas de dominó. Sabes dos cosas: empujas la primera, y cada ficha que cae tumba a la siguiente. ¿Basta con eso para asegurar que caen todas, incluso si la fila no tiene fin?

La intuición dice que sí, y el principio de inducción convierte esa intuición en un teorema. Para eso necesitamos primero decir qué son los números 1, 2, 3, … dentro de $\mathbb{R}$: hasta ahora solo tenemos operaciones y orden.

La idea es definir $\mathbb{N}$ como el *menor* conjunto que contiene al 1 y que, con cada número, contiene a su siguiente. Con esa definición, la inducción es casi inmediata, y de ella salen el buen orden, las fórmulas de sumas, la desigualdad de Bernoulli y el principio del palomar.

> **Dónde falla la analogía**
> Una fila real es finita y una ficha puede fallar. $\mathbb{N}$ no tiene fin, y «cada ficha tumba a la siguiente» no es una observación: es una implicación $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ demostrada para *todo* n.

Definiciones

Definición C1-005.D1

$A \subset \mathbb{R}$ es *inductivo* si $1 \in A$ y $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$. $\mathbb{N}$:= intersección de todos los inductivos. $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$; $\mathbb{Q} := \{p/q : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$.

La familia de conjuntos inductivos no es vacía: $\mathbb{R}$ es inductivo. Además, $\mathbb{N}$ **es inductivo**:

1. 1 pertenece a cada conjunto inductivo, luego a su intersección.
2. Si $x \in \mathbb{N}$, entonces x está en cada inductivo A, así que $x+1 \in A$ para cada uno, es decir, $x+1 \in \mathbb{N}$.

Como $\mathbb{N}$ no contiene al 0 (el conjunto $\{x : x \geq 1\}$ es inductivo por C1-003.T3 y C1-003.T5, y no contiene al 0), se tiene $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ sin el 0, como pide `NOTACION.md`.

Teorema C1-005.T11 ⚠ (recursión)

Sean X un conjunto cualquiera (de números o no: por ejemplo, de pares o ternas, que guardan un «estado»), $c \in X$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, una regla g_n que a cada $x \in X$ le asigna un único $g_n(x) \in X$. Existe una única asignación $n \mapsto a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) con $a_n \in X$, $a_1 = c$ y $a_{n+1} = g_n(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo mismo con índices desde 0.

En los cursos de cálculo este principio se usa sin enunciarlo; aquí lo declaramos. Su demostración, por inducción (C1-005.T1, C1-005.T2), está en el apéndice de este capítulo.

Es lo que permite definir algo «paso a paso». Por ejemplo:

- a^n es la asignación con $a^1 = a$ y la regla $g_n(x) = x \cdot a$;
- $\sum_{k=1}^{n} a_k$ usa la regla $g_n(x) = x + a_{n+1}$, que depende de n.

En este curso casi siempre $X \subset \mathbb{R}$, pero el enunciado no lo pide: X puede ser un conjunto de pares o de ternas. Así, una regla que «recuerda» varios datos a la vez (un contador y una suma, por ejemplo) también es una recursión; Cálculo II lo aprovecha en el teorema de Riemann sobre reordenamientos (C2-027.T2).

Definición C1-005.D2

Definiciones recursivas (C1-005.T11):

- a^n ($a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n a$);
- $n!$ ($0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$);
- $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ($\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$, $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$) y $\sum_{k=0}^{n} a_k$ (análogo desde $k = 0$).

$a^{-n} := 1/a^n$ para $a \neq 0$; $a^0 := 1$, y en expresiones polinomiales se conviene $x^0 := 1$ también para $x = 0$. Sea $3 := 2 + 1$, …, $9 := 8 + 1$, $10 := 9 + 1$ ($2 := 1 + 1$ está en C1-002.D1).

Las reglas usuales de las sumas finitas (sumar término a término, sacar un factor común, separar un término, recorrer el índice, comparar sumas) son C1-005.T12, más abajo.

Resultados

Teorema C1-005.T1 (inducción)

Si $A \subset \mathbb{N}$ es inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$.

Demostración.

1. $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos y A es uno de ellos; luego $\mathbb{N} \subset A$ (C1-005.D1).
2. Como $A \subset \mathbb{N}$, se tiene $A = \mathbb{N}$. ■

En la práctica: para probar que una propiedad $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$, se toma $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ y se verifica

- el **caso base** $1 \in A$, y
- el **paso** $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

Teorema C1-005.T2

Para todo $n \in \mathbb{N}$: (a) $n \geq 1$; (b) si $n > 1$, entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$; (c) no hay naturales entre n y $n + 1$; (d) $\mathbb{N}$ es cerrado bajo $+$ y $\cdot$.

Demostración.

(a)

1. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Se tiene $1 \in A$.
2. Si $n \in A$, entonces $n = n + 0 < n + 1$ (C1-003.T5, C1-003.T3), y $n + 1 > 1$ (C1-003.T9(a)); así $n + 1 \in A$.
3. Por lo tanto $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).

(b)

1. Sea $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N}\}$. Se tiene $1 \in A$.
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ es inductivo) y $(n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}$, así que $n + 1 \in A$.

3. Por lo tanto $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).
4. Si $n > 1$, entonces $n \neq 1$ (C1-003.T1), luego $n - 1 \in \mathbb{N}$.

(c)

1. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \text{no existe } m \in \mathbb{N} \text{ con } n < m < n + 1\}$.
2. Caso base: si $m \in \mathbb{N}$ y $1 < m < 2$, entonces $m - 1 \in \mathbb{N}$ (por (b)) y $m - 1 < 1$ (C1-003.T3), contra (a); así $1 \in A$.
3. Paso: sea $n \in A$ y supongamos $m \in \mathbb{N}$ con $n + 1 < m < n + 2$.
4. Como $n + 1 \geq 2 > 1$ (por (a)), se tiene $m > 1$ (C1-003.T2) y $m - 1 \in \mathbb{N}$ (por (b)).
5. Entonces $n < m - 1 < n + 1$ (C1-003.T3), contra $n \in A$. Luego $n + 1 \in A$.
6. Por lo tanto $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).

Equivalentemente, por C1-003.T1: si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, entonces $m \geq n + 1$.

(d) Fijemos $m \in \mathbb{N}$.

1. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$. $m + 1 \in \mathbb{N}$ porque $\mathbb{N}$ es inductivo.
2. Si $m + n \in \mathbb{N}$, entonces $m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}$ (K1). Luego $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).
3. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}\}$. $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$ (K7).
4. Si $mn \in \mathbb{N}$, entonces $m(n + 1) = mn + m \in \mathbb{N}$ (K9, K7, paso 2).
5. Por lo tanto $B = \mathbb{N}$ (C1-005.T1). ■

Teorema C1-005.T3 (buen orden)
Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

> **Idea**
> Si S no tuviera mínimo, los n «por debajo de los cuales no hay nadie de S» formarían un conjunto inductivo.

Demostración.

1. Sea $S \subset \mathbb{N}$ sin elemento mínimo; probaremos que $S = \emptyset$. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} : k \notin S \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ con } k \leq n\}.$$

2. Caso base: si $1 \in S$, como todo elemento de S es ≥ 1 (C1-005.T2(a)), 1 sería el mínimo de S; luego $1 \notin S$.
3. El único $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq 1$ es 1 (C1-005.T2(a), C1-003.T1); así $1 \in A$.
4. Paso: sea $n \in A$. Si $n+1 \in S$, todo $s \in S$ cumple $s > n$ (si fuera $s \leq n$, por $n \in A$, $s \notin S$; C1-003.T1).
5. Entonces $s \geq n+1$ (C1-005.T2(c)), y $n+1$ sería el mínimo de S. Así $n+1 \notin S$.
6. Si $k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n+1$, entonces $k \leq n$ o $k = n+1$ (C1-005.T2(c), C1-003.T1), y en ambos casos $k \notin S$. Luego $n+1 \in A$.
7. Por lo tanto $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).
8. Si existiera $s \in S$, tendríamos $s \in A$ y $s \leq s$, de modo que $s \notin S$: contradicción. Luego $S = \emptyset$.
9. Por contrarrecíproco, todo $S \neq \emptyset$ tiene mínimo. ■

Teorema C1-005.T12 (propiedades de Σ)

Para $n \in \mathbb{N}$ y reales a_k, b_k, c:

(a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ y $\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$;

(c) $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j$ (recorrer el índice);

(d) si $a_k \leq b_k$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Lo mismo para sumas desde $k = 0$.

Demostración. Todas por inducción en n (C1-005.T1) con la definición recursiva de C1-005.D2.

(a)

1. Para $n = 1$ ambos lados son $a_1 + b_1$, y $c\,a_1$.

2. Si vale para n, entonces

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k + b_k) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\Big) + (a_{n+1} + b_{n+1})$$
$$= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\Big)$$

   (C1-005.D2, hipótesis, K1, K2).

3. También

$$\sum_{k=1}^{n+1} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k + c\, a_{n+1}$$
$$= c\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\Big)$$

   (hipótesis, K9).

(b)

1. Para $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} c = c = 1 \cdot c$ (K6, K7).
2. Si $\sum_{k=1}^{n} c = nc$, entonces $\sum_{k=1}^{n+1} c = nc + 1 \cdot c = (n+1)c$ (K6, K7, K9).

(c)

1. Primera igualdad, $n = 1$: $\sum_{k=0}^{1} a_k = a_0 + a_1$ por la definición desde $k = 0$.
2. Si vale para n: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \big(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\big) + a_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ (K1).
3. Segunda igualdad, $n = 1$: ambos lados son a_1.
4. Si vale para n:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} + a_{n+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{n+1} a_j.$$

(d)

1. Para $n = 1$ es la hipótesis.
2. Si $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$ y $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, sumando (versión ≤ de C1-003.T6, en C1-003.T9) se obtiene la desigualdad para $n + 1$.
3. Para sumas desde $k = 0$ se separa el término $k = 0$ con (c) y se aplica lo anterior. ■

Teorema C1-005.T4

$1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

Demostración.

1. Sea A el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ para los que vale la fórmula. Para $n = 1$: $1 = 1 \cdot 2/2$.
2. Si $n \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + \frac{2}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

   (C1-005.D2, C1-005.T12, reglas de campo de C1-002), así que $n + 1 \in A$.
3. Por lo tanto $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1). ■

Teorema C1-005.T5 (Bernoulli)

Si $x \geq -1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

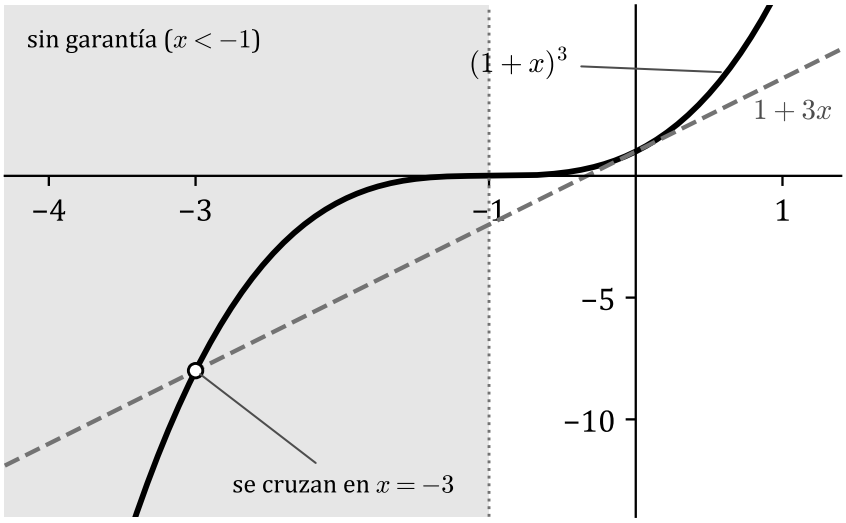


Figura 4: Bernoulli con $n = 3$: la curva $(1 + x)^3$ queda sobre la recta $1 + 3x$ en todo $x \geq -1$; a la izquierda de -1 el teorema ya no garantiza nada, y aquí la curva cae debajo de la recta para $x < -3$.

Demostración.

1. Para $n = 1$ hay igualdad.
2. Supongamos $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Como $x \geq -1$, se tiene $1 + x \geq 0$ (C1-003.T9(a)).
3. Multiplicando por $1 + x$ (C1-003.T9(a), versión $\leq$ de C1-003.T4):

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2.\end{aligned}$$

4. Como $n \geq 1 > 0$ (C1-005.T2(a), C1-003.T5) y $x^2 \geq 0$ (C1-003.T9(a)), se tiene $nx^2 \geq 0$.
5. Luego $1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$ (C1-003.T9(a)).
6. Por C1-005.T1 vale para todo n. ■

Teorema C1-005.T6 (cerradura)
$\mathbb{Z}$ es cerrado bajo $+$, $-$ y $\cdot$; $\mathbb{Q}$ es cerrado bajo $+$, $-$, $\cdot$ y $\div$ (entre elementos no nulos).

Demostración.

Lema. Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m - n \in \mathbb{Z}$.

1. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : m - n \in \mathbb{Z} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}\}$.
2. $n = 1$: si $m = 1, m - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$; si $m \neq 1, m > 1$ (C1-005.T2(a)) y $m - 1 \in \mathbb{N}$ (C1-005.T2(b)).
3. Sea $n \in A$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $m = 1, 1 - (n + 1) = -n \in \mathbb{Z}$.
4. Si $m > 1, m - (n + 1) = (m - 1) - n$ con $m - 1 \in \mathbb{N}$, que está en $\mathbb{Z}$ porque $n \in A$.
5. Así $n + 1 \in A$, y $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).

Negativos. Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $-x \in \mathbb{Z}$.

1. Si $x = n \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{Z}$ por definición.
2. $-0 = 0$ (C1-002.T6).
3. Si $x = -n$, $-x = n$ (C1-002.T4).

Suma. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. Si alguno es 0, la suma es el otro (K3).
2. Si $x = m, y = n$ con $m, n \in \mathbb{N}$: $x + y \in \mathbb{N}$ (C1-005.T2(d)).
3. Si $x = -m, y = -n$: $x + y = -(m + n) \in \mathbb{Z}$ (C1-002.T6).
4. Si $x = m, y = -n$: $x + y = m - n \in \mathbb{Z}$ (lema); el caso $x = -m, y = n$ es igual (K2).

Resta.

1. $x - y = x + (-y)$, con $-y \in \mathbb{Z}$.

Producto.

1. Si alguno es 0, el producto es 0 (C1-002.T3).
2. Si no, $|x|, |y| \in \mathbb{N}$ y $|x||y| \in \mathbb{N}$ (C1-005.T2(d)).
3. Por lo tanto $xy = \pm|x||y| \in \mathbb{Z}$ (C1-002.T4).

Racionales. Sean $x = p/q, y = r/s$ con $p, r \in \mathbb{Z}$ y $q, s \in \mathbb{N}$.

1. $x + y = (ps + rq)/(qs)$ y $xy = (pr)/(qs)$ (C1-002.T6), con $ps + rq,\ pr \in \mathbb{Z}$ y $qs \in \mathbb{N}$.
2. $-y = (-r)/s$ (C1-002.T4), así que $x - y \in \mathbb{Q}$.
3. Si $y \neq 0$, entonces $r \neq 0$ (si $r = 0$, $y = 0 \cdot s^{-1} = 0$).

4. $(r/s)(s/r) = (rs)/(sr) = 1$, luego $y^{-1} = s/r$ (C1-002.T2).
5. Si $r \in \mathbb{N}$, $s/r \in \mathbb{Q}$.
6. Si $r = -r'$ con $r' \in \mathbb{N}$: como $(-r')(-(r'^{-1})) = r'r'^{-1} = 1$ (C1-002.T4), se tiene $(-r')^{-1} = -(r'^{-1})$ (C1-002.T2), y $s/r = s \cdot (-(r'^{-1})) = (-s)/r' \in \mathbb{Q}$.
7. Así $x \div y = x \cdot y^{-1} \in \mathbb{Q}$. (Además $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pues $p = p/1$.) ■

De paso: **un entero positivo es natural** (si $x \in \mathbb{Z}$ y $x > 0$, no es 0 ni $-n$ con $n > 0$), y por C1-005.T2(a), $x \geq 1$; en particular no hay enteros entre 0 y 1.

Teorema C1-005.T7 (par o impar)

Todo entero es de la forma $2k$ o $2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$, y no de ambas.

Demostración.

1. Existencia en $\mathbb{N}$: sea A el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ de alguna de las dos formas. $1 = 2 \cdot 0 + 1 \in A$.
2. Si $n = 2k$, $n + 1 = 2k + 1$; si $n = 2k + 1$, $n + 1 = 2(k + 1)$ con $k + 1 \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6). Luego $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).
3. Además $0 = 2 \cdot 0$; si $n = 2k$, $-n = 2(-k)$; si $n = 2k + 1$, $-n = 2(-k - 1) + 1$, con $-k, -k - 1 \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6).
4. Unicidad: si $2k = 2j + 1$ con $k, j \in \mathbb{Z}$, entonces $2m = 1$ con $m = k - j \in \mathbb{Z}$.
5. Si $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $2m \geq 2 > 1$ (C1-005.T2(a), C1-003.T9(a), C1-003.T3).
6. Si $m = 0$, $2m = 0 \neq 1$ (K7).
7. Si $m = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, $m < 0$ y $2m < 0 < 1$ (C1-003.T4).
8. En todos los casos $2m \neq 1$. ■

Teorema C1-005.T8 (factorización y suma geométrica)

$x^n - a^n = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$; si $r \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} r^k = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$.

Demostración.

Factorización, por inducción en n.

1. Para $n = 1$: $\sum_{k=0}^{0} x^k a^{-k} = x^0 a^0 = 1$, y $(x - a) \cdot 1 = x^1 - a^1$.

2. Si vale para n, entonces

$$\begin{aligned} x^{n+1} - a^{n+1} &= x(x^n - a^n) + (x-a)a^n \\ &= (x-a)\Big[\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}a^{n-1-k} + x^0 a^n\Big] \\ &= (x-a)\sum_{j=0}^{n} x^j a^{n-j} \end{aligned}$$

   (C1-005.D2, K9, K1-K6; en el último paso se recorrió el índice, $j = k+1$, y se agregó el término $j = 0$, C1-005.T12).
3. Por C1-005.T1 vale para todo n.

Suma geométrica.

1. Para $n = 0$: $r^0 = 1 = (1-r)/(1-r)$.
2. Para $n = 1$: $(1-r)(1+r) = 1 - r^2$ (K9), así que $1 + r = (1-r^2)/(1-r)$.
3. Si vale para n, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1-r} \\ &= \frac{1-r^{n+2}}{1-r} \end{aligned}$$

   (C1-002.T6).
4. Por C1-005.T1 vale para todo $n \in \mathbb{N}$, y ya vimos $n = 0$. ■

Teorema C1-005.T9 (leyes de exponentes enteros)
$a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$ (con exponentes negativos si las bases son no nulas); $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$; $a > 0 \Rightarrow a^n > 0$; $0 \le a < b \Rightarrow a^n < b^n$.

Demostración.

Exponentes naturales, por inducción en n con $m \in \mathbb{N}$ fijo (C1-005.T1, C1-005.D2).

1. $a^m a^1 = a^{m+1}$ y $a^m a^{n+1} = (a^m a^n)a = a^{m+n}a = a^{m+n+1}$ (K5).

2. $(a^m)^1 = a^m$ y $(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn}a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$ (paso 1, K9).
3. $(ab)^1 = ab$ y $(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab) = a^n b^n ab = (a^n a)(b^n b) = a^{n+1}b^{n+1}$ (K5, K6).
4. Con exponente 0 las tres leyes se leen $1 \cdot a^n = a^n$, etc.

Exponentes negativos ($a, b \neq 0$).

1. $a^n \neq 0$ (inducción y C1-002.T5); además $1^n = 1$.
2. $a^n(a^{-1})^n = (aa^{-1})^n = 1$ (tercera ley), así que $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ (C1-002.T2).
3. Con esto cada ley con enteros se reduce a la de naturales. Por ejemplo, sean $p \geq 0$ y $q \in \mathbb{N}$.
4. Si $p \geq q$: $p-q \geq 0$ es entero (C1-005.T6) y $a^p = a^{p-q}a^q$, así que $a^p a^{-q} = a^{p-q}a^q(a^q)^{-1} = a^{p-q}$.
5. Si $p < q$: $(a^{-1})^q = (a^{-1})^{q-p}(a^{-1})^p$ y $a^p(a^{-1})^p = 1$, así que $a^p a^{-q} = (a^{-1})^{q-p} = a^{p-q}$.
6. Si $m = -p, n = -q$ con $p, q \in \mathbb{N}$: $a^{-p}a^{-q} = (a^{-1})^{p+q} = a^{-(p+q)}$.
7. Del mismo modo, $(ab)^{-n} = ((ab)^n)^{-1} = (a^n b^n)^{-1} = a^{-n}b^{-n}$ (C1-002.T6).
8. Y $(a^{-m})^n = ((a^{-1})^m)^n = (a^{-1})^{mn} = a^{-mn}$, $(a^m)^{-n} = ((a^m)^n)^{-1} = a^{-mn}$, $(a^{-m})^{-n} = ((a^{-1})^{mn})^{-1} = a^{mn}$ (C1-002.T6).

Valor absoluto y orden.

1. $|a^1| = |a|$ y $|a^{n+1}| = |a^n a| = |a^n||a| = |a|^n|a| = |a|^{n+1}$ (C1-004.T2).
2. Si $a > 0$: $a^1 > 0$ y $a^{n+1} = a^n a > 0$ (O3).
3. Si $0 \leq a < b$, entonces $b > 0$; para $n = 1$ es la hipótesis.
4. Supongamos $a^n < b^n$. Cuando $a = 0$, $a^{n+1} = a^n \cdot 0 = 0 < b^{n+1}$ (C1-002.T3, paso 2).
5. Cuando $a > 0$: $0 < a^n < b^n$ y $0 < a < b$ dan $a^n a < b^n b$ (C1-003.T6).
6. Por C1-005.T1, todo vale para cada n. ■

Teorema C1-005.T10 (palomar)

Sea $\{1, \dots, n\} := \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$. Si $a_1, \dots, a_{n+1} \in \{1, \dots, n\}$, existen $i < j \leq n+1$ con $a_i = a_j$. (Si se reparten $n+1$ objetos en n cajas, alguna caja recibe al menos dos.)

> **Idea**
> Inducción en el número de cajas: se mira quién cayó en la última caja.

Demostración.

1. Para $n = 1$: el único $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq 1$ es 1 (C1-005.T2(a)), así que $a_1 = a_2 = 1$.
2. Supongamos el resultado para n y sean $a_1, \dots, a_{n+2} \in \{1, \dots, n+1\}$. Cada a_i cumple $a_i \leq n$ o $a_i = n+1$ (C1-005.T2(c)).
3. Si dos índices tienen $a_i = a_j = n+1$, terminamos.
4. Si ningún índice tiene $a_i = n+1$, entonces $a_1, \dots, a_{n+1} \in \{1, \dots, n\}$, y por hipótesis dos coinciden.
5. Si exactamente un índice j tiene $a_j = n+1$ y $j = n+2$: los $a_1, \dots, a_{n+1}$ están en $\{1, \dots, n\}$ y aplicamos la hipótesis.
6. Si exactamente un índice j tiene $a_j = n+1$ y $j \leq n+1$: definimos $b_i = a_i$ para $i \leq n+1$, $i \neq j$, y $b_j = a_{n+2}$ (que es $\leq n$ porque $n+2 \neq j$).
7. Por hipótesis existen $i < i' \leq n+1$ con $b_i = b_{i'}$. Si ninguno es j, $a_i = a_{i'}$.
8. Si uno es j y el otro es i'', entonces $a_{i''} = b_{i''} = b_j = a_{n+2}$, con $i'' < n+2$.
9. En todos los casos hay dos índices con el mismo valor. Por C1-005.T1 vale para todo n. ■

Teorema C1-005.T13 (máximo de una lista finita)

Si $k \in \mathbb{N}$ y $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ con $c_j \leq c_i$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$; se escribe $\max(c_1, \dots, c_k) := c_i$. Análogo con el mínimo, $\min(c_1, \dots, c_k)$.

Demostración. Por inducción en k (C1-005.T1).

1. Para $k = 1$, el único $j \in \{1\}$ es 1 (C1-005.T2(a)) y $c_1 \leq c_1$; tomamos $i = 1$.
2. Supongamos el resultado para listas de longitud k y sea $c_1, \dots, c_{k+1}$ una lista; sea $i \leq k$ con $c_j \leq c_i$ para todo $j \leq k$.
3. Por tricotomía, $c_{k+1} \leq c_i$ o $c_i < c_{k+1}$ (C1-003.T1).
4. En el primer caso, c_i sirve para la lista larga.
5. En el segundo sirve c_{k+1}: para $j \leq k$, $c_j \leq c_i < c_{k+1}$ (C1-003.T9), y $c_{k+1} \leq c_{k+1}$.
6. Como todo $j \leq k+1$ cumple $j \leq k$ o $j = k+1$ (C1-005.T2(c)), queda probado para $k+1$.
7. El mínimo es igual, con las desigualdades al revés. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ El caso base en la inducción

Sin él no se prueba nada: el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n = n + 1\}$ cumple el paso ($n = n + 1 \Rightarrow n + 1 = n + 2$), pero $1 \notin A$ (de $1 = 2$ saldría $0 = 1$ por cancelación, contra K7); de hecho $A = \emptyset$.

⚠ $A \subset \mathbb{N}$ en C1-005.T1

El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ es inductivo y no es $\mathbb{N}$ (contiene a $3/2$, que no es natural por C1-005.T2(c)).

⚠ $x \geq -1$ en Bernoulli

Con $x = -4$ y $n = 3$: $(1 - 4)^3 = -27 < -11 = 1 + 3(-4)$. Falla. (La prueba se rompe justo donde se multiplica por $1 + x$, que aquí es negativo.)

⚠ No vacío en el buen orden

$\emptyset$ no tiene mínimo. Y el buen orden es propio de $\mathbb{N}$: el intervalo $(0, 1)$ no tiene mínimo (si m lo fuera, $m/2 \in (0, 1)$ y $m/2 < m$, por C1-003.T8).

⚠ $n + 1$ objetos en el palomar

Con n objetos en n cajas puede no haber repetición: $a_i = i$.

⚠ $r \neq 1$ en la suma geométrica

Con $r = 1$ el cociente es $0/0$; la suma vale $n + 1$.

Ejercicios

1. Demuestra por inducción que $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$.
2. Demuestra que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Demuestra que $1/2 \notin \mathbb{Z}$.

4. Calcula $\sum_{k=0}^{5} 3^k$ con C1-005.T8 y comprueba sumando.
5. En un grupo de 367 personas, ¿se puede asegurar que dos cumplen años el mismo día? ¿Y con 366?

Respuestas

1. $n = 1$: $1 = 1^2$. Paso: $n^2 + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
2. $n = 1$: $2 > 1$. Paso: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$ (C1-003.T4, C1-005.T2(a)).
3. $0 < 1/2 < 1$ (C1-003.T8 con $a = 0$, $b = 1$); un entero positivo es natural y ≥ 1 (observación tras C1-005.T6).
4. $(1 - 3^6)/(1 - 3) = (1 - 729)/(-2) = 364 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$.
5. Con 367 sí: 366 cajas (días posibles, contando el 29 de febrero) y 367 objetos (C1-005.T10). Con 366 no se puede asegurar: cada persona podría cumplir en un día distinto.

Apéndice · Demostración de C1-005.T11 (recursión)

Sean X, c y las reglas g_n como en el enunciado. La demostración no usa ninguna operación ni el orden de $\mathbb{R}$ dentro de X: solo que los $h(k)$ y los a_n son elementos de X y que se puede decir si dos de ellos son iguales. Por eso vale para un conjunto X cualquiera, no solo para $X \subset \mathbb{R}$. (Toda la inducción se hace sobre los índices $n \in \mathbb{N}$, que sí son números.)

Tramo de longitud n
Para $n \in \mathbb{N}$, un **tramo de longitud** n es una lista $h(1), \ldots, h(n)$ de elementos de X con $h(1) = c$ y $h(k+1) = g_k(h(k))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k < n$.

(Una lista de longitud n asigna un valor a cada $k \in \{1, \ldots, n\}$; en C1-010 se verá que es una función $\{1, \ldots, n\} \to X$.)

Paso 1: para cada n existe exactamente un tramo de longitud n.

1. Sea A el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ para los que esto vale.
2. Para $n = 1$: la lista $h(1) = c$ es un tramo (no hay naturales $k < 1$, por C1-005.T2(a)), y todo tramo de longitud 1 tiene $h(1) = c$; así $1 \in A$.
3. Sea $n \in A$ y sea h_n su único tramo.
4. Existencia: la lista $h_n(1), \ldots, h_n(n), g_n(h_n(n))$ es un tramo de longitud $n + 1$. Todo $k < n + 1$

cumple $k < n$ o $k = n$ (C1-005.T2(c), C1-003.T1); para $k < n$ la condición la cumple h_n, y para $k = n$ es la definición del último término.

5. Unicidad: si h es un tramo de longitud $n+1$, sus primeros n términos forman un tramo de longitud n, que por $n \in A$ es h_n; entonces $h(n+1) = g_n(h(n)) = g_n(h_n(n))$.
6. Luego $n + 1 \in A$, y $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).

Paso 2: la asignación.

1. Sea h_n el único tramo de longitud n y definamos $a_n := h_n(n) \in X$.
2. Por la unicidad del Paso 1, los primeros n términos de h_{n+1} forman h_n; en particular $h_{n+1}(n) = h_n(n) = a_n$.
3. Entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= h_{n+1}(n+1) \\ &= g_n(h_{n+1}(n)) \\ &= g_n(a_n). \end{aligned}$$

4. Además $a_1 = h_1(1) = c$.

Paso 3: unicidad.

1. Si (b_n) también cumple $b_n \in X$, $b_1 = c$ y $b_{n+1} = g_n(b_n)$, consideremos $\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$.
2. Contiene a 1 y, si contiene a n, contiene a $n + 1$, porque $b_{n+1} = g_n(b_n) = g_n(a_n) = a_{n+1}$.
3. Por C1-005.T1 es $\mathbb{N}$.

Índices desde 0*.*

1. Si se busca $a_0 = c$ y $a_{n+1} = g_n(a_n)$ para todo $n \geq 0$, se aplica lo anterior a $b_n := a_{n-1}$, es decir, a $b_1 = c$ y $b_{n+1} = g_{n-1}(b_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ (con g_0 la regla del primer paso). ■

⚠ Por qué se marca con ⚠

La demostración maneja listas finitas sin haberlas definido como objetos (eso pediría funciones con dominio $\{1, \dots, n\}$, de C1-010, o pares ordenados). Es la única licencia de formalidad del argumento y no esconde ningún axioma nuevo: todo lo demás es inducción.

C1-006 · Supremo e ínfimo

Motivación

En una regla puedes poner el dedo en cualquier punto desde el 0 hasta el 1, pero la marca del 1 está pintada de rojo: no se vale tocarla. ¿Cuál es el punto más a la derecha que puedes tocar?

- Si eliges 0.9, el punto $(0.9 + 1)/2 = 0.95$ está más a la derecha y también se puede tocar.
- Si eliges 0.99, te gana 0.995.

Ninguna elección es la última. Sin embargo, hay algo que sí existe: un «techo» que queda a la derecha de todos los puntos permitidos y que es el más bajo posible, el 1.

Ese techo más bajo es el **supremo**. Los axiomas de campo y de orden no garantizan que exista (los racionales también los cumplen, y en C1-008 veremos un conjunto de racionales sin techo más bajo racional).

Por eso se agrega el último axioma de $\mathbb{R}$, el axioma del supremo S: todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo. En palabras: la recta numérica no tiene huecos.

> **Dónde falla la analogía**
> En la regla las marcas tienen grosor y el dedo también. En $\mathbb{R}$ los puntos no tienen grosor, y por eso «el último punto antes del 1» no existe.

Definiciones

Definición C1-006.D1

Sea $A \subset \mathbb{R}$.

- Un número t es **cota superior** de A si $a \leq t$ para todo $a \in A$; A está **acotado superiormente** si tiene alguna cota superior.
- Un número s es **supremo** de A si es cota superior de A y $s \leq t$ para toda cota superior t.
- Un **máximo** de A es una cota superior que pertenece a A.
- Análogamente se definen **cota inferior** ($t \leq a$ para todo $a \in A$), **acotado inferiormente**, **ínfimo** (cota inferior m con $t \leq m$ para toda cota inferior t) y **mínimo**.
- A es **acotado** si lo es superior e inferiormente.
- Para $c \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ escribimos $c + \lambda A := \{c + \lambda a : a \in A\}$ y $-A := \{-a : a \in A\}$.

Axioma C1-006.Ax1 (S, completitud)

Todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Resultados

Teorema C1-006.T1

El supremo, si existe, es único.

Demostración.

1. Sean s y s' supremos de A.
2. Como s' es cota superior y s es supremo, $s \leq s'$ (C1-006.D1).
3. Como s es cota superior y s' es supremo, $s' \leq s$ (C1-006.D1).
4. Si fuera $s \neq s'$, tendríamos $s < s'$ y $s' < s$ a la vez, lo que prohíbe C1-003.T1. Luego $s = s'$. ■

Por eso se escribe $\sup A$; del mismo modo el ínfimo es único y se escribe $\inf A$. Un máximo, si existe, es el supremo (es cota y está en A, así que queda por debajo de toda cota), y se escribe $\max A$; análogo $\min A$.

Teorema C1-006.T2 (caracterización ε)

Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. $s = \sup A$ si y solo si s es cota superior de A y para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ con $a > s - \varepsilon$.

Idea

Si una banda $(s - \varepsilon, s]$ quedara vacía, su borde inferior sería un techo más bajo que s; y al revés, un techo t más bajo que s deja vacía la banda de ancho $s - t$.

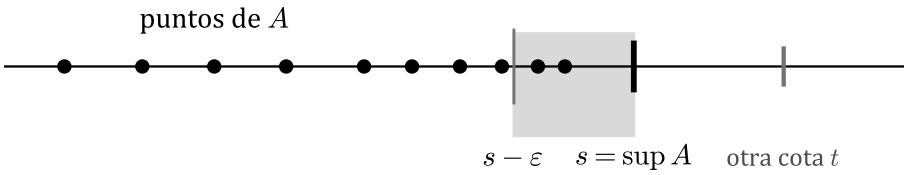


Figura 5: Caracterización ε: s es cota de A y toda banda $(s - \varepsilon, s]$ contiene algún punto de A.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Sea $s = \sup A$. Entonces s es cota superior (C1-006.D1).
2. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $-\varepsilon < 0$ (C1-003.T9(b)) y $s - \varepsilon < s$ (C1-003.T3).
3. Si ningún $a \in A$ cumpliera $a > s - \varepsilon$, todo $a \in A$ cumpliría $a \leq s - \varepsilon$ (C1-003.T1), y $s - \varepsilon$ sería cota superior de A.
4. Como s es la menor cota superior, $s \leq s - \varepsilon$, lo que contradice $s - \varepsilon < s$ (C1-003.T1).
5. Luego existe $a \in A$ con $a > s - \varepsilon$.
6. ($\Leftarrow$) Supongamos que s es cota superior de A y que para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ con $a > s - \varepsilon$.
7. Sea t una cota superior de A, y supongamos $t < s$. Entonces $\varepsilon := s - t > 0$ (C1-003.T3).
8. Existe $a \in A$ con $a > s - \varepsilon = t$, lo que contradice que t es cota superior.
9. Por lo tanto $s \leq t$ (C1-003.T1).
10. Así s es cota superior y es menor o igual que toda cota superior: $s = \sup A$. ■

Ejemplo ($\sup[0,1) = 1$ **y no hay máximo)**

1. 1 es cota superior: si $0 \leq a < 1$, entonces $a \leq 1$.
2. Sea $\varepsilon > 0$; pongamos $c = 1 - \varepsilon$ si $\varepsilon < 1$ y $c = 0$ si $\varepsilon \geq 1$. En ambos casos $0 \leq c < 1$ y $c \geq 1 - \varepsilon$.
3. $a := (c+1)/2$ cumple $c < a < 1$ (C1-003.T8), así que $a \in [0,1)$ y $a > c \geq 1 - \varepsilon$.
4. Por C1-006.T2, $\sup[0,1) = 1$.
5. Como $1 \notin [0,1)$, el supremo no es máximo; y como un máximo sería el supremo, no hay máximo.

Con $\varepsilon = 0.1$ se obtiene $a = 0.95$; con $\varepsilon = 0.01$, $a = 0.995$.

Teorema C1-006.T3

Todo A no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo, e $\inf A = -\sup(-A)$.

Idea

Reflejar en el 0 cambia cotas inferiores por superiores.

Demostración.

1. $-A$ no es vacío porque A no lo es.
2. Si m es cota inferior de A, entonces $-m$ es cota superior de $-A$: para $a \in A$, $m \leq a$, y $-a \leq -m$ (C1-003.T9(b)).
3. Por el axioma S existe $s = \sup(-A)$. Veamos que $-s$ es el ínfimo de A.
4. Para $a \in A$, $-a \in -A$, así que $-a \leq s$, y $-s \leq -(-a) = a$ (C1-003.T9(b), C1-002.T4): $-s$ es cota inferior de A.
5. Si m es cota inferior de A, $-m$ es cota superior de $-A$ (paso 2), de modo que $s \leq -m$, y $m \leq -s$ (C1-003.T9(b), C1-002.T4).
6. Así $-s$ es una cota inferior mayor o igual que todas, es decir, $-s = \inf A$ (C1-006.D1). ■

Teorema C1-006.T4

Si A es no vacío y acotado superiormente, $c \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$: $\sup(c + \lambda A) = c + \lambda \sup A$.

Demostración.

1. Sea $s = \sup A$ (existe por S).
2. Para $a \in A$, $a \le s$; luego $\lambda a \le \lambda s$ y $c + \lambda a \le c + \lambda s$ (C1-003.T9(a)): $c + \lambda s$ es cota superior de $c + \lambda A$.
3. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\varepsilon/\lambda > 0$ (C1-003.T7, O3).
4. Existe $a \in A$ con $a > s - \varepsilon/\lambda$ (C1-006.T2).
5. Entonces

$$\begin{aligned} c + \lambda a &> c + \lambda s - \lambda(\varepsilon/\lambda) \\ &= (c + \lambda s) - \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-003.T4, C1-003.T3).
6. Por C1-006.T2, $\sup(c + \lambda A) = c + \lambda s$. ■

Por ejemplo, $3 + 2\,[0, 1) = [3, 5)$ tiene supremo $3 + 2 \cdot 1 = 5$.

Por qué cada hipótesis

En la caracterización (C1-006.T2), las dos condiciones del lado derecho son necesarias.

⚠ Sin «s es cota superior»

$A = [0, 1)$ y $s = 0.5$: para todo $\varepsilon > 0$, el punto $a = 0.5 \in A$ cumple $a > 0.5 - \varepsilon$; pero $0.7 \in A$ y $0.7 > 0.5$, así que 0.5 no es cota ni supremo.

⚠ Sin la condición de la banda

$A = [0, 1)$ y $s = 2$: s es cota superior, pero con $\varepsilon = 0.5$ ningún $a \in A$ cumple $a > 1.5$; el supremo es $1 \neq 2$.

En el axioma S, las dos hipótesis también.

⚠ No vacío

Todo real t es cota superior de $\emptyset$ (no hay ningún a que la contradiga), y no hay una menor ($t - 1$ también es cota, y $t - 1 < t$). $\emptyset$ no tiene supremo.

⚠ Acotado superiormente

$A = (0, \infty)$: si t fuera cota superior, como $1 \in A$, $t \geq 1 > 0$, así que $t + 1 \in A$ y $t + 1 > t$. No hay cotas, y no hay supremo.

⚠ $\lambda > 0$ en C1-006.T4

Con $\lambda = -1$ y $c = 0$, $\sup(-[0, 1)) = \sup(-1, 0] = 0 \neq -1$.

Ejercicios

1. Demuestra con C1-006.T2 que $\sup(0, 1) = 1$.
2. Demuestra que si $A \subset B$ y B está acotado superiormente, entonces $\sup A \leq \sup B$ (con $A \neq \emptyset$).
3. Sea $A = (0, 1) \cup \{2\}$. Calcula $\sup A$, $\inf A$, y di si existen máximo y mínimo.
4. Demuestra que $\inf(0, 1] = 0$ usando C1-006.T3.
5. Enuncia y demuestra la caracterización ε del ínfimo.

Respuestas

1. 1 es cota. Dado $\varepsilon > 0$, sea $c = \max(1 - \varepsilon, 1/2)$ (el mayor de los dos, por C1-003.T1); $0 < c < 1$ y $a = (c + 1)/2 \in (0, 1)$ cumple $a > c \geq 1 - \varepsilon$ (C1-003.T8).
2. $\sup B$ es cota superior de $B \supset A$, luego de A; como $\sup A$ es la menor cota de A, $\sup A \leq \sup B$.
3. $\sup A = \max A = 2$; $\inf A = 0$ (es cota inferior, y para $\varepsilon > 0$ hay elementos de $(0, 1)$ menores que $0 + \varepsilon$, como en el ejercicio 1 reflejado); no hay mínimo porque $0 \notin A$.
4. $-(0, 1] = [-1, 0)$, cuyo supremo es 0 (como en el ejemplo, con la banda bajo el 0); luego $\inf(0, 1] = -0 = 0$.
5. $m = \inf A$ si y solo si m es cota inferior y para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ con $a < m + \varepsilon$. Se prueba como C1-006.T2 con las desigualdades al revés, o aplicando C1-006.T2 a $-A$ y C1-006.T3.

C1-007 · Propiedad arquimediana y densidad

Motivación

Con la lupa ves dos marcas muy juntas en una regla: $a = 0.1234$ y $b = 0.1235$. ¿Cabe una fracción entre ellas? En este caso cualquiera diría que sí: 0.12345.

Pero la pregunta de verdad es otra: ¿*siempre* cabe una fracción entre dos números distintos, por más juntos que estén, aunque ninguno de los dos sea fracción? Y si cabe, ¿cómo se encuentra?

La respuesta usa dos ideas:

1. Los naturales no se acaban, así que el paso $1/n$ se puede hacer más corto que cualquier hueco (propiedad arquimediana).
2. Si caminas por la recta con pasos más cortos que el hueco, no puedes saltártelo.

Las dos dependen del axioma del supremo.

> **Dónde falla la analogía**
> La regla tiene marcas con grosor y la lupa un límite de aumento. En $\mathbb{R}$ el hueco $b - a$ puede ser tan pequeño como quieras, y siempre hay un n con $1/n$ más pequeño todavía.

Definiciones

No hay definiciones nuevas salvo la notación $\lfloor x \rfloor$ (parte entera), que se introduce en C1-007.T2.

Resultados

Teorema C1-007.T1

$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

> **Idea**
> Si tuviera supremo s, algún natural pasaría de $s-1$, y su siguiente pasaría de s.

Demostración.

1. Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $1 \in \mathbb{N}$, no es vacío.
2. Por el axioma S existe $s = \sup \mathbb{N}$.
3. Existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > s - 1$ (C1-006.T2 con $\varepsilon = 1$).
4. Entonces $n + 1 > s$ (C1-003.T3).
5. Pero $n + 1 \in \mathbb{N}$ (C1-005.T2(d)), lo que contradice que s es cota superior de $\mathbb{N}$ (C1-003.T1). ■

Corolario C1-007.C1

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \varepsilon$; para todo x existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > x$.

Demostración.

1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Por C1-007.T1, x no es cota superior de $\mathbb{N}$: no se cumple $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Así existe $n \in \mathbb{N}$ con $n \not\leq x$, es decir, $n > x$ (C1-003.T1).
3. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $1/\varepsilon > 0$ (C1-003.T7).
4. Por el paso 2 existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1/\varepsilon > 0$.
5. Por lo tanto $1/n < 1/(1/\varepsilon) = \varepsilon$ (C1-003.T7, C1-002.T6). ■

Teorema C1-007.T2 (parte entera)

Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$ con $m \leq x < m + 1$; se escribe $\lfloor x \rfloor$.

> **Idea**
> Se traslada x a la parte positiva y se toma el primer natural que lo rebasa (buen orden).

Demostración.

Existencia.

1. Existe $k \in \mathbb{N}$ con $k > -x$ (C1-007.C1), así que $y := x + k > 0$ (C1-003.T3).
2. Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : n > y\}$, que no es vacío (C1-007.C1).
3. S tiene un mínimo n_0 (C1-005.T3). Entonces $n_0 > y$.
4. Además $n_0 - 1 \leq y$: si $n_0 = 1$, $n_0 - 1 = 0 < y$.
5. Si $n_0 > 1$: $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ (C1-005.T2(b)), y como $n_0 - 1 < n_0$ y n_0 es el mínimo de S, $n_0 - 1 \notin S$, es decir, $n_0 - 1 \leq y$ (C1-003.T1).
6. Sea $m := n_0 - 1 - k$, que es entero (C1-005.T6).
7. Restando k en $n_0 - 1 \leq y < n_0$ queda $m \leq x < m + 1$ (C1-003.T3, C1-003.T9(a)).

Unicidad.

1. Sean $m, m' \in \mathbb{Z}$ con $m \leq x < m + 1$ y $m' \leq x < m' + 1$, y supongamos $m < m'$ (C1-003.T1).
2. Entonces $m' \leq x < m + 1$, así que $0 < m' - m < 1$ (C1-003.T3).
3. Pero $m' - m \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6) y es positivo, luego es natural (C1-005.D1: no es 0 ni el negativo de un natural, que es < 0).
4. Por lo tanto $m' - m \geq 1$ (C1-005.T2(a)): contradicción (C1-003.T1). Luego $m = m'$. ■

Teorema C1-007.T4 (lema de la parte entera)

Si $j \in \mathbb{Z}$ y $j \leq x$, entonces $j \leq \lfloor x \rfloor$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + j \rfloor = \lfloor x \rfloor + j$.

Demostración.

1. Primera parte: si fuera $\lfloor x \rfloor < j$ (C1-003.T1), tendríamos $0 < j - \lfloor x \rfloor$.
2. Restando $\lfloor x \rfloor$ en $j \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$: $j - \lfloor x \rfloor < 1$ (C1-003.T3, C1-003.T9).
3. Pero $j - \lfloor x \rfloor$ es un entero (C1-005.T6) positivo, luego natural (C1-005.D1) y ≥ 1 (C1-005.T2(a)): contradicción.
4. Segunda parte: $m := \lfloor x \rfloor + j \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6).

5. Sumando j en $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$: $m \leq x + j < m + 1$ (C1-003.T3, C1-003.T9).
6. Por la unicidad de C1-007.T2, $m = \lfloor x + j \rfloor$. ■

Teorema C1-007.T3 (densidad de $\mathbb{Q}$)

Si $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ con $a < q < b$.

Idea

Elegimos un paso $1/n$ más corto que el hueco y caminamos de paso en paso: el primer paso que rebasa a no puede saltarse b.

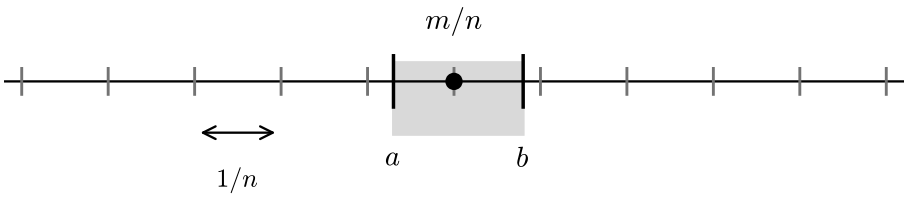


Figura 6: Pasos de tamaño $1/n < b - a$: el primer múltiplo m/n que rebasa a cae antes de b.

Demostración.

1. Como $a < b$, $b - a > 0$ (C1-003.T3), y existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < b - a$ (C1-007.C1).
2. Multiplicando por $n > 0$: $1 < n(b - a)$, es decir, $na + 1 < nb$ (C1-003.T4, K9, C1-003.T3).
3. Sea $m = \lfloor na \rfloor + 1$, que es entero (C1-007.T2, C1-005.T6); entonces $m - 1 \leq na < m$ (C1-007.T2).
4. De $na < m$, multiplicando por $1/n > 0$: $a < m/n$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
5. De $m \leq na + 1$ y $na + 1 < nb$: $m < nb$ (C1-003.T9(a)), y del mismo modo $m/n < b$.
6. Así $q = m/n$, que es racional (C1-005.D1), cumple $a < q < b$. ■

Ejemplo

Con $a = 0.1234$ y $b = 0.1235$, el hueco es 0.0001 y $n = 10{,}001$ cumple $1/n < 0.0001$. Entonces $na = 1{,}234.1234\ldots$, $m = 1{,}235$ y $q = 1{,}235/10{,}001 \approx 0.1234877$, que está entre a y b.

Por qué cada hipótesis

⚠ $a < b$

Si $a = b$, no existe ningún número q con $a < q < a$ (C1-003.T1). Si $a > b$, se intercambian.

⚠ **La propiedad arquimediana (paso de tamaño $1/n$)**

Si solo pudiéramos dar pasos de tamaño fijo, el método falla: no hay enteros entre 0.2 y 0.8 (un entero j con $0 < 0.2 < j$ es natural y $\geq 1 > 0.8$).
La densidad necesita pasos arbitrariamente cortos, y eso lo da C1-007.C1, que a su vez depende del axioma S.

⚠ **El axioma S en C1-007.T1**

Sin él, la prueba no arranca: el supremo de $\mathbb{N}$ (si $\mathbb{N}$ estuviera acotado) es lo que permite encontrar un natural «a menos de 1 del techo».

Ejercicios

1. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $M/n < \varepsilon$.
2. Calcula $\lfloor 3.7 \rfloor$, $\lfloor -3.7 \rfloor$ y $\lfloor 5 \rfloor$, y verifica en cada caso $m \leq x < m + 1$.
3. Usa la receta de la demostración para encontrar un racional entre 1.41 y 1.42.
4. Demuestra que entre dos reales distintos hay infinitos racionales.
5. Demuestra que si $x \geq 0$ y $x < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.

Respuestas

1. Aplica C1-007.C1 con $\varepsilon/M > 0$: hay n con $1/n < \varepsilon/M$; multiplica por $M > 0$ (C1-003.T4).
2. $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$ ($3 \leq 3.7 < 4$); $\lfloor -3.7 \rfloor = -4$ ($-4 \leq -3.7 < -3$); $\lfloor 5 \rfloor = 5$ ($5 \leq 5 < 6$).
3. Hueco 0.01; $n = 101$; $na = 142.41$; $m = 143$; $q = 143/101 \approx 1.41584$.
4. Por C1-007.T3 hay $q_1 \in (a, b)$; aplicándolo a (a, q_1) hay $q_2 < q_1$; por inducción (C1-005.T1) se obtiene $q_1 > q_2 > \cdots$, todos distintos y en (a, b).
5. Si $x > 0$, por C1-007.C1 hay n con $1/n < x$, contra la hipótesis (C1-003.T1). Luego $x = 0$.

C1-008 · $\sqrt{2}$ existe y es irracional

Motivación

En C1-001 quedó pendiente una pregunta: si a las t horas estás en el km $50t^2$, ¿a qué hora exacta pasas por el km 100? Hay que resolver $t^2 = 2$. Con la regla y la lupa nos acercamos:

- $1.4^2 = 1.96$ y $1.5^2 = 2.25$;
- $1.41^2 = 1.9881$ y $1.42^2 = 2.0164$;
- $1.414^2 = 1.999396$ y $1.415^2 = 2.002225$.

La ventana se encoge, pero ningún decimal finito da exactamente 2. Dos preguntas: ¿ese número es una fracción?, y ¿estamos seguros de que existe?

Este capítulo contesta las dos. Ninguna fracción tiene cuadrado 2 (un argumento de paridad). Pero en $\mathbb{R}$ sí existe un número positivo con cuadrado 2, y la demostración es el primer lugar del curso donde el axioma del supremo hace un trabajo que nada más puede hacer.

De paso veremos que los racionales no cumplen ese axioma, y que los irracionales, igual que los racionales, están en todas partes.

> **Dónde falla la analogía**
> Con la lupa solo vemos decimales finitos, que son fracciones. La existencia de $\sqrt{2}$ no se ve con ninguna lupa: la garantiza el axioma S.

Definiciones

No hay definiciones nuevas. Al único $x > 0$ con $x^2 = 2$ (C1-008.T2) lo denotamos $\sqrt{2}$. Un real es **irracional** si no está en $\mathbb{Q}$.

Resultados

Teorema C1-008.T1

No existe $q \in \mathbb{Q}$ con $q^2 = 2$.

> **Idea**
> Si p/r funcionara con el menor denominador posible, p y r serían pares, y p/r se simplificaría a uno con denominador menor.

Demostración.

1. Supongamos que $q = p/r$, con $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, cumple $q^2 = 2$. Entonces $p^2 = 2r^2$ (multiplicando por $r^2 \neq 0$, C1-002.T6).
2. Sea $S = \{r \in \mathbb{N} : \text{existe } p \in \mathbb{Z} \text{ con } p^2 = 2r^2\}$, que no es vacío.
3. S tiene un mínimo r_0, con algún $p_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $p_0^2 = 2r_0^2$ (C1-005.T3).
4. $p_0 = 2k$ o $p_0 = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T7).
5. Si $p_0 = 2k + 1$, entonces $p_0^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, con $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6).
6. Pero también $p_0^2 = 2r_0^2$ con $r_0^2 \in \mathbb{Z}$, y un entero no puede ser de las dos formas (C1-005.T7). Luego $p_0 = 2k$.
7. Entonces $4k^2 = 2r_0^2$; cancelando $2 \neq 0$, $r_0^2 = 2k^2$ (C1-003.T8, C1-002.T1).
8. El mismo argumento de los pasos 4-6, aplicado al entero r_0, da $r_0 = 2j$ con $j \in \mathbb{Z}$.
9. Como $r_0 > 0$ y $2 > 0$, se tiene $j > 0$ (C1-003.T4), así que $j \in \mathbb{N}$ (un entero positivo es natural, C1-005.T6), y $j < j + j = r_0$ (C1-003.T3).
10. Además $4j^2 = 2k^2$, es decir, $k^2 = 2j^2$; luego $j \in S$ y $j < r_0$, contra la minimalidad de r_0. ■

Teorema C1-008.T2

Existe un único $x > 0$ con $x^2 = 2$; se escribe $\sqrt{2}$.

> **Idea**
> Tomamos el supremo s de los positivos con cuadrado menor que 2. Si $s^2 < 2$, lo empujamos un poquito y sigue en el conjunto; si $s^2 > 2$, lo bajamos un poquito y sigue siendo techo. Las dos

> cosas son imposibles, así que $s^2 = 2$.

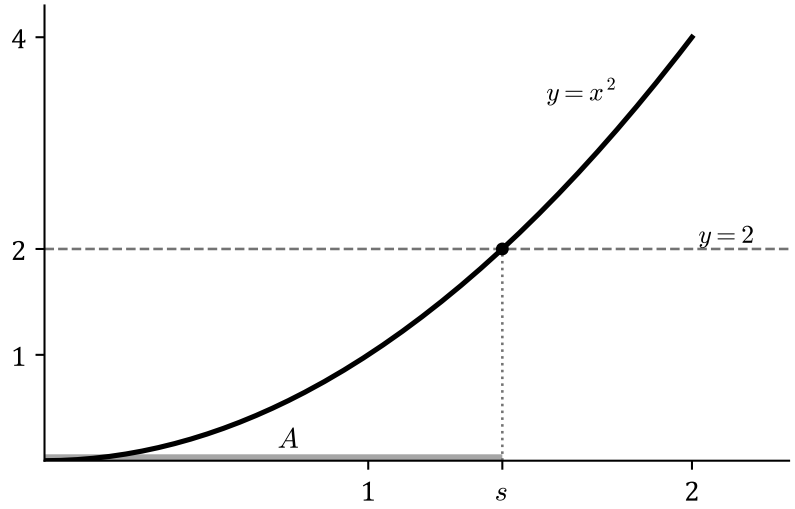


Figura 7: El conjunto $A = \{x > 0 : x^2 < 2\}$ y su supremo s, donde la parábola $y = x^2$ cruza la altura 2.

Demostración.

1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 < 2\}$. Como $1 > 0$ y $1^2 = 1 < 2$, $1 \in A$ (C1-003.T5, C1-003.T3).
2. Si $x \geq 2$, entonces $x^2 \geq 4 > 2$ (C1-003.T9(c) con la versión $\leq$, como en C1-004.T6(iv)), así que $x \notin A$.
3. Por lo tanto todo $x \in A$ cumple $x < 2$ (C1-003.T1), y A está acotado superiormente.
4. Por el axioma S existe $s = \sup A$, y como $1 \in A$, $s \geq 1 > 0$.

Caso $s^2 < 2$.

5. El número $(2 - s^2)/(2s + 1)$ es positivo (C1-003.T3, C1-003.T7, O3), y existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < (2 - s^2)/(2s + 1)$ (C1-007.C1).
6. Como $n \geq 1$, $0 < 1/n \leq 1$ (C1-003.T7), y $1/n^2 = (1/n)(1/n) \leq 1/n$ (C1-003.T9(a)).

7. Entonces

$$\begin{aligned}\left(s+\frac{1}{n}\right)^2 &= s^2+\frac{2s}{n}+\frac{1}{n^2}\\ &\le s^2+\frac{2s+1}{n}\\ &< s^2+(2-s^2)\\ &= 2\end{aligned}$$

(K9; paso 6 y C1-003.T9(a); multiplicar $1/n < (2-s^2)/(2s+1)$ por $2s+1>0$, C1-003.T4).

8. Así $s+1/n>0$ está en A, y $s+1/n>s$, lo que contradice que s es cota superior de A.

Caso $s^2>2$.

9. El número $(s^2-2)/(2s)$ es positivo, y existe $n\in\mathbb{N}$ con $1/n<(s^2-2)/(2s)$ (C1-007.C1).
10. Como $(s^2-2)/(2s)<s^2/(2s)=s/2<s$ (C1-003.T3, C1-003.T4, C1-003.T8), también $1/n<s$, es decir, $s-1/n>0$.
11. Además $2s/n<s^2-2$ (C1-003.T4), y $1/n^2>0$ (C1-003.T5). Entonces

$$\begin{aligned}\left(s-\frac{1}{n}\right)^2 &= s^2-\frac{2s}{n}+\frac{1}{n^2}\\ &> s^2-\frac{2s}{n}\\ &> s^2-(s^2-2)\\ &= 2.\end{aligned}$$

12. Existe $a\in A$ con $a>s-1/n>0$ (C1-006.T2 con $\varepsilon=1/n$).
13. Entonces $a^2>(s-1/n)^2>2$ (C1-003.T9(c), paso 11), lo que contradice $a\in A$.

Conclusión y unicidad.

14. Por C1-003.T1, $s^2=2$, y $x=s>0$ sirve.
15. Si $x,y>0$ cumplen $x^2=y^2=2$ y fuera $x<y$, tendríamos $x^2<y^2$ (C1-003.T9(c)), contra C1-003.T1; lo mismo si $y<x$. Luego $x=y$. ■

Corolario C1-008.C1

$\mathbb{Q}$ no cumple el axioma S: $B=\{q\in\mathbb{Q}: q>0,\ q^2<2\}$ es no vacío y acotado superiormente, y no existe $r\in\mathbb{Q}$ que sea cota superior de B y sea $\le$ toda cota superior racional de B.

Es decir, B no tiene supremo «dentro de $\mathbb{Q}$» ($1 \in B$, y 2 es una cota superior racional).

Demostración.

1. Sea $s = \sqrt{2}$ (C1-008.T2). Si $q \in B$, entonces $q^2 < 2 = s^2$, y $q < s$ (C1-003.T9(c)).
2. Supongamos que $r \in \mathbb{Q}$ es una cota superior de B menor o igual que toda cota superior racional.
3. $r \neq s$ (C1-008.T1).
4. Si $r < s$: sea c el mayor de r y 0 (C1-003.T1); $c < s$, y existe $q \in \mathbb{Q}$ con $c < q < s$ (C1-007.T3).
5. Entonces $q > 0$ y $q^2 < s^2 = 2$ (C1-003.T9(c)): $q \in B$ y $q > r$, contra que r es cota superior.
6. Si $r > s$: existe $q \in \mathbb{Q}$ con $s < q < r$ (C1-007.T3).
7. Para todo $b \in B$, $b < s < q$ (paso 1), así que q es una cota superior racional de B con $q < r$, contra la elección de r.
8. En todos los casos hay contradicción (C1-003.T1). ■

Teorema C1-008.T3 (densidad de los irracionales)

Si $a < b$, existe $x \notin \mathbb{Q}$ con $a < x < b$.

> **Idea**
> Trasladamos el intervalo por $\sqrt{2}$, buscamos ahí un racional, y regresamos.

Demostración.

1. Sea $s = \sqrt{2}$. Entonces $a - s < b - s$ (C1-003.T3).
2. Existe $q \in \mathbb{Q}$ con $a - s < q < b - s$ (C1-007.T3).
3. Sea $x = q + s$; entonces $a < x < b$ (C1-003.T3).
4. Si fuera $x \in \mathbb{Q}$, entonces $s = x - q \in \mathbb{Q}$ (C1-005.T6), contra C1-008.T1.
5. Luego $x \notin \mathbb{Q}$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ El axioma S en C1-008.T2

En $\mathbb{Q}$ el mismo argumento no arranca: el conjunto B de los racionales positivos con cuadrado menor que 2 es no vacío y acotado, pero no tiene supremo racional (C1-008.C1). Sin S no hay candidato.

⚠ $x > 0$ en la unicidad

Sin la positividad hay dos soluciones: $(-\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ (C1-002.T4) y $-\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$.

⚠ Elegir n según el hueco

En el caso $s^2 < 2$, un empujón fijo no sirve: si fuera $s = 1.4$, con $n = 1$, $(1.4 + 1)^2 = 5.76 > 2$ y el punto sale de A.
Con $n = 96$ (pues $(2 - 1.96)/3.8 \approx 0.0105 > 1/96$), $(1.4 + 1/96)^2 \approx 1.98928 < 2$.

⚠ El mínimo en C1-008.T1

Sin el buen orden, el argumento de paridad solo diría «si hay una fracción, hay otra con denominador menor», sin contradicción. El buen orden (C1-005.T3) impide bajar para siempre.

Ejercicios

1. Demuestra que $\sqrt{2} + 1$ y $3\sqrt{2}$ son irracionales.
2. Adapta C1-008.T1 para demostrar que ningún racional tiene cuadrado 3. (Sugerencia: todo entero es de la forma $3k$, $3k + 1$ o $3k + 2$.)
3. Comprueba que $1.41421356^2 < 2$ y explica por qué eso no contradice C1-008.T2.
4. Demuestra que entre dos reales distintos hay infinitos irracionales.
5. ¿Es cierto que la suma de dos irracionales es irracional? Da una prueba o un contraejemplo.

Respuestas

1. Si $\sqrt{2} + 1 = q \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = q - 1 \in \mathbb{Q}$ (C1-005.T6), contra C1-008.T1. Si $3\sqrt{2} = q$, $\sqrt{2} = q/3 \in \mathbb{Q}$.

2. Con $p_0^2 = 3r_0^2$ y r_0 mínimo: si $p_0 = 3k \pm 1$, $p_0^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ no es múltiplo de 3 (se prueba la unicidad del residuo como en C1-005.T7); luego $p_0 = 3k$, $r_0^2 = 3k^2$, $r_0 = 3j$, y $j \in S$ con $j < r_0$.
3. $1.41421356^2 = 1.9999999932878736 < 2$. C1-008.T2 dice que existe un real con cuadrado 2, no que algún decimal finito lo sea; de hecho, por C1-008.T1, ninguno lo es.
4. Como en C1-007 (ejercicio 4), aplicando C1-008.T3 una y otra vez a intervalos cada vez más chicos.
5. Falso: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son irracionales (si $-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = -(-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$) y su suma es $0 \in \mathbb{Q}$.

C1-009 · Expansiones decimales

Motivación

Con la lupa sobre la regla marcas 0.9, luego 0.99, luego 0.999. Cada marca queda más cerca del 1: a la primera le falta 0.1, a la segunda 0.01, a la tercera 0.001.

Si los nueves siguieran para siempre, 0.999 …, ¿sería un poquito menor que 1, o exactamente 1? La pregunta parece de gustos hasta que uno se da cuenta de que nunca hemos dicho qué *significa* una lista infinita de dígitos.

En este capítulo lo decimos: un decimal infinito es el supremo de sus truncamientos. Con esa definición:

- la pregunta tiene una respuesta exacta ($0.999\ldots = 1$);
- todo número de $[0, 1)$ tiene una expansión;
- los racionales resultan ser exactamente los números con expansión finalmente periódica, como $1/7 = 0.142857\,142857\ldots$

> **Dónde falla la analogía**
> Con la lupa siempre ves una cantidad finita de nueves, y ahí sí te falta 10^{-n}. 0.999 … no es ninguna de esas marcas, sino el techo de todas.

Definiciones

Definición C1-009.D1

Para dígitos $d_k \in \{0, \ldots, 9\}$,

$$0.d_1 d_2 d_3 \ldots := \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k} : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Las sumas $s_n = \sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k}$ son los **truncamientos**. Una expansión es **finalmente periódica** si existen $N \geq 0$ y $p \in \mathbb{N}$ con $d_{k+p} = d_k$ para todo $k > N$; una expansión **finita** (todos los dígitos son 0 a partir de algún lugar) es finalmente periódica con bloque 0.

El supremo existe.

1. Como $d_k \leq 9$ y $10^{-k} > 0$ (C1-005.T9, C1-003.T7), se tiene $s_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}$ (C1-003.T9(a) e inducción en n, C1-005.T1).
2. Con $r = 1/10$ (C1-005.T8):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} &= \frac{9}{10} \sum_{j=0}^{n-1} 10^{-j} \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 1/10} \\ &= 1 - 10^{-n} \\ &< 1. \end{aligned}$$

3. El conjunto $\{s_n\}$ no es vacío y está acotado por 1; por el axioma S tiene supremo.
4. Además los truncamientos crecen: $s_{n+1} = s_n + d_{n+1} 10^{-(n+1)} \geq s_n$, y por inducción $s_n \leq s_m$ si $n \leq m$.

Resultados

Teorema C1-009.T1

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n \geq n$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe n con $10^{-n} < \varepsilon$.

Demostración.

1. $10 = 1 + 9$ (C1-005.D2), y $9 \geq -1$.
2. Por Bernoulli, $10^n = (1 + 9)^n \geq 1 + 9n$ (C1-005.T5).
3. $1 + 9n \geq n$ porque $1 + 8n > 0$ (C1-003.T3, C1-003.T6).
4. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1/\varepsilon$ (C1-007.C1).
5. Entonces $10^n \geq n > 1/\varepsilon > 0$, y $10^{-n} = 1/10^n < 1/(1/\varepsilon) = \varepsilon$ (C1-003.T7). ■

Teorema C1-009.T2

$0.999\ldots = 1$.

Demostración.

1. Los truncamientos de 0.999 … son $s_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = 1 - 10^{-n}$ (cálculo de C1-009.D1).
2. Como $10^{-n} > 0$, $s_n < 1$: 1 es cota superior.
3. Sea $\varepsilon > 0$. Existe n con $10^{-n} < \varepsilon$ (C1-009.T1).
4. Entonces $s_n = 1 - 10^{-n} > 1 - \varepsilon$ (C1-003.T9(b), C1-003.T3).
5. Por C1-006.T2, $\sup\{s_n\} = 1$. ■

Teorema C1-009.T3

Todo $x \in [0, 1)$ tiene una expansión decimal; con C1-009.T2, también $x = 1$.

> **Idea**
> El k-ésimo dígito se lee de la parte entera de $10^k x$; los truncamientos quedan debajo de x y a menos de 10^{-n}.

Demostración.

1. Sea $x \in [0, 1)$ y, para $k \geq 0$, $m_k := \lfloor 10^k x \rfloor \in \mathbb{Z}$ (C1-007.T2); $m_0 = \lfloor x \rfloor = 0$ porque $0 \leq x < 1$.
2. Para $k \geq 1$ sea $d_k := m_k - 10m_{k-1} \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6).

Los d_k son dígitos.

3. De $m_{k-1} \leq 10^{k-1}x < m_{k-1} + 1$, multiplicando por 10: $10m_{k-1} \leq 10^k x < 10m_{k-1} + 10$ (C1-003.T4).
4. Como $10m_{k-1}$ es entero y $\leq 10^k x$, es $\leq m_k$ (C1-007.T4): $d_k \geq 0$.
5. Como $m_k \leq 10^k x < 10m_{k-1} + 10$, se tiene $d_k < 10$.
6. Siendo d_k y 10 enteros, $d_k \leq 9$ (C1-005.T2(c) aplicado a $10 - d_k \in \mathbb{N}$). Luego $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Truncamientos.

7. Por inducción, $s_n = m_n/10^n$: para $n = 1$, $s_1 = d_1/10 = m_1/10$.
8. Si $s_n = m_n/10^n$, entonces

$$s_{n+1} = \frac{m_n}{10^n} + \frac{m_{n+1} - 10m_n}{10^{n+1}} = \frac{m_{n+1}}{10^{n+1}}$$

   (C1-002.T6, C1-005.T9).
9. De $m_n \le 10^n x < m_n + 1$, dividiendo entre $10^n > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4):

$$s_n \le x < s_n + 10^{-n}.$$

Supremo.

10. Por el paso 9, x es cota superior de $\{s_n\}$.
11. Sea $\varepsilon > 0$; hay n con $10^{-n} < \varepsilon$ (C1-009.T1), y entonces $s_n > x - 10^{-n} > x - \varepsilon$.
12. Por C1-006.T2, $0.d_1 d_2 \ldots = x$.
13. Para $x = 1$ sirve 0.999 … (C1-009.T2). ■

Teorema C1-009.T4

$x \in [0, 1)$ es racional ⇔ alguna expansión decimal suya es finalmente periódica (las finitas cuentan como periódicas).

> **Idea**
> (⇐) Un bloque que se repite produce una suma geométrica. (⇒) En la división larga de a entre b solo hay b residuos posibles; alguno se repite, y desde ahí todo se repite.

Demostración.

(⇐) Sea $x = 0.d_1 d_2 \ldots$ con $d_{k+p} = d_k$ para $k > N$.

1. Sean $F := s_N = \sum_{k=1}^{N} d_k 10^{-k}$ ($F = 0$ si $N = 0$) y $P := \sum_{k=N+1}^{N+p} d_k 10^{-k}$; ambos son racionales (C1-005.T6), y $P \ge 0$.
2. Por la periodicidad, y por inducción en j, el bloque de posiciones $N + jp + 1, \ldots, N + (j+1)p$ suma $P \cdot 10^{-jp}$.

3. Con $r = 10^{-p} \neq 1$ (C1-005.T8):

$$\begin{aligned} s_{N+jp} &= F + P \sum_{i=0}^{j-1} 10^{-ip} \\ &= F + P\,\frac{1 - 10^{-jp}}{1 - 10^{-p}} \\ &= y^* - c\,10^{-jp}, \end{aligned}$$

   donde $c := P/(1 - 10^{-p}) \geq 0$ y $y^* := F + c$, que es racional (C1-005.T6). Veamos que $x = y^*$.
4. Cota: para todo n, $n \leq N + np$ (pues $p \geq 1$), y como los truncamientos crecen, $s_n \leq s_{N+np} = y^* - c\,10^{-np} \leq y^*$.
5. Banda: sea $\varepsilon > 0$. Si $c = 0$, $s_N = y^* > y^* - \varepsilon$.
6. Si $c > 0$, hay m con $10^{-m} < \varepsilon/c$ (C1-009.T1); como $mp \geq m$, $10^{-mp} \leq 10^{-m}$ (C1-005.T9), y $s_{N+mp} = y^* - c\,10^{-mp} > y^* - \varepsilon$.
7. Por C1-006.T2, $x = y^* \in \mathbb{Q}$.

(⇒) Sea $x = a/b \in [0, 1)$ con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$; tomamos la expansión de C1-009.T3, con $m_k = \lfloor 10^k x \rfloor$ y $d_k = m_k - 10m_{k-1}$.

1. Sea $r_k := 10^k a - b\,m_k \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 0$; $r_0 = a$).
2. De $m_k \leq 10^k a/b < m_k + 1$, multiplicando por b: $0 \leq r_k < b$.

El residuo determina el futuro.

3. Como $10^k x = m_k + r_k/b$, se tiene $10^{k+1} x = 10m_k + 10r_k/b$.
4. Para $j \in \mathbb{Z}$ y $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor j + y \rfloor = j + \lfloor y \rfloor$ (C1-007.T4). Luego $m_{k+1} = 10m_k + \lfloor 10r_k/b \rfloor$, es decir,

$$d_{k+1} = \lfloor 10r_k/b \rfloor,$$

$$r_{k+1} = 10^{k+1} a - b\,m_{k+1} = 10r_k - b\,d_{k+1}.$$

5. Así (d_{k+1}, r_{k+1}) depende solo de r_k.

Palomar.

6. Los $b + 1$ números $r_0 + 1, \ldots, r_b + 1$ están en $\{1, \ldots, b\}$.

7. Existen $0 \leq i < j \leq b$ con $r_i = r_j$ (C1-005.T10).
8. Por inducción en $t \geq 0$ (C1-005.T1, con la regla del paso 4), $r_{i+t} = r_{j+t}$ y $d_{i+t+1} = d_{j+t+1}$.
9. Con $N = i$ y $p = j - i$, $d_{k+p} = d_k$ para todo $k > N$: la expansión es finalmente periódica. ■

Ejemplos

- $1/7$: residuos 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 y dígitos 1, 4, 2, 8, 5, 7; $1/7 = 0.142857\,142857\ldots$ con $N = 0$, $p = 6$.
- $0.2727\ldots$: $F = 0$, $P = 27/100$, $p = 2$, y $y^* = (27/100)/(1 - 1/100) = 27/99 = 3/11$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El axioma S en C1-009.D1

Sin él, $0.d_1d_2\ldots$ podría no existir: en $\mathbb{Q}$, la expansión $1.41421\ldots$ de $\sqrt{2}$ (sus truncamientos son racionales) no tiene supremo racional (C1-008.C1).

⚠ «alguna» expansión en C1-009.T4

Un número puede tener dos expansiones: $0.5 = 0.5000\ldots = 0.4999\ldots$ (como en C1-009.T2, $0.4999\ldots = 0.4 + 0.1 \cdot 0.999\ldots = 0.5$ por C1-006.T4). Ambas son periódicas aquí; lo que el teorema afirma es la existencia de una.

⚠ «finalmente» periódica

$1/6 = 0.1666\ldots$ no es periódica desde el primer dígito ($d_1 = 1$, $d_2 = 6$), pero sí a partir de $N = 1$. Sin el «finalmente», racionales como $1/6$ quedarían fuera.

⚠ Dígitos ≤ 9 en C1-009.D1

Si se permitiera $d_k = 10$ para todo k, el truncamiento $s_2 = 1 + 0.1 = 1.1$ ya pasaría de 1 y la cota de D1 fallaría.

Ejercicios

1. Demuestra que $0.0999\ldots = 0.1$.
2. Escribe $0.\overline{36} = 0.3636\ldots$ como fracción.
3. Calcula la expansión de $2/7$ con la división larga y verifica que tiene período 6.
4. Para $x = 1/6$, calcula con la división larga los residuos r_0, r_1, r_2 y encuentra N y p tales que la expansión de C1-009.T3 cumple $d_{k+p} = d_k$ para $k > N$.
5. ¿Qué expansión da la construcción de C1-009.T3 para $x = 1/2$: $0.5000\ldots$ o $0.4999\ldots$?

Respuestas

1. Sus truncamientos son 0 y $\frac{1}{10}(1-10^{-(n-1)})$; 0.1 es cota y, por C1-009.T1, los truncamientos pasan de $0.1 - \varepsilon$; o bien C1-006.T4 con $\lambda = 1/10$ y C1-009.T2.
2. $P = 36/100, p = 2$: $(36/100)/(99/100) = 36/99 = 4/11$.
3. Residuos $2, 6, 4, 5, 1, 3, 2$; dígitos $2, 8, 5, 7, 1, 4$: $2/7 = 0.285714\,285714\ldots$
4. $r_0 = 1$; $d_1 = \lfloor 10/6 \rfloor = 1, r_1 = 10 - 6 = 4$; $d_2 = \lfloor 40/6 \rfloor = 6, r_2 = 40 - 36 = 4$. Como $r_1 = r_2$: $N = 1, p = 1$, y $1/6 = 0.1666\ldots$
5. $m_k = \lfloor 10^k/2 \rfloor$: $m_1 = 5$, $m_k = 5 \cdot 10^{k-1}$, así que $d_1 = 5$ y $d_k = 0$ para $k \geq 2$: $0.5000\ldots$ La construcción nunca produce una cola de nueves.

C1-010 · Funciones y sus gráficas

Motivación

El GPS del viaje de C1-001 guarda una tabla: a cada hora t entre 0 y 2 le asigna el kilómetro $s(t) = 50t^2$ en que estabas. Dos preguntas sobre esa tabla:

1. ¿Podría la tabla de un viaje real asignar dos kilómetros distintos a la misma hora? No: estás en un solo lugar a la vez.
2. ¿Podría el auto pasar dos veces por el mismo kilómetro si nunca se detiene ni retrocede? Tampoco, y esa segunda respuesta es un pequeño teorema.

La tabla es el modelo de lo que llamaremos **función**: una regla que a cada entrada le asigna una única salida.

En este capítulo fijamos el vocabulario (dominio, imagen, gráfica) y las familias y propiedades que usaremos todo el curso: polinomios, racionales, funciones pares, impares, periódicas, monótonas y acotadas.

> **Dónde falla la analogía**
> Un auto real puede detenerse, y entonces está en el mismo kilómetro durante muchas horas; la tabla sigue siendo una función, pero ya no es estrictamente creciente.

Definiciones

Definición C1-010.D1

Una **función** $f : A \to B$ asigna a cada $x \in A$ un único $f(x) \in B$.

- A es el **dominio**, B el **codominio**, $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ la **imagen** y $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ la **gráfica**.

- Dos funciones son **iguales** si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y el mismo valor en cada punto.
- La **identidad** de A es $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$.
- f es **inyectiva** si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (equivalentemente, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$); **suprayectiva** si $f(A) = B$; **biyectiva** si es ambas.

Equivalentemente, una función es un conjunto G de pares (x, y) con $x \in A$, $y \in B$, tal que para cada $x \in A$ hay exactamente un y con $(x, y) \in G$; ese conjunto es su gráfica.

En el dibujo: cada recta vertical $x = c$, con $c \in A$, corta la gráfica en exactamente un punto.

Definición C1-010.D2

Polinomio: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ dado por sus coeficientes; su **grado** es el mayor k con $a_k \neq 0$ (el polinomio 0 no tiene grado). **Racional**: p/q donde $q \neq 0$, definida en $\{x : q(x) \neq 0\}$. Sea $f : A \to \mathbb{R}$.

- f es **par** si $f(-x) = f(x)$, e **impar** si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$ (con $-x \in A$ siempre que $x \in A$).
- f es **periódica** de período $T > 0$ si $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in A$ (con $x + T \in A$).
- f es **creciente** si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, y **estrictamente creciente** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (para $x, y \in A$); **decreciente** y **estrictamente decreciente** se definen con las desigualdades al revés. f es **monótona** si es creciente o decreciente, y **estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.
- f es **acotada** si $f(A)$ es un conjunto acotado (C1-006.D1).

Resultados

Teorema C1-010.T1

Si f es estrictamente monótona, es inyectiva.

Idea

Dos puntos distintos están en algún orden, y la monotonía estricta los separa.

Demostración.

1. Supongamos f estrictamente creciente y sean $x, y \in A$ con $x \neq y$.
2. Entonces $x < y$ o $y < x$ (C1-003.T1).
3. En el primer caso $f(x) < f(y)$; en el segundo $f(y) < f(x)$ (C1-010.D2).
4. En ambos, $f(x) \neq f(y)$ (C1-003.T1).
5. Si f es estrictamente decreciente, el argumento es el mismo con las desigualdades al revés. ■

Ejemplos

Ejemplo 1 (el viaje)
$s(t) = 50t^2$ en $[0, 2]$ es estrictamente creciente: si $0 \leq t < u \leq 2$, entonces $t^2 < u^2$ (C1-003.T9(c)) y $50t^2 < 50u^2$ (C1-003.T4). Por C1-010.T1 es inyectiva.
Su imagen es $[0, 200]$ (que todo valor intermedio se alcance se probará con Bolzano, C1-023; aquí basta $s(0) = 0$, $s(2) = 200$ y la monotonía para ver $s([0, 2]) \subset [0, 200]$).

⚠ **Ejemplo 2 (no es función)**

La regla «a x le asigno el y con $x = y^2$» no es una función de x: a $x = 1$ le tocan $y = 1$ y $y = -1$ (C1-002.T4).

Ejemplo 3
$x^3 - x$ es un polinomio de grado 3; no es inyectivo ni monótono: vale 0 en -1, 0 y 1.

Ejemplo 4 (paridad)
x^2 es par; x^3 es impar ($(-x)^3 = -x^3$ por C1-002.T4 y C1-005.T9); $x^2 + x$ no es ni par ni impar: $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$, y $0 \neq 2$, $0 \neq -2$.

Ejemplo 5 (constantes)
Una función constante es creciente y decreciente (no estrictamente), periódica con todo período $T > 0$ y no inyectiva (si su dominio tiene dos puntos).

Ejemplo 6
$1/(1 + x^2)$ es racional y acotada: $1 + x^2 \geq 1 > 0$ (C1-003.T9), así que $0 < 1/(1 + x^2) \leq 1$ (C1-003.T7).

Por qué cada hipótesis

⚠ «Estrictamente» en C1-010.T1

Una función creciente no estricta puede repetir valores: la constante $f(x) = 1$ en $[0, 1]$ es creciente y no es inyectiva. En el viaje: un auto detenido.

⚠ «Monótona» en C1-010.T1

x^2 en $[-1, 1]$ no es monótona y no es inyectiva ($(-1)^2 = 1^2$).

⚠ El recíproco es falso

$f(x) = x$ en $[0, 1)$, $f(x) = 3 - x$ en $[1, 2]$ es inyectiva (los dos tramos tienen imágenes $[0, 1)$ y $[1, 2]$, sin valores comunes, y en cada uno f es estrictamente monótona) pero no es monótona: $f(0) < f(1)$ y $f(1) > f(2)$.

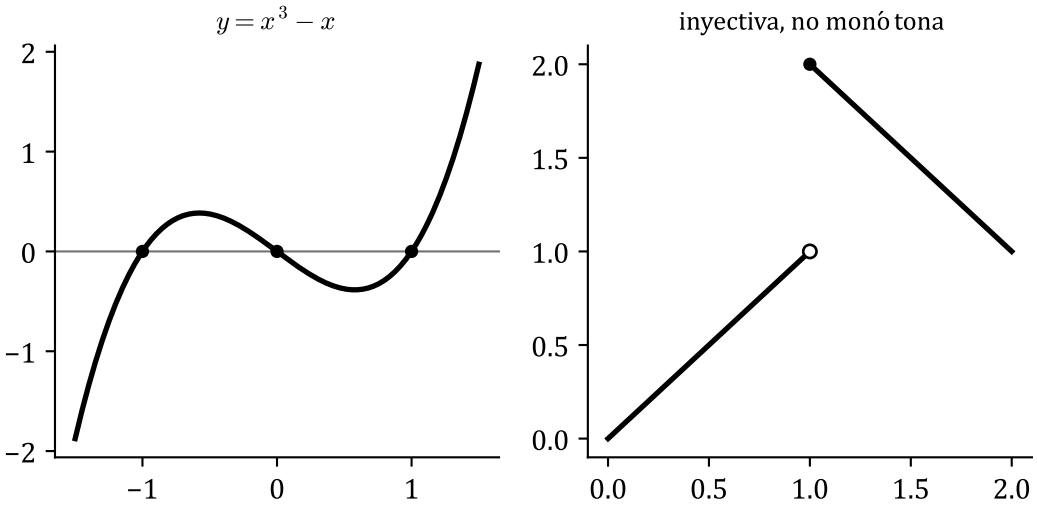


Figura 8: Izquierda: $x^3 - x$ toma el valor 0 tres veces (no es inyectiva). Derecha: una función inyectiva que no es monótona.

Ejercicios

1. Di cuáles de estos conjuntos de pares son gráficas de funciones de $\{1, 2, 3\}$ en $\mathbb{R}$: $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$, $\{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 0)\}$, $\{(1, 5), (3, 5)\}$.
2. Demuestra que la suma de dos funciones impares (con el mismo dominio) es impar, y que el producto de dos impares es par.
3. Demuestra que $f(x) = 2x + 1$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y concluye que es inyectiva.
4. ¿Cuál es el grado de $p(x) = 0x^3 + 2x^2 - x$? ¿Y de $p(x) = 5$?
5. Da una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea periódica, acotada y no constante, sin usar trigonometría.

Respuestas

1. Solo el primero. El segundo asigna dos valores a 1; el tercero no asigna valor a 2.
2. $(f + g)(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$ (C1-002.T6); $(fg)(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x)$ (C1-002.T4).
3. Si $x < y$, $2x < 2y$ (C1-003.T4, $2 > 0$) y $2x + 1 < 2y + 1$ (C1-003.T3). Por C1-010.T1 es inyectiva.
4. Grado 2 (el mayor k con $a_k \neq 0$); grado 0.
5. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (C1-007.T2): $f(x + 1) = f(x)$, $0 \leq f(x) < 1$, y $f(0) = 0 \neq 0.5 = f(0.5)$.

C1-011 · Operaciones, composición e inversas

Motivación

En otro viaje vas a velocidad constante: a las t horas estás en el km $s(t) = 80t + 10$, para $0 \leq t \leq 2$. El auto rinde 12 km por litro. Dos preguntas:

1. ¿A qué hora pasaste por el km 75? Pide leer la tabla hora → km *al revés*: $80t + 10 = 75$ da $t = 0.8125$ h, es decir, 48.75 minutos.
2. ¿Cuánta gasolina llevabas gastada a la 1:00? Pide *encadenar* dos tablas: hora → kilómetros recorridos ($d(t) = 80t$) y kilómetros → litros ($g(x) = x/12$). A la 1:00, $g(d(1)) = 80/12 = 20/3 \approx 6.67$ L.

Leer al revés es tomar la **inversa**; encadenar es **componer**.

Pero leer al revés no siempre se puede: si el auto se detiene 15 minutos en una gasolinera del km 50, la pregunta «¿a qué hora pasaste por el km 50?» ya no tiene una sola respuesta. El teorema central de este capítulo dice exactamente cuándo existe la inversa.

> **Dónde falla la analogía**
> Un viaje real no va a velocidad constante. Lo que importa para la inversa no es la velocidad constante, sino que el auto nunca regrese a un kilómetro (inyectividad) y pase por todos los kilómetros que se le preguntan (suprayectividad).

Definiciones

Definición C1-011.D1

Para f, g con el mismo dominio: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ donde $g(x) \neq 0$.
Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la **composición** $g \circ f : A \to C$ es $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Una **inversa** de $f : A \to B$ es una función $g : B \to A$ con $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$, es decir, $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ y $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$; se escribe f^{-1}, que no es $1/f$.
Si $f : A \to B$ es inyectiva, $f^{-1} : f(A) \to A$ es su inversa sobre la imagen (la de f vista como función $A \to f(A)$, que es biyectiva).

Inyectiva, suprayectiva, biyectiva, la identidad id_A y la igualdad de funciones están en C1-010.D1; las dos condiciones de inversa son igualdades de funciones en ese sentido.

Resultados

Teorema C1-011.T1

$f : A \to B$ tiene inversa si y solo si f es biyectiva; la inversa es única.

> **Idea**
> Si se puede regresar, nadie comparte salida y toda salida tiene entrada; si cada salida tiene una única entrada, regresar a ella es la inversa.

Demostración.

1. (⇒) Sea g una inversa. Si $f(x) = f(y)$, entonces $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$: f es inyectiva.
2. Si $y \in B$, entonces $y = f(g(y))$ con $g(y) \in A$: $y \in f(A)$, así que f es suprayectiva.
3. (⇐) Sea f biyectiva y $y \in B$. Como f es suprayectiva, existe $x \in A$ con $f(x) = y$; como es inyectiva, ese x es único.
4. Definimos $g(y) :=$ ese x; es una función $B \to A$ (C1-010.D1).
5. Por construcción, $f(g(y)) = y$.
6. Para $x \in A$, $g(f(x))$ es el único elemento cuya imagen es $f(x)$; como x lo es, $g(f(x)) = x$.

7. Unicidad: si g y h son inversas de f y $y \in B$, sea $x := h(y)$; entonces $f(x) = f(h(y)) = y$.
8. Así $g(y) = g(f(x)) = x = h(y)$.
9. Como g y h tienen el mismo dominio, codominio y valores, $g = h$. ■

Teorema C1-011.T2

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$; si f, g son biyectivas, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demostración.

1. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Ambos lados van de A a D.
2. Para $x \in A$:

$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x).\end{aligned}$$

3. Sean f y g biyectivas, con inversas $f^{-1} : B \to A$ y $g^{-1} : C \to B$ (C1-011.T1).
4. Para $x \in A$: $f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$.
5. Para $z \in C$: $g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z$.
6. Así $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ es una inversa de $g \circ f$.
7. Por C1-011.T1, $g \circ f$ es biyectiva y su inversa (única) es $f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Teorema C1-011.T3

(a, b) está en la gráfica de f si y solo si (b, a) está en la de f^{-1}.

Demostración.

1. Sea $f : A \to B$ inyectiva y $f^{-1} : f(A) \to A$ su inversa sobre la imagen (C1-011.D1, C1-011.T1).
2. (⇒) Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces $a \in A$ y $b = f(a) \in f(A)$.
3. Entonces $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$: (b, a) está en la gráfica de f^{-1}.
4. (⇐) Si (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, entonces $b \in f(A)$ y $a = f^{-1}(b)$.
5. Entonces $f(a) = f(f^{-1}(b)) = b$: (a, b) está en la gráfica de f. ■

Geométricamente, intercambiar las coordenadas es reflejar en la diagonal $y = x$: la gráfica de f^{-1} es

el reflejo de la de f.

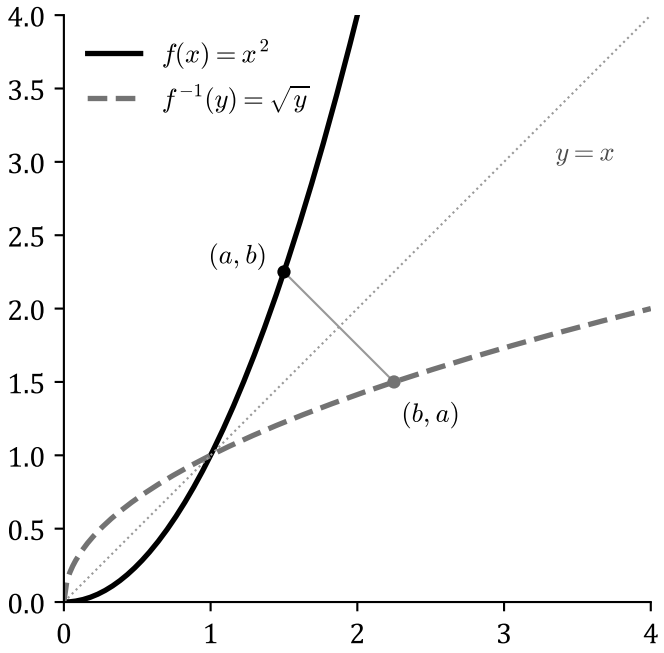


Figura 9: La gráfica de $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$ y la de su inversa $\sqrt{y}$ son reflejos en la diagonal $y = x$.

Ejemplo

$s : [0, 2] \to [10, 170]$, $s(t) = 80t + 10$, es estrictamente creciente (C1-003.T3, C1-003.T4), luego inyectiva (C1-010.T1).

Y es suprayectiva: si $10 \leq y \leq 170$, $t = (y - 10)/80 \in [0, 2]$ cumple $s(t) = y$.

Por C1-011.T1 tiene inversa, $s^{-1}(y) = (y - 10)/80$, y $s^{-1}(75) = 0.8125$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Inyectiva

El viaje con parada: si $s(t) = 50$ para todo $t \in [0.5, 0.75]$, la «inversa» tendría que mandar 50 a muchas horas a la vez; no es función. Igual $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $(-1)^2 = 1^2$.

⚠ Suprayectiva

$s : [0,2] \to \mathbb{R}$ es inyectiva pero no suprayectiva (200 no es $s(t)$ para ningún $t \in [0,2]$); no hay $g : \mathbb{R} \to [0,2]$ con $s(g(200)) = 200$. Sí hay inversa sobre la imagen.

⚠ El orden en la composición

Con $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 1$: $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ y $(f \circ g)(x) = 2x + 2$.
La composición no conmuta, y por eso en $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ el orden se invierte: $(g \circ f)^{-1}(y) = (y - 1)/2 = f^{-1}(g^{-1}(y))$.

⚠ $f^{-1} \neq 1/f$

Para $f(x) = 2x$, $f^{-1}(y) = y/2$, mientras que $1/f(2) = 1/4 \neq 1 = f^{-1}(2)$.

Ejercicios

1. Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ para $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.
2. Demuestra que la composición de dos funciones inyectivas es inyectiva.
3. Encuentra la inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 3x$, y comprueba las dos condiciones.
4. ¿Tiene inversa $f : [0,2] \to [0,4]$, $f(x) = 2x$? ¿Y $f : [0,2] \to [0,5]$, $f(x) = 2x$?
5. Demuestra que si f es biyectiva, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Respuestas

1. $(g \circ f)(x) = x^2 - 3$; $(f \circ g)(x) = (x - 3)^2$.
2. Si $g(f(x)) = g(f(y))$, por la inyectividad de g, $f(x) = f(y)$, y por la de f, $x = y$.
3. $f^{-1}(y) = (5 - y)/3$: $f^{-1}(f(x)) = (5 - 5 + 3x)/3 = x$ y $f(f^{-1}(y)) = 5 - (5 - y) = y$.
4. La primera sí, $f^{-1}(y) = y/2$. La segunda no es suprayectiva (5 requeriría $x = 2.5 \notin [0,2]$): no hay inversa definida en $[0,5]$.
5. f cumple $f(f^{-1}(y)) = y$ y $f^{-1}(f(x)) = x$, que son exactamente las condiciones para que f sea inversa de f^{-1}; por la unicidad (C1-011.T1), $(f^{-1})^{-1} = f$.

C1-012 · Sucesiones convergentes

Motivación

Llegas a una caseta. En el n-ésimo aviso del GPS te faltan $a_n = 1/n$ km: 1, 0.5, 0.333 …, 0.25, …

El GPS dice «llegando» cuando te falta menos que su tolerancia: con $\varepsilon = 0.01$ km (10 metros), eso pasa desde el aviso 101 y ya no deja de pasar.

Ahora imagina que tu amiga programó su GPS con otra caseta, 50 metros más adelante. ¿Podrían los dos GPS terminar diciendo «llegando» a la vez, con cualquier tolerancia que se elija?

La pregunta obliga a decir con precisión qué es «acercarse». La respuesta es la definición ε–N de convergencia: para *toda* tolerancia hay un aviso a partir del cual *todos* los avisos están dentro. Con esa definición, una sucesión no puede acercarse a dos destinos distintos: el límite es único.

> **Dónde falla la analogía**
> El GPS redondea a metros y tiene una tolerancia fija. La definición pide que funcione para toda tolerancia $\varepsilon > 0$, tan pequeña como quieras.

Definiciones

Definición C1-012.D1

Una **sucesión** es una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (C1-010.D1), $n \mapsto a_n$; se escribe (a_n). Se dice que $a_n \to L$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon;$$

se escribe $\lim a_n = L$ (bien definido por C1-012.T1). La sucesión es **convergente** si existe tal L. Si (a_n) solo está definida para $n \geq N_0$, se escribe $(a_n)_{n \geq N_0}$ y en la definición se pide además $N \geq N_0$.

Por C1-004.T3, $|a_n - L| < \varepsilon$ equivale a $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$: desde el índice N, todos los términos están

en la banda $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Si un N sirve, cualquier $N' \geq N$ también sirve.

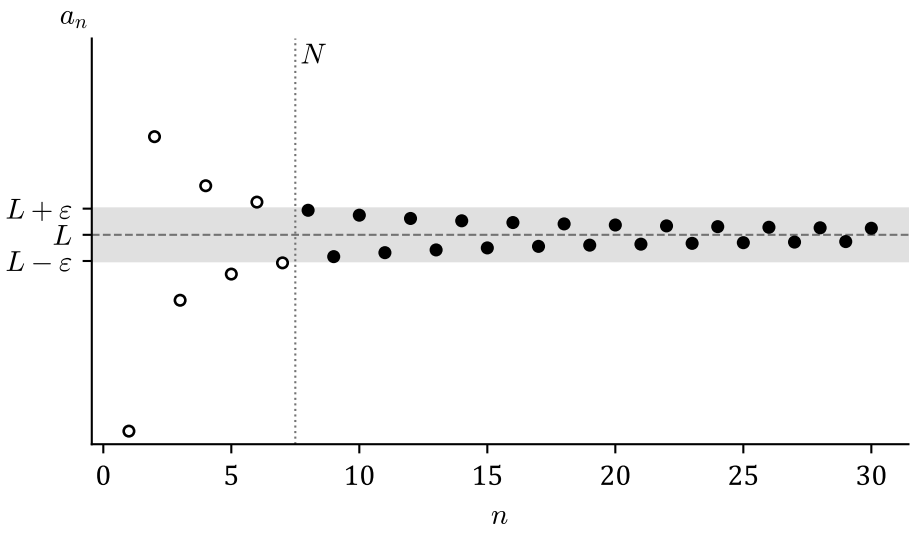


Figura 10: La banda $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$: desde el índice N, todos los términos quedan dentro.

Axioma C1-012.Ax1 ⚠ (EN, elección numerable)

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n \subset \mathbb{R}$ es no vacío, existe una sucesión (x_n) con $x_n \in A_n$ para todo n.

Este principio se usa implícitamente en los cursos de cálculo; aquí lo declaramos. Aparece cada vez que una demostración dice «para cada n elegimos un punto con tal propiedad» y no hay una regla explícita que diga cuál (por ejemplo, en la vuelta de C1-019.T1 o en C1-024.T1).

No se sigue de K1-K9, O1-O3, S ni de la inducción: la inducción y el teorema de recursión (C1-005.T11) construyen sucesiones cuando cada término está *determinado* por el anterior; aquí solo sabemos que hay candidatos.

Cuando sí hay una regla (el menor natural con cierta propiedad, el punto medio de un intervalo, $a+1/n$), no hace falta EN. Lo citamos como `EN`.

Resultados

Teorema C1-012.T1 (unicidad)

Si $a_n \to L$ y $a_n \to M$, entonces $L = M$.

Idea

Desde algún índice, a_n está a la vez cerca de L y cerca de M; por el triángulo, L y M están a menos de cualquier ε, y un número no negativo menor que todo ε es 0.

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$; entonces $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8, C1-003.T7).
2. Como $a_n \to L$, existe N_1 con $|a_n - L| < \varepsilon/2$ para $n \geq N_1$.
3. Como $a_n \to M$, existe N_2 con $|a_n - M| < \varepsilon/2$ para $n \geq N_2$.
4. Sea n el mayor de N_1 y N_2 (C1-003.T1). Entonces

$$\begin{aligned} |L - M| &\leq |L - a_n| + |a_n - M| \\ &= |a_n - L| + |a_n - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T6, C1-004.T1, C1-003.T6).
5. Así $|L - M| \leq 0 + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, y $|L - M| \leq 0$ (C1-003.T9(d)).
6. Como $|L - M| \geq 0$ (C1-004.T1), se tiene $|L - M| = 0$ (C1-003.T1).
7. Por lo tanto $L - M = 0$ (C1-004.T1), es decir, $L = M$. ■

Teorema C1-012.T2

$1/n \to 0$; la sucesión constante c converge a c.

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ con $1/N < \varepsilon$ (C1-007.C1).
2. Si $n \geq N$, entonces $0 < 1/n \leq 1/N$ (C1-003.T7 con la versión $\leq$ de C1-003.T9).

3. Así $|1/n - 0| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$ (C1-004.D1). Luego $1/n \to 0$.
4. Para la constante $a_n = c$: dado $\varepsilon > 0$, con $N = 1$, para todo n, $|a_n - c| = |0| = 0 < \varepsilon$ (K4, C1-004.T1). ■

Teorema C1-012.T3 (finitos términos)

Sean (a_n), (b_n) sucesiones y $N_0 \in \mathbb{N}$. (a) Si $a_n = b_n$ para todo $n \geq N_0$, entonces $a_n \to L \Leftrightarrow b_n \to L$. (b) $a_n \to L \Leftrightarrow (a_{n+N_0})_n \to L$.

Demostración.

(a)

1. Supongamos $a_n \to L$ y sea $\varepsilon > 0$ con su N (C1-012.D1).
2. Sea N' el mayor de N y N_0 (C1-003.T1).
3. Si $n \geq N'$, entonces $b_n = a_n$ y $|b_n - L| = |a_n - L| < \varepsilon$. Luego $b_n \to L$.
4. El recíproco es igual, intercambiando los papeles.

(b) Sea $c_n := a_{n+N_0}$.

1. Si $a_n \to L$ y N es el de ε: para $n \geq N$ se tiene $n + N_0 > n \geq N$ (C1-003.T3, C1-003.T5, C1-005.T2(a)), así que $|c_n - L| < \varepsilon$. Luego $c_n \to L$.
2. Recíprocamente, si $c_n \to L$ con N para ε, sea $m \geq N + N_0$.
3. Entonces $m - N_0 \geq N \geq 1$ es un entero (C1-005.T6) positivo, luego natural (C1-005.D1, C1-005.T2).
4. Así $|a_m - L| = |c_{m-N_0} - L| < \varepsilon$, y $a_n \to L$ (con el índice $N + N_0$). ■

Por (a), al estudiar la convergencia se pueden ignorar los primeros términos de una sucesión, y una sucesión $(a_n)_{n \geq N_0}$ definida solo desde N_0 converge a L si y solo si cualquier extensión suya a todo $\mathbb{N}$ converge a L.

> **Ejemplo (el GPS)**
>
> - Para $\varepsilon = 0.01$: $1/n < 0.01 \Leftrightarrow n > 100$, así que $N = 101$ sirve (y es el menor).
> - Para $\varepsilon = 0.003$: $n > 333.3$ …, el menor N es 334, y $N = 1{,}000$ también sirve.

Por qué cada hipótesis

⚠ «a partir de N, todos»

La sucesión $a_n = (-1)^n$ tiene infinitos términos a distancia 0 de 1 (los pares) e infinitos a distancia 0 de -1 (los impares), pero no converge a ningún número.
Por ejemplo, no converge a 1: con $\varepsilon = 1$, para cualquier N, el índice impar $n = 2N + 1 \geq N$ da $|a_n - 1| = 2 \not< 1$.
Que no converge a ningún L se ve con el mismo argumento usando $\varepsilon = 1$ y C1-004.T4: $2 = |1 - (-1)| \leq |1 - L| + |L - (-1)|$, así que alguno de los dos sumandos es ≥ 1.

⚠ «para todo ε»

Con una tolerancia fija $\varepsilon = 0.1$, la sucesión $1/n$ «llegaría» a 0 y a 0.05 a la vez: para $n \geq 11$, $|1/n - 0| < 0.1$ y $|1/n - 0.05| < 0.1$. Sin «para todo ε» no habría unicidad.

⚠ En C1-012.T1, $\varepsilon/2$

Si se usara ε en ambos lados, solo saldría $|L - M| < 2\varepsilon$, que también basta (pues 2ε recorre todos los positivos), pero la elección $\varepsilon/2$ deja la cuenta limpia.

Ejercicios

1. Demuestra con la definición que $a_n = 3 + 2/n \to 3$, dando N en función de ε.
2. Demuestra que $a_n = (n + 1)/n \to 1$.
3. Demuestra que si $a_n \to L$, entonces $|a_n| \to |L|$. ¿Es cierto el recíproco?
4. Demuestra que $a_n = n$ no converge.
5. Demuestra que cambiar un número finito de términos de una sucesión no altera si converge ni su límite.

Respuestas

1. $|3 + 2/n - 3| = 2/n < \varepsilon$ si $n > 2/\varepsilon$; por C1-007.C1 existe tal N, y sirve para todo $n \geq N$.
2. $(n + 1)/n - 1 = 1/n$; usa C1-012.T2.
3. $\big||a_n| - |L|\big| \leq |a_n - L|$ (C1-004.T5). El recíproco es falso: $(-1)^n$ cumple $|(-1)^n| \to 1$ y no converge.

4. Si $n \to L$, con $\varepsilon = 1$ habría N con $n < L + 1$ para todo $n \geq N$, contra C1-007.C1 (hay naturales mayores que $\max(N, L + 1)$).
5. Es C1-012.T3(a): si $b_n = a_n$ para $n \geq N_0$ y $a_n \to L$, dado ε con su N, el índice $\max(N, N_0)$ sirve para (b_n).

C1-013 · Álgebra de límites de sucesiones

Motivación

Antes de un viaje de 120 km, el GPS va afinando la distancia, $a_n = 120 + 1/n$ km, y la computadora del auto va afinando el rendimiento, $b_n = 12 - 1/n$ km por litro. Tu estimación de los litros que vas a gastar es a_n/b_n:

- con $n = 10$ da $120.1/11.9 \approx 10.0924$;
- con $n = 100$, ≈ 10.0092;
- con $n = 1{,}000$, ≈ 10.0009.

Parece acercarse a $120/12 = 10$. ¿Es cierto en general que el límite de un cociente es el cociente de los límites? ¿Y si el rendimiento se acercara a 0?

Verificar la definición ε–N para cada sucesión nueva sería agotador. En este capítulo demostramos, de una vez, que el límite respeta la suma, el producto y el cociente (con una condición sobre el denominador), y que respeta las desigualdades $\leq$. Con eso, la mayoría de los límites se calculan con álgebra.

> **Dónde falla la analogía**
> Las lecturas reales se detienen en algún momento y tienen redondeo; el teorema habla de sucesiones infinitas y de cualquier tolerancia ε.

Definiciones

Una sucesión (a_n) es **acotada** si lo es como función (C1-010.D2): existe B con $|a_n| \leq B$ para todo n (por C1-004.T3, equivale a $-B \leq a_n \leq B$).

Usaremos también que **cambiar un número finito de términos no altera la convergencia ni el límite** (C1-012, ejercicio 5): si $b_n = a_n$ para $n \geq N_0$, basta tomar en la definición un índice $\geq N_0$.

Resultados

Teorema C1-013.T1

Toda sucesión convergente es acotada.

Idea

Desde algún índice, los términos están a menos de 1 del límite; antes de ese índice hay solo una cantidad finita, y una cantidad finita de números tiene máximo.

Demostración.

1. Sea $a_n \to L$. Con $\varepsilon = 1$ existe N tal que $|a_n - L| < 1$ para $n \geq N$ (C1-012.D1).
2. Para esos n:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n - L) + L| \\ &\leq |a_n - L| + |L| \\ &< 1 + |L| \end{aligned}$$

   (C1-004.T4).
3. Sea B el máximo de $|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |L|$ (C1-005.T13; si $N = 1$, $B = 1 + |L|$).
4. Entonces $|a_n| \leq B$ para $n < N$ por construcción y para $n \geq N$ por el paso 2.
5. Además $B \geq 1 + |L| > 0$ (C1-004.T1). ■

Teorema C1-013.T2

Si $a_n \to L$ y $b_n \to M$: $a_n + b_n \to L + M$; $a_n b_n \to LM$; si $M \neq 0$, existe N_0 con $b_n \neq 0$ para todo $n \geq N_0$, y $(a_n / b_n)_{n \geq N_0} \to L/M$.

Idea

Se escribe el error de la operación en términos de los errores $|a_n - L|$ y $|b_n - M|$, con factores acotados, y se pide a cada error lo justo para que el total quede debajo de ε.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. En lo que sigue, todos los cocientes de ε entre números positivos son positivos (C1-003.T7, O3), y «el mayor de dos índices» existe por C1-003.T1.

Suma.

1. Como $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8, C1-003.T7), existen N_1, N_2 con $|a_n - L| < \varepsilon/2$ para $n \geq N_1$ y $|b_n - M| < \varepsilon/2$ para $n \geq N_2$.
2. Para $n \geq N := \max(N_1, N_2)$:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\leq |a_n - L| + |b_n - M| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

   (K1, K2, C1-002.T6, C1-004.T4, C1-003.T6).

Producto.

1. Existe $B > 0$ con $|a_n| \leq B$ para todo n (C1-013.T1).
2. $a_n b_n - LM = a_n(b_n - M) + M(a_n - L)$ (reglas de campo, C1-002).
3. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &\leq |a_n|\,|b_n - M| + |M|\,|a_n - L| \\ &\leq B\,|b_n - M| + |M|\,|a_n - L| \end{aligned}$$

   (C1-004.T4, C1-004.T2, paso 1).
4. Existen N_1, N_2 con $|b_n - M| < \varepsilon/(2B)$ para $n \geq N_1$ y $|a_n - L| < \varepsilon/(2(|M| + 1))$ para $n \geq N_2$.
5. Como $|M|/(|M| + 1) < 1$ (C1-003.T7, pues $|M| < |M| + 1$), para $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &< B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + |M| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Cociente. Sea $M \neq 0$; entonces $|M| > 0$ (C1-004.T1).

1. Existe N_0 con $|b_n - M| < |M|/2$ para $n \geq N_0$.

2. Para esos n:

$$\begin{aligned} |b_n| &\geq |M| - |M - b_n| \\ &> |M| - \frac{|M|}{2} \\ &= \frac{|M|}{2} > 0 \end{aligned}$$

(C1-004.T5, C1-004.T1); en particular $b_n \neq 0$ (C1-004.T1).

3. Para $n \geq N_0$, como $1/|b_n| < 2/|M|$ (C1-003.T7):

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| &= \frac{|M - b_n|}{|b_n|\,|M|} \\ &< \frac{2}{|M|^2}\,|b_n - M| \end{aligned}$$

(C1-002.T6, C1-004.T6, C1-004.T2).

4. Existe N_3 con $|b_n - M| < \varepsilon|M|^2/2$ para $n \geq N_3$; para $n \geq \max(N_0, N_3)$, el error del paso 3 es $< \varepsilon$.
5. Así la sucesión $c_n := 1/b_n$ (para $n \geq N_0$; los primeros términos se definen, por ejemplo, como $1/M$, lo que no altera la convergencia por C1-012.T3) cumple $c_n \to 1/M$.
6. Por la parte del producto, $a_n c_n \to L \cdot (1/M) = L/M$.
7. Como $a_n c_n = a_n/b_n$ para $n \geq N_0$ (C1-002.D1), se tiene $(a_n/b_n)_{n \geq N_0} \to L/M$ (C1-012.T3). ■

> **Ejemplo (la gasolina)**
> $a_n = 120 + 1/n \to 120$ y $b_n = 12 - 1/n \to 12$ por la suma, C1-012.T2 y el producto ($-1/n = (-1)(1/n) \to (-1) \cdot 0 = 0$). Como $12 \neq 0$, $a_n/b_n \to 10$.
> Directamente, $a_n/b_n - 10 = (11/n)/b_n$ y $b_n \geq 11$, así que el error es $\leq 1/n$.

Teorema C1-013.T3

Si $a_n \leq b_n$ para todo n y $a_n \to L$, $b_n \to M$, entonces $L \leq M$.

> **Idea**
> Si fuera $L > M$, con bandas de la mitad de la distancia, a la larga b_n quedaría abajo de a_n.

Demostración.

1. Supongamos $L > M$ (C1-003.T1).

2. Entonces $M < (L+M)/2 < L$ (C1-003.T8), y $\varepsilon := L - (L+M)/2 = (L+M)/2 - M > 0$.
3. Existe N tal que, para $n \geq N$, $|a_n - L| < \varepsilon$ y $|b_n - M| < \varepsilon$.
4. Entonces $a_n > L - \varepsilon = (L+M)/2$ y $b_n < M + \varepsilon = (L+M)/2$ (C1-004.T3).
5. Luego $b_n < a_n$ (C1-003.T2), contra la hipótesis (C1-003.T1).
6. Por lo tanto $L \leq M$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ $M \neq 0$ en el cociente

Con $a_n = 1$ y $b_n = 1/n \to 0$: $a_n/b_n = n$ no está acotada, así que no converge (C1-013.T1).
Con $a_n = b_n = 1/n$: $a_n/b_n = 1 \to 1$, pero «0/0» no está definido; el teorema no dice nada en ese caso.

⚠ Que ambas converjan (producto)

Con $a_n = n$ (no converge) y $b_n = 1/n \to 0$: $a_n b_n = 1 \to 1$. Con $a_n = n^2$, $b_n = 1/n$: $a_n b_n = n$ diverge. Sin la convergencia de las dos, el producto puede hacer cualquier cosa.

⚠ El recíproco de la suma es falso

$a_n = (-1)^n$, $b_n = -(-1)^n$: $a_n + b_n = 0 \to 0$, y ninguna converge (C1-012).

⚠ $\leq$ y no $<$ en C1-013.T3

Con $a_n = 0 < b_n = 1/n$ para todo n, los límites son iguales: $0 = 0$. La desigualdad estricta no pasa al límite.

⚠ «para todo n» en C1-013.T3

Basta «para todo $n \geq N_0$» (cambiar finitos términos no altera los límites). De hecho, con ambas convergentes basta que $a_n \leq b_n$ para infinitos n: la prueba de C1-013.T3 solo necesita un $n \geq N$ con $a_n \leq b_n$.

Ejercicios

1. Calcula $\lim \dfrac{3n^2+n}{2n^2-5}$ dividiendo entre n^2 y usando C1-013.T2.
2. Demuestra que si $a_n \to L$, entonces $ca_n \to cL$ para toda constante c, y $a_n^k \to L^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
3. Demuestra que si $a_n \to L$ y $a_n \geq 0$ para todo n, entonces $L \geq 0$.
4. Da sucesiones (a_n), (b_n) con $a_n \to 0$, $a_n b_n \to 1$ y (b_n) no convergente.
5. Demuestra que si $a_n \to L \neq 0$, entonces $a_n \neq 0$ desde algún n y $1/a_n \to 1/L$.

Respuestas

1. $\dfrac{3+1/n}{2-5/n^2} \to \dfrac{3+0}{2-0} = \dfrac{3}{2}$ (C1-012.T2 y C1-013.T2: $1/n^2 = (1/n)(1/n) \to 0$; el denominador tiene límite $2 \neq 0$).
2. c es la sucesión constante, que converge a c (C1-012.T2); producto. Para a_n^k, inducción en k (C1-005.T1) con el producto.
3. C1-013.T3 con la sucesión constante $0 \leq a_n$: $0 \leq L$.
4. $a_n = 1/n$, $b_n = n$.
5. Es el paso del cociente con $b_n = a_n$ y $M = L$: $|a_n| > |L|/2 > 0$ desde N_0, y $1/a_n \to 1/L$.

C1-014 · Sándwich y monótonas

Motivación

Un banco imaginario paga 100 % de interés anual. Si depositas \$1,000:

- capitalizando una vez al año, terminas con \$2,000;
- capitalizando cada mes (cada mes te paga $1/12$ del interés sobre lo que ya llevas), al final del año tienes $1000\,(1 + 1/12)^{12} \approx \$2,613.04$;
- capitalizando cada día, $1000\,(1 + 1/365)^{365} \approx \$2,714.57$;
- capitalizando cada hora, $1000\,(1 + 1/8760)^{8760} \approx \$2,718.13$.

Cada vez ganas un poco más, pero cada vez menos de lo que ganaste antes.

¿El saldo crece sin límite o se estabiliza? La sucesión $a_n = (1 + 1/n)^n$ es creciente y, como veremos, nunca pasa de 4. En este capítulo probamos que esas dos propiedades bastan para que converja, aunque no sepamos de antemano a qué número. Ese número es e.

> **Dónde falla la analogía**
> Ningún banco paga 100 % ni capitaliza infinitas veces, y todo banco redondea a centavos. El teorema habla de la sucesión ideal, sin redondeo y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definiciones

Una sucesión (a_n) es **creciente** si $m < n$ implica $a_m \leq a_n$, y **decreciente** si $m < n$ implica $a_m \geq a_n$ (C1-010.D2, aplicada a la función $n \mapsto a_n$). Es **acotada superiormente** si el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ lo es (C1-006.D1).

Teorema C1-014.T0 (monotonía por términos consecutivos)

Una sucesión (a_n) es creciente $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, y estrictamente creciente $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1}$ para todo n (análogos decrecientes).

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Es la definición (C1-010.D2) con $m = n < n + 1$.
2. ($\Leftarrow$) Supongamos $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n y fijemos m.
3. El conjunto de los $k \in \mathbb{N}$ con $a_m \leq a_{m+k}$ contiene a 1 y, si contiene a k, contiene a $k + 1$, porque $a_m \leq a_{m+k} \leq a_{m+k+1}$ (C1-003.T9); por inducción es $\mathbb{N}$ (C1-005.T1).
4. Si $m < n$, entonces $n - m$ es un entero (C1-005.T6) positivo, luego natural (C1-005.T2 y la observación tras C1-005.T6).
5. Con $k = n - m$ en el paso 3, $a_m \leq a_n$.
6. Con $<$ en lugar de $\leq$ el argumento es el mismo (C1-003.T2). Los casos decrecientes son iguales con las desigualdades al revés. ■

Definición C1-014.D1 (el número e)

$e := \lim (1 + 1/n)^n$.

(El límite existe por C1-014.T4 y es único por C1-012.T1.)

Resultados

Teorema C1-014.T1 (sándwich)

Si $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \geq N_0$ y $a_n, b_n \to L$, entonces $c_n \to L$.

> **Idea**
> Desde cierto índice, a_n y b_n están en la franja $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, y c_n, atrapada entre ellas, también.

Demostración. (Que baste «para todo $n \geq N_0$» se usará en C1-019.)

1. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to L$, existe N_1 con $|a_n - L| < \varepsilon$ para $n \geq N_1$ (C1-012.D1), y entonces $L - \varepsilon < a_n$ (C1-004.T3).
2. Como $b_n \to L$, existe N_2 con $|b_n - L| < \varepsilon$, y entonces $b_n < L + \varepsilon$ para $n \geq N_2$ (C1-004.T3).
3. Sea N el mayor de N_0, N_1, N_2 (C1-003.T1).
4. Para $n \geq N$:

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon.$$

5. De ahí $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ (C1-003.T9) y $|c_n - L| < \varepsilon$ (C1-004.T3).
6. Por C1-012.D1, $c_n \to L$. ■

Teorema C1-014.T2

Toda sucesión creciente y acotada superiormente converge a su supremo; toda decreciente y acotada inferiormente, a su ínfimo.

> **Idea**
> El candidato es el supremo s. Bajamos ε desde s: algún término rebasa $s - \varepsilon$ y, como la sucesión nunca baja, todos los siguientes quedan entre $s - \varepsilon$ y s.

Demostración.

1. Sea (a_n) creciente y acotada superiormente, y sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. A no es vacío ($a_1 \in A$) y es acotado superiormente, así que existe $s = \sup A$ (axioma S).
3. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ con $a_N > s - \varepsilon$ (C1-006.T2).
4. Si $n \geq N$: $a_N \leq a_n$ (creciente), y $a_n \leq s < s + \varepsilon$ (s es cota, C1-006.D1, C1-003.T3).
5. Entonces $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$ (C1-003.T9) y $|a_n - s| < \varepsilon$ (C1-004.T3) para todo $n \geq N$.
6. Por C1-012.D1, $a_n \to s$.
7. Si (a_n) es decreciente y acotada inferiormente, sea $b_n = -a_n$.
8. Si $m < n$, $a_m \geq a_n$ implica $b_m \leq b_n$ (C1-003.T9), así que (b_n) es creciente, y es acotada superiormente porque $-A$ lo es.
9. Por los pasos 1-6 y por C1-006.T3, $b_n \to \sup(-A) = -\inf A$.
10. Como $|a_n - \inf A| = |-(b_n - \sup(-A))| = |b_n - \sup(-A)|$ (C1-002.T6, C1-004.T1), de la definición se sigue $a_n \to \inf A$. ■

Teorema C1-014.T3

Si $|a| < 1$, entonces $a^n \to 0$.

Idea

Escribimos $1/|a| = 1 + h$ con $h > 0$; Bernoulli da $(1 + h)^n \geq nh$, así que $|a|^n \leq 1/(nh)$, y el sándwich hace el resto.

Demostración.

1. Si $a = 0$, entonces $a^n = 0$ para todo n (C1-005.D2, C1-002.T3), y la sucesión constante 0 converge a 0 (C1-012.T2).
2. Sea $0 < |a| < 1$ (C1-004.T1). Entonces $b := 1/|a| > 1$ (C1-003.T7) y $h := b - 1 > 0$.
3. Por Bernoulli, $b^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh > 0$ (C1-005.T5).
4. $|a^n| = |a|^n$ y $|a|^n b^n = (|a|\, b)^n = 1^n = 1$ (C1-005.T9), de modo que $|a^n| = 1/b^n < 1/(nh)$ (C1-003.T7).
5. Así $0 \leq |a^n| \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}$ para todo n.
6. Como $1/n \to 0$ y la constante $1/h$ converge a $1/h$ (C1-012.T2), el producto converge a 0 (C1-013.T2).
7. Por el sándwich, $|a^n| \to 0$ (C1-014.T1).
8. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay N con $\big||a^n| - 0\big| = |a^n - 0| < \varepsilon$ si $n \geq N$ (C1-004.T1). Por C1-012.D1, $a^n \to 0$. ■

Teorema C1-014.T4

$a_n = (1 + 1/n)^n$ es creciente y $a_n < 4$ para todo n; en consecuencia converge.

Idea

Bernoulli, dos veces: una para comparar a_{n+1} con a_n; otra para acotar a_{2n} por 4.

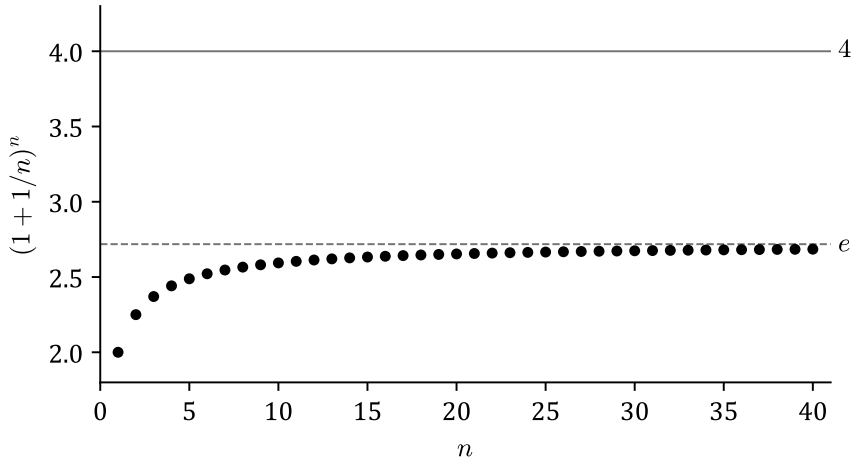


Figura 11: $a_n = (1 + 1/n)^n$ crece, nunca pasa de 4 y se acerca a $e \approx 2.718$.

Demostración.

Creciente.

1. Todos los a_n son positivos (C1-005.T9).
2. Para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n} \\ &= \Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\frac{n+1}{n} \\ &= \Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

   (C1-005.T9, C1-002.T6).
3. Como $-1/(n+1)^2 \geq -1$, Bernoulli da

$$\begin{aligned}\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{n+1} &\geq 1-\frac{n+1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

   (C1-005.T5).
4. Así $a_{n+1}/a_n \geq 1$ y $a_{n+1} \geq a_n$ (C1-003.T4). Por C1-014.T0, (a_n) es creciente.

Acotada por 4.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por Bernoulli con $x = -1/(2n) \geq -1$: $(1 - \frac{1}{2n})^n \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
6. Además

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^n < 1^n = 1,$$

   porque $0 \leq 1 - \frac{1}{4n^2} < 1$ (C1-005.T9).
7. Dividiendo: $(1 + \frac{1}{2n})^n < 1/(1 - \frac{1}{2n})^n \leq 2$ (C1-003.T7, paso 5).
8. Elevando al cuadrado: $a_{2n} = \left((1 + \frac{1}{2n})^n\right)^2 < 4$ (C1-003.T9, C1-005.T9).
9. Como $n < 2n$ y (a_n) es creciente, $a_n \leq a_{2n} < 4$.

Converge.

10. (a_n) es creciente y acotada superiormente por 4; converge a su supremo (C1-014.T2), y su límite es único (C1-012.T1). ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin «creciente»

$a_n = (-1)^n$ es acotada ($|a_n| \leq 1$) y no converge: si $a_n \to L$, con $\varepsilon = 1$ habría N con $|1 - L| < 1$ y $|-1 - L| < 1$, y entonces $2 = |1 - (-1)| \leq |1 - L| + |L + 1| < 2$ (C1-004.T6), imposible.

⚠ Sin «acotada»

$a_n = n$ es creciente y no converge: toda convergente es acotada (C1-013.T1) y $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente (C1-007.T1).

⚠ Sin completitud

En $\mathbb{Q}$ el teorema es falso. Sea q_n el truncamiento de $\sqrt{2}$ a n decimales: 1.4, 1.41, 1.414, … Es creciente, está acotada por 2 y sus términos son racionales.
En $\mathbb{R}$ converge a $\sqrt{2}$: $0 \leq \sqrt{2} - q_n < 10^{-n} \leq 1/n$ (C1-009.T1) y se aplica el sándwich. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (C1-008.T1) y el límite es único (C1-012.T1), no hay límite racional. Es la misma falla que C1-008.C1.

Ejercicios

1. Demuestra con C1-014.T2 que $a_n = n/(n+1)$ converge, y prueba que su límite es 1.
2. Demuestra que $(1/2)^n + 3/n \to 0$.
3. Da una sucesión convergente que no sea monótona. ¿Contradice eso a C1-014.T2?
4. Sea $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 2/x_n\right)$. Demuestra que $x_n^2 \geq 2$, que (x_n) es decreciente y que converge a un $L > 0$ con $L^2 = 2$. Calcula x_2, x_3, x_4.
5. Calcula $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y comprueba que $a_n < b_n$. Explica por qué $e \leq b_n$ para todo n si (b_n) es decreciente.

Respuestas

1. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ y $a_n < 1$: converge a $s = \sup$. Como $1 - a_n = 1/(n+1) \to 0$ (sándwich con $1/n$), $a_n \to 1$ por C1-013.T2, y $s = 1$ por unicidad.
2. $(1/2)^n \to 0$ por C1-014.T3 y $3/n \to 0$ por C1-012.T2 y C1-013.T2; la suma tiende a 0 (C1-013.T2).
3. $(-1)^n/n \to 0$ (sándwich entre $-1/n$ y $1/n$) y no es monótona. No contradice nada: el teorema da una condición suficiente, no necesaria.
4. $x_{n+1}^2 - 2 = \left((x_n^2 - 2)/(2x_n)\right)^2 \geq 0$ y $x_n - x_{n+1} = (x_n^2 - 2)/(2x_n) \geq 0$; los x_n son positivos, así que converge (C1-014.T2) a L. Como $x_n^2 \geq 2 > 1$, $x_n \geq 1$ y $L \geq 1$ (C1-013.T3). Como $x_{n+1} \to L$ (mismo N más uno) y $x_n x_{n+1} \cdot 2 = x_n^2 + 2$, por C1-013.T2, $2L^2 = L^2 + 2$, es decir $L^2 = 2$. $x_2 = 1.5$, $x_3 \approx 1.416667$, $x_4 \approx 1.414216$.
5. $b_1 = 4$, $b_2 = 3.375$, $b_3 \approx 3.1605$, $b_4 \approx 3.0518$; $b_n = a_n(1 + 1/n) > a_n$. Si (b_n) decrece, para $m \geq n$: $a_m < b_m \leq b_n$, y por C1-013.T3, $e \leq b_n$.

C1-015 · Subsucesiones y Bolzano–Weierstrass

Motivación

Un sensor salta sobre una regla que va de -2 a 2 y deja una marca en cada lectura, sin parar nunca. Las lecturas son $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$:

$$-2,\ 1.5,\ -1.333\ldots,\ 1.25,\ -1.2,\ 1.1666\ldots$$

La sucesión no converge: salta de un lado a otro. Pero si miramos solo las lecturas pares, 1.5, 1.25, 1.1666 ..., estas bajan hacia 1.

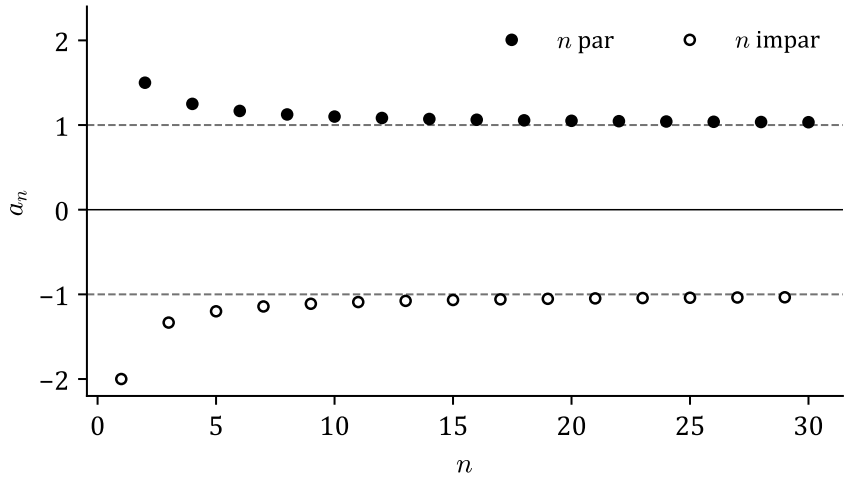


Figura 12: Las lecturas $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$: los términos pares se acercan a 1 y los impares a -1.

La pregunta general es: si hay infinitas marcas en un tramo finito de regla, ¿tiene que haber un lugar donde, por más que acerquemos la lupa, sigamos viendo infinitas marcas? El teorema de Bolzano–Weierstrass responde que sí: toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

> **Dónde falla la analogía**
> Una regla real tiene marcas con grosor y la lupa ve tinta, no puntos. Además, el teorema asegura que existe un punto de amontonamiento, pero no dice dónde está ni cuántos hay.

Definiciones

Definición C1-015.D1 (subsucesión)

Una subsucesión de (a_n) es la sucesión $k \mapsto a_{n_k}$, donde (n_k) es una sucesión de naturales con $n_k < n_{k+1}$ para todo k ($n_1 < n_2 < \cdots$).

Por C1-014.T0, la condición $n_k < n_{k+1}$ dice que (n_k) es estrictamente creciente.

Teorema C1-015.T0

Si (n_k) es una sucesión de naturales con $n_k < n_{k+1}$ para todo k, entonces $n_k \geq k$ para todo k.

Demostración. Por inducción en k (C1-005.T1).

1. $n_1 \geq 1$ porque todo natural es ≥ 1 (C1-005.T2(a)).
2. Si $n_k \geq k$, entonces $n_{k+1} > n_k \geq k$.
3. Como no hay naturales entre k y $k+1$ (C1-005.T2(c)), $n_{k+1} \geq k+1$. ■

Resultados

Teorema C1-015.T1

Si $a_n \to L$, toda subsucesión converge a L.

> **Idea**
> El índice n_k va al menos tan rápido como k; el mismo N sirve.

Demostración.

1. Sea (a_{n_k}) una subsucesión y $\varepsilon > 0$.
2. Como $a_n \to L$, existe N con $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ (C1-012.D1).
3. Si $k \geq N$, entonces $n_k \geq k \geq N$ (C1-015.T0), y por lo tanto $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.
4. Por C1-012.D1, $a_{n_k} \to L$. ■

Teorema C1-015.T2

Toda sucesión tiene una subsucesión monótona.

Idea

Llamamos *pico* a un índice cuyo término nunca es superado después. Si hay picos arbitrariamente lejos, ellos forman una subsucesión decreciente; si no, a partir de cierto punto siempre hay un término posterior más alto, y saltando de uno a otro obtenemos una subsucesión creciente.

Demostración. Sea (a_n) una sucesión. Decimos que $n \in \mathbb{N}$ es un *pico* si $a_n \geq a_m$ para todo $m > n$. Hay dos casos, y por lógica se da uno de ellos.

Caso A: para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un pico mayor que N.

1. El conjunto de picos no es vacío; sea n_1 su mínimo (buen orden, C1-005.T3).
2. Dado n_k, el conjunto de picos mayores que n_k no es vacío (caso A con $N = n_k$); sea n_{k+1} su mínimo (C1-005.T3).
3. Esto define recursivamente (n_k) (C1-005.T11, con X el conjunto de picos) con $n_1 < n_2 < \cdots$.
4. Como n_k es pico y $n_{k+1} > n_k$, se tiene $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$ para todo k.
5. Por C1-014.T0 (monotonía por términos consecutivos), (a_{n_k}) es decreciente.

Caso B: existe N tal que ningún pico es mayor que N.

6. Sea $n_1 = N + 1$. Supongamos definido $n_k > N$.
7. Entonces n_k no es pico, es decir, existe $m > n_k$ con $a_m > a_{n_k}$; sea n_{k+1} el menor de esos m (C1-005.T3).
8. Así $n_{k+1} > n_k > N$, y queda definida recursivamente (n_k) (C1-005.T11, con $X = \{n \in \mathbb{N} : n > N\}$) con $n_1 < n_2 < \cdots$ y $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ para todo k.

9. Por C1-014.T0, (a_{n_k}) es creciente.

10. En los dos casos, (a_{n_k}) es una subsucesión monótona (C1-015.D1). ■

Teorema C1-015.T3 (Bolzano–Weierstrass)

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

> **Idea**
> Se toma una subsucesión monótona (C1-015.T2); hereda la cota, y una monótona acotada converge (C1-014.T2).

Demostración.

1. Sea (a_n) acotada: existe M con $|a_n| \leq M$, es decir, $-M \leq a_n \leq M$ para todo n (C1-004.T3).
2. Existe una subsucesión monótona (a_{n_k}) (C1-015.T2).
3. Cada a_{n_k} es un término de (a_n), así que $-M \leq a_{n_k} \leq M$ para todo k.
4. Si (a_{n_k}) es creciente, está acotada superiormente por M; si es decreciente, está acotada inferiormente por $-M$ (C1-006.D1).
5. En ambos casos converge (C1-014.T2). ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin «acotada»

$a_n = n$ no tiene subsucesiones convergentes. Si $(a_{n_k}) = (n_k)$ convergiera, sería acotada (C1-013.T1): $n_k \leq M$ para todo k.
Pero $k \leq n_k$ (C1-015.T0), y entonces $k \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que contradice C1-007.T1.

⚠ Sin completitud

En $\mathbb{Q}$ el teorema es falso. La sucesión q_n de truncamientos de $\sqrt{2}$ a n decimales es racional y está acotada por 2.
En $\mathbb{R}$, $0 \leq \sqrt{2} - q_n < 10^{-n}$, y como $10^{-n} \leq 1/n$ (C1-009.T1), el sándwich (C1-014.T1) da

$q_n \to \sqrt{2}$; así que toda subsucesión tiende a $\sqrt{2}$ (C1-015.T1).
Si una subsucesión tendiera a un racional q, por unicidad (C1-012.T1) sería $q = \sqrt{2}$, lo que contradice C1-008.T1.

⚠ La conclusión es solo «alguna subsucesión»

$a_n = (-1)^n$ es acotada y no converge (ver C1-014): tiene subsucesiones convergentes con límites distintos (1 y -1).

Ejercicios

1. Para $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$, encuentra dos subsucesiones con límites distintos y concluye, con C1-015.T1, que (a_n) no converge.
2. Demuestra: si $a_{2k} \to L$ y $a_{2k-1} \to L$, entonces $a_n \to L$.
3. Demuestra que una subsucesión de una subsucesión de (a_n) es una subsucesión de (a_n).
4. ¿Qué índices son picos en $a_n = 1/n$? ¿Y en $a_n = n$? ¿Qué subsucesión construye la demostración de C1-015.T2 en cada caso?
5. Da una sucesión no acotada que sí tenga una subsucesión convergente. ¿Contradice esto el ejemplo $a_n = n$?

Respuestas

1. $a_{2k} = 1 + 1/(2k) \to 1$ y $a_{2k-1} = -(1 + 1/(2k - 1)) \to -1$ (C1-012.T2, C1-013.T2, C1-014.T1). Si $a_n \to L$, ambas tenderían a L (C1-015.T1) y $1 = L = -1$ (C1-012.T1), absurdo.
2. Dado ε, sean K_1, K_2 para pares e impares; con $N = \max(2K_1, 2K_2 - 1)$, todo $n \geq N$ es $2k$ con $k \geq K_1$ o $2k - 1$ con $k \geq K_2$ (C1-005.T7).
3. Si $m_j = n_{k_j}$ con $k_1 < k_2 < \cdots$, entonces $m_1 < m_2 < \cdots$ porque (n_k) es estrictamente creciente.
4. En $1/n$ todo índice es pico (caso A): la subsucesión es toda la sucesión, decreciente. En n ningún índice es pico (caso B con $N = 1$): $n_1 = 2$, $n_{k+1} = n_k + 1$, creciente.
5. $a_n = n$ si n es par y $a_n = 0$ si n es impar: los impares dan la subsucesión constante 0. No contradice nada: sin acotamiento el teorema no afirma ni niega.

C1-016 · Sucesiones de Cauchy

Motivación

La calculadora del celular muestra $\sqrt{2}$ con más y más decimales: $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, $x_3 = 1.414$, $x_4 = 1.4142$, $x_5 = 1.41421$.

Cada aproximación nueva cambia menos que la anterior: a partir de la n-ésima, dos aproximaciones cualesquiera difieren en menos de 10^{-n}. Las aproximaciones se acercan *entre sí* tanto como queramos.

¿Se acercan, entonces, a *un número*? Y, sobre todo, ¿podemos asegurarlo sin decir cuál es?

Ese es el criterio de Cauchy: una condición sobre los términos de la sucesión que no menciona el límite. En $\mathbb{R}$ la condición garantiza la convergencia; en $\mathbb{Q}$ no, porque el número al que se acercan los x_n no es racional.

> **Dónde falla la analogía**
> La calculadora se detiene en 10 o 15 dígitos. La definición de Cauchy pide responder para *todo* $\varepsilon > 0$, no solo para los que caben en la pantalla.

Definiciones

Definición C1-016.D1
(a_n) es de Cauchy $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N : \lvert a_n - a_m \rvert < \varepsilon$.

Resultados

Teorema C1-016.T1

Convergente ⇒ Cauchy.

> **Idea**
> Si todos los términos están cerca de L, están cerca entre sí: se pasa por L con la desigualdad del triángulo.

Demostración.

1. Sea $a_n \to L$ y $\varepsilon > 0$. Como $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8), existe N con $|a_n - L| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$ (C1-012.D1).
2. Si $m, n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - L| + |L - a_m| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T6, y C1-004.T1 para $|L - a_m| = |a_m - L|$).
3. Por C1-016.D1, (a_n) es de Cauchy. ■

Teorema C1-016.T2

Cauchy ⇒ acotada.

> **Idea**
> Con $\varepsilon = 1$, de cierto N en adelante todos los términos están a menos de 1 de a_N; antes de N hay una cantidad finita de términos.

Demostración.

1. Sea (a_n) de Cauchy. Con $\varepsilon = 1$ existe N tal que $|a_n - a_m| < 1$ para $m, n \geq N$; en particular $|a_n - a_N| < 1$ para $n \geq N$.

2. Para $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n - a_N) + a_N| \\ &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\ &< 1 + |a_N| \end{aligned}$$

   (C1-004.T4).
3. Sea M el máximo de $|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|$ (C1-005.T13).
4. Si $n < N$, $|a_n|$ es uno de los números de la lista; si $n \geq N$, $|a_n| < 1 + |a_N| \leq M$.
5. Por lo tanto $|a_n| \leq M$ para todo n. ■

Teorema C1-016.T3

Cauchy ⇒ convergente.

> **Idea**
> Una sucesión de Cauchy es acotada, así que Bolzano–Weierstrass da una subsucesión con límite L; como todos los términos se pegan entre sí, se pegan también a L.

Demostración.

1. Sea (a_n) de Cauchy. Es acotada (C1-016.T2).
2. Existen una subsucesión (a_{n_k}) y $L \in \mathbb{R}$ con $a_{n_k} \to L$ (Bolzano–Weierstrass, C1-015.T3).
3. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8), existe N con $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ para $m, n \geq N$ (C1-016.D1).
4. Existe K con $|a_{n_k} - L| < \varepsilon/2$ para $k \geq K$ (C1-012.D1).
5. Sea k el mayor de K y N (C1-003.T1); entonces $n_k \geq k \geq N$ (C1-015.T0).
6. Para todo $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n - L| &\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T6, pasos 3-5).
7. Por C1-012.D1, $a_n \to L$. ■

Con C1-016.T1, en $\mathbb{R}$ una sucesión es de Cauchy si y solo si es convergente.

Por qué cada hipótesis

⚠ No basta que los pasos consecutivos se encojan

Sea $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Los pasos $H_{n+1} - H_n = 1/(n+1)$ tienden a 0 (C1-012.T2 y C1-015.T1). Pero

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

porque cada uno de los n sumandos es $\geq 1/(2n)$ (C1-003.T7, C1-003.T9).

Con $\varepsilon = 1/2$, para cada N los índices $m = N, n = 2N$ dan $|H_n - H_m| \geq 1/2$: (H_n) no es de Cauchy, y por C1-016.T1 no converge.

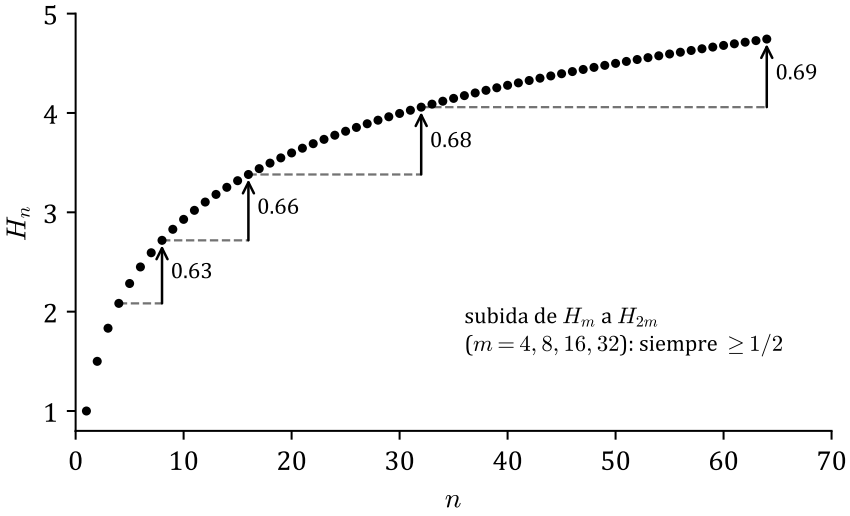


Figura 13: Los pasos de $H_n = \sum_{k \leq n} 1/k$ se encogen, pero H_n sigue subiendo: entre n y $2n$ siempre sube al menos $1/2$ (flechas: subidas de H_m a H_{2m} para $m = 4, 8, 16, 32$).

⚠ Sin completitud

En $\mathbb{Q}$, los truncamientos x_n de $\sqrt{2}$ cumplen $|x_n - x_m| < 10^{-n}$ para $m \geq n$; como $10^{-n} < \varepsilon$ para n grande (C1-009.T1), son de Cauchy.

Su límite en $\mathbb{R}$ es $\sqrt{2}$ (sándwich, como en C1-015), y por unicidad (C1-012.T1) no tienen límite racional (C1-008.T1).

Ejercicios

1. Demuestra directamente desde C1-016.D1 que $(1/n)$ es de Cauchy.
2. Demuestra que si $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$ para todo n, entonces (a_n) es de Cauchy y, por lo tanto, converge.
3. Demuestra: si (a_n) es de Cauchy y una subsucesión converge a L, entonces $a_n \to L$.
4. Calcula H_{10}, H_{20} y $H_{20} - H_{10}$. ¿Es compatible con la cota $H_{2n} - H_n \geq 1/2$?
5. ¿Es de Cauchy $a_n = (-1)^n$? Justifica con la definición.

Respuestas

1. Para $m, n \geq N$: $|1/n - 1/m| \leq \max(1/n, 1/m) \leq 1/N$ (ambos son positivos); basta $1/N < \varepsilon$ (C1-007.C1).
2. Si $m > n$: $|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} = 2^{-n} \frac{1-2^{-(m-n)}}{1-1/2} < 2^{1-n}$ (C1-004.T4, C1-005.T8), y $2^{1-n} \to 0$ (C1-014.T3). Converge por C1-016.T3.
3. Es exactamente lo que demuestran los pasos 3-7 de C1-016.T3: allí solo se usó que la subsucesión converge.
4. $H_{10} \approx 2.928968$, $H_{20} \approx 3.597740$, diferencia $\approx 0.668771 \geq 1/2$.
5. No: $|a_{n+1} - a_n| = 2$ para todo n; con $\varepsilon = 1$ no existe N.

C1-017 · Límite de una función: ε–δ

Motivación

Una fábrica corta azulejos cuadrados. El cliente pide azulejos de 400 cm^2 con un error menor que 1 cm^2. La máquina corta el lado x cerca de 20 cm, pero nunca exacto. ¿Con qué precisión hay que cortar?

Si $|x-20|<1$, entonces $x+20<41$ y

$$|x^2-400| = |x-20|\,|x+20| < 41\,|x-20|.$$

- Basta, entonces, cortar con error menor que $1/41 \approx 0.024$ cm, un cuarto de milímetro.
- Con un milímetro no alcanza: $20.1^2 = 404.01$.
- Si el cliente se vuelve más exigente y pide error menor que 0.1 cm^2, basta $|x-20|<0.1/41$.

Esa es la idea de límite: para *cada* tolerancia ε en la salida hay una precisión δ en la entrada que la garantiza. Escribimos $\lim_{x\to 20} x^2 = 400$.

> **Dónde falla la analogía**
> La fábrica trabaja con una tolerancia fija. La definición de límite pide un δ para *todas* las tolerancias $\varepsilon > 0$, por pequeñas que sean.

Definiciones

Definición C1-017.D1

Sea f definida en $(a-r, a)\cup(a, a+r)$ para algún $r>0$ (al menos).

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;:\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in \operatorname{dom} f:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Una propiedad vale **cerca de** a si existe $r>0$ tal que vale para $0<|x-a|<r$.

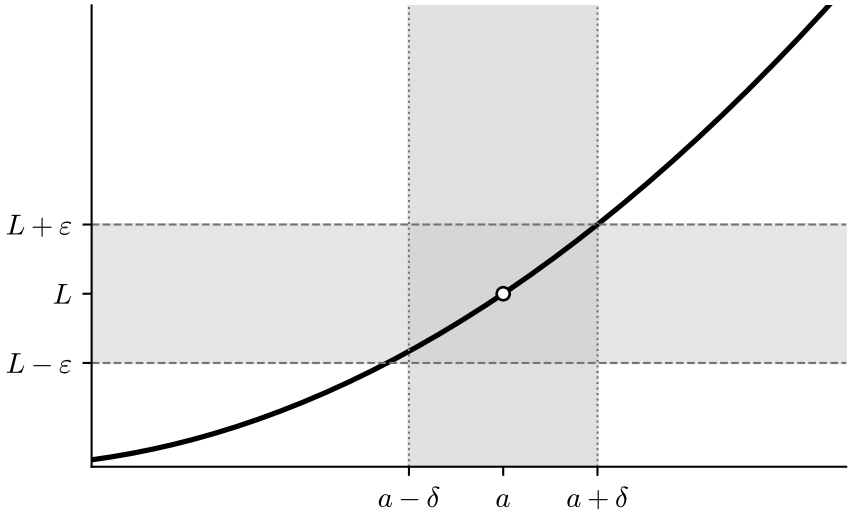


Figura 14: Para la tolerancia ε alrededor de L hay una precisión δ alrededor de a: si $0 < |x-a| < \delta$, el punto de la gráfica cae en la franja horizontal.

La condición $0 < |x-a|$ excluye a $x = a$: el valor $f(a)$, si existe, no interviene.

La hipótesis sobre el dominio garantiza que para cada $\delta > 0$ hay $x \in \operatorname{dom} f$ con $0 < |x-a| < \delta$ (por ejemplo $x = a + \delta'/2$ con δ' el menor de δ y r).

⚠ Por qué se pide el dominio alrededor de a

Sin esa hipótesis el límite no sería único: si no hubiera puntos x con $0 < |x-a| < \delta$, cualquier L cumpliría la definición.

Resultados

Teorema C1-017.T1

El límite, si existe, es único.

Idea

Si $f(x)$ estuviera cerca de L y de M a la vez, L y M estarían cerca entre sí, tanto como queramos.

Demostración.

1. Supongamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, con f definida en $(a-r, a) \cup (a, a+r)$.
2. Sea $\varepsilon > 0$. Existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para $x \in \operatorname{dom} f$, $0 < |x-a| < \delta_1$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$, y $0 < |x-a| < \delta_2$ implica $|f(x) - M| < \varepsilon$ (C1-017.D1).
3. Sea δ el menor de δ_1, δ_2, r (C1-003.T1) y $x = a + \delta/2$.
4. Entonces $a < x < a+\delta$ (C1-003.T8), así que $0 < |x-a| < \delta$ (C1-004.T3) y $x \in (a, a+r) \subset \operatorname{dom} f$.
5. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |L - M| &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T6, C1-004.T1).
6. Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, también $|L - M| \leq 0 + \varepsilon'$ para todo $\varepsilon' > 0$ (tomando $\varepsilon = \varepsilon'/2$), y $|L - M| \leq 0$ (C1-003.T9).
7. Por C1-004.T1, $|L - M| = 0$ y $L = M$. ■

Teorema C1-017.T2 (traslación)
$\lim_{h\to 0} F(a+h) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} F(x) = L$.

> **Idea**
> Es el mismo enunciado escrito con $x = a + h$.

Demostración.

1. Sea $G(h) = F(a+h)$, definida para los h con $a + h \in \operatorname{dom} F$.
2. Si F está definida en $(a-r, a) \cup (a, a+r)$, entonces G lo está en $(-r, 0) \cup (0, r)$, y recíprocamente.
3. Para $x = a + h$ se tiene $x - a = h - 0$, de modo que $0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow 0 < |h-0| < \delta$ y $F(x) = G(h)$.
4. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$, un mismo δ sirve en la definición C1-017.D1 para $\lim_{h\to 0} G(h) = L$ y para $\lim_{x\to a} F(x) = L$. ■

Ejemplo C1-017.E1

$\lim_{x\to a} c = c$; $\lim_{x\to a} x = a$; $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$.

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$. Para la constante, $|c - c| = 0 < \varepsilon$ para todo x; sirve cualquier δ, por ejemplo $\delta = 1$.
2. Para la identidad, con $\delta = \varepsilon$: $0 < |x - a| < \delta$ implica $|x - a| < \varepsilon$.
3. Para x^2, sea δ el menor de 1 y $\varepsilon/(1+2|a|)$ (C1-003.T1; es positivo por C1-003.T7, ya que $1+2|a| \geq 1 > 0$ por C1-004.T1).
4. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |x + a| &= |(x - a) + 2a| \\ &\leq |x - a| + 2|a| \\ &< 1 + 2|a| \end{aligned}$$

   (C1-004.T4, C1-004.T2).
5. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |x^2 - a^2| &= |x - a|\,|x + a| \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\,(1 + 2|a|) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T2, C1-003.T6, C1-003.T9). ■

Ejemplo ($1/x$)

Si $a \neq 0$, $\lim_{x\to a} 1/x = 1/a$.

1. Sea $\varepsilon > 0$ y δ el menor de $|a|/2$ y $\varepsilon a^2/2$.
2. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|x| \geq |a| - |x - a| > |a|/2$ (C1-004.T5); en particular $x \neq 0$.
3. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| &= \frac{|a - x|}{|x|\,|a|} \\ &< \frac{\delta}{(|a|/2)\,|a|} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(C1-004.T6, C1-003.T7).

Ejemplos que cumplen y que no

Un hueco no estorba
$g(x) = (x^2 - 400)/(x - 20)$ no está definida en 20, pero para $x \neq 20$, $g(x) = x + 20$.
Con $\delta = \varepsilon$: $0 < |x - 20| < \delta$ implica $|g(x) - 40| = |x - 20| < \varepsilon$. Así $\lim_{x \to 20} g(x) = 40$.

Un valor «mentiroso» no estorba
Si $h(x) = x^2$ para $x \neq 20$ y $h(20) = 0$, sigue siendo $\lim_{x \to 20} h(x) = 400$: la definición nunca evalúa en $x = 20$.

⚠ Un salto impide el límite

Sea $E(x) = 0$ si $x < 0$ y $E(x) = 1$ si $x \geq 0$. Supongamos $\lim_{x \to 0} E(x) = L$.

1. Con $\varepsilon = 1/2$ hay $\delta > 0$.
2. Los puntos $x = \delta/2$ y $x = -\delta/2$ cumplen $0 < |x| < \delta$ (C1-003.T8), así que $|1 - L| < 1/2$ y $|0 - L| < 1/2$.
3. Entonces $1 = |1 - 0| \leq |1 - L| + |L - 0| < 1$ (C1-004.T6), lo cual es imposible (C1-003.T1).

E no tiene límite en 0.

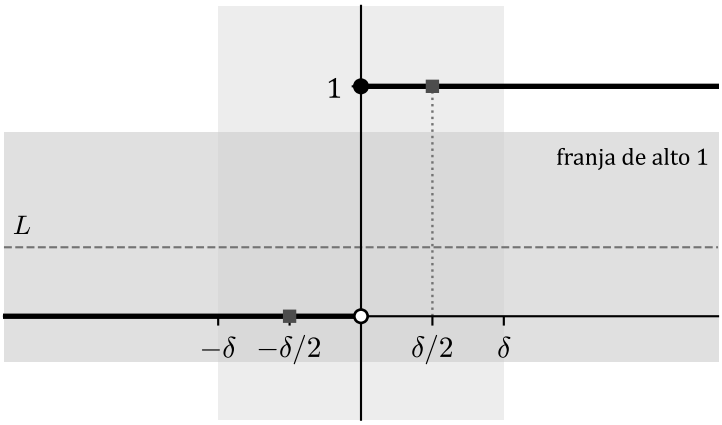


Figura 15: El escalón E y un candidato L con su franja $(L-1/2, L+1/2)$, de alto 1: por pequeño que sea δ, $E(-\delta/2)=0$ y $E(\delta/2)=1$, y ninguna franja abierta de alto 1 contiene a ambos valores.

⚠ Un δ que no sirve para todo ε

Para x^2 en 20, la elección $\delta = \varepsilon/40$ falla con $\varepsilon = 1600$: $x = 59.9$ cumple $|x-20| < 40$ y $|x^2-400| = 3188.01 > 1600$.

El «mínimo con 1» de C1-017.E1 es lo que mantiene a x cerca de a.

Ejercicios

1. Demuestra con la definición que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$.
2. Para $f(x)=x^2$ en $a=20$ y $\varepsilon=0.1$, da un δ concreto y comprueba con $x=20+\delta/2$.
3. Demuestra que $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.
4. Demuestra que $f(x)=|x|/x$ (definida para $x\neq 0$) no tiene límite en 0.
5. Escribe la negación de «$\lim_{x\to a} f(x)=L$» con cuantificadores.

Respuestas

1. $|3x-1-5| = 3|x-2|$; $\delta=\varepsilon/3$.
2. $\delta = 0.1/41 \approx 0.00244$; con $x = 20.00122$, $|x^2-400| \approx 0.0488 < 0.1$.
3. Para $x\neq 1$ el cociente vale $x+1$; $\delta=\varepsilon$.
4. $f=1$ en $x>0$ y $f=-1$ en $x<0$; con $\varepsilon=1$ se repite el argumento del salto: $2 \le |1-L|+|L+1| < 2$.
5. $\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x\in \operatorname{dom} f : 0<|x-a|<\delta$ y $|f(x)-L|\ge\varepsilon$.

C1-018 · Álgebra de límites

Motivación

Mides una mesa con una regla. El largo verdadero es 120 cm y el ancho verdadero 80 cm, así que el área es 9,600 cm^2.

Si cada medida tiene un error de hasta 0.1 cm, en el peor caso mides $120.1 \times 80.1 = 9{,}620.01$, con un error de 20.01 cm^2. El error del producto se descompone:

$$xy - LM = x(y - M) + M(x - L),$$

dos «tiras» de un marco alrededor del rectángulo.

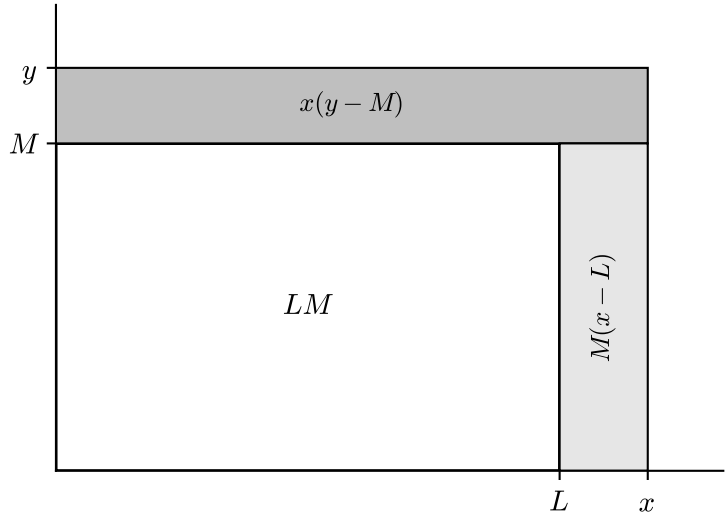


Figura 16: El error del área $xy - LM$ son las dos tiras del marco: $x(y - M)$ arriba y $M(x - L)$ a la derecha.

Si cada lado tiene error menor que η, el error del área es a lo más $(L + \eta)\eta + M\eta = 200\eta + \eta^2$. Para que sea menor que 1 cm^2 basta $\eta < 0.0049998$ cm, unas cinco centésimas de milímetro.

La pregunta de este capítulo es la versión exacta de esa cuenta: si $f(x) \to L$ y $g(x) \to M$, ¿se cumple $f(x)g(x) \to LM$? ¿Y la suma, y el cociente?

Dónde falla la analogía
Una regla real tiene un error mínimo (su grosor, la vista); no se puede medir con precisión arbitraria. Los límites hablan de funciones ideales, para todo $\varepsilon > 0$.

Resultados

Teorema C1-018.T1

Sean $\lim_{x\to a} f = L$ y $\lim_{x\to a} g = M$. Entonces $\lim(f+g) = L+M$ y $\lim fg = LM$ ($f+g$ y fg definidas en $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$). Si $M \neq 0$, $g \neq 0$ cerca de a y $\lim f/g = L/M$ (f/g definida en $\{x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g : g(x) \neq 0\}$).

La intersección de los dominios contiene $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ con r el menor de los radios de f y g (C1-003.T1), como exige C1-017.D1. Para f/g, la demostración muestra que $g \neq 0$ cerca de a, así que también f/g está definida donde lo exige C1-017.D1.

Idea
El error de la operación se escribe en términos de los errores de f y de g. Si esos errores son pequeños, y f no se escapa (en el producto) o g no se acerca a 0 (en el cociente), el error total es pequeño.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

Suma.

1. Como $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8), existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ con $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ si $0 < |x-a| < \delta_1$ y $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ si $0 < |x-a| < \delta_2$ (x en el dominio; C1-017.D1).
2. Sea δ el menor de ambos (C1-003.T1). Si $0 < |x-a| < \delta$:

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

(C1-004.T4, C1-003.T6).

Producto.

1. Con $\varepsilon = 1$ existe δ_3 tal que $|f(x) - L| < 1$ si $0 < |x - a| < \delta_3$.
2. Entonces $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$ (C1-004.T5), es decir, $|f(x)| < |L| + 1$.
3. Los números $\varepsilon/(2(|L| + 1))$ y $\varepsilon/(2(|M| + 1))$ son positivos (C1-004.T1, C1-003.T7).
4. Existen δ_4, δ_5 con $|g(x) - M| < \varepsilon/(2(|L| + 1))$ y $|f(x) - L| < \varepsilon/(2(|M| + 1))$ en sus respectivos rangos.
5. Sea δ el menor de $\delta_3, \delta_4, \delta_5$.
6. $f(x)g(x) - LM = f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)$ (axiomas de campo, C1-002).
7. Si $0 < |x - a| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leq |f(x)|\,|g(x) - M| + |M|\,|f(x) - L| \\ &< (|L| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)} + (|M| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T4, C1-004.T2, C1-003.T6, C1-003.T9).

Cociente. Sea $M \neq 0$, de modo que $|M| > 0$ (C1-004.T1).

1. Con $\varepsilon = |M|/2 > 0$ existe δ_6 tal que $|g(x) - M| < |M|/2$ si $0 < |x - a| < \delta_6$.
2. Entonces $|g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > |M|/2 > 0$ (C1-004.T5, C1-003.T8).
3. En particular $g(x) \neq 0$ y $1/g$ está definida para $0 < |x - a| < \delta_6$.
4. Como $\varepsilon M^2/2 > 0$, existe δ_7 con $|g(x) - M| < \varepsilon M^2/2$.
5. Si $0 < |x - a| < \min(\delta_6, \delta_7)$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \frac{|M - g(x)|}{|g(x)|\,|M|} \\ &< \frac{\varepsilon M^2/2}{(|M|/2)\,|M|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   (C1-004.T6, C1-003.T7).
6. Así $\lim 1/g = 1/M$.
7. Como $f/g = f \cdot (1/g)$ (C1-002.D1), la regla del producto da $\lim f/g = L \cdot (1/M) = L/M$. ■

Corolario C1-018.C1

Para p polinomio, $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$; para p/q racional con $q(a) \neq 0$, $\lim p/q = p(a)/q(a)$.

Idea

Los polinomios se arman con constantes y con x usando sumas y productos; se aplica C1-018.T1 un número finito de veces, por inducción.

Demostración.

1. Para $k = 0$, $x^0 = 1$ es constante (C1-005.D2) y su límite es $1 = a^0$ (C1-017.E1).
2. Si $\lim x^k = a^k$, entonces $x^{k+1} = x^k \cdot x$ y $\lim x^{k+1} = a^k \cdot a = a^{k+1}$ (regla del producto, $\lim x = a$ por C1-017.E1).
3. Por inducción, $\lim_{x\to a} x^k = a^k$ para todo $k \geq 0$ (C1-005.T1).
4. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (C1-010.D2). Por la regla del producto con la constante a_k, $\lim a_k x^k = a_k a^k$.
5. Por inducción sobre el número de sumandos y la regla de la suma, $\lim p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = p(a)$.
6. Si $q(a) \neq 0$, como $\lim q = q(a) \neq 0$, la regla del cociente da $\lim p/q = p(a)/q(a)$ (y en su demostración se vio que $q \neq 0$ cerca de a, así que p/q está definida ahí). ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Que existan los dos límites

Sea $E(x) = 0$ si $x < 0$ y $E(x) = 1$ si $x \geq 0$. Ni E ni $1 - E$ tienen límite en 0 (C1-017, ejemplo del salto; para $1 - E$ el mismo argumento), pero $E + (1 - E) = 1$ sí lo tiene. El teorema va en un solo sentido.

⚠ Un factor que se escapa

$f(x) = 1/x$ y $g(x) = x$ en $a = 0$: $fg = 1$ para $x \neq 0$, con límite 1.
Pero f no tiene límite en 0: si lo tuviera, igual que en el paso de la cota, sería $|1/x| < |L| + 1$ cerca de 0, y $x = 1/n$ con $n > |L| + 1$ (C1-007.C1) da $|1/x| = n$, contradicción.

⚠ El cociente con $M = 0$

Con $f = 1$ y $g(x) = x$ en 0, $f/g = 1/x$ no tiene límite (por lo anterior). Con $f(x) = x$ y $g(x) = x$, $f/g = 1$ para $x \neq 0$ y tiene límite 1.

Con $M = 0$ puede pasar cualquier cosa: por eso la regla lo excluye, y cuando $M = 0$ simplemente no se aplica.

Ejercicios

1. Calcula $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ justificando cada paso con C1-018.C1.
2. Calcula $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. ¿Por qué no se aplica directamente la regla del cociente?
3. Demuestra: si $\lim f = L$, entonces $\lim |f| = |L|$.
4. Demuestra: si $\lim f = 0$ y g es acotada cerca de a, entonces $\lim fg = 0$ (aunque g no tenga límite).
5. En el problema de la mesa, ¿qué precisión η garantiza un error de área menor que 0.1 cm^2?

Respuestas

1. $q(2) = 5 \neq 0$; el límite es $p(2)/q(2) = (8 - 6 + 1)/5 = 3/5$.
2. $M = \lim(x - 2) = 0$. Para $x \neq 2$ el cociente es $x + 2$, con límite 4 (C1-018.C1); en $x = 2.001$ vale 4.001.
3. $\big||f(x)| - |L|\big| \leq |f(x) - L|$ (C1-004.T5); el mismo δ sirve.
4. Si $|g| \leq K$ cerca de a ($K > 0$), $|fg| \leq K|f|$; con $|f| < \varepsilon/K$ se obtiene $|fg| < \varepsilon$.
5. Hace falta $200\eta + \eta^2 < 0.1$; basta $\eta \leq 0.0004999$ cm (por ejemplo $\eta = 0.0004$, que da 0.08000016).

C1-019 · Límite por sucesiones

Motivación

Dos amigos se acercan a la marca 0 de una regla con un sensor que mide $E(x) = 0$ si $x < 0$ y $E(x) = 1$ si $x \geq 0$.

- Ana se acerca por $1, 1/2, 1/3, \ldots$ y su sensor siempre marca 1.
- Beto se acerca por $-1, -1/2, -1/3, \ldots$ y el suyo siempre marca 0.

Cada uno «ve» un valor límite distinto.

¿Cuántos caminos hay que probar para asegurar que una función tiende a un valor? Uno no basta, como muestran Ana y Beto. Dos que coincidan tampoco: con la función de Dirichlet, que vale 1 en los racionales y 0 en los irracionales, los caminos $1/n$ y $2/n$ dan 1, pero $\sqrt{2}/n$ da 0.

El teorema de este capítulo dice que hay que probarlos todos, y que «todos los caminos» equivale exactamente a la definición ε–δ.

> **Dónde falla la analogía**
> Dos amigos solo pueden probar unos cuantos caminos. El teorema habla de todas las sucesiones, y su utilidad es que una sola demostración ε–δ las cubre todas.

Resultados

En todo el capítulo, f está definida en $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ para algún $r > 0$, como en C1-017.D1.

Teorema C1-019.T1
$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ para toda sucesión (x_n) en $\operatorname{dom} f$ con $x_n \neq a$ y $x_n \to a$, $f(x_n) \to L$.

> **Idea**
> Ida: el δ de la definición se convierte en el N de la sucesión. Vuelta: si el límite fallara, tomamos un punto «malo» para cada $\delta = 1/n$ y obtenemos una sucesión que lo delata.

Demostración.

($\Rightarrow$)

1. Supongamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y sea (x_n) una sucesión en $\operatorname{dom} f$ con $x_n \neq a$ y $x_n \to a$.
2. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ como en C1-017.D1.
3. Como $x_n \to a$, existe N con $|x_n - a| < \delta$ para $n \geq N$ (C1-012.D1 con el número positivo δ).
4. Como $x_n \neq a$, $0 < |x_n - a|$ (C1-004.T1).
5. Por lo tanto $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, y $f(x_n) \to L$ (C1-012.D1).

($\Leftarrow$) Probamos la contrarrecíproca.

6. Supongamos que no es cierto que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
7. Negando C1-017.D1: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay $x \in \operatorname{dom} f$ con $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.
8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos uno de esos puntos con $\delta = 1/n$ y lo llamamos x_n (elección numerable, C1-012.Ax1).
9. Entonces $x_n \in \operatorname{dom} f$, $x_n \neq a$ (C1-004.T1) y $|x_n - a| < 1/n$.
10. Dado $\varepsilon > 0$, existe N con $1/N < \varepsilon$ (C1-007.C1), y para $n \geq N$, $|x_n - a| < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$ (C1-003.T7); así $x_n \to a$.
11. Pero $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ para todo n, de modo que, con $\varepsilon = \varepsilon_0$, ningún N cumple C1-012.D1: $f(x_n)$ no tiende a L.
12. La condición de sucesiones falla. ■

Teorema C1-019.T2 (sándwich para funciones)
$g \leq f \leq h$ cerca de a y $\lim g = \lim h = L \Rightarrow \lim f = L$.

> **Idea**
> Se traduce a sucesiones con C1-019.T1 y se aplica el sándwich de sucesiones.

Demostración.

1. Sea $\rho > 0$ tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para $0 < |x - a| < \rho$ (las tres funciones definidas ahí).
2. Sea (x_n) en dom f con $x_n \neq a$ y $x_n \to a$.
3. Existe N_0 con $|x_n - a| < \rho$ para $n \geq N_0$ (C1-012.D1).
4. La sucesión $x'_n := x_{n+N_0}$ es una subsucesión de (x_n) (C1-015.D1), así que $x'_n \to a$ (C1-015.T1), $x'_n \neq a$, y $0 < |x'_n - a| < \rho$ para todo n.
5. Por C1-019.T1 aplicado a g y a h: $g(x'_n) \to L$ y $h(x'_n) \to L$.
6. Como $g(x'_n) \leq f(x'_n) \leq h(x'_n)$ para todo n, el sándwich de sucesiones da $f(x'_n) \to L$ (C1-014.T1).
7. Entonces $f(x_n) \to L$: dado $\varepsilon > 0$, si $|f(x'_n) - L| < \varepsilon$ para $n \geq N$, se tiene $|f(x_m) - L| < \varepsilon$ para $m \geq N + N_0$ (C1-012.D1).
8. Como (x_n) era arbitraria, C1-019.T1 da $\lim_{x \to a} f(x) = L$. ■

Teorema C1-019.T3 (signo y orden)

Si $\lim_{x \to a} g = L > 0$, entonces $g > 0$ cerca de a (análogo con $L < 0$). Si $f \leq g$ cerca de a y ambos límites existen, $\lim f \leq \lim g$.

> **Idea**
> Signo: con $\varepsilon = L$, g queda en $(0, 2L)$. Orden: se evalúa en una sucesión concreta que tiende a a y se usa que las desigualdades pasan al límite en sucesiones.

Demostración.

Signo.

1. Con $\varepsilon = L > 0$, C1-017.D1 da $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|g(x) - L| < L$.
2. Es decir, $0 < g(x) < 2L$ (C1-004.T3); en particular $g(x) > 0$.
3. Si $L < 0$, se aplica lo anterior a $-g$, cuyo límite es $-L > 0$ (C1-018.T1 con la constante -1, o directamente de la definición, ya que $|-g(x) - (-L)| = |g(x) - L|$ por C1-004.T1).

Orden.

4. Sea $\rho > 0$ tal que f y g están definidas y $f(x) \leq g(x)$ para $0 < |x - a| < \rho$, y sean $A = \lim f$, $B = \lim g$.
5. Sea $x_n = a + \rho/(2n)$. Como $\rho/(2n) \to 0$ (C1-012.T2, C1-013.T2), $x_n \to a$.
6. Además $0 < \rho/(2n) < \rho$ (C1-003.T7, C1-005.T2), así que $x_n \neq a$ y $0 < |x_n - a| < \rho$.
7. Por C1-019.T1, $f(x_n) \to A$ y $g(x_n) \to B$.
8. Como $f(x_n) \leq g(x_n)$ para todo n, C1-013.T3 da $A \leq B$. ■

Ejemplo C1-019.E1
La función de Dirichlet (1 en $\mathbb{Q}$, 0 fuera) no tiene límite en ningún punto.

Demostración.

1. Sea D la función de Dirichlet, $a \in \mathbb{R}$, y supongamos $\lim_{x \to a} D(x) = L$.
2. Para cada n hay un racional q_n con $a < q_n < a + 1/n$ (C1-007.T3) y un irracional i_n con $a < i_n < a + 1/n$ (C1-008.T3); elegimos uno de cada clase para cada n (elección numerable, C1-012.Ax1).
3. Ambas sucesiones cumplen $x_n \neq a$ y $|x_n - a| < 1/n$, así que tienden a a (como en la demostración de C1-019.T1, con C1-007.C1).
4. Además $D(q_n) = 1$ y $D(i_n) = 0$ para todo n: son sucesiones constantes, con límites 1 y 0 (C1-012.T2).
5. Por C1-019.T1, ambas deberían tender a L; por unicidad (C1-012.T1), $L = 1$ y $L = 0$, lo cual es imposible. ■

⚠ **Nota**

La gráfica de $\text{sen}(1/x)$, que oscila sin parar cerca de 0, ilustra el mismo fenómeno; se muestra solo como imagen y se justificará más adelante. El ejemplo formal es el de Dirichlet, que no necesita trigonometría.

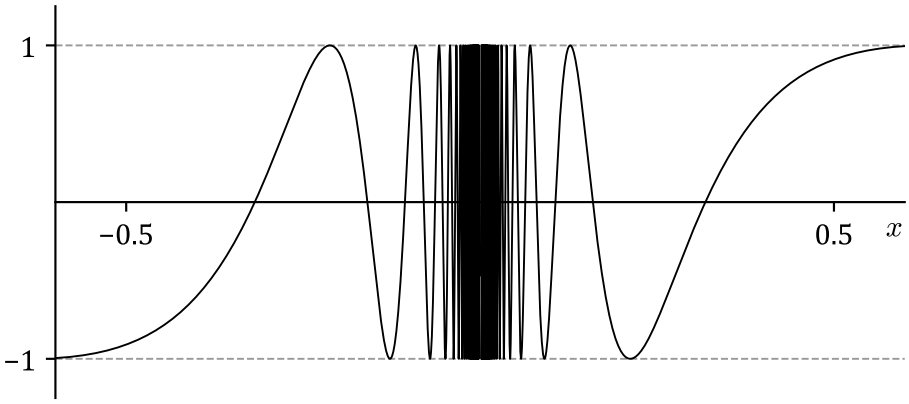


Figura 17: La gráfica de $\operatorname{sen}(1/x)$ cerca de 0: oscila entre -1 y 1 cada vez más rápido (solo ilustración).

Por qué cada hipótesis

⚠ **«Toda sucesión», no una**

Para el escalón E en 0, $x_n = 1/n$ da $E(x_n) = 1 \to 1$, pero $y_n = -1/n$ da $E(y_n) = 0 \to 0$; por C1-019.T1 y C1-012.T1, E no tiene límite en 0.

⚠ **«Toda sucesión», no dos**

Para Dirichlet en 0, $1/n$ y $2/n$ (racionales, C1-005.T6) dan ambas 1; pero $\sqrt{2}/n$ es irracional (si fuera racional, $\sqrt{2} = n \cdot (\sqrt{2}/n)$ lo sería, contra C1-008.T1 y C1-005.T6) y da 0.

⚠ $x_n \neq a$

Sea $h(x) = x^2$ si $x \neq 20$ y $h(20) = 0$. Entonces $\lim_{x\to 20} h(x) = 400$ (la definición no evalúa en 20), pero la sucesión constante $x_n = 20$ tiende a 20 y $h(x_n) = 0 \to 0$.
Sin la condición $x_n \neq a$, la ida ($\Rightarrow$) sería falsa.

Ejercicios

1. Usa C1-019.T1 para demostrar que $f(x) = |x|/x$ no tiene límite en 0.
2. Demuestra con C1-019.T2 que $\lim_{x\to 0} x\,D(x) = 0$, donde D es la función de Dirichlet.

3. Sea $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. ¿En qué puntos tiene límite?
4. Demuestra: si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y (x_n) es una sucesión en dom f con $x_n \to a$ y $x_n \neq a$, entonces $(f(x_n))$ es acotada.
5. Demuestra que, si $f \leq 3$ cerca de a y $\lim f$ existe, entonces $\lim f \leq 3$.

Respuestas

1. $1/n \to 0$ da 1; $-1/n \to 0$ da -1; por C1-012.T1 no hay un único límite.
2. $-|x| \leq xD(x) \leq |x|$ y $\lim |x| = 0$ (con $\delta = \varepsilon$).
3. Solo en $a = 0$ (sándwich con $\pm|x|$). Si $a \neq 0$, racionales $q_n \to a$ dan $f(q_n) \to a$ e irracionales dan $0 \neq a$.
4. $f(x_n) \to L$ (C1-019.T1) y toda convergente es acotada (C1-013.T1).
5. Por C1-019.T3 con $g = 3$ constante: $\lim f \leq \lim 3 = 3$ (C1-017.E1).

C1-020 · Límites laterales, al infinito e infinitos

Motivación

> **El café que se enfría**
> Sirves café a 90 °C en una cocina a 20 °C. Un modelo sencillo para la temperatura, t minutos después, es
>
> $$T(t) = \frac{20t + 900}{t + 10}.$$
>
> Así $T(0) = 90, T(10) = 55, T(60) = 30$ y $T(170) \approx 23.89$.
> Como $T(t) - 20 = 700/(t + 10) > 0$, el café nunca llega a 20 °C. Pero se acerca tanto como queramos: baja de 20.5 después del minuto 1,390 y de 20.1 después del minuto 6,990.
> Decimos que $\lim_{t\to\infty} T(t) = 20$ y que la recta $y = 20$ es una asíntota horizontal.
> Dónde falla la analogía: el café real se enfría siguiendo otra ley (exponencial, que se estudiará en C2-023) y un termómetro real no distingue 20.0 de 20.01. El límite es una afirmación sobre la función ideal y sobre todos los $\varepsilon > 0$.

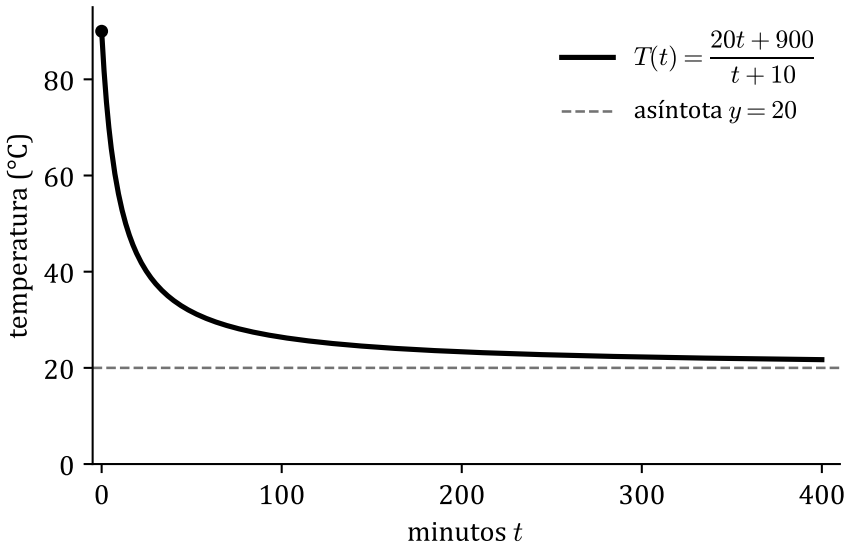


Figura 18: El modelo del café: $T(t)$ se acerca a la asíntota horizontal $y = 20$ sin tocarla.

En este capítulo ampliamos la definición de límite en tres direcciones:

- acercarse a a por un solo lado;
- dejar que x crezca sin cota;
- dejar que $f(x)$ crezca sin cota.

Definiciones

Definición C1-020.D1 (límites laterales, en el infinito, infinitos, asíntotas)

Límites laterales $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to a^-}$; $\lim_{x\to\pm\infty} f = L$; $\lim f = \pm\infty$; asíntotas vertical y horizontal. Explícitamente:

- Si f está definida en $(a, a + r)$ para algún $r > 0$,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

  Análogamente $\lim_{x\to a^-}$, con f definida en $(a - r, a)$ y la condición $a - \delta < x < a$.

- Si f está definida en (c, ∞),

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M\ \forall x \in \operatorname{dom} f : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

  Análogamente $\lim_{x\to-\infty}$, con f definida en $(-\infty, c)$ y la condición $x < M$.

-

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty :\Leftrightarrow \forall K\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K;$$

  para $-\infty$, $f(x) < K$. Lo mismo con a^+, a^-, ∞ o $-\infty$ en lugar de a, cambiando la condición sobre x como en los incisos anteriores.
- Para una sucesión, $x_n \to \infty :\Leftrightarrow \forall K\ \exists N\ \forall n \geq N : x_n > K$ (análogo para $-\infty$).
- La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de f si alguno de los límites laterales de f en a es ∞ o $-\infty$. La recta $y = L$ es **asíntota horizontal** si $\lim_{x\to\infty} f = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f = L$.

⚠ Cuidado: «el límite es infinito»

Escribir $\lim f = \infty$ no afirma que el límite exista como número real (no existe): describe la manera en que no existe.

Resultados

Laterales y límite

Teorema C1-020.T1

$\lim_{x\to a} f = L \Leftrightarrow$ los dos límites laterales existen y valen L.

Idea de la demostración

«Cerca de a» es «cerca de a por la izquierda o por la derecha»; con el menor de los dos δ se cubren ambos lados.

Demostración.

($\Rightarrow$)

1. Dado $\varepsilon > 0$, sea δ el de C1-017.D1.
2. Si $a < x < a + \delta$, entonces $0 < |x - a| < \delta$ (C1-004.T3), y $|f(x) - L| < \varepsilon$.
3. Eso prueba $\lim_{x \to a^+} f = L$. Igual con $a - \delta < x < a$.

($\Leftarrow$)

1. Dado $\varepsilon > 0$, sean δ_+ y δ_- los de los límites laterales y δ el menor de ambos (C1-003.T1).
2. Si $0 < |x - a| < \delta$, o bien $a < x < a + \delta \leq a + \delta_+$, o bien $a - \delta_- \leq a - \delta < x < a$ (tricotomía, C1-003.T1, y C1-004.T3).
3. En ambos casos $|f(x) - L| < \varepsilon$.
4. Además f está definida en $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ con r el menor de los radios laterales.
5. Por lo tanto $\lim_{x \to a} f = L$ (C1-017.D1). ■

Los teoremas anteriores en versión lateral y en $\pm\infty$

Teorema C1-020.T2

C1-017.T1, C1-018.T1, C1-019.T1, C1-019.T2 y C1-019.T3 valen también para límites laterales y para $x \to \pm\infty$ (misma demostración); en la versión en $\pm\infty$ de C1-019.T1, la condición «$x_n \to a$, $x_n \neq a$» se cambia por «$x_n \to \pm\infty$» (C1-020.D1).

Idea de la demostración

Las demostraciones de esos resultados solo usan dos propiedades de la condición «$0 < |x-a| < \delta$»:

- de dos condiciones de ese tipo, una más fuerte implica las dos (tomando el mínimo);
- la condición se cumple a partir de cierto índice en una sucesión adecuada.

Ambas valen para las condiciones laterales y en $\pm\infty$.

Demostración. Se hace el siguiente cambio en cada demostración:

En C1-018 y C1-019 (límite en a)	límite en a^+	límite en ∞
$0 < \|x - a\| < \delta$	$a < x < a + \delta$	$x > M$
$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \ldots)$	$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \ldots)$	$M = \max(M_1, M_2, \ldots)$

En C1-018 y C1-019 (límite en a)	límite en a^+	límite en ∞
sucesión $x_n \to a, x_n \neq a$	$x_n \to a, x_n > a$	$x_n \to \infty$
en la vuelta de C1-019.T1, $\delta = 1/n$	$\delta = 1/n$	$M = n$
en C1-019.T3, $x_n = a + \rho/(2n)$	$x_n = a + \rho/(2n)$	$x_n = M + n$
en C1-017.T1, el punto $x = a + \delta/2$	$x = a + \delta/2$	x = el mayor de M y c, más 1

(El caso a^- es simétrico al de a^+ y $-\infty$ al de ∞.)

Con este cambio cada paso sigue justificado por las mismas razones, porque:

1. Si $M = \max(M_1, M_2)$ y $x > M$, entonces $x > M_1$ y $x > M_2$ (C1-003.T2).
2. Si $a < x < a + \min(\delta_1, \delta_2)$ entonces $a < x < a + \delta_i$ para $i = 1, 2$.
3. Las sucesiones de la última columna cumplen la condición correspondiente desde algún índice.

Para ilustrar, escribimos completos dos casos en ∞.

Suma en ∞. Supongamos $\lim_{x\to\infty} f = L$ y $\lim_{x\to\infty} g = M'$.

1. Dado $\varepsilon > 0$ hay M_1 y M_2 con $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ para $x > M_1$ y $|g(x) - M'| < \varepsilon/2$ para $x > M_2$ (C1-020.D1, C1-003.T8).
2. Con $M = \max(M_1, M_2)$ y $x > M$ (C1-004.T4):

$$|f(x) + g(x) - (L + M')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M'| < \varepsilon.$$

C1-019.T1 en ∞: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ para toda sucesión (x_n) en $\operatorname{dom} f$ con $x_n \to \infty$, $f(x_n) \to L$.

Ida:

1. Dado ε, sea M el de C1-020.D1.
2. Como $x_n \to \infty$, hay N con $x_n > M$ para $n \geq N$.
3. Entonces $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para $n \geq N$.

Vuelta, por contrarrecíproca:

1. Si no vale el límite, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo M hay $x \in \operatorname{dom} f$ con $x > M$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.
2. Elegimos uno con $M = n$ para cada n y lo llamamos x_n (elección numerable, C1-012.Ax1).
3. Dado K, hay $N > K$ (C1-007.C1) y para $n \geq N$, $x_n > n \geq N > K$: $x_n \to \infty$.
4. Pero $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ para todo n: $f(x_n) \not\to L$. ■

Producto con un factor infinito

Teorema C1-020.T5 (producto con un factor infinito)

Sean u, v con $\lim u = \infty$ y $\lim v = c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, ambos cuando $x \to a$ (o ambos en a^+, en a^-, en ∞ o en $-\infty$). Entonces $\lim uv = \infty$ si $c > 0$ y $\lim uv = -\infty$ si $c < 0$.

> **Idea de la demostración**
> Cerca de a, v queda por encima de $c/2 > 0$, y u se puede hacer tan grande como se quiera; el producto también.

Demostración. Lo hacemos para $x \to a$; los demás casos son iguales con el cambio de la tabla de C1-020.T2.

Caso $c > 0$:

1. Con $\varepsilon = c/2 > 0$ (C1-003.T8, C1-003.T7) hay $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica $|v(x)-c| < c/2$, y entonces $v(x) > c/2$ (C1-004.T3).
2. Sea $K \in \mathbb{R}$ y $K' := (2/c)(|K| + 1) > 0$ (C1-004.T1, C1-003.T7).
3. Como $u \to \infty$, hay $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2$ implica $u(x) > K'$ (C1-020.D1).
4. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2 (C1-003.T1). Para $0 < |x - a| < \delta$ se tiene $u(x) > K' > 0$ y $v(x) > c/2 > 0$.
5. Así que (C1-003.T6)
$$u(x)v(x) > K' \cdot \frac{c}{2} = |K| + 1 > K.$$
6. Luego $uv \to \infty$.

Caso $c < 0$:

1. La función $-v$ tiende a $-c > 0$, pues $|-v(x)-(-c)| = |v(x)-c|$ (C1-004.T1).
2. Por el caso anterior, $u \cdot (-v) \to \infty$.
3. Entonces $uv = -(u \cdot (-v)) \to -\infty$ (C1-002.T4: si $-(uv) > -K$ entonces $uv < K$, C1-003.T9). ■

(Si $u \to -\infty$, se aplica el teorema a $-u$.)

Cocientes de polinomios en $\pm\infty$

Teorema C1-020.T3

$\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$. Si p tiene grado m y coeficiente principal a_m, y q grado n y coeficiente principal b_n, cuando $x \to \pm\infty$: $p/q \to 0$ si $m < n$; $p/q \to a_m/b_n$ si $m = n$; si $m > n$, $|p/q| \to \infty$ con el signo de $(a_m/b_n)(\pm 1)^{m-n}$.

> **Idea de la demostración**
> Se saca como factor la potencia más alta: $p(x) = x^m P(x)$ con $P(x) \to a_m$, y lo mismo con q. Todo se reduce a x^{m-n}.

Demostración.

Paso 1: $1/x$.

1. Dado $\varepsilon > 0$, sea $M = 1/\varepsilon > 0$.
2. Si $x > M$, entonces $0 < 1/x < 1/M = \varepsilon$ (C1-003.T7), así que $|1/x - 0| < \varepsilon$.
3. Si $x < -M$, entonces $|x| > M$ y $|1/x| = 1/|x| < \varepsilon$ (C1-004.T6, C1-003.T7).
4. Así $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$.
5. Por la regla del producto en $\pm\infty$ (C1-020.T2) e inducción (C1-005.T1), $\lim_{x\to\pm\infty} x^{-j} = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Paso 2: factorización.

1. Sean $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, con $a_m \neq 0 \neq b_n$ (C1-010.D2).

2. Para $x \neq 0$ (C1-005.T9):

$$p(x) = x^m P(x), \quad P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{k-m}; \qquad q(x) = x^n Q(x), \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{k-n}.$$

3. Por las reglas de la suma y el producto en $\pm\infty$ (C1-020.T2), $P(x) \to a_m$ y $Q(x) \to b_n$.
4. Como $b_n \neq 0$, la regla del cociente da $R := P/Q \to c := a_m/b_n \neq 0$; en particular $Q \neq 0$ (y por lo tanto $q \neq 0$) para $|x|$ grande.
5. Allí $p(x)/q(x) = x^{m-n} R(x)$ (C1-005.T9).

Paso 3: los tres casos.

1. *Caso $m = n$.* $p/q = R \to a_m/b_n$.
2. *Caso $m < n$.* $p/q = x^{-(n-m)} R(x) \to 0 \cdot c = 0$ (regla del producto en $\pm\infty$).
3. *Caso $m > n$.* Sea $k = m - n \in \mathbb{N}$.
   - Para $|x| \geq 1$, $|x|^k \geq |x|$ (C1-005.T9 e inducción en k, C1-005.T1).
   - Así $|x|^k \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$: dado K, basta $|x|$ mayor que 1 y que K.
   - Cuando $x \to \infty$, $p/q = x^k R(x)$ con $x^k = |x|^k \to \infty$ y $R \to c \neq 0$; por C1-020.T5, $p/q \to \infty$ si $c > 0$ y $p/q \to -\infty$ si $c < 0$.
   - Cuando $x \to -\infty$, $x^k = (-1)^k |x|^k$ (C1-005.T9), así que $p/q = |x|^k \cdot \big((-1)^k R(x)\big)$ con $(-1)^k R \to (-1)^k c \neq 0$ (regla del producto en $-\infty$, C1-020.T2).
   - Por C1-020.T5, $p/q \to \pm\infty$ con el signo de $(-1)^k c$.
4. En los dos casos el signo es el de $(a_m/b_n)(\pm 1)^{m-n}$. ■

Identidad de polinomios

Teorema C1-020.T4 (identidad de polinomios)
Si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ para todo x, todos los a_k son 0.

> **Idea de la demostración**
> Si algún coeficiente no fuera cero, el de mayor índice dominaría cuando $x \to \infty$.

Demostración.

1. Supongamos que algún $a_k \neq 0$ y sea m el mayor de esos índices, de modo que $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ tiene grado m y coeficiente principal $a_m \neq 0$ (C1-010.D2).
2. Si $m = 0$, $p(x) = a_0 \neq 0$ para todo x, en contra de la hipótesis.
3. Si $m \geq 1$, sea $q(x) = x^m$, de grado m y coeficiente principal 1.
4. Por C1-020.T3, $p(x)/q(x) \to a_m$ cuando $x \to \infty$.
5. Por la versión en ∞ de C1-019.T1 (C1-020.T2) con la sucesión $x_n = n \to \infty$ (C1-007.C1), $p(n)/n^m \to a_m$.
6. Pero $p(n)/n^m = 0$ para todo n, así que también $p(n)/n^m \to 0$ (C1-012.T2).
7. Por unicidad (C1-012.T1), $a_m = 0$: contradicción. ■

Ejemplos y contraejemplos

- **Laterales distintos.** Para el escalón E (0 si $x < 0$, 1 si $x \geq 0$): $\lim_{x\to 0^-} E = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} E = 1$ (con cualquier δ). Como no coinciden, C1-020.T1 dice que $\lim_{x\to 0} E$ no existe.
- **Asíntota vertical.** Dado $K > 0$, con $\delta = 1/K$: $0 < x < \delta$ implica $1/x > K$ (C1-003.T7). Así $\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$, y análogamente $\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$: $x = 0$ es asíntota vertical.
- **Asíntota horizontal.** Para el café, $T(t) = (20t + 900)/(t + 10)$ tiene grados iguales, así que $\lim_{t\to\infty} T = 20/1 = 20$ (C1-020.T3). Directamente: si $t > 700/\varepsilon$, $0 < T(t) - 20 < 700/t < \varepsilon$.
- **Una asíntota que se cruza.** $f(x) = (2x^2 + x)/(x^2 + 1) \to 2$ en $\pm\infty$, y $f(2) = 2$.
- **Sin límite en ∞.** $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ (C1-007.T2): con $x_n = 2n \to \infty$, $f(x_n) = 1$; con $y_n = 2n + 1$, $f(y_n) = -1$. Por la versión en ∞ de C1-019.T1 y C1-012.T1, no tiene límite.

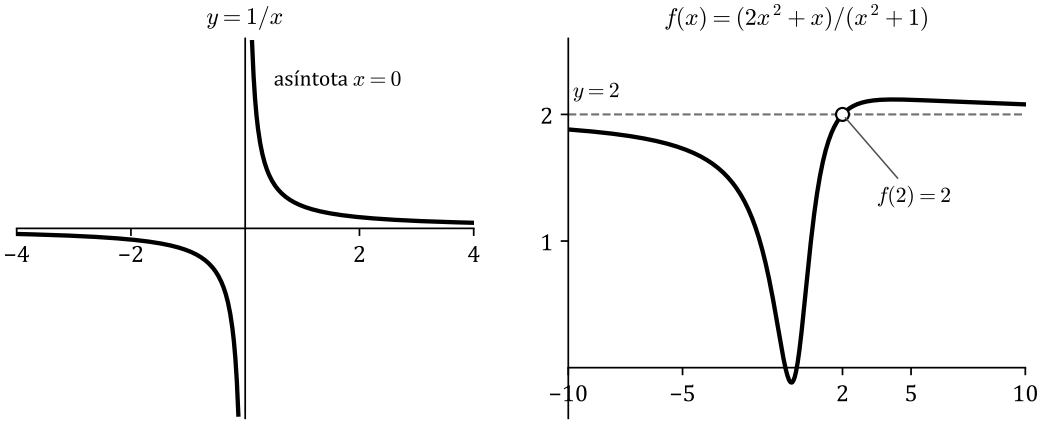


Figura 19: Izquierda: $1/x$ y su asíntota vertical $x = 0$. Derecha: $(2x^2 + x)/(x^2 + 1)$ cruza su asíntota horizontal $y = 2$ en $x = 2$.

⚠ Cuidado: una asíntota horizontal sí se puede cruzar

La asíntota horizontal habla de lo que pasa cuando $x \to \pm\infty$, no de que la gráfica nunca toque la recta: el ejemplo $(2x^2 + x)/(x^2 + 1)$ vale 2 en $x = 2$.

Ejercicios

1. Calcula $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x}{5x^2 + 7}$, $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + 4}{x^2}$.
2. Demuestra con la definición que $\lim_{x\to1^+} \dfrac{1}{x - 1} = \infty$.
3. Demuestra: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to0^+} f(1/t) = L$.
4. ¿Tiene $f(x) = |x - 2|/(x - 2)$ límite en 2? Calcula los laterales.
5. En el modelo del café, ¿a partir de qué minuto $T(t) < 20.01$?

Respuestas

1. $3/5$; $-\infty$ (grado $3 > 2$, signo $(1)(-1)^1 < 0$); 0.
2. Dado $K > 0$, $\delta = 1/K$: $1 < x < 1 + \delta$ implica $1/(x - 1) > K$.
3. Si $x > M > 0 \Leftrightarrow 0 < t = 1/x < 1/M$; el M de un lado da el $\delta = 1/M$ del otro.
4. $\lim_{x\to2^+} = 1$, $\lim_{x\to2^-} = -1$: no hay límite (C1-020.T1).
5. $700/(t + 10) < 0.01 \Leftrightarrow t > 69{,}990$ min.

C1-021 · El límite sen x / x

⚠ Advertencia G1

Este capítulo usa seno y coseno. En Cálculo I no se definen con rigor: se aceptan, sin demostración, los **hechos geométricos provisionales C1-021.G1**, que vienen de la geometría del círculo unitario.

- Todo resultado marcado «⚠ G1» depende de ellos.
- Se demuestran en C2-014, donde seno y coseno se definen a partir de la integral; allí habrá que deducir de nuevo que sen′ = cos, sin citar este capítulo (hacerlo sería circular).
- Ningún teorema no trigonométrico de Cálculo I depende de G1.

Motivación

El columpio

Un columpio de cuerda de 1 m se aparta un ángulo x (en radianes) de la vertical. El asiento recorre un arco de longitud x y se separa horizontalmente $\operatorname{sen} x$ de la vertical. Para columpios pequeños, ¿la separación y el arco son casi iguales? Numéricamente,

$$\frac{\operatorname{sen}(0.5)}{0.5} \approx 0.958851, \qquad \frac{\operatorname{sen}(0.1)}{0.1} \approx 0.998334, \qquad \frac{\operatorname{sen}(0.01)}{0.01} \approx 0.999983.$$

El cociente parece tender a 1, aunque numerador y denominador tienden a 0.

Dónde falla la analogía: un columpio real tiene cuerda flexible y se mide con error, y el dibujo solo da la imagen. La demostración no usa el columpio, sino los hechos G1, que en Cálculo I son provisionales.

En este capítulo lo demostramos. En el círculo unitario, el segmento vertical $\operatorname{sen} x$, el arco x y el segmento tangente $\tan x$ están ordenados,

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x,$$

y de ahí se obtiene un sándwich.

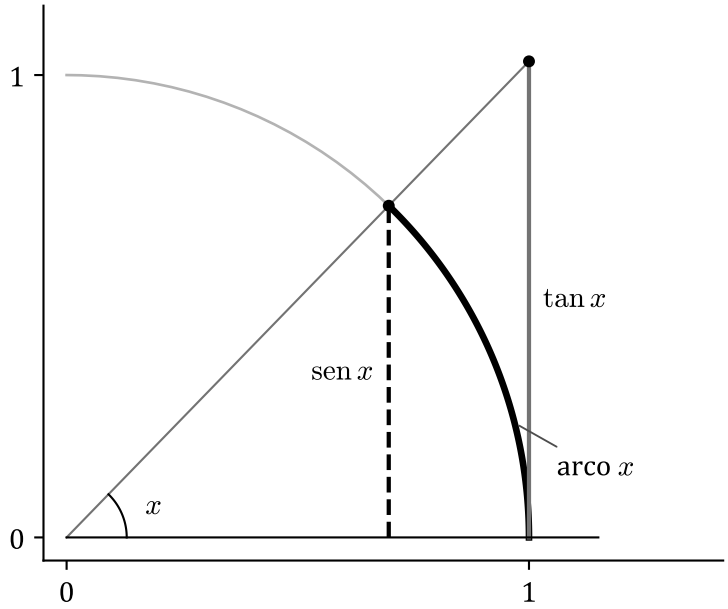


Figura 20: En el círculo unitario: el segmento vertical sen x, el arco x y el segmento tangente tan x.

Definiciones y hechos provisionales

C1-021.G1 ⚠ (hechos geométricos provisionales)

(sen y cos definidos con el círculo unitario.) Para todo x están definidos $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, y existe $\pi > 0$, con

- $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$;
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $\cos(-x) = \cos x$;
- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- fórmulas de suma de sen y cos;
- tan := sen / cos;
- para $0 < x < \pi/2$, $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$.

Las fórmulas de suma son

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y, \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Con $y = x$ dan $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

Los ángulos se miden en radianes: la desigualdad $\operatorname{sen} x < x$ compara la longitud del segmento con la longitud del arco.

Lema (cos > 0 cerca de 0) ⚠ G1

Si $|x| < \pi/2$, entonces $\cos x > 0$.

(Es la primera afirmación de C1-021.T0; la probamos aquí porque las demás la usan.)

Demostración.

1. Si $0 < x < \pi/2$, por G1 $\tan x$ está definida (así que $\cos x \neq 0$) y $\tan x > \operatorname{sen} x > 0$.
2. Como $\cos x = \operatorname{sen} x / \tan x$, es positivo (C1-003.T4, C1-003.T7).
3. Si $-\pi/2 < x < 0$, $\cos x = \cos(-x) > 0$ por el paso anterior (G1).
4. Y $\cos 0 = 1 > 0$ (C1-003.T5). ■

Resultados

Cotas y límites de seno y coseno

Teorema C1-021.T0 ⚠ G1

$\cos x > 0$ si $|x| < \pi/2$; $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y $|\cos x| \leq 1$ para todo x; $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$; $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

> **Idea de la demostración**
> Las cotas salen de $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y de $\operatorname{sen} x < x$, que se extiende a todo x partiendo el ángulo a la mitad muchas veces; los límites salen de $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y de $0 \leq 1 - \cos x \leq x^2$.

Demostración.

Paso 1: $\cos x > 0$ *si* $|x| < \pi/2$. Es el Lema anterior.

Paso 2: $|\cos x| \leq 1$ *(y* $|\operatorname{sen} x| \leq 1$*).*

1. $\operatorname{sen}^2 x \geq 0$ (C1-003.T5 si $\operatorname{sen} x \neq 0$).
2. De $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se obtiene $\cos^2 x \leq 1$ (C1-003.T9).
3. Por C1-004.T6, $|\cos x| \leq 1$. Igual para sen.

Paso 3: $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ *si* $|x| < \pi/2$.

1. Si $x = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$.
2. Si $0 < x < \pi/2$, por G1 $0 < \operatorname{sen} x < x$, así que $|\operatorname{sen} x| < |x|$ (C1-004.D1).
3. Si $-\pi/2 < x < 0$ (G1, C1-004.T1):

$$|\operatorname{sen} x| = |-\operatorname{sen}(-x)| = \operatorname{sen}(-x) < -x = |x|.$$

Paso 4: $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ *para todo x.*

1. Para todo y (C1-004.T2, paso 2):

$$|\operatorname{sen} 2y| = 2|\operatorname{sen} y|\,|\cos y| \leq 2|\operatorname{sen} y|.$$

2. Por inducción (C1-005.T1), $|\operatorname{sen} x| \leq 2^k |\operatorname{sen}(x/2^k)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$: para $k = 1$ se aplica la desigualdad con $y = x/2$, y si vale para k, se aplica con $y = x/2^{k+1}$ para obtener $|\operatorname{sen}(x/2^k)| \leq 2|\operatorname{sen}(x/2^{k+1})|$.
3. Por la propiedad arquimediana (C1-007.C1) hay $k \in \mathbb{N}$ con $k > 2|x|/\pi$.
4. Por Bernoulli (C1-005.T5) $2^k \geq 1 + k > k$, así que $|x|/2^k < \pi/2$ (C1-003.T7).
5. Por el paso 3,

$$|\operatorname{sen} x| \leq 2^k\,|\operatorname{sen}(x/2^k)| \leq 2^k \frac{|x|}{2^k} = |x|.$$

Paso 5: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

1. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon$.
2. $0 < |x| < \delta$ implica $|\operatorname{sen} x - 0| \leq |x| < \varepsilon$ (C1-017.D1).

Paso 6: $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

1. Sea $0 < |x| < \pi/2$. Por el paso 1, $\cos x > 0$, así que $1 + \cos x \geq 1 > 0$.

2. Entonces (G1, C1-003.T7, C1-003.T9, C1-004.T6)

$$1-\cos x=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\le \operatorname{sen}^2 x\le x^2.$$

3. Además $1-\cos x\ge 0$ porque $\cos x\le|\cos x|\le 1$ (C1-004.T1).
4. Dado $\varepsilon>0$, sea δ el menor de $\pi/2$, 1 y ε.
5. Si $0<|x|<\delta$, entonces $x^2=|x|\,|x|<|x|$ (C1-004.T2, C1-003.T4) y

$$|\cos x-1|=1-\cos x\le x^2<|x|<\varepsilon.$$

6. Por C1-017.D1, $\lim_{x\to 0}\cos x=1$. ■

El límite fundamental

Teorema C1-021.T1 ⚠ G1
$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x=1.$

> **Idea de la demostración**
> De $\operatorname{sen} x<x<\tan x$ se despeja $\cos x<\operatorname{sen} x/x<1$; las dos orillas tienden a 1.

Demostración.

1. Sea $0<x<\pi/2$. Por G1, $0<\operatorname{sen} x<x<\tan x=\operatorname{sen} x/\cos x$, y por C1-021.T0, $\cos x>0$.
2. Multiplicando $\operatorname{sen} x<x$ por $1/x>0$: $\operatorname{sen} x/x<1$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
3. Multiplicando $x<\operatorname{sen} x/\cos x$ por $\cos x>0$: $x\cos x<\operatorname{sen} x$.
4. Multiplicando por $1/x>0$: $\cos x<\operatorname{sen} x/x$.
5. Si $-\pi/2<x<0$, sea $y=-x\in(0,\pi/2)$; por G1 (C1-002.T4, C1-002.T6),

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{-\operatorname{sen} y}{-y}=\frac{\operatorname{sen} y}{y},\qquad \cos x=\cos y,$$

   así que las mismas desigualdades valen.
6. Por lo tanto

$$\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1\qquad \text{para } 0<|x|<\pi/2.$$

7. Como $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ (C1-021.T0) y $\lim_{x\to 0}1=1$ (C1-017.E1), el sándwich para funciones

(C1-019.T2) da $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$. ■

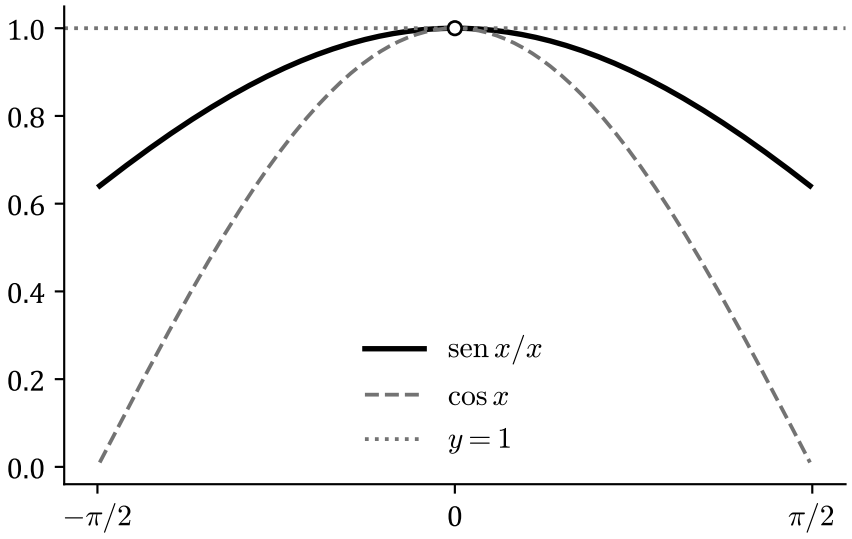


Figura 21: El sándwich $\cos x < \operatorname{sen} x/x < 1$ en $0 < |x| < \pi/2$.

El límite de $(1 - \cos x)/x$

Teorema C1-021.T2 ⚠ G1
$\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x = 0$.

> **Idea de la demostración**
> Se multiplica por $1 + \cos x$ para convertir $1 - \cos x$ en $\operatorname{sen}^2 x$.

Demostración.

1. Para $0 < |x| < \pi/2$, $1 + \cos x > 0$ (C1-021.T0).
2. Por G1,
$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x\,(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$
3. Por C1-021.T1, $\operatorname{sen} x/x \to 1$.
4. Por C1-021.T0, $\operatorname{sen} x \to 0$ y $1 + \cos x \to 2 \neq 0$ (C1-018.T1).
5. Por las reglas del producto y del cociente (C1-018.T1), el límite es $1 \cdot 0/2 = 0$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Radianes

Si el ángulo se mide en grados, $\operatorname{sen}(x^\circ) = \operatorname{sen}(cx)$ con $c = \pi/180$, y $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(cx)/x = c \approx 0.017453$ (ejercicio 2).

La desigualdad $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ de G1 compara longitudes, y eso solo funciona si x es la longitud del arco, es decir, el ángulo en radianes.

Si x es el número de grados, el arco mide cx y el sándwich queda $\cos(cx) < \operatorname{sen}(cx)/(cx) < 1$, que da el límite c para $\operatorname{sen}(x^\circ)/x$.

⚠ Hacen falta las dos orillas

La cota $\operatorname{sen} x/x < 1$ sola no basta: el escalón E cumple $E \leq 1$ y no tiene límite en 0 (C1-017). La cota inferior $\cos x$, que tiende a 1, es la que cierra el sándwich.

⚠ «0/0» no es un valor

$\operatorname{sen} x/x \to 1$, $(1-\cos x)/x \to 0$, $x^2/x \to 0$ y $x/x^2 = 1/x$ no tiene límite en 0: el mismo «0/0» da resultados distintos.

Ejercicios

1. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, citando qué usas de G1.
2. Demuestra que, para $c > 0$, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(cx)/x = c$. Aplícalo a $c = \pi/180$.
3. Demuestra que $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$.
4. Verifica numéricamente $\cos x < \operatorname{sen} x/x < 1$ para $x = 0.5$ y $x = -0.1$.
5. ¿Por qué no se puede usar C1-021.T1 para demostrar en C2-014 que $\operatorname{sen}' = \cos$?

Respuestas

1. $1/3$ (C1-018.T1 con la constante $1/3$); $\tan x/x = (\operatorname{sen} x/x)(1/\cos x) \to 1$ (C1-018.T1, C1-021.T0).
2. Para $x \neq 0$, $\operatorname{sen}(cx)/x = c\,\operatorname{sen}(cx)/(cx)$; dado ε, sea δ_0 el de C1-021.T1 para ε/c y $\delta = \delta_0/c$. Con $c = \pi/180$: ≈ 0.017453.

3. $(1-\cos x)/x^2 = (\operatorname{sen} x/x)^2 \cdot 1/(1+\cos x) \to 1 \cdot 1/2$.
4. $x = 0.5$: $0.877583 < 0.958851 < 1$. $x = -0.1$: $0.995004 < 0.998334 < 1$.
5. Porque en C2-014 seno y coseno se definen de otra manera (con la integral) y G1 todavía no está demostrado para esa definición: usar C1-021.T1 ahí supondría lo que se quiere probar.

C1-022 · Funciones continuas

Motivación

El horno de leña

Un horno de leña se calienta durante 4 horas; su temperatura, t horas después de encenderlo, es $T(t) = 20 + 80t - 10t^2$ grados. A las 3 horas marca 170 °C.

¿Qué tan cerca de la marca de 3 horas hay que mirar el termómetro para asegurar que marca entre 169 y 171? Como

$$T(t) - 170 = 80(t-3) - 10(t^2 - 9) = (t-3)(50 - 10t),$$

y si $|t-3| < 1$ entonces $|50 - 10t| < 30$, basta $|t-3| < 1/30$ de hora: dos minutos.

Dónde falla la analogía: un termómetro real muestrea cada segundo y tiene inercia. La continuidad es una afirmación sobre todos los instantes y todas las tolerancias $\varepsilon > 0$.

La pregunta tiene la misma forma que la de límite, con una diferencia: ahora el blanco es el valor $T(3)$ mismo, y el instante $t = 3$ cuenta. Eso es la continuidad: la temperatura no salta.

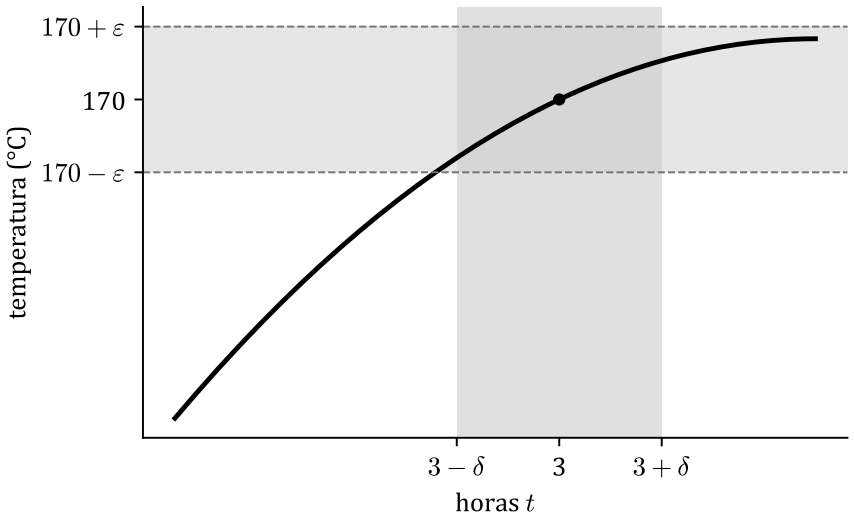


Figura 22: Continuidad del horno en $t = 3$: si $|t-3| < \delta$, la gráfica queda dentro de la banda $170 \pm \varepsilon$.

Definiciones

Definición C1-022.D1

$f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f es continua en A si lo es en cada punto de A.

Resultados

Continuidad y límite

Teorema C1-022.T0 (continuidad y límite)

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$.

(a) Si a es interior a A, f es continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(b) Si a es el extremo izquierdo de un intervalo A (con más de un punto), f es continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; análogo en el extremo derecho con a^-.

Demostración.

(a)

1. Sea a interior a A: $(a - r, a + r) \subset A$ para algún $r > 0$ (C1-004.D2), así que f está definida donde lo exige C1-017.D1.
2. ($\Rightarrow$) Si f es continua en a y $\varepsilon > 0$, el δ de C1-022.D1 cumple en particular que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$: es el δ de C1-017.D1 con $L = f(a)$.
3. ($\Leftarrow$) Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, sea δ el de C1-017.D1. Para $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ hay dos casos:
   - si $x \neq a$, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;
   - si $x = a$, $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ (C1-004.T1).

(b)

1. Si a es el extremo izquierdo de un intervalo A (por ejemplo $A = [a, b]$), los $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ son los de $a \leq x < a + \delta$ (C1-004.T3).
2. El mismo argumento, con C1-020.D1, da la equivalencia con $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
3. Igual en el extremo derecho. ■

Caracterización secuencial

Teorema C1-022.T1 (caracterización secuencial)

f es continua en $a \in A \Leftrightarrow$ para toda sucesión (x_n) en A con $x_n \to a$, $f(x_n) \to f(a)$.

> **Idea de la demostración**
> Igual que C1-019.T1, ahora sin pedir $x_n \neq a$.

Demostración.

($\Rightarrow$)

1. Sea (x_n) en A con $x_n \to a$, y $\varepsilon > 0$. Sea δ el de C1-022.D1.
2. Hay N con $|x_n - a| < \delta$ para $n \geq N$ (C1-012.D1).
3. Entonces $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ para $n \geq N$. Así $f(x_n) \to f(a)$.

($\Leftarrow$) Por contrarrecíproca:

1. Si f no es continua en a, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$.
2. Elegimos uno de esos puntos para cada $\delta = 1/n$ y lo llamamos x_n (elección numerable, C1-012.Ax1).
3. Entonces $x_n \in A$, $|x_n - a| < 1/n$, y como en C1-019.T1 (con C1-007.C1 y C1-003.T7) $x_n \to a$.
4. Pero $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ para todo n, así que $f(x_n) \not\to f(a)$. ■

Álgebra de funciones continuas

Teorema C1-022.T2

Sumas, productos y cocientes (con denominador $\neq 0$) de continuas son continuos; polinomios y racionales son continuos en su dominio.

> **Idea de la demostración**
> Con la caracterización secuencial, se reduce al álgebra de límites de sucesiones.

Demostración.

1. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ continuas en $a \in A$, y (x_n) en A con $x_n \to a$.
2. Por C1-022.T1, $f(x_n) \to f(a)$ y $g(x_n) \to g(a)$.
3. Por C1-013.T2, $(f+g)(x_n) \to (f+g)(a)$ y $(fg)(x_n) \to (fg)(a)$; por C1-022.T1, $f+g$ y fg son continuas en a.
4. Si $g(a) \neq 0$, el dominio de f/g es $A' = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$, que contiene a a.
5. Para (x_n) en A' con $x_n \to a$, $g(x_n) \neq 0$ para todo n y C1-013.T2 da $f(x_n)/g(x_n) \to f(a)/g(a)$; por C1-022.T1 (en el dominio A'), f/g es continua en a.
6. Un polinomio p cumple $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ para todo a (C1-018.C1), y todo $a \in \mathbb{R}$ es interior a $\mathbb{R}$; por C1-022.T0, p es continuo en $\mathbb{R}$.
7. Un racional p/q es continuo en cada punto de su dominio $\{q \neq 0\}$ por el paso 5. ■

Composición

Teorema C1-022.T3

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ (si no, $g \circ f$ se toma en $\{x \in A : f(x) \in B\}$). Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, $g \circ f$ es continua en a.

(Si $f(A) \not\subset B$, se aplica el teorema a la restricción de f a $A' = \{x \in A : f(x) \in B\}$, que sigue siendo continua en $a \in A'$ porque C1-022.D1 solo se debilita al quitar puntos del dominio.)

> **Idea de la demostración**
> Se encadenan los dos juegos ε–δ: la tolerancia que pide g se le pide a f.

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de g en $f(a)$ existe $\eta > 0$ tal que, para $y \in B$, $|y - f(a)| < \eta$ implica $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$.
2. Por la continuidad de f en a, aplicada con la tolerancia η, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$, $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \eta$.
3. Si x está en el dominio de $g \circ f$ y $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) \in B$ y $|f(x) - f(a)| < \eta$.
4. Por el paso 1, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.
5. Por C1-022.D1, $g \circ f$ es continua en a. ■

Conservación del signo

Teorema C1-022.T4 (conservación del signo)

Si f es continua en a y $f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ con $f(x) > 0$ para $x \in A$, $|x - a| < \delta$ (análogo con $f(a) < 0$).

> **Idea de la demostración**
> Se usa la tolerancia $\varepsilon = f(a)$.

Demostración.

1. Con $\varepsilon = f(a) > 0$, C1-022.D1 da $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $|x - a| < \delta$, $|f(x) - f(a)| < f(a)$.
2. Es decir, $0 < f(x) < 2f(a)$ (C1-004.T3); en particular $f(x) > 0$.
3. Si $f(a) < 0$, se aplica lo anterior a $-f$, que es continua en a porque $|-f(x) - (-f(a))| = |f(x) - f(a)|$ (C1-004.T1). ■

Ejemplos que cumplen y que no

> **El horno**
> T es un polinomio, continuo en $[0,4]$ (C1-022.T2). En $t = 3$, explícitamente, con $\delta = \min(1, \varepsilon/30)$: si $|t-3| < \delta$ entonces $|50-10t| < 30$ y
>
> $$|T(t) - 170| < 30\,\delta \le \varepsilon.$$

- **El escalón.** E (0 si $x < 0$, 1 si $x \ge 0$) no es continuo en 0: con $\varepsilon = 1/2$, para cada δ el punto $x = -\delta/2$ cumple $|x| < \delta$ y $|E(x) - E(0)| = 1$. En $a \neq 0$ sí lo es: con $\delta = |a|$, E es constante en $(a-\delta, a+\delta)$.
- **Dirichlet.** No es continua en ningún punto: cada punto es interior a $\mathbb{R}$, y continuidad ahí implicaría $\lim_{x\to a} D(x) = D(a)$ (C1-022.D1), que contradice C1-019.E1.
- $x\,D(x)$**, continua en un solo punto.** En 0: $|xD(x) - 0| \le |x|$, con $\delta = \varepsilon$. En $a \neq 0$: hay racionales $q_n \to a$ e irracionales $i_n \to a$ (C1-007.T3, C1-008.T3), con $q_n D(q_n) = q_n \to a$ e $i_n D(i_n) = 0 \to 0$; como $a \neq 0$, por C1-022.T1 y C1-012.T1 no es continua en a.

> **⚠ El dominio importa**
>
> $1/x$ es continua en cada punto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (C1-022.T2); en 0 no se pregunta, porque 0 no está en el dominio.
> Puntos aislados: toda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es continua. Dado $n \in \mathbb{N}$, con $\delta = 1/2$ el único $x \in \mathbb{N}$ con $|x - n| < 1/2$ es n (C1-005.T2), y $|f(n) - f(n)| = 0$.

Ejercicios

1. Demuestra con ε–δ que $f(x) = 3x + 2$ es continua en todo a.
2. Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ para $x \neq 1$. ¿Qué valor hay que darle en 1 para que sea continua ahí?
3. Demuestra que $|f|$ es continua donde f lo es.
4. Demuestra que si f y g son continuas en a, entonces $\max(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big)$ también.
5. ¿Es continua en 0 la función $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$?

Respuestas

1. $|f(x) - f(a)| = 3|x - a|$; $\delta = \varepsilon/3$.
2. $f(1) = 2$: para $x \neq 1$, $f(x) = x + 1 \to 2$, y 1 es interior.
3. $\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)|$ (C1-004.T5); el mismo δ. O con C1-022.T3 y la continuidad de $|\cdot|$.
4. Por C1-022.T2 y el ejercicio 3, cada pieza es continua.
5. Sí: $|f(x) - 0| \leq x^2 \leq |x|$ si $|x| < 1$; $\delta = \min(1, \varepsilon)$.

C1-023 · Teorema de Bolzano (valor intermedio)

Motivación

> **La mañana helada**
> A las 6:00 el termómetro del patio marca $-2\,^{\circ}\mathrm{C}$ y a las 10:00 marca $6\,^{\circ}\mathrm{C}$. Un modelo de la mañana es
>
> $$T(t) = -2 + 3t - \frac{t^2}{4},$$
>
> con t en horas después de las 6:00. ¿Hubo un instante exacto en que la temperatura fue $0\,^{\circ}\mathrm{C}$?
> Si partimos el intervalo en mitades y nos quedamos siempre con la mitad donde cambia el signo,
>
> - $T(2) = 3, T(1) = 0.75, T(0.5) = -0.5625,$
> - $T(0.75) \approx 0.1094, T(0.625) \approx -0.2227,$
>
> los intervalos se encogen hacia $t \approx 0.7085$ (en el modelo, el cero es $6 - 2\sqrt{7}$, hacia las 6:42:31).
> Dónde falla la analogía: un termómetro real muestrea y redondea; la función ideal es continua en todo instante. Además, el teorema asegura que el instante existe, no cuándo ocurrió ni cuántas veces.

Que «la temperatura no salta» obligue a pasar por 0 es el teorema de Bolzano. Su demostración usa el axioma del supremo: en $\mathbb{Q}$ el teorema es falso.

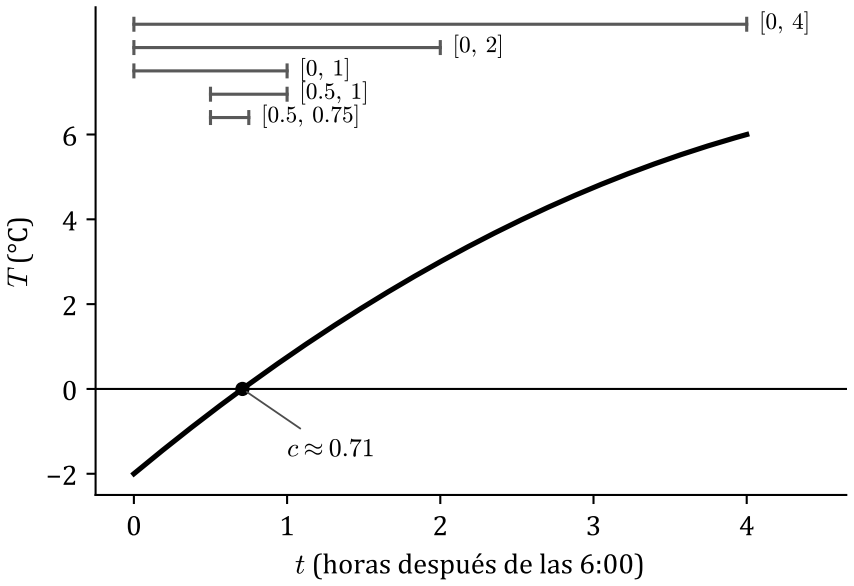


Figura 23: La mañana helada: T pasa de negativa a positiva y cruza el cero cerca de $t \approx 0.71$; los corchetes son los primeros intervalos de la bisección.

Resultados

El teorema de Bolzano

Teorema C1-023.T1 (Bolzano)

Sean $a < b$ y f continua en $[a, b]$ con $f(a) < 0 < f(b)$. Existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Idea de la demostración
Sea c el supremo de los puntos donde $f < 0$. Si $f(c) < 0$, por continuidad $f < 0$ un poco a la derecha de c; si $f(c) > 0$, $f > 0$ un poco a la izquierda. Ambas cosas contradicen que c sea el supremo.

Demostración.

Paso 1: el candidato.

1. Sea $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$.

2. Como $f(a) < 0$, $a \in A$; todo elemento de A es $\leq b$.
3. Por el axioma S existe $c = \sup A$, y $a \leq c \leq b$ ($a \in A$ y b es cota superior; C1-006.D1).

Paso 2: $f(c) < 0$ es imposible.

1. Si $f(c) < 0$, entonces $c \neq b$ porque $f(b) > 0$, y $c < b$.
2. Por la conservación del signo (C1-022.T4) existe $\delta > 0$ con $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$ con $|x - c| < \delta$.
3. Sea $x = c + \frac{1}{2}\min(\delta, b - c)$. Por C1-003.T8, $c < x < c + \min(\delta, b - c)$.
4. Así que $c < x \leq b$ y $|x - c| < \delta$ (C1-004.T3).
5. Entonces $f(x) < 0$, es decir, $x \in A$ con $x > c$, lo que contradice que c es cota superior de A.

Paso 3: $f(c) > 0$ es imposible.

1. Si $f(c) > 0$, por C1-022.T4 existe $\delta > 0$ con $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ con $|x - c| < \delta$.
2. Por la caracterización ε del supremo (C1-006.T2) existe $x \in A$ con $x > c - \delta$.
3. Como $x \leq c$, $|x - c| < \delta$ (C1-004.T3) y $x \in [a, b]$, de donde $f(x) > 0$.
4. Pero $x \in A$ significa $f(x) < 0$: contradicción (C1-003.T1).

Paso 4: conclusión.

1. Por tricotomía (C1-003.T1), $f(c) = 0$.
2. Como $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, $c \neq a$ y $c \neq b$, así que $c \in (a, b)$. ■

Valor intermedio

Corolario C1-023.C1 (valor intermedio)
Sean $a < b$, f continua en $[a, b]$ y y entre $f(a)$ y $f(b)$. Existe $c \in [a, b]$ con $f(c) = y$.

Demostración.

1. Si $y = f(a)$ o $y = f(b)$, sirve $c = a$ o $c = b$.
2. Si $f(a) < y < f(b)$, la función $g(x) = f(x) - y$ es continua en $[a, b]$ (C1-022.T2) y $g(a) < 0 < g(b)$.

3. Por C1-023.T1 hay $c \in (a, b)$ con $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = y$.
4. Si $f(b) < y < f(a)$, se aplica lo mismo a $g(x) = y - f(x)$. ■

Raíces n-ésimas

Corolario C1-023.C2

Para $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un único $y > 0$ con $y^n = x$ (se escribe $\sqrt[n]{x}$).

Demostración.

Existencia.

1. La función $h(y) = y^n$ es un polinomio, continuo en $[0, 1 + x]$ (C1-022.T2).
2. Se tiene $h(0) = 0 < x$ y, por Bernoulli (C1-005.T5),

$$h(1 + x) = (1 + x)^n \geq 1 + nx \geq 1 + x > x.$$

3. Por C1-023.C1 existe $y \in [0, 1 + x]$ con $y^n = x$.
4. Como $0^n = 0 \neq x$, $y \neq 0$ y por lo tanto $y > 0$.

Unicidad.

1. Si $y, y' > 0$ y $y \neq y'$, digamos $y < y'$ (C1-003.T1).
2. Entonces $y^n < y'^n$ (C1-005.T9), así que no pueden ser ambos iguales a x. ■

Potencias racionales

Definición C1-023.D1

Para $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$: $x^{p/q} := (\sqrt[q]{x})^p$.

Un mismo racional tiene muchas escrituras p/q ($1/2 = 2/4$); el teorema siguiente garantiza que la definición no depende de cuál se use.

Teorema C1-023.T2 (potencias racionales)

Para $x > 0$, el valor de $x^{p/q}$ no depende del representante de p/q, y $x^{p/1} = x^p$. Para $x, y > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$: $x^r > 0$, $x^r x^s = x^{r+s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$, $(xy)^r = x^r y^r$.

Demostración. Usaremos varias veces:

- la **unicidad de raíces**: si $u, v > 0$, $N \in \mathbb{N}$ y $u^N = v^N$, entonces $u = v$ (es la unicidad de C1-023.C2);
- que las potencias enteras de un número positivo son positivas (C1-005.T9, C1-003.T7).

Paso 1: no depende del representante.

1. Sean $p/q = p'/q'$, es decir, $pq' = p'q$. Sean $u = \sqrt[q]{x}$ y $v = \sqrt[q']{x}$.
2. Por C1-005.T9,
$$(u^p)^{qq'} = (u^q)^{pq'} = x^{pq'}, \qquad (v^{p'})^{qq'} = (v^{q'})^{p'q} = x^{p'q}.$$
3. Como $pq' = p'q$, u^p y $v^{p'}$ son positivos con la misma potencia qq'; por unicidad, $u^p = v^{p'}$.
4. Con $q = 1$, $x^{p/1} = x^p$: la definición extiende a las potencias enteras.

Paso 2: leyes. Sean $x, y > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$.

1. $x^r > 0$, por lo dicho arriba.
2. $x^r x^s = x^{r+s}$: escribimos $r = p/q$ y $s = p'/q$ con el mismo denominador (multiplicando arriba y abajo, lo cual es legítimo por el paso 1); con $u = \sqrt[q]{x}$ (C1-005.T9),
$$x^r x^s = u^p u^{p'} = u^{p+p'} = x^{(p+p')/q}.$$
3. $(xy)^r = x^r y^r$: como $(\sqrt[q]{x}\,\sqrt[q]{y})^q = xy$ (C1-005.T9), por unicidad $\sqrt[q]{xy} = \sqrt[q]{x}\,\sqrt[q]{y}$, y elevando a p (C1-005.T9) se obtiene la ley.
4. $(x^r)^s = x^{rs}$: sean $r = p/q$, $s = p'/q'$ y $w = \sqrt[qq']{x}$.
   - Como $(w^{q'})^q = w^{qq'} = x$, por unicidad $w^{q'} = \sqrt[q]{x}$, así que $x^r = w^{q'p}$.
   - Como $(w^p)^{q'} = w^{pq'} = x^r$ y $w^p > 0$, por unicidad $\sqrt[q']{x^r} = w^p$.

– Por lo tanto

$$(x^r)^s = (w^p)^{p'} = w^{pp'} = x^{pp'/(qq')} = x^{rs}. \qquad \blacksquare$$

Polinomios de grado impar

Corolario C1-023.C3
Todo polinomio de grado impar tiene una raíz real.

Demostración.

1. Sea p de grado m impar y coeficiente principal a_m. Como $-p$ tiene las mismas raíces, podemos suponer $a_m > 0$.
2. Por C1-005.T7, $m = 2k + 1$, y $(-1)^m = ((-1)^2)^k(-1) = -1$ (C1-005.T9).
3. Aplicando C1-020.T3 a $p/1$ (el denominador tiene grado $0 < m$ y coeficiente principal 1):
   - cuando $x \to \infty$, $p \to \infty$ (signo de $a_m \cdot 1 > 0$);
   - cuando $x \to -\infty$, $p \to -\infty$ (signo de $a_m(-1)^m < 0$).
4. Por C1-020.D1 con $K = 0$, existe M_1 con $p(x) > 0$ para $x > M_1$ y M_2 con $p(x) < 0$ para $x < M_2$.
5. Sean $b = \max(M_1, 0) + 1$ y $a = \min(M_2, 0) - 1$ (C1-003.T1): $a < 0 < b, p(a) < 0 < p(b)$.
6. Como p es continuo en $[a, b]$ (C1-022.T2), Bolzano (C1-023.T1) da $c \in (a, b)$ con $p(c) = 0$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin continuidad
$f = -1$ en $[0, 1/2)$ y $f = 1$ en $[1/2, 1]$: $f(0) < 0 < f(1)$ y f nunca vale 0. Falla la continuidad en $1/2$ (el argumento del escalón de C1-022).

⚠ Sin cambio de signo
$f(x) = x^2 + 1$ en $[-1, 1]$ es continua y positiva (C1-003.T5): no tiene ceros. Y el recíproco tampoco vale: $x^2 - 1/4$ es positiva en ± 1 y se anula en $\pm 1/2$.

⚠ Sin completitud

En $\mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 - 2$ en $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 2\}$ cumple $f(0) = -2 < 0 < 2 = f(2)$ y es continua (la misma demostración de C1-022.T2 vale con el dominio restringido), pero no hay $c \in \mathbb{Q}$ con $c^2 = 2$ (C1-008.T1).
La demostración falla en el paso que usa el axioma S: el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 2] : x^2 < 2\}$ no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (C1-008.C1).

Ejercicios

1. Demuestra que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una solución en $(0, 1)$ y localízala con tres pasos de bisección.
2. Demuestra que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua, existe c con $f(c) = c$ (punto fijo).
3. Calcula $\sqrt[3]{20}$ con dos decimales usando bisección en $[2, 3]$, y justifica su existencia con C1-023.C2.
4. Demuestra que $8^{2/3} = 4$ y que $8^{4/6} = 4$ con la definición C1-023.D1.
5. ¿Tiene raíz real $x^4 + 1$? ¿Contradice eso a C1-023.C3?

Respuestas

1. $p(0) = -1 < 0 < 1 = p(1)$. $p(0.5) = -0.375$, $p(0.75) \approx 0.1719$, $p(0.625) \approx -0.1309$: la raíz está en $(0.625, 0.75)$ (es ≈ 0.6823).
2. $g(x) = f(x) - x$ es continua, $g(0) \geq 0 \geq g(1)$; si alguna es 0, listo; si no, Bolzano.
3. $2^3 = 8 < 20 < 27 = 3^3$; bisección: $2.5^3 = 15.625$, $2.75^3 \approx 20.80$, $2.625^3 \approx 18.09$, $2.6875^3 \approx 19.41$, $2.71875^3 \approx 20.10$, $2.703125^3 \approx 19.75$: $\sqrt[3]{20} \approx 2.71$ (es 2.7144 …).
4. $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$ (unicidad), y $2^2 = 4$. $\sqrt[6]{8} = w$ con $w^6 = 8$; $w^4 > 0$ y $(w^4)^3 = (w^6)^2 = 64 = 4^3$, así que $w^4 = 4$.
5. No: $x^4 + 1 \geq 1 > 0$. No contradice nada: tiene grado par.

C1-024 · Teorema de Weierstrass

Motivación

> **El día más caliente**
> El termómetro del patio registra la temperatura de las 6:00 a las 20:00. Un modelo del día es
>
> $$T(t) = 12 + 3(t-6) - \frac{(t-6)^2}{4}.$$
>
> Así $T(6) = 12, T(9) = 18.75, T(12) = 21, T(15) = 18.75$ y $T(20) = 5$: el momento más caliente es a las 12:00 y el más frío a las 20:00.
> ¿Siempre hay un momento más caliente? Si el registro se cortara *justo antes* de las 12:00, en $[6, 12)$ los valores se acercarían a 21 (por ejemplo $T(11.9) = 20.9975$) sin alcanzarlo nunca: no habría instante más caliente.
> Dónde falla la analogía: un día real siempre incluye sus instantes; el ejemplo de $[6, 12)$ es artificial, para ver qué hace la hipótesis del intervalo cerrado. Además, el teorema no dice cuándo se alcanza el máximo, solo que se alcanza.

El teorema de Weierstrass dice que en un intervalo cerrado y acotado, con una función continua, el máximo y el mínimo siempre se alcanzan.

Resultados

Acotamiento

Teorema C1-024.T1
Sean $a < b$ y f continua en $[a, b]$. Entonces f es acotada en $[a, b]$.

Idea de la demostración
Si no lo fuera, habría puntos donde $|f|$ es enorme; se amontonan en un punto c (Bolzano–Weierstrass), y la continuidad en c impide que $|f|$ sea enorme cerca de c.

Demostración.

1. Supongamos que f no es acotada en $[a, b]$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número n no es cota de $|f|$, y elegimos $x_n \in [a, b]$ con $|f(x_n)| > n$ (elección numerable, C1-012.Ax1).
3. La sucesión (x_n) es acotada; por Bolzano–Weierstrass (C1-015.T3) tiene una subsucesión $x_{n_k} \to c$.
4. Como $a \leq x_{n_k} \leq b$ para todo k, C1-013.T3 (con las sucesiones constantes a y b, C1-012.T2) da $c \in [a, b]$.
5. Por la continuidad de f en c y C1-022.T1, $f(x_{n_k}) \to f(c)$.
6. Toda sucesión convergente es acotada (C1-013.T1): existe K con $|f(x_{n_k})| \leq K$ para todo k.
7. Por C1-007.C1 hay $k \in \mathbb{N}$ con $k > K$, y entonces $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k > K$ (C1-015.T0): contradicción. ■

Máximo y mínimo

Teorema C1-024.T2 (Weierstrass)

Sean $a < b$ y f continua en $[a, b]$. Existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

Idea de la demostración
El supremo M de los valores existe porque f es acotada. Tomamos puntos cuyos valores se acercan a M, Bolzano–Weierstrass los amontona en un punto del intervalo, y la continuidad lleva sus valores a M ahí mismo.

Demostración.

Paso 1: el máximo.

1. Por C1-024.T1, $f([a,b])$ es acotado; no es vacío, así que por el axioma S existe $M = \sup f([a,b])$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $1/n > 0$ (C1-003.T7), por C1-006.T2 elegimos $x_n \in [a,b]$ con $f(x_n) > M - 1/n$ (elección numerable, C1-012.Ax1).
3. La sucesión (x_n) es acotada, y por C1-015.T3 tiene una subsucesión $x_{n_k} \to x_2$; como en C1-024.T1, $x_2 \in [a,b]$.
4. Por la continuidad en x_2 (C1-022.T1), $f(x_{n_k}) \to f(x_2)$.
5. Para todo k,
$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M.$$
6. Como $1/n_k \to 0$ (C1-012.T2 y C1-015.T1), $M - 1/n_k \to M$ (C1-013.T2).
7. Por C1-013.T3, $M \leq f(x_2)$ y $f(x_2) \leq M$, así que $f(x_2) = M$ (C1-003.T1).
8. Luego $f(x) \leq M = f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$.

Paso 2: el mínimo.

1. La función $-f$ es continua (C1-022.T2).
2. Aplicándole el paso 1 obtenemos $x_1 \in [a,b]$ con $-f(x) \leq -f(x_1)$ para todo $x \in [a,b]$.
3. Es decir, $f(x_1) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ (C1-003.T9). ■

Cada hipótesis hace falta

Ejemplo C1-024.E1
Cada hipótesis hace falta.

- Sin intervalo cerrado: $1/x$ en $(0,1]$ no es acotada; x en $(0,1)$ no alcanza máximo ni mínimo.
- Sin continuidad: $f(x) = x$ en $[0,1)$, $f(1) = 0$, no alcanza máximo en $[0,1]$.
- Sin completitud: en $\mathbb{Q}$, $g(x) = -(x^2-2)^2$ en $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 2\}$ es continua y no alcanza máximo.

Demostración.

Sin intervalo cerrado.

1. $1/x$ es continua en $(0,1]$ (C1-022.T2).
2. No es acotada: dado K, por C1-007.C1 hay $n \in \mathbb{N}$ con $n > K$, y $x = 1/n \in (0,1]$ da $1/x = n > K$.

3. En $(0,1)$, la función x es continua y $\sup(0,1) = 1$: es cota superior, y para $\varepsilon > 0$ el punto $\max(1-\varepsilon/2, 1/2)$ está en $(0,1)$ y es mayor que $1-\varepsilon$ (C1-006.T2, C1-003.T8).
4. Pero $1 \notin (0,1)$: ningún $x \in (0,1)$ cumple $x = 1$, así que no hay máximo; análogamente no hay mínimo.

Sin continuidad.

1. Para $x \in [0,1)$, $f(x) = x < 1$, y el punto $(x+1)/2 \in (x,1)$ (C1-003.T8) da un valor mayor.
2. Y $f(1) = 0 < 1/2 = f(1/2)$.
3. Así ningún punto de $[0,1]$ es de máximo.

Sin completitud.

1. g es continua en su dominio (polinomio, C1-022.T2; la continuidad en un subconjunto es la misma condición de C1-022.D1 con menos puntos).
2. Para todo x racional, $x^2 \neq 2$ (C1-008.T1), así que $g(x) < 0$ (C1-003.T5).
3. Si g alcanzara un máximo en x_0, sería $g(x_0) < 0$; mostramos que hay un racional x en el dominio con $g(x) > g(x_0)$.
4. Sea $\varepsilon = -g(x_0) > 0$ y η el menor de $1/4$ y $\varepsilon/4$ (C1-003.T1).
5. Por la densidad (C1-007.T3) hay $x \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{2} < x < \sqrt{2} + \eta$ (C1-008.T2); como $\sqrt{2} < 3/2$ (pues $(3/2)^2 > 2$, C1-003.T9), $0 \leq x < 2$.
6. Entonces (C1-003.T6)

$$0 < x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < \eta \cdot 4 \leq \text{mın}(1, \varepsilon).$$

7. Como $0 < x^2 - 2 < 1$, $(x^2-2)^2 < x^2 - 2 < \varepsilon$ (C1-003.T4).
8. Así $g(x) > -\varepsilon = g(x_0)$: contradicción. Luego g no alcanza máximo. ■

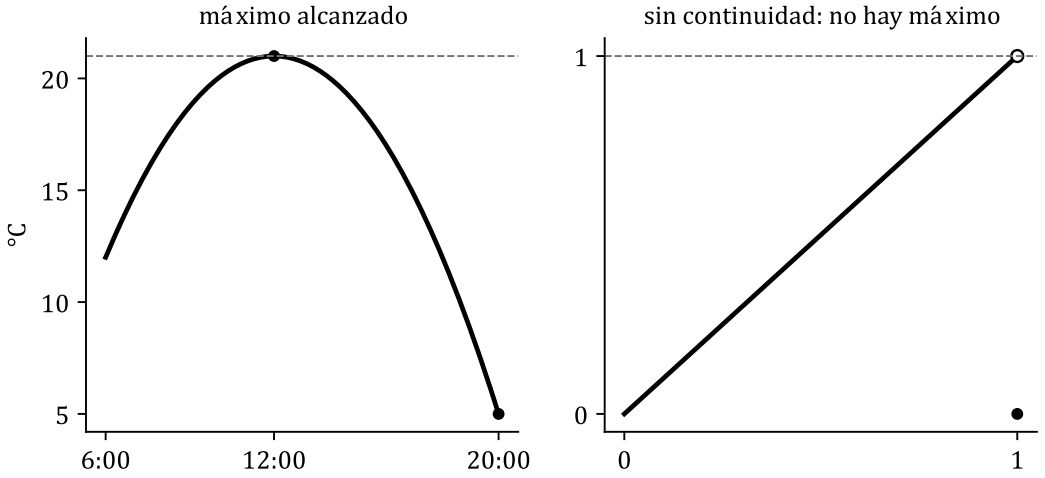


Figura 24: Izquierda: en $[6, 20]$ el modelo del día alcanza su máximo a las 12:00. Derecha: $f(x) = x$ en $[0, 1)$, $f(1) = 0$, se acerca a 1 sin alcanzarlo.

Por qué cada hipótesis

⚠ Intervalo cerrado

C1-024.E1: en $(0, 1)$ la identidad no alcanza su supremo, y en $(0, 1]$ la función $1/x$ ni siquiera es acotada.

En la demostración, la hipótesis se usa en el paso $a \leq x_2 \leq b$: con $(0, 1)$, el límite de los x_{n_k} puede caer fuera, en 0 o en 1.

⚠ Continuidad

$f(x) = x$ en $[0, 1)$ y $f(1) = 0$. El supremo de los valores es 1, y $f(x) < 1$ para todo $x \in [0, 1]$: no hay máximo.

La demostración falla en el paso $f(x_{n_k}) \to f(x_2)$: aquí $x_2 = 1$ y $f(x_{n_k}) \to 1 \neq f(1)$.

⚠ Completitud

En $\mathbb{Q}$, $f(x) = -(x^2 - 2)^2$ en $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 2\}$ es continua y $f \leq 0$.

Por la densidad (C1-007.T3) hay racionales x tan cerca de $\sqrt{2}$ como se quiera, con $f(x)$ tan cerca de 0 como se quiera, así que el supremo de los valores es 0; pero $f(x) = 0$ exigiría $x^2 = 2$ con

$x \in \mathbb{Q}$, imposible (C1-008.T1).

Ejercicios

1. Para $f(x) = x^2 - 2x$ en $[0, 3]$, encuentra el máximo y el mínimo y verifica que se alcanzan.
2. Da una función continua en $\mathbb{R}$ que sea acotada y no alcance su máximo.
3. Da una función en $[0, 1]$, no continua, que sí alcance su máximo y su mínimo. ¿Contradice eso algo?
4. Demuestra que si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) > 0$ para todo x, existe $m > 0$ con $f(x) \geq m$ para todo $x \in [a, b]$.
5. Demuestra que la imagen de $[a, b]$ bajo una continua es un intervalo cerrado $[m, M]$ (usa C1-023.C1).

Respuestas

1. $f(x) = (x-1)^2 - 1$: mínimo -1 en $x = 1$ ($(x-1)^2 \geq 0$), máximo 3 en $x = 3$ ($(x-1)^2 \leq 4$ en $[0, 3]$).
2. $f(x) = x^2/(x^2+1)$: es < 1 y tiende a 1 en ∞ (C1-020.T3).
3. La función de Dirichlet en $[0, 1]$: máximo 1, mínimo 0. No contradice nada: el teorema da una condición suficiente.
4. Por C1-024.T2 hay x_1 con $f(x_1) \leq f(x)$; sirve $m = f(x_1) > 0$.
5. Por C1-024.T2, $f([a, b]) \subset [f(x_1), f(x_2)]$ y ambos extremos se alcanzan; por C1-023.C1 (en el intervalo entre x_1 y x_2), todo valor intermedio se alcanza.

C1-025 · Continuidad uniforme y teorema de Heine

Motivación

> **Lecturas cada δ minutos**
> Quieres registrar la temperatura del patio de 6:00 a 20:00 con lecturas cada δ minutos, de modo que entre dos instantes a menos de δ la temperatura nunca cambie más de 0.5 °C. Con el modelo $T(t) = 12 + 3(t-6) - (t-6)^2/4$,
>
> $$T(t) - T(s) = (t-s)\Big(3 - \frac{t+s-12}{4}\Big),$$
>
> y para $t, s \in [6, 20]$ el segundo factor está entre -4 y 3.
> Así $|T(t) - T(s)| \le 4|t-s|$, y con $\delta = 0.5/4$ horas, es decir, 7.5 minutos, basta. Un solo δ sirve para todo el día.
> Dónde falla la analogía: un termómetro real tiene inercia y redondea. Además, Heine asegura que δ existe pero no dice cuánto vale; en el modelo lo calculamos porque tenemos la fórmula.

Esto no ocurre siempre. Para $1/x$ en $(0, 1]$, cerca de 0 la función cambia cada vez más rápido, y el δ que sirve en cada punto se encoge hacia 0.

- La diferencia entre «un δ en cada punto» y «un δ para todos» es la continuidad uniforme.
- El teorema de Heine dice que, en un intervalo cerrado y acotado, la continuidad basta para tener un δ común.

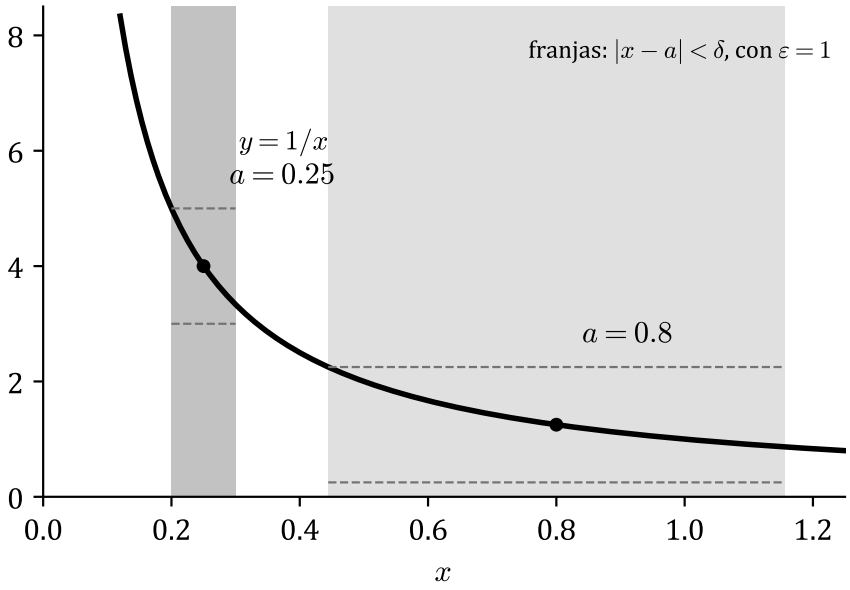


Figura 25: Para $1/x$ y la misma tolerancia ε, el δ que sirve en a se encoge cuando a se acerca a 0.

Definiciones

Definición C1-025.D1

f es uniformemente continua en A :⇔

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

⚠ El orden de los cuantificadores

Comparada con C1-022.D1 («para todo $a \in A$, para todo ε, existe δ…»), aquí δ se elige antes de conocer los puntos. Por eso la continuidad uniforme es más fuerte (C1-025.T2).

Resultados

Uniforme implica continua

Teorema C1-025.T2
Si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A.

Demostración.

1. Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$, y sea δ el de C1-025.D1.
2. Para $x \in A$ con $|x - a| < \delta$, tomando $y = a$ en C1-025.D1, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
3. Es la condición de C1-022.D1 en a. ■

Dos funciones continuas que no son uniformemente continuas

> **Ejemplo C1-025.E1**
> $1/x$ no es uniformemente continua en $(0, 1]$; x^2 no lo es en $\mathbb{R}$.

Demostración.

$1/x$.

1. Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ cualquiera. Por C1-007.C1 hay $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \delta$.
2. Los puntos $x = 1/n$ e $y = 1/(2n)$ están en $(0, 1]$ (C1-005.T2, C1-003.T7).
3. Cumplen $|x - y| = 1/(2n) < \delta$ y $|1/x - 1/y| = |n - 2n| = n \geq 1$.
4. Así ningún δ sirve para $\varepsilon = 1$.

x^2.

1. Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$. Por C1-007.C1 hay $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1/\delta$.
2. Con $x = n$ e $y = n + \delta/2$, $|x - y| = \delta/2 < \delta$.
3. Por los axiomas de campo (C1-003.T4, C1-003.T9),

$$y^2 - x^2 = n\delta + \frac{\delta^2}{4} > n\delta > 1.$$

4. Ningún δ sirve. ■

El teorema de Heine

Teorema C1-025.T1 (Heine)
Sean $a < b$ y f continua en $[a, b]$. Entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

> **Idea de la demostración**
> Si ningún δ sirviera, habría parejas de puntos cada vez más cercanos con valores alejados al menos ε_0. Bolzano–Weierstrass amontona esas parejas en un punto c del intervalo, y la continuidad en c obliga a que sus valores se junten.

Demostración.

Paso 1: las parejas malas.

1. Supongamos que f no es uniformemente continua en $[a, b]$.
2. Negando C1-025.D1, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $x_n, y_n \in [a, b]$ así, con $\delta = 1/n > 0$ (C1-003.T7; elección numerable, C1-012.Ax1).

Paso 2: se amontonan en un punto c.

1. La sucesión (x_n) es acotada, y por Bolzano–Weierstrass (C1-015.T3) tiene una subsucesión $x_{n_k} \to c$.
2. Como $a \leq x_{n_k} \leq b$ para todo k, por C1-013.T3 (con las sucesiones constantes a y b, C1-012.T2), $c \in [a, b]$.
3. Además $|y_{n_k} - x_{n_k}| < 1/n_k \leq 1/k$, porque $n_k \geq k$ (C1-015.T0, C1-003.T7).
4. Dado $\varepsilon > 0$, por C1-007.C1 hay K con $1/K < \varepsilon$, y para $k \geq K$, $|y_{n_k} - x_{n_k}| < 1/k \leq 1/K < \varepsilon$; así $y_{n_k} - x_{n_k} \to 0$ (C1-012.D1).
5. Por C1-013.T2,

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \to c + 0 = c.$$

Paso 3: contradicción.

1. Como f es continua en $c \in [a, b]$, la caracterización secuencial (C1-022.T1) da $f(x_{n_k}) \to f(c)$ y $f(y_{n_k}) \to f(c)$.
2. Por C1-013.T2, $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$.
3. Con $\varepsilon = \varepsilon_0$, existe N con $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$ para $k \geq N$ (C1-012.D1).
4. Pero $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ para todo k: contradicción (C1-003.T1). ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Intervalo cerrado

$1/x$ es continua en $(0, 1]$ (C1-022.T2) y no es uniformemente continua (C1-025.E1). En la demostración, el punto de amontonamiento sería $c = 0$, que no está en el dominio.

⚠ Intervalo acotado

x^2 es continua en $\mathbb{R}$ y no es uniformemente continua (C1-025.E1). En la demostración, sin acotamiento no se puede aplicar Bolzano–Weierstrass ($x_n = n$ no tiene subsucesiones convergentes).

⚠ Continuidad

El escalón E no es continuo en 0 (C1-022), y como uniforme implica continua (C1-025.T2), no es uniformemente continuo en $[-1, 1]$.

⚠ Completitud

En $\mathbb{Q}$, $f(x) = 1/(x^2 - 2)$ en $Q_0 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 2\}$ está definida y es continua (C1-022.T2; $x^2 \neq 2$ por C1-008.T1). No es uniformemente continua:

- si lo fuera, con $\varepsilon = 1$ y su δ, cubriríamos Q_0 con finitos tramos de longitud menor que δ, y en cada tramo f variaría menos de 1, así que f sería acotada en Q_0;
- pero tomando racionales q con $|q - \sqrt{2}|$ arbitrariamente pequeño (C1-007.T3), $|q^2 - 2| = |q - \sqrt{2}|\,|q + \sqrt{2}| < 4|q - \sqrt{2}|$ es arbitrariamente pequeño y $|f(q)|$ arbitrariamente grande.

Ejercicios

1. Demuestra con la definición que $f(x) = 3x - 5$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
2. Demuestra que si $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todos $x, y \in A$ (función de Lipschitz), entonces f es uniformemente continua en A.
3. Para $f(x) = 1/x$ y $\varepsilon = 1$, demuestra que el mayor δ que sirve en $a \in (0, 1]$ es $a^2/(1 + a)$, y calcúlalo en $a = 1$, 0.1 y 0.01.
4. ¿Es x^2 uniformemente continua en $[0, 10]$? Da un δ explícito para $\varepsilon = 0.1$.
5. Demuestra que si f es uniformemente continua en $(0, 1]$ y (x_n) es de Cauchy en $(0, 1]$, entonces $(f(x_n))$ es de Cauchy. Usa esto para dar otra prueba de que $1/x$ no lo es.

Respuestas

1. $|f(x) - f(y)| = 3|x - y|$; $\delta = \varepsilon/3$.
2. $\delta = \varepsilon/L$ (si $L > 0$; si $L = 0$, f es constante).
3. Para $x < a$: $1/x - 1/a < 1 \Leftrightarrow x > a/(1 + a)$, así que $\delta \leq a - a/(1 + a) = a^2/(1 + a)$; para $x > a$ la condición es más débil. Valores: 0.5, ≈ 0.00909, ≈ 0.000099.
4. Sí (Heine). $|x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| \leq 20|x - y|$: $\delta = 0.1/20 = 0.005$.
5. Dado ε, sea δ de D1 y N de Cauchy para δ: $|x_n - x_m| < \delta$ implica $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Con $x_n = 1/n$ (de Cauchy, C1-016.T1), $f(x_n) = n$ no es de Cauchy.

C1-026 · Continuidad de la inversa

Motivación

> **Leer la hora en el termómetro**
> Una mañana fría la temperatura sube sin parar de $-2\,^\circ\text{C}$ a las 6:00 a $6\,^\circ\text{C}$ a las 10:00, con el modelo $T(t) = -2 + 3t - t^2/4$ (t en horas después de las 6:00). Como
>
> $$T(s) - T(t) = (s - t)\Big(3 - \frac{s + t}{4}\Big)$$
>
> y $s + t \leq 8$ en $[0, 4]$, el segundo factor es al menos 1: si $s > t$, $T(s) > T(t)$.
> La temperatura es estrictamente creciente, así que cada lectura corresponde a una sola hora:
>
> $$t = 6 - 2\sqrt{7 - T}.$$
>
> Con $0\,^\circ\text{C}$, $t \approx 0.7085$ h; con $0.1\,^\circ\text{C}$, $t \approx 0.7464$ h. Un error de $0.1\,^\circ\text{C}$ en la lectura da unos 2.3 minutos de error en la hora.
> Dónde falla la analogía: si la temperatura subiera y luego bajara, una misma lectura correspondería a dos horas y no habría inversa. Y un termómetro real redondea, así que la «inversa» de las lecturas es escalonada; el teorema habla de la función ideal.

¿Ocurre siempre así? Si una función continua es invertible en un intervalo, ¿su inversa también es continua? En este capítulo probamos que sí, y de paso que «invertible y continua en un intervalo» obliga a ser estrictamente monótona.

Resultados

Recordemos (C1-004.D2) que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si $x, y \in I$ y $x < z < y$ implican $z \in I$.

La imagen de un intervalo

Teorema C1-026.T1

Si f es continua en un intervalo I, $f(I)$ es un intervalo.

Idea de la demostración
Entre dos valores alcanzados, el teorema del valor intermedio rellena el hueco.

Demostración.

1. Sean $y_1, y_2 \in f(I)$ y y con $y_1 < y < y_2$; escribimos $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in I$.
2. Como $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$; sean $u < v$ esos dos puntos (C1-003.T1).
3. Como I es un intervalo, todo z con $u < z < v$ está en I, y también u, v: $[u, v] \subset I$.
4. La restricción de f a $[u, v]$ es continua, porque la condición de C1-022.D1 para los $x \in [u, v]$ es un caso particular de la condición para los $x \in I$.
5. Como y está entre $f(u)$ y $f(v)$, el valor intermedio (C1-023.C1) da $c \in [u, v] \subset I$ con $f(c) = y$; así $y \in f(I)$.
6. Por C1-004.D2, $f(I)$ es un intervalo. ■

Inyectiva y continua implica monótona

Teorema C1-026.T2

Si f es continua e inyectiva en un intervalo, es estrictamente monótona.

Idea de la demostración
Deslizamos continuamente una pareja de puntos $u < v$ hasta otra pareja $x < y$ sin que los puntos se crucen. La diferencia de valores nunca se anula (inyectividad), así que no cambia de signo (valor intermedio).

Demostración. Sea f continua e inyectiva en el intervalo I. Si I tiene un solo punto no hay nada que probar.

Paso 1: el deslizamiento.

1. Fijamos $u < v$ en I; por inyectividad $f(v) - f(u) \neq 0$.
2. Sean $x < y$ en I cualesquiera. Para $t \in [0, 1]$ definimos

$$x(t) = (1 - t)u + tx, \qquad y(t) = (1 - t)v + ty.$$

3. *Están en I:* $x(t) - u = t(x - u)$ y $x(t) - x = (1 - t)(u - x)$ tienen signos opuestos o alguno es 0 (C1-003.T4), así que $x(t)$ es u, es x, o está estrictamente entre ellos; en los tres casos $x(t) \in I$ (C1-004.D2). Igual para $y(t)$.
4. *No se cruzan:* $y(t) - x(t) = (1 - t)(v - u) + t(y - x)$; ambos sumandos son ≥ 0 (C1-003.T4) y no son los dos nulos (si $t < 1$ el primero es positivo; si $t = 1$, el segundo), así que $y(t) > x(t)$ (C1-003.T6).

Paso 2: la diferencia no cambia de signo.

1. Sea $g(t) = f(y(t)) - f(x(t))$ para $t \in [0, 1]$.
2. Las funciones $t \mapsto x(t)$ y $t \mapsto y(t)$ son polinomios (C1-022.T2), y f es continua en I; por la composición (C1-022.T3) y la resta (C1-022.T2), g es continua en $[0, 1]$.
3. Como $x(t) \neq y(t)$ y f es inyectiva, $g(t) \neq 0$ para todo t.
4. Si $g(0)$ y $g(1)$ tuvieran signos opuestos, 0 estaría entre ellos y el valor intermedio (C1-023.C1) daría $t \in [0, 1]$ con $g(t) = 0$: imposible.
5. Por lo tanto $f(y) - f(x) = g(1)$ tiene el mismo signo que $f(v) - f(u) = g(0)$ (C1-003.T1).

Paso 3: conclusión. Como esto vale para todos $x < y$ en I: si $f(v) > f(u)$, f es estrictamente creciente; si $f(v) < f(u)$, es estrictamente decreciente (C1-010.D2). ■

Continuidad de la inversa

Teorema C1-026.T3
Si f es continua y estrictamente monótona en un intervalo I, $f^{-1} : f(I) \to I$ es continua.

> **Idea de la demostración**
> Para que $f^{-1}(y)$ quede a menos de ε de x_0, basta que y quede entre los valores de f en dos puntos $x_1 < x_0 < x_2$ elegidos de antemano a menos de ε de x_0.

Demostración. Supongamos f estrictamente creciente.

Paso 1: la inversa es creciente.

1. Por C1-010.T1, f es inyectiva, y $f^{-1} : f(I) \to I$ es su inversa sobre la imagen (C1-011.D1).
2. Si $y < y'$ en $f(I)$, con $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, no puede ser $x \geq x'$ (daría $f(x) \geq f(x')$), así que $x < x'$ (C1-003.T1): f^{-1} es estrictamente creciente.
3. (Por C1-026.T1, $f(I)$ es además un intervalo; la demostración que sigue no lo necesita, ni usa la continuidad de f.)

Paso 2: los puntos de control. Sean $y_0 \in f(I)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ y $\varepsilon > 0$.

1. *Lado izquierdo.* Si existe $p \in I$ con $p < x_0$, sea x_1 el mayor de p y $x_0 - \varepsilon/2$. Entonces $x_1 \in I$ (es p, o está estrictamente entre p y x_0; C1-004.D2), y $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0$ (C1-003.T8). Sea $\delta_1 = y_0 - f(x_1) > 0$. Si no existe tal p, sea $\delta_1 = 1$.
2. *Lado derecho.* Del mismo modo, si existe $p' \in I$ con $p' > x_0$, sea x_2 el menor de p' y $x_0 + \varepsilon/2$, de modo que $x_2 \in I$, $x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon$, y $\delta_2 = f(x_2) - y_0 > 0$. Si no, $\delta_2 = 1$.

Paso 3: el δ. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2 (C1-003.T1), y sea $y \in f(I)$ con $|y - y_0| < \delta$; sea $x = f^{-1}(y) \in I$. Por tricotomía hay tres casos.

1. Si $y = y_0$, entonces $x = x_0$.
2. Si $y > y_0$, entonces $x > x_0$ (f^{-1} es creciente), así que existe un punto de I a la derecha de x_0 y x_2 está definido. Como $y < y_0 + \delta \leq y_0 + \delta_2 = f(x_2)$, se tiene $x < x_2$, y entonces $x_0 < x < x_2 < x_0 + \varepsilon$.
3. Si $y < y_0$, de la misma manera $x_0 - \varepsilon < x_1 < x < x_0$.

En los tres casos $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$ (C1-004.T3). Por C1-022.D1, f^{-1} es continua en y_0.

Paso 4: caso decreciente.

1. Si f es estrictamente decreciente, $-f$ es continua y estrictamente creciente en I.
2. Para $y \in f(I)$, $f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y)$.
3. Por lo anterior $(-f)^{-1}$ es continua, $y \mapsto -y$ también (C1-022.T2), y por C1-022.T3 f^{-1} es continua. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ T2 sin intervalo

En $D = [0,1] \cup [2,3]$, sea $f(x) = x$ en $[0,1]$ y $f(x) = 5 - x$ en $[2,3]$. Es continua e inyectiva (las imágenes $[0,1]$ y $[2,3]$ no se tocan), pero $f(0) = 0 < f(2) = 3 > f(3) = 2$: no es monótona.
En la demostración, el deslizamiento $x(t)$ se saldría del dominio.

⚠ T2 sin continuidad

En $[0,2]$, sea $f(x) = x$ en $[0,1)$ y $f(x) = 3 - x$ en $[1,2]$. Las imágenes $[0,1)$ y $[1,2]$ no se tocan, así que es inyectiva; pero $f(0) = 0 < f(1) = 2 > f(2) = 1$: no es monótona.

⚠ T3 sin intervalo

Sea $f(x) = x$ en $[0,1)$ y $f(x) = x - 1$ en $[2,3]$. Es continua y estrictamente creciente, con imagen $[0,2]$.
Su inversa es $f^{-1}(y) = y$ para $y < 1$ y $f^{-1}(y) = y + 1$ para $y \geq 1$. Con $\varepsilon = 1/2$, para todo δ el punto $y = 1 - \delta/2$ (si $\delta < 2$) cumple $|y - 1| < \delta$ y

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(1)| = |1 - \delta/2 - 2| > 1/2.$$

En la demostración falla el lado izquierdo: no hay puntos de I entre 1 y $x_0 = 2$.

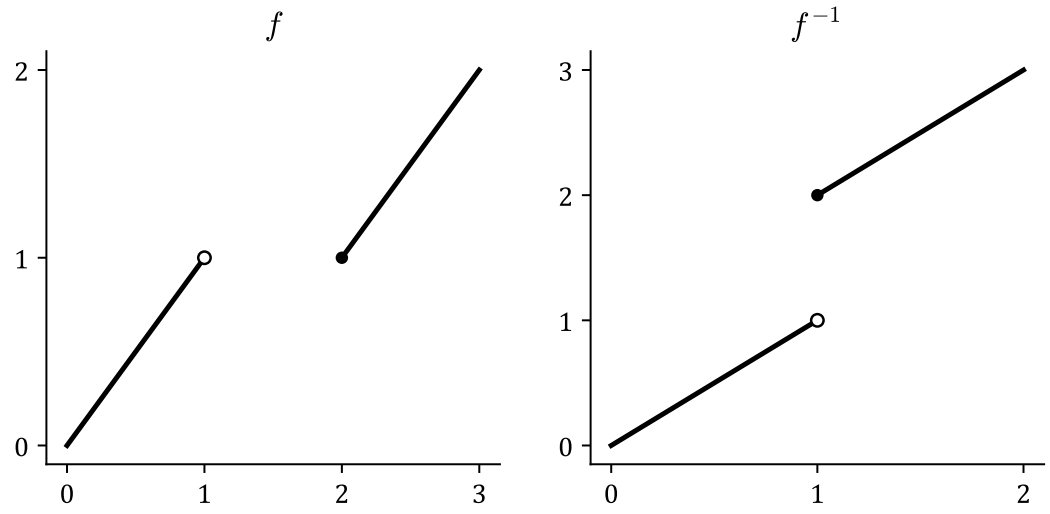


Figura 26: El contraejemplo de T3: f (izquierda) es continua y estrictamente creciente en $[0, 1) \cup [2, 3]$, pero su inversa (derecha) salta en $y = 1$.

> **Observación sobre T3**
> La demostración de T3 no usó la continuidad de f, solo que es estrictamente monótona en un intervalo. La continuidad de f sirve para que el dominio $f(I)$ de la inversa sea un intervalo (T1), que es lo que se necesita en C1-031.

Ejercicios

1. Demuestra que $f(x) = x^3 + x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y que su inversa es continua.
2. Usa C1-026.T3 para demostrar que $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ es continua en $(0, \infty)$.
3. Demuestra que una función continua en $[a, b]$ cuya imagen es $\{0, 1\}$ no existe.
4. En el modelo de la mañana, calcula la hora correspondiente a $T = 3\,°\text{C}$ y a $T = 3.1\,°\text{C}$.
5. ¿Puede una función continua e inyectiva en $(0, 1)$ tener imagen $[0, 1]$? Justifica con C1-026.T2.

Respuestas

1. $f(y) - f(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1)$ y $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ (es $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x + y)^2)$); la inversa es continua por T3 (dominio $f(\mathbb{R})$, un intervalo por T1).
2. $y \mapsto y^n$ es continua y estrictamente creciente en $(0, \infty)$ (C1-005.T9), con imagen $(0, \infty)$ (C1-023.C2); su inversa es $\sqrt[n]{\cdot}$.

3. Por T1, $f([a,b])$ sería un intervalo que contiene a 0 y a 1, así que contendría a $1/2$.
4. $t = 6 - 2\sqrt{4} = 2$ (8:00); $t = 6 - 2\sqrt{3.9} \approx 2.0503$ (≈ 8:03).
5. No: sería estrictamente monótona (T2), digamos creciente; si $f(c) = 1$ con $c \in (0,1)$, cualquier $x \in (c,1)$ daría $f(x) > 1$, fuera de la imagen.

C1-027 · Razón de cambio y recta tangente

Motivación

> **El velocímetro frente a la cámara**
> Un auto arranca en un semáforo y su posición, en metros, a los t segundos es $f(t) = 2t^2$. A los 3 segundos pasa frente a una cámara, a $f(3) = 18$ metros del semáforo. ¿Qué número debería marcar el velocímetro en ese instante?
> La división $18/3 = 6$ da la velocidad promedio desde el arranque, que no es lo que se pregunta. Dónde falla la analogía: un velocímetro real promedia en un intervalo de tiempo muy corto, pero de longitud positiva; la derivada es el límite exacto, sin intervalo mínimo.

Lo que sí se puede calcular es la velocidad promedio entre los instantes 3 y $3 + h$, para $h \neq 0$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 12 + 2h.$$

h	1	0.1	0.01	-0.1
promedio	14	12.2	12.02	11.8

Los promedios se acercan a 12 desde ambos lados. Geométricamente, la secante que une $(3, 18)$ con $(3 + h, f(3 + h))$ gira hasta pegarse a una recta de pendiente 12.

La velocidad instantánea será, por definición, ese límite: 12 m/s, es decir, 43.2 km/h.

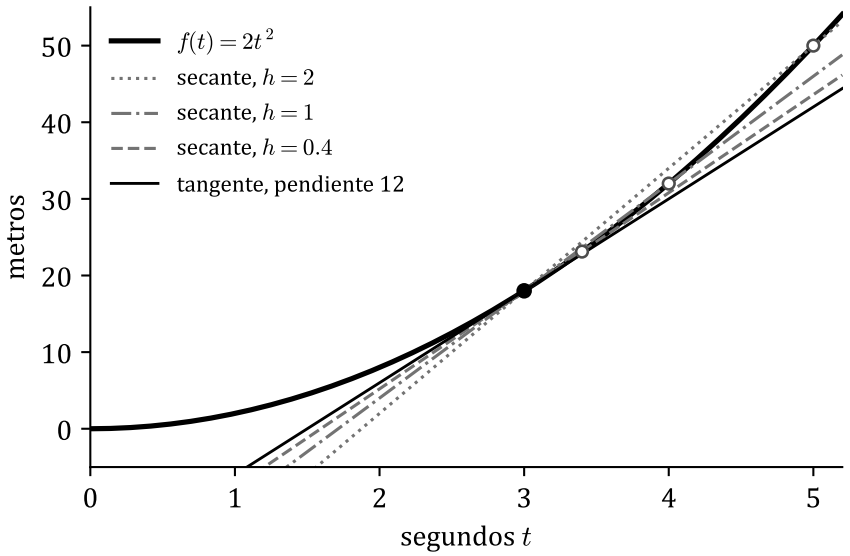


Figura 27: Las secantes de $f(t) = 2t^2$ por $(3, 18)$ con $h = 2,\ 1,\ 0.4$ giran hacia la tangente de pendiente 12; los círculos blancos marcan los puntos $(3 + h, f(3 + h))$.

Definiciones

Definición C1-027.D1 (derivada)

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a. f es *derivable en* a si existe

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- La *recta tangente* a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Si $f(t)$ es la posición en el instante t, la *velocidad instantánea* en a es $f'(a)$.
- f es derivable en un intervalo abierto si lo es en cada punto del intervalo.

Observaciones.

1. La hipótesis de dominio garantiza que el cociente está definido para todo $h \neq 0$ con $|h|$ pequeño, positivo o negativo; así el límite tiene sentido según C1-017.D1.
2. El límite no mira $h = 0$ (C1-017.D1), de modo que se puede simplificar el cociente suponiendo $h \neq 0$.

3. Por la traslación C1-017.T2, aplicada a $F(x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$, también

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuando cualquiera de los dos límites existe.

Resultados

En esta clase no hay teoremas; se calculan derivadas directamente desde la definición.

Ejemplo 1

Sea $f(t) = 2t^2$. Para $h \neq 0$,

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{2(9 + 6h + h^2) - 18}{h} = \frac{12h + 2h^2}{h} = 12 + 2h$$

(axiomas K1-K9; C1-002.T6 para operar fracciones; $h \cdot h^{-1} = 1$ por K8).
Como el límite en $h \to 0$ solo depende de los valores con $h \neq 0$ (C1-017.D1) y $\lim_{h \to 0}(12 + 2h) = 12$ (C1-018.C1), f es derivable en 3 con $f'(3) = 12$; la tangente es $y = 18 + 12(t - 3)$. ■

Ejemplo 2

Sea $f(x) = 2x^2 + x$ y $a \in \mathbb{R}$. Para $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{4ah + 2h^2 + h}{h} = 4a + 1 + 2h,$$

y por C1-018.C1 el límite es $4a + 1$. Así $f'(a) = 4a + 1$ para todo a: f es derivable en $\mathbb{R}$. ■

Ejemplo 3 (tangente que vuelve a cortar)

Sea $f(x) = x^3$ y $a = 1$.

1. Para $h \neq 0$, $((1 + h)^3 - 1)/h = 3 + 3h + h^2 \to 3$ (C1-018.C1).
2. Así que $f'(1) = 3$ y la tangente es $y = 3x - 2$.
3. Como $x^3 - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ (desarrollando con K1-K9), la tangente corta otra vez a la gráfica en $x = -2$.

La tangente comparte la pendiente en el punto; no tiene por qué tocar la curva una sola vez. ■

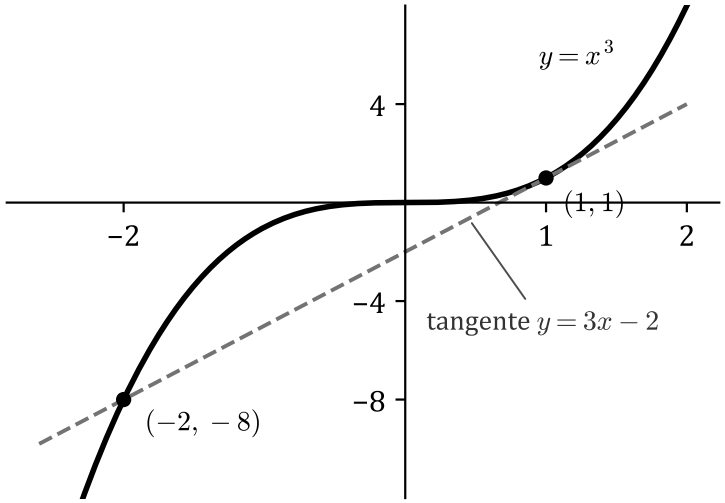


Figura 28: La tangente a x^3 en $x = 1$ vuelve a cortar la gráfica en $x = -2$.

Ejemplo 4 (tangente vertical)
Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (C1-023.C2, extendida a $x \leq 0$ por $\sqrt[3]{x} := -\sqrt[3]{-x}$ y $\sqrt[3]{0} := 0$).

1. Para $h \neq 0$, $(f(h) - f(0))/h = \sqrt[3]{h}/h$, cuyo valor absoluto es $1/\sqrt[3]{h^2}$.
2. Con $h_n = 1/n^3$ se tiene $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$ (C1-012.T2, C1-013.T2) y $\sqrt[3]{h_n} = 1/n$ (unicidad en C1-023.C2).
3. Así que el cociente vale $(1/n)/(1/n^3) = n^2$ (C1-005.T9).
4. Si el límite existiera y valiera L, por C1-019.T1 la sucesión n^2 convergería a L y sería acotada (C1-013.T1), lo que contradice C1-007.T1 (pues $n^2 \geq n$).
5. Luego f no es derivable en 0. ■

Por qué cada condición

⚠ Intervalo abierto alrededor de a

$f(x) = \sqrt{x}$ está definida en $[0, \infty)$, que no contiene ningún intervalo abierto alrededor de 0. El cociente $\sqrt{h}/h$ solo tiene sentido para $h > 0$; la definición C1-027.D1 no se aplica en 0.
(Los límites laterales permiten hablar de derivadas laterales, que no se usan en este curso.)

⚠ Que el límite exista

$f(x) = |x|$ en 0: el cociente vale 1 si $h > 0$ y -1 si $h < 0$; los límites laterales difieren, así que no hay límite (C1-020.T1). Se detalla en C1-028.E1.
El ejemplo 4 muestra otro modo de fallar: el cociente crece sin cota.

Ejercicios

1. Con la definición, calcula $f'(a)$ para $f(x) = x^2 - 5x + 1$ y escribe la tangente en $a = 2$.
2. Calcula la velocidad instantánea a los 2 s de un objeto con posición $f(t) = 3t^2 + 4t$ (metros, segundos).
3. Demuestra con la definición que si $f(x) = mx + d$, entonces $f'(a) = m$ para todo a.
4. Encuentra el otro punto donde la tangente a x^3 en $a = 2$ corta a la gráfica.
5. Explica por qué la definición C1-027.D1 no permite hablar de $f'(0)$ para $f(x) = \sqrt{x}$.

Respuestas

1. El cociente es $2a - 5 + h$; $f'(a) = 2a - 5$; en $a = 2$: $f(2) = -5$, $f'(2) = -1$, tangente $y = -5 - (x - 2)$.
2. El cociente en $a = 2$ es $16 + 3h$; la velocidad es 16 m/s.
3. Para $h \neq 0$, $(m(a+h)+d-ma-d)/h = mh/h = m$; el límite de la constante m es m (C1-017.E1).
4. Tangente $y = 12x - 16$; $x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2(x + 4)$, corta en $x = -4$.
5. El dominio $[0, \infty)$ no contiene ningún $(-r, r)$; para $h < 0$, $\sqrt{h}$ no está definido.

C1-028 · Derivable implica continua

Motivación

> **El GPS que salta**
> La aplicación del GPS registra un viaje así: hasta antes de la 1:00 la posición es $60t$ km y desde la 1:00 es $60t + 1$ km. A la 1:00 exacta el auto «saltó» un kilómetro. ¿Pudo el velocímetro marcar algún número en ese instante?
>
> - Por la derecha, las velocidades promedio valen 60.
> - Por la izquierda, $(f(1 + h) - f(1))/h = 60 - 1/h$, que vale 70 con $h = -0.1$, 160 con $h = -0.01$ y 1,060 con $h = -0.001$: crecen sin cota.
>
> No hay un número al que se acerquen.
> Dónde falla la analogía: un auto real no salta; el salto es un error de la aplicación. El teorema habla de la función registrada, no del auto.

El teorema de esta clase explica por qué: si la posición tiene velocidad instantánea en un instante, no puede saltar en ese instante. El recíproco es falso: la función $|x|$ no salta en 0 y, sin embargo, no tiene tangente ahí.

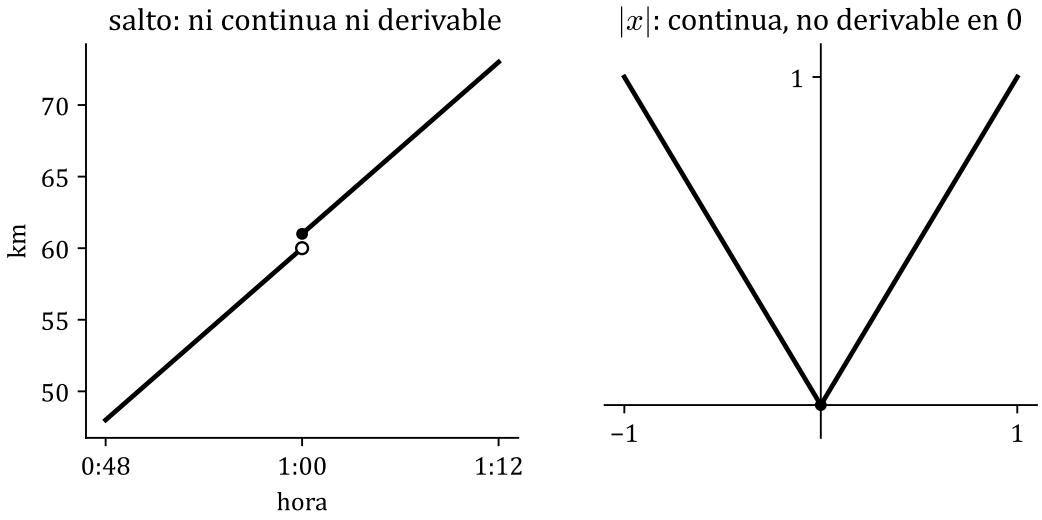


Figura 29: Izquierda: el registro del GPS salta en $t = 1$; no es continuo ni derivable ahí. Derecha: $|x|$ es continua en 0 pero tiene una esquina: no es derivable.

Definiciones

Se usan C1-027.D1 (derivada) y C1-022.D1 (continuidad). No hay definiciones nuevas.

Resultados

Derivable implica continua

Teorema C1-028.T1
f derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a.

> **Idea de la demostración**
> Se escribe $f(a+h) - f(a)$ como el cociente de la derivada por h; el cociente tiende a $f'(a)$ y h a 0.

Demostración.

1. Por la definición C1-027.D1 existe $r > 0$ con $(a - r, a + r) \subset \operatorname{dom} f$.
2. Para $0 < |h| < r$ (axiomas K5, K7 y K8: $h^{-1}h = 1$),

$$f(a + h) - f(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot h.$$

3. Cuando $h \to 0$, el primer factor tiende a $f'(a)$ por hipótesis y el segundo a 0 (C1-017.E1).
4. Por el álgebra de límites (C1-018.T1) el producto tiende a $f'(a) \cdot 0 = 0$ (C1-002.T3).
5. Sumando la función constante $f(a)$, cuyo límite es $f(a)$ (C1-017.E1, C1-018.T1), se obtiene $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.
6. Por la traslación C1-017.T2, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
7. Como a es interior del dominio de f, esto equivale a la continuidad de f en a (C1-022.T0). ■

El recíproco es falso

> **Ejemplo C1-028.E1**
> $|x|$ es continua en 0 y no es derivable en 0.

Demostración.

Continuidad.

1. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon$.
2. Si $|x - 0| < \delta$, entonces $\big||x| - |0|\big| = |x| < \varepsilon$ (C1-004.D1, C1-004.T1).
3. Por C1-022.D1, $|x|$ es continua en 0.

No derivabilidad.

1. Para $h > 0$, $(|h| - |0|)/h = h/h = 1$, y para $h < 0$, $(|h| - |0|)/h = -h/h = -1$ (C1-004.D1).
2. Los límites laterales del cociente en 0 son 1 y -1 (C1-017.E1 en su versión lateral, C1-020.D1).
3. Como son distintos, el cociente no tiene límite en 0 (C1-020.T1) y $|x|$ no es derivable en 0 (C1-027.D1). ■

Derivadas básicas

Teorema C1-028.T2

Para todo $a \in \mathbb{R}$: $(c)'(a) = 0$; $(mx + d)'(a) = m$; para $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)'(a) = na^{n-1}$.

Idea de la demostración

En los dos primeros casos el cociente es constante; en el tercero se factoriza $x^n - a^n$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$; las tres funciones están definidas en $\mathbb{R}$, que es un intervalo abierto que contiene a a.

1. Si $f(x) = c$, para $h \neq 0$ el cociente es $(c-c)/h = 0$ (K4, C1-002.T3), cuyo límite es 0 (C1-017.E1).
2. Si $f(x) = mx + d$, para $h \neq 0$ el cociente es $(m(a+h) + d - ma - d)/h = mh/h = m$ (K1-K9), cuyo límite es m (C1-017.E1).
3. Sea $f(x) = x^n$. Por C1-005.T8, para $x \neq a$,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}.$$

4. El lado derecho es un polinomio en x (de coeficientes a^{n-1-k}), así que por C1-018.C1 su límite en $x \to a$ es

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$$

   (C1-005.T9, con la convención $x^0 := 1$ de C1-005.D2; la suma de n términos iguales a c es nc por inducción, C1-005.T1).
5. Por la traslación C1-017.T2 (observación 3 de C1-027), el límite del cociente en $h \to 0$ es el mismo: $f'(a) = na^{n-1}$. ■

Seno y coseno

Teorema C1-028.T3 (⚠ G1)

$\operatorname{sen}' = \cos$, $\cos' = -\operatorname{sen}$.

⚠ Depende de G1

Este resultado depende de los hechos geométricos provisionales C1-021.G1 (seno y coseno definidos con el círculo unitario). Ningún teorema no trigonométrico de Cálculo I lo usa. En C2-014 se rehace desde la integral, y ahí no se puede citar este teorema.

Idea de la demostración
La fórmula de la suma separa el cociente en dos límites conocidos de C1-021.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ (sen y $\cos$ están definidos en todo $\mathbb{R}$ por C1-021.G1).

1. Por la fórmula de la suma (C1-021.G1), para $h \neq 0$,
$$\frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h} = \operatorname{sen} a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$
2. Por C1-021.T2 y C1-018.T1 (producto por la constante -1), $(\cos h - 1)/h \to 0$.
3. Por C1-021.T1, $(\operatorname{sen} h)/h \to 1$.
4. Por C1-018.T1 el cociente tiende a $\operatorname{sen} a \cdot 0 + \cos a \cdot 1 = \cos a$.
5. Del mismo modo, $\cos(a+h) = \cos a \cos h - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} h$ (C1-021.G1) da
$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \cos a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} a \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \longrightarrow -\operatorname{sen} a. \qquad \blacksquare$$

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin derivabilidad la continuidad puede fallar

$f(t) = 60t$ si $t < 1$, $f(t) = 60t + 1$ si $t \geq 1$. En $a = 1$, $f(1) = 61$ pero $\lim_{t \to 1^-} f(t) = 60$ (C1-018.C1 en versión lateral, C1-020.T2), así que f no es continua en 1 (C1-022.D1, C1-020.T1). Por el teorema, tampoco es derivable en 1: para $h < 0$ el cociente $60 - 1/h$ no está acotado.

⚠ El recíproco es falso

C1-028.E1: $|x|$ es continua en 0 sin ser derivable ahí. La continuidad no basta para tener tangente.

Ejercicios

1. Demuestra que si f es derivable en a, entonces f es acotada en algún intervalo $(a - r, a + r)$.
2. Calcula con C1-028.T2 la derivada de x^5 en $a = -1$ y escribe la tangente.
3. Sea $g(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Demuestra que g es derivable en 0 con $g'(0) = 0$ y que no es derivable en 1.
4. Da una función continua en todo $\mathbb{R}$ que no sea derivable en 0 ni en 1.
5. (⚠ G1) Usa C1-028.T3 para escribir la tangente a sen en $a = 0$.

Respuestas

1. Por C1-028.T1 f es continua en a; con $\varepsilon = 1$ en C1-022.D1 hay δ con $|f(x)| < |f(a)| + 1$ para $|x - a| < \delta$ (C1-004.T5).
2. $5(-1)^4 = 5$; $f(-1) = -1$; tangente $y = -1 + 5(x + 1)$.
3. En 0: $|g(h)/h| \leq |h|$, y por sándwich (C1-019.T2) el cociente tiende a 0. En 1: g no es continua (por C1-019.T1, con racionales e irracionales que tienden a 1, C1-007.T3 y C1-008.T3), luego no es derivable (contrapositiva de C1-028.T1).
4. $f(x) = |x| + |x - 1|$ (cocientes laterales distintos en 0 y en 1).
5. $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$: $y = x$.

C1-029 · Reglas de derivación

Motivación

> **La pizzería**
> Una pizzería vende 400 pizzas por semana a 150 pesos cada una: ingresa 60,000 pesos. Cada semana sube el precio 2 pesos y, por eso, vende 5 pizzas menos. ¿El ingreso sube o baja?
> Con $p(t) = 150 + 2t$ y $q(t) = 400 - 5t$, el ingreso es $R = pq$. La regla que se demuestra en esta clase da
>
> $$R'(0) = p'(0)q(0) + p(0)q'(0) = 800 - 750 = 50$$
>
> pesos por semana: sube. La tentación $R' = p'q' = -10$ es falsa.
> Dónde falla la analogía: precios y ventas cambian a saltos (cada semana, pizzas enteras), no son funciones derivables; la regla del producto es exacta solo en el límite.

La imagen es un rectángulo de altura p y base q. Al pasar un tiempo h:

- el área gana una franja de arriba ($p'h \cdot q$);
- pierde una franja lateral ($p \cdot q'h$);
- y hay una esquina $p'h \cdot q'h$.

Al dividir entre h y hacer $h \to 0$ la esquina desaparece. En una semana completa no desaparece:

$$R(1) - R(0) = 152 \cdot 395 - 60{,}000 = 40 = 50 - 10.$$

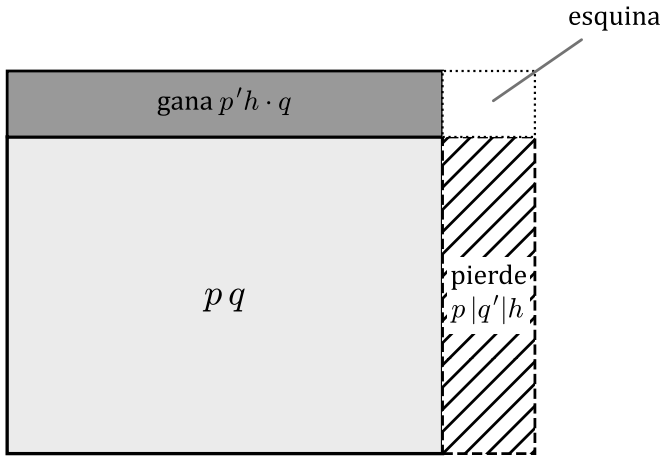


Figura 30: El rectángulo $p \cdot q$: al pasar el tiempo h gana la franja $p'h \cdot q$, pierde la franja $p \cdot |q'|h$, y queda una esquina de orden h^2.

Definiciones

Para funciones f, g, las operaciones $f + g$, cf, fg y f/g son las de C1-011.D1. No hay definiciones nuevas.

Resultados

En todo el capítulo, las hipótesis de C1-029.T1-T3 se leen así: f y g son derivables en a (y, para el cociente, $g(a) \neq 0$); entonces la función indicada es derivable en a y su derivada en a es la indicada.

Suma y múltiplo

Teorema C1-029.T1

Si f y g son derivables en a y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y cf son derivables en a, con $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ y $(cf)'(a) = cf'(a)$.

Demostración.

1. Por C1-027.D1 hay $r > 0$ con f y g definidas en $(a - r, a + r)$ (el menor de los dos radios).

2. Para $0 < |h| < r$ (K1, K2, K9, C1-002.T6),

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

3. Por C1-018.T1 el lado derecho tiende a $f'(a) + g'(a)$.
4. Del mismo modo (K9, C1-018.T1 con la constante c, C1-017.E1),

$$\frac{cf(a+h)-cf(a)}{h} = c \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to cf'(a). \qquad \blacksquare$$

Producto

Teorema C1-029.T2 (producto)

Si f y g son derivables en a, fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

> **Idea de la demostración**
> Se suma y se resta $f(a)g(a+h)$ para separar el cambio de f del cambio de g.

Demostración.

1. Por C1-027.D1 hay $r > 0$ tal que f y g están definidas en $(a-r, a+r)$.
2. Para $0 < |h| < r$, sumando y restando $f(a)g(a+h)$ (K1-K4, K9, C1-002.T6),

$$\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\, g(a+h) + f(a)\, \frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

3. Como g es derivable en a, es continua en a (C1-028.T1); como a es interior, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ (C1-022.T0) y por traslación $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$ (C1-017.T2).
4. Los dos cocientes tienden a $f'(a)$ y $g'(a)$ por hipótesis.
5. Por C1-018.T1 el lado derecho tiende a $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
6. Luego fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. $\blacksquare$

Cociente

Teorema C1-029.T3 (cociente)

Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, f/g es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Idea de la demostración

Primero se deriva $1/g$; luego $f/g = f \cdot (1/g)$ y se usa el producto.

Demostración.

1. Como g es derivable en a, es continua en a (C1-028.T1).
2. Como $g(a) \neq 0$, se tiene $g(a) > 0$ o $g(a) < 0$ (C1-003.T1), y por la conservación del signo (C1-022.T4) hay $r > 0$ tal que g está definida y no se anula en $(a - r, a + r)$; ahí está definida $1/g$.
3. Para $0 < |h| < r$ (C1-002.T6),

$$\frac{1/g(a+h) - 1/g(a)}{h} = -\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot \frac{1}{g(a+h)\,g(a)}.$$

4. Cuando $h \to 0$: el cociente tiende a $g'(a)$ (hipótesis); $g(a+h) \to g(a)$ (C1-022.T0, C1-017.T2); y $g(a)^2 \neq 0$ (C1-002.T5).
5. Por C1-018.T1 (producto y cociente), el lado derecho tiende a $-g'(a)/g(a)^2$. Así $1/g$ es derivable en a con $(1/g)'(a) = -g'(a)/g(a)^2$.
6. Por la regla del producto C1-029.T2 aplicada a f y $1/g$ (C1-002.T6),

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \qquad \blacksquare$$

Potencias negativas, polinomios y racionales

Corolario C1-029.C1

Para $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$; derivadas de polinomios y racionales.

Demostración.

1. Sea $a \neq 0$. $x^{-n} = 1/x^n$ (C1-005.D2) y x^n no se anula en a (C1-005.T9, C1-002.T5).
2. Por C1-029.T3 con $f = 1$ y $g = x^n$, y por C1-028.T2 (leyes de exponentes C1-005.T9),

$$(x^{-n})'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} = -na^{-n-1}.$$

3. Para un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, por inducción sobre m (C1-005.T1) con C1-029.T1 y C1-028.T2, $p'(x) = \sum_{k=1}^{m} k a_k x^{k-1}$ en todo x.
4. Para un racional p/q, en cada a con $q(a) \neq 0$, C1-029.T3 da $(p/q)'(a) = (p'(a)q(a) - p(a)q'(a))/q(a)^2$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin derivabilidad de f

$f(x) = |x|$, $g(x) = 1$, $a = 0$: $fg = |x|$ no es derivable en 0 (C1-028.E1). Lo mismo intercambiando los papeles muestra que hace falta la derivabilidad de g.

⚠ Las hipótesis son suficientes, no necesarias

$f(x) = x$, $g(x) = |x|$: para $h \neq 0$ el cociente de fg en 0 es $h|h|/h = |h| \to 0$ (C1-028.E1), así que $x|x|$ es derivable en 0 con derivada 0, aunque la fórmula del producto no se puede escribir porque $g'(0)$ no existe.

⚠ Sin g(a) distinto de 0

$1/x$ no está definida en 0; no hay nada que derivar.

Ejercicios

1. Calcula $(x^3 - 4x + 7)'$ y evalúala en $x = 2$.
2. Calcula la derivada de $(x^2 + 1)/(x - 1)$ y evalúala en $x = 2$.
3. Demuestra por inducción que si f es derivable en a, entonces $(f^n)'(a) = nf(a)^{n-1}f'(a)$.
4. Da f, g derivables en 0 con $(fg)'(0) \neq f'(0)g'(0)$.
5. Demuestra que si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $(1/f)'(a) = -f'(a)/f(a)^2$ sin usar la regla del producto.

Respuestas

1. $3x^2 - 4$; en 2 vale 8.
2. $(x^2 - 2x - 1)/(x - 1)^2$; en 2 vale -1.
3. Caso $n = 1$ trivial; si vale para n, $f^{n+1} = f^n \cdot f$ y por C1-029.T2, $(f^{n+1})' = nf^{n-1}f' \cdot f + f^n f' = (n + 1)f^n f'$.
4. $f(x) = g(x) = x$: $(x^2)'(0) = 0$ y $f'(0)g'(0) = 1$.
5. Es el primer paso de la demostración de C1-029.T3.

C1-030 · Regla de la cadena

Motivación

> **Los engranes de la bicicleta**
> En una bicicleta con plato de 44 dientes y piñón de 11, cada vuelta del pedal hace girar la rueda $44/11 = 4$ veces. Si la rueda mide 2.1 m de perímetro y pedaleas a una vuelta por segundo, avanzas
>
> $$1 \cdot 4 \cdot 2.1 = 8.4 \text{ m/s},$$
>
> es decir, 30.24 km/h. Las razones de cambio se multiplican: metros por vuelta de rueda, por vueltas de rueda por vuelta de pedal.
> Dónde falla la analogía: los engranes son lineales y sus razones son constantes; para curvas, el factor $g'(f(a))$ depende del punto.

Con funciones curvas pasa lo mismo, pero punto a punto. Si $f(x) = 3x + 1$ y $g(u) = u^2$, la compuesta

$$(g \circ f)(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

tiene derivada $18x + 6$, que en $x = 1$ vale 24. Y en efecto

$$g'(f(1))\, f'(1) = g'(4) \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 :$$

la pendiente de g se evalúa en el punto al que llega f.

Definiciones

Se usan la composición $g \circ f$ (C1-011.D1) y la derivada (C1-027.D1). No hay definiciones nuevas.

Resultados

Teorema C1-030.T1 (regla de la cadena)

Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, $g \circ f$ es derivable en a y $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$.

Idea de la demostración

El intento ingenuo escribe

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pero $f(x) - f(a)$ puede anularse para valores de x arbitrariamente cerca de a (por ejemplo, si f es constante). Se evita con una función auxiliar φ que vale el cociente de g fuera de $f(a)$ y $g'(f(a))$ en $f(a)$.

Demostración.

Paso 1: la función auxiliar φ.

1. Sea $b = f(a)$. Por C1-027.D1 hay $s > 0$ tal que g está definida en $(b - s, b + s)$.
2. Define $\varphi : (b - s, b + s) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \ (y \neq b), \qquad \varphi(b) = g'(b).$$

3. Por la derivabilidad de g en b y la traslación C1-017.T2, $\lim_{y \to b} \varphi(y) = g'(b) = \varphi(b)$; como b es interior, φ es continua en b (C1-022.T0).
4. Para todo $y \in (b - s, b + s)$,

$$g(y) - g(b) = \varphi(y)\,(y - b) : \tag{1}$$

   si $y \neq b$ por K5, K7 y K8; si $y = b$ porque ambos lados valen 0 (K4, C1-002.T3).

Paso 2: la composición.

1. Como f es derivable en a, es continua en a (C1-028.T1).

2. Aplicando C1-022.D1 con $\varepsilon = s$, hay $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < s$ siempre que $|x - a| < \delta$ (y x esté en el dominio de f; tomando δ menor que el radio del intervalo de C1-027.D1 para f, todos esos x lo están).
3. Así $g \circ f$ está definida en $(a - \delta, a + \delta)$.
4. Para $0 < |x - a| < \delta$, la igualdad (1) con $y = f(x)$ y K5 dan

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Paso 3: el límite.

1. Por C1-022.T3, $\varphi \circ f$ es continua en a, así que $\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(b) = g'(f(a))$ (C1-022.T0).
2. El segundo factor tiende a $f'(a)$ (C1-027.D1 con C1-017.T2).
3. Por C1-018.T1 el producto tiende a $g'(f(a))\, f'(a)$.
4. Por C1-017.T2 ese es el límite del cociente en $h \to 0$ que define $(g \circ f)'(a)$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin derivabilidad de f en a

$f(x) = |x|$, $g(u) = u$, $a = 0$: $g \circ f = |x|$ no es derivable en 0 (C1-028.E1).

⚠ Sin derivabilidad de g en f(a)

$f(x) = x$, $g(u) = |u|$, $a = 0$: de nuevo $g \circ f = |x|$.

⚠ Las hipótesis son suficientes, no necesarias

$f(x) = |x|$, $g(u) = u^2$: $g \circ f = x^2$ (pues $|x|^2 = x^2$, C1-004.T6) es derivable en 0, pero la fórmula no se puede escribir porque $f'(0)$ no existe.

Ejercicios

1. Calcula la derivada de $(x^2 + 1)^5$ en $x = 1$.
2. Calcula la derivada de $1/(1 + x^2)$ como composición y comprueba con la regla del cociente.

3. Demuestra que si f es derivable en a, entonces $x \mapsto f(mx + d)$ es derivable en todo x_0 con $mx_0 + d = a$, con derivada $mf'(a)$.
4. Sea f derivable en $\mathbb{R}$ y par. Demuestra que f' es impar.
5. Explica con un ejemplo concreto por qué el «intento ingenuo» de la demostración no es una prueba.

Respuestas

1. $5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x$; en 1 vale 160.
2. $g(u) = 1/u$, $f(x) = 1 + x^2$: $-\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$; en $x = 1$ vale $-1/2$; coincide con C1-029.T3.
3. Regla de la cadena con la función interior $mx + d$ (C1-028.T2).
4. $f(x) = f(-x)$; derivando con la regla de la cadena, $f'(x) = -f'(-x)$.
5. Con f constante, $f(x) - f(a) = 0$ para todo x: el primer cociente no está definido en ningún punto.

C1-031 · Derivada de la inversa, implícita y orden superior

Motivación

> **Minutos por kilómetro**
> En carretera, sin detenerte ni regresar, pasas el kilómetro 80 con el velocímetro en 100 km/h. La posición es una función del tiempo, $x = f(t)$. Como nunca te detienes ni regresas, cada kilómetro se pasa una sola vez y la hora también es una función de la posición: $t = f^{-1}(x)$.
> ¿A qué ritmo pasa el tiempo por kilómetro en el kilómetro 80? Si avanzas 100 km por hora, cada kilómetro te toma $1/100$ de hora: 0.6 minutos. El teorema de esta clase dice que eso es exacto:
>
> $$(f^{-1})'(80) = \frac{1}{f'(a)},$$
>
> donde a es la hora en que pasaste el kilómetro 80.
> Dónde falla la analogía: si te detienes en un semáforo, la posición deja de ser estrictamente creciente y la hora deja de ser función de la posición; si en el kilómetro 80 el velocímetro marcara 0, el ritmo por kilómetro no estaría acotado.

Geométricamente, la gráfica de f^{-1} es el reflejo de la de f en la diagonal $y = x$ (C1-011.T3); reflejar intercambia «subida» y «avance», y la pendiente se invierte.

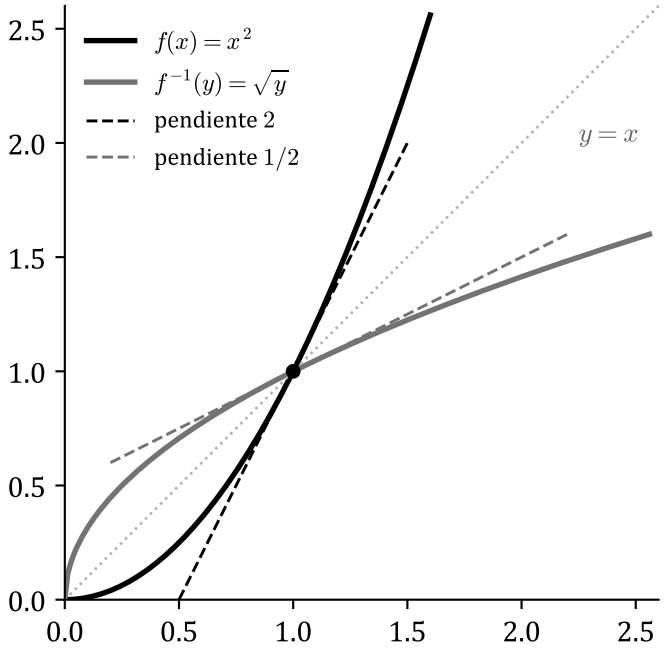


Figura 31: $f(x) = x^2$ y su inversa $\sqrt{x}$, reflejadas en $y = x$: la tangente de pendiente 2 en $(1, 1)$ se refleja en una de pendiente $1/2$.

Definiciones

Definición C1-031.D1 (orden superior; implícita)

$f^{(0)} := f$; si f' existe en un intervalo abierto que contiene a a y es derivable en a, $f''(a) := (f')'(a)$; en general $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$. Si f es la posición, f'' es la *aceleración*.

Derivación implícita (técnica): si una ecuación $F(x, y) = 0$ define y como función de x y se supone que esa función es derivable, se deriva la ecuación con la regla de la cadena y se despeja y'; la existencia y derivabilidad de y se justifican en Cálculo III con el teorema de la función implícita.

Ejemplos

1. Con $f(t) = 2t^2$ (posición en metros) se tiene $f'(t) = 4t$ y $f''(t) = 4$: aceleración constante de 4 m/s² (C1-028.T2, C1-029.T1).
2. En la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ cerca de $(3, 4)$, suponiendo y derivable, $2x + 2yy' = 0$

y $y' = -x/y = -3/4$. Se comprueba con la función explícita $y = \sqrt{25 - x^2}$, que por C1-031.C1 y C1-030.T1 tiene derivada $-x/\sqrt{25 - x^2}$, igual a $-3/4$ en $x = 3$.

⚠ La derivación implícita supone lo que no prueba

La técnica da el valor de y' *si* y existe y es derivable; no demuestra ninguna de las dos cosas.

Resultados

Derivada de la inversa

Teorema C1-031.T1 (derivada de la inversa)

Sea f continua y estrictamente monótona en un intervalo I, a interior de I, f derivable en a con $f'(a) \neq 0$. Entonces $b = f(a)$ es interior de $f(I)$, f^{-1} es derivable en b y $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$.

Idea de la demostración
Se toma cualquier sucesión $y_n \to b$; con f^{-1} se lleva a $x_n \to a$, y el cociente de f^{-1} en y_n es el recíproco del cociente de f en x_n.

Demostración.

Paso 1: la inversa existe y es continua.

1. Como f es estrictamente monótona, es inyectiva (C1-010.T1); su inversa sobre la imagen $f^{-1} : f(I) \to I$ existe (C1-011.D1).
2. Por C1-026.T1, $f(I)$ es un intervalo, y por C1-026.T3, f^{-1} es continua en $f(I)$.

Paso 2: b es interior de $f(I)$.

1. Como a es interior de I, hay $r > 0$ con $(a-2r, a+2r) \subset I$, y por tanto $a-r,\ a+r \in I$ (C1-004.D2).
2. Si f es creciente, $f(a - r) < b < f(a + r)$.
3. Como $f(I)$ es un intervalo que contiene a $f(a \pm r)$, contiene a $(f(a - r), f(a + r))$ (C1-004.D2);

así b es interior de $f(I)$.

4. Si f es decreciente, el mismo argumento con $(f(a+r), f(a-r))$.

Paso 3: el límite.

1. Sea (y_n) una sucesión en $f(I)$ con $y_n \neq b$ e $y_n \to b$, y sea $x_n = f^{-1}(y_n) \in I$.
2. Como f^{-1} es inyectiva, $x_n \neq a$; como f^{-1} es continua en b, $x_n \to f^{-1}(b) = a$ (C1-022.T1).
3. Como $f(x_n) = y_n \neq b = f(a)$ (K8, C1-002.T6),

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)^{-1}.$$

4. Por la derivabilidad de f en a y la traslación C1-017.T2, $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a)$, y por C1-019.T1 el paréntesis tiende a $f'(a)$.
5. Como $f'(a) \neq 0$, por C1-013.T2 el lado izquierdo tiende a $1/f'(a)$.
6. Como (y_n) era arbitraria, C1-019.T1 da

$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

7. Por C1-017.T2 y C1-027.D1 (b es interior del dominio de f^{-1}), f^{-1} es derivable en b con $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$. ■

Potencias racionales

Corolario C1-031.C1
Para $x > 0$ y $p/q \in \mathbb{Q}$, $(x^{p/q})' = (p/q)\, x^{p/q-1}$.

Demostración.

Paso 1: la raíz q-ésima.

1. Sea $q \in \mathbb{N}$ y $g(x) = x^q$ en $I = (0, \infty)$.
2. g es continua (C1-022.T2), estrictamente creciente (C1-005.T9) y $g'(x) = qx^{q-1} > 0$ (C1-028.T2, C1-005.T9).
3. Su imagen es $(0, \infty)$ y su inversa es $y \mapsto \sqrt[q]{y}$ (C1-023.C2). Todo punto de I es interior.

4. Por C1-031.T1, para $y > 0$ con $a = \sqrt[q]{y}$ (leyes de exponentes racionales, C1-023.T2),

$$(\sqrt[q]{\ })'(y) = \frac{1}{q\, a^{q-1}} = \frac{1}{q}\, y^{-(q-1)/q} = \frac{1}{q}\, y^{1/q-1}.$$

Paso 2: la potencia p/q.

1. $x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p$ (C1-023.D1).
2. Si $p = 0$, la función es la constante 1 y su derivada es $0 = 0 \cdot x^{-1}$ (C1-028.T2).
3. Si $p \neq 0$, la función $u \mapsto u^p$ es derivable en $u > 0$ con derivada pu^{p-1} (C1-028.T2 si $p > 0$, C1-029.C1 si $p < 0$).
4. Por la regla de la cadena (C1-030.T1) y C1-023.T2, C1-005.T9,

$$\begin{aligned}(x^{p/q})' &= p\,(\sqrt[q]{x})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}\, x^{1/q-1} \\ &= \frac{p}{q}\, x^{(p-1)/q+1/q-1} \\ &= \frac{p}{q}\, x^{p/q-1}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Por qué cada hipótesis

⚠ Estrictamente monótona

$f(x) = x^2$ en $I = (-1, 1)$ no es inyectiva ($f(-1/2) = f(1/2)$): no hay inversa.

⚠ Continua en I

Sea $I = (-1, 1]$ y $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = x + 1/n^2$ si $1/(n+1) < x \leq 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$).

- f es estrictamente creciente: en cada pieza lo es, y al pasar de la pieza $n + 1$ a la pieza n sube, pues $1/(n+1)^2 < 1/n^2$.
- f es derivable en 0 con $f'(0) = 1$: para $h < 0$ el cociente es 1, y para $1/(n+1) < h \leq 1/n$ vale $1 + 1/(n^2 h)$, entre 1 y $1 + (n+1)/n^2$, que tiende a 1 (sándwich, C1-019.T2 en su versión lateral).
- Pero en cada $1/(n+1)$ hay un hueco: los valores del intervalo $\big(1/(n+1) + 1/(n+1)^2,\ 1/(n+1) + 1/n^2\big)$ no están en $f(I)$.
- Esos huecos están tan cerca de 0 como se quiera, así que $b = f(0) = 0$ no es interior de

$f(I)$ y $(f^{-1})'(0)$ no se puede definir con C1-027.D1.

(Si f saltara en el propio a, ni siquiera sería derivable en a, por C1-028.T1.)

⚠ a interior

$f(x) = x$ en $\mathbb{R}$ e $I = [0, 1]$, $a = 0$: $f'(0) = 1$, pero $b = 0$ no es interior de $f(I) = [0, 1]$.

⚠ Derivada distinta de cero

$f(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$, $a = 0$: f es continua y estrictamente creciente, $f'(0) = 0$, y $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ no es derivable en 0 (C1-027, ejemplo 4).
De hecho, si f^{-1} fuera derivable en b, la regla de la cadena aplicada a $f^{-1} \circ f = \text{id}$ daría $(f^{-1})'(b)\, f'(a) = 1$, imposible con $f'(a) = 0$.

Ejercicios

1. Sea $f(x) = x^3 + x$. Calcula $(f^{-1})'(2)$ sin despejar f^{-1}.
2. Calcula $(x^{2/3})'$ en $x = 8$.
3. Calcula f'' para $f(x) = x^4 - 3x^2$ y la aceleración en $t = 1$ si f es una posición.
4. Con derivación implícita, encuentra la pendiente de $x^2 + xy + y^2 = 7$ en $(1, 2)$ (suponiendo y derivable).
5. Demuestra que si f es derivable en un intervalo abierto I y $f' > 0$ en I, no se puede concluir todavía que f sea inyectiva con lo visto hasta esta clase; ¿qué teorema futuro lo da?

Respuestas

1. f es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$; $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$; $(f^{-1})'(2) = 1/4$.
2. $(2/3)\, 8^{-1/3} = 1/3$.
3. $f'' = 12x^2 - 6$; en 1 vale 6.
4. $2x + y + xy' + 2yy' = 0$; en $(1, 2)$: $4 + 5y' = 0$, $y' = -4/5$.
5. Hace falta el teorema del valor medio y su consecuencia C1-034.T2 ($f' > 0 \Rightarrow$ estrictamente creciente).

C1-032 · Fermat y Rolle

Motivación

> **La pelota lanzada hacia arriba**
> Lanzas una pelota hacia arriba a 14.7 m/s. Su altura es $h(t) = 14.7t - 4.9t^2$ metros y a los 3 segundos vuelve al piso: $h(0) = h(3) = 0$.
> En algún momento deja de subir y empieza a bajar; ahí su velocidad vertical $h'(t) = 14.7 - 9.8t$ vale cero, en $t = 1.5$ s, a 11.025 m de altura.
> ¿Pasa lo mismo con cualquier trayectoria que sale y llega a la misma altura, aunque el viento la haga subir y bajar varias veces? El teorema de Rolle dice que sí, siempre que la altura sea continua y derivable.
> Dónde falla la analogía: si la pelota rebota en el piso a la mitad del recorrido, en el rebote la altura no es derivable (como $|x|$ en 0) y Rolle no se aplica a ese tramo. Además, en la parábola el instante c queda justo a la mitad; en general no.

La clave está en el punto más alto: justo antes la pelota sube (pendientes ≥ 0) y justo después baja (pendientes ≤ 0), así que la pendiente en ese punto queda atrapada en 0. Ese es el teorema de Fermat.

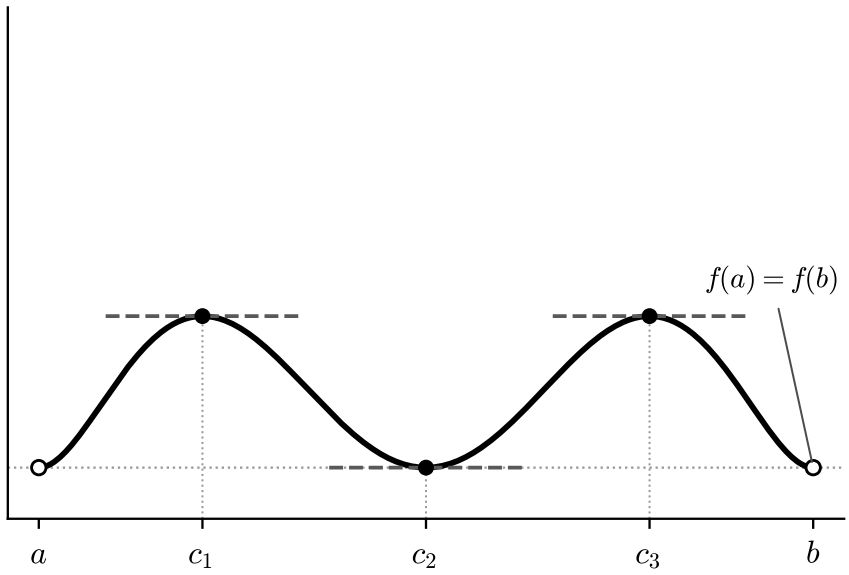


Figura 32: Rolle: una función con $f(a) = f(b)$ tiene al menos un punto interior con tangente horizontal; aquí hay tres.

Definiciones

Definición C1-032.D1

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$.

- f tiene un *máximo local* en a si existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$; *mínimo local*, con $f(x) \geq f(a)$.
- Si f es derivable en a y $f'(a) = 0$, a es un *punto crítico*.

Resultados

Fermat

Teorema C1-032.T1 (Fermat)

Si f tiene un máximo o mínimo local en un punto interior a y es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

Idea de la demostración
A la derecha de un máximo los cocientes son ≤ 0; a la izquierda, ≥ 0; el límite común no puede ser ni positivo ni negativo.

Demostración. Supongamos un máximo local en a (el mínimo es análogo, cambiando las desigualdades, o aplicando el caso del máximo a $-f$ con C1-029.T1).

1. Como a es interior y por C1-032.D1, hay $r > 0$ tal que f está definida en $(a-r, a+r)$ y $f(a+h) \leq f(a)$ para $|h| < r$.
2. Si $0 < h < r$, $f(a+h) - f(a) \leq 0$ y $1/h > 0$ (C1-003.T7), así que $(f(a+h) - f(a))/h \leq 0$ (C1-003.T4, C1-003.T9).
3. Si $-r < h < 0$, $1/h < 0$ y el cociente es ≥ 0 (C1-003.T4).
4. Como f es derivable en a, los dos límites laterales del cociente existen y valen $f'(a)$ (C1-020.T1).
5. Por la versión lateral de C1-019.T3 (C1-020.T2), comparando con la constante 0 (C1-017.E1):

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0, \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

6. Por tricotomía (C1-003.T1), $f'(a) = 0$. ■

Rolle

Teorema C1-032.T2 (Rolle)

Sean $a < b$, f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $f(a) = f(b)$. Existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.

> **Idea de la demostración**
> Weierstrass da un punto más alto y uno más bajo; si alguno cae adentro, Fermat da $f'(c) = 0$; si los dos caen en los extremos, la función es constante.

Demostración. Por Weierstrass (C1-024.T2) existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

Caso 1: $f(x_1) = f(x_2)$.

1. Para todo $x \in [a, b]$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_1)$, luego $f(x) = f(x_1)$ (si fuera $f(x) \neq f(x_1)$, la tricotomía C1-003.T1 contradiría una de las dos desigualdades).
2. Sea $c = (a + b)/2$; por C1-003.T8, $c \in (a, b)$.
3. $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$: f tiene un máximo local en c (C1-032.D1).

Caso 2: $f(x_1) < f(x_2)$.

1. Si x_1 y x_2 estuvieran ambos en $\{a, b\}$, la hipótesis $f(a) = f(b)$ daría $f(x_1) = f(x_2)$, contra la tricotomía (C1-003.T1).
2. Luego alguno de ellos, llamémoslo c, está en (a, b).
3. En c la función tiene su máximo ($c = x_2$) o su mínimo ($c = x_1$) en $[a, b]$, en particular uno local (C1-032.D1).

Conclusión.

1. En ambos casos $c \in (a, b)$ es interior de $[a, b]$: con $r = \min(c-a, b-c) > 0$ se tiene $(c-r, c+r) \subset (a, b)$ (C1-004.D2).
2. Como f es derivable en c, Fermat (C1-032.T1) da $f'(c) = 0$. ■

Por qué cada hipótesis

Rolle

⚠ Continuidad en [a, b]

$f(x) = x$ en $[0, 1)$, $f(1) = 0$. Es derivable en $(0, 1)$ y $f(0) = f(1) = 0$, pero $f'(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1)$ (C1-028.T2). Falla la continuidad en 1.

⚠ Derivabilidad en (a, b)

$f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$. Es continua (C1-028.E1 y C1-022.T2 lejos de 0) y $f(-1) = f(1) = 1$, pero $f'(x) = -1$ para $x < 0$, $f'(x) = 1$ para $x > 0$ y $f'(0)$ no existe (C1-028.E1).

⚠ f(a) = f(b)

$f(x) = x$ en $[0, 1]$: continua y derivable, $f'(x) = 1 \neq 0$.

Fermat

⚠ Punto interior

$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, tiene un máximo local en 1, que no es interior de $[0, 1]$; ahí g ni siquiera es derivable en el sentido de C1-027.D1, y la extensión $x \mapsto x$ a $\mathbb{R}$ tiene derivada 1 en 1, no 0, porque en $\mathbb{R}$ el punto 1 ya no es máximo local.

⚠ Derivabilidad

$|x|$ tiene un mínimo en 0, punto interior, y no es derivable ahí.

⚠ El recíproco es falso

$f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$ (C1-028.T2) y $f(x) < 0 < f(y)$ para $x < 0 < y$ (C1-005.T9 y C1-002.T4), así que 0 no es máximo ni mínimo local.

Ejercicios

1. Verifica las hipótesis de Rolle para $f(x) = x^2 - 4x$ en $[0, 4]$ y encuentra c.
2. Encuentra c de Rolle para $f(x) = x^3 - x$ en $[0, 1]$. ¿Es el punto medio?
3. Demuestra que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real (existencia con C1-023.C3; unicidad con Rolle).
4. Demuestra que si f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) \neq 0$ para todo x, entonces f tiene a lo más una raíz.
5. Da una función continua en $[0, 2]$, derivable en $(0, 2)$, con $f(0) = f(2)$ y exactamente tres puntos donde $f' = 0$.

Respuestas

1. Polinomio, continuo y derivable; $f(0) = f(4) = 0$; $f'(c) = 2c - 4 = 0$, $c = 2$.
2. $3c^2 - 1 = 0$, $c = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$; no es el punto medio 0.5.
3. Si hubiera dos raíces $r_1 < r_2$, Rolle daría c con $3c^2 + 1 = 0$, imposible pues $3c^2 + 1 > 0$ (C1-003.T5, O2).
4. Dos raíces $r_1 < r_2$ y Rolle en $[r_1, r_2]$ darían $f'(c) = 0$.
5. $f(x) = p(x)^2$ con $p(x) = x(x - 1)(x - 2)$: $f' = 2pp'$ y $p'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. En $(0, 2)$, f' se anula exactamente en 1 (raíz de p) y en $1 \pm 1/\sqrt{3}$ (raíces de p').

C1-033 · Teorema del Valor Medio

Motivación

> **Las casetas de la autopista**
> Pasas la caseta de entrada de la autopista a las 10:00 y la de salida, 150 km después, a las 11:15. Nadie te midió la velocidad en el camino. Tu velocidad promedio fue $150/1.25 = 120$ km/h. ¿Se puede asegurar que en algún instante ibas *exactamente* a 120 km/h?
> En la gráfica posición–tiempo:
>
> - la velocidad promedio es la pendiente de la secante que une los puntos de las dos casetas;
> - lo que marca el velocímetro en un instante es la pendiente de la tangente.
>
> Si una tangente recorre la curva, en algún momento queda paralela a la secante. El Teorema del Valor Medio dice que esto ocurre siempre que la posición sea continua y derivable: hubo un instante a 120 km/h.
> Dónde falla la analogía: la analogía es fiel; lo que el teorema no dice es *cuándo* ocurrió, ni *cuántas veces*.

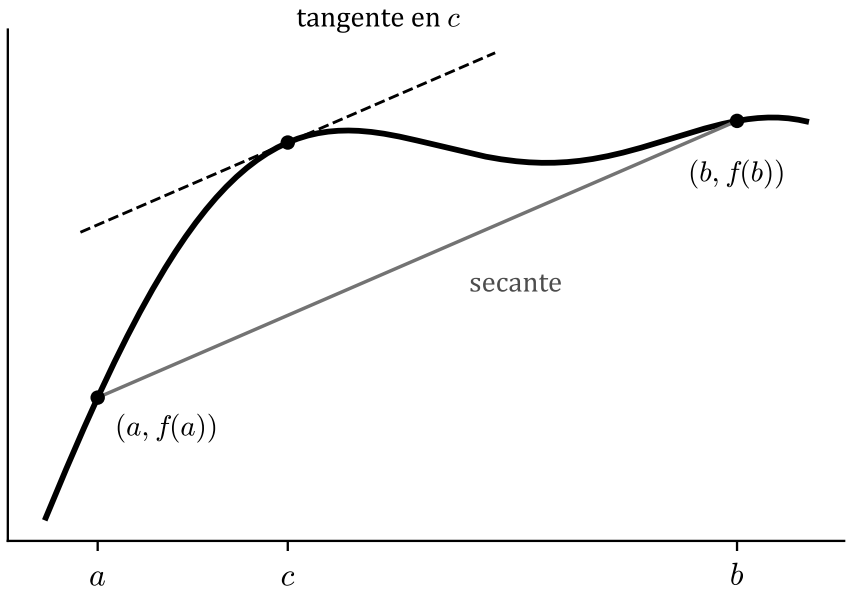


Figura 33: TVM: en algún $c \in (a, b)$ la tangente es paralela a la secante que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

Definiciones

No hay definiciones nuevas. Se usan la derivada (C1-027.D1) y el teorema de Rolle (C1-032.T2).

Resultados

Teorema C1-033.T1 (TVM)

Sean $a < b$ y f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe $c \in (a, b)$ con

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

> **Idea de la demostración**
> A f se le resta la recta secante; lo que queda empieza y termina a la misma altura, y ahí se aplica Rolle.

Demostración.

1. Como $a < b$, se tiene $b - a \in P$ (C1-003.D1), luego $b - a \neq 0$ (O1).
2. El número $m = (f(b) - f(a))/(b - a)$ está bien definido (K8, C1-002.D1).
3. Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - m(x - a).$$

4. La función $x \mapsto m(x - a) = mx + (-ma)$ es un polinomio, continuo en todo $\mathbb{R}$ (C1-022.T2), y derivable con derivada m (C1-028.T2).
5. Por la hipótesis sobre f y las reglas de continuidad y derivación (C1-022.T2, C1-029.T1), h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h'(x) = f'(x) - m$.
6. $h(a) = f(a) - m \cdot 0 = f(a)$ (C1-002.T3, K3, K4).
7. Como $m(b - a) = f(b) - f(a)$ (K5-K8),

$$h(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

(C1-002.T4, C1-002.T6, K1, K2, K4).

8. Así $h(a) = h(b)$, y por el teorema de Rolle (C1-032.T2) existe $c \in (a, b)$ con $h'(c) = 0$.
9. Es decir, $f'(c) - m = 0$; sumando m a ambos lados (K1, K3, K4), $f'(c) = m$. ■

> **Ejemplo C1-033.E1**
> Sin continuidad en $[a, b]$: $f(x) = x$ en $[0, 1)$, $f(1) = 0$. Sin derivabilidad: $|x|$ en $[-1, 1]$. (Se desarrollan en la sección siguiente.)

Por qué cada hipótesis

⚠ Continuidad en [a, b]

$f(x) = x$ en $[0, 1)$, $f(1) = 0$. f es derivable en $(0, 1)$ con $f'(x) = 1$ (C1-028.T2), pero no es continua en 1 ($\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 0$).
La secante tiene pendiente $(0 - 0)/(1 - 0) = 0$ y ningún $c \in (0, 1)$ da $f'(c) = 0$.

⚠ Derivabilidad en (a, b)

$f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$. f es continua, la secante tiene pendiente $(1 - 1)/2 = 0$, pero $f'(x) = -1$ si $x < 0$, $f'(x) = 1$ si $x > 0$, y $f'(0)$ no existe (C1-028.E1). Ningún c sirve.

⚠ El punto c no es el punto medio

$f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$: la secante tiene pendiente $(1 - (-1))/2 = 1$ y $f'(c) = 3c^2 = 1$ da $c = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.577$; el punto medio 0 no sirve.

Ejercicios

1. Encuentra c del TVM para $f(x) = x^2$ en $[1, 3]$.
2. Demuestra que si $|f'(x)| \leq M$ en (a, b) y f es continua en $[a, b]$, entonces $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ para todos $x, y \in [a, b]$.
3. Un auto recorre 150 km en 1.25 h. Explica con el TVM por qué en algún instante iba a 120 km/h. ¿Qué hipótesis sobre la posición estás suponiendo?
4. Demuestra que para $0 < x < y$, $\sqrt{y} - \sqrt{x} < (y - x)/(2\sqrt{x})$.
5. Da una función continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$ para la que haya exactamente dos valores de c.

Respuestas

1. Secante $(9 - 1)/2 = 4$; $2c = 4$, $c = 2$.
2. Para $x < y$, TVM en $[x, y]$: $|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\,|y - x| \leq M|y - x|$ (C1-004.T2, C1-003.T4).
3. Con f = posición continua en $[10, 11.25]$ y derivable en el interior, hay c con $f'(c) = 150/1.25 = 120$.
4. TVM para $\sqrt{t}$ en $[x, y]$ (derivada $1/(2\sqrt{t})$ por C1-031.C1): $\sqrt{y} - \sqrt{x} = (y - x)/(2\sqrt{c})$ con $x < c$, y $1/\sqrt{c} < 1/\sqrt{x}$ (C1-003.T7).
5. $f(x) = (x - 1)^3$ en $[0, 2]$: secante 1, $3(c - 1)^2 = 1$, $c = 1 \pm 1/\sqrt{3}$.

C1-034 · Consecuencias del TVM, máximos, mínimos y concavidad

Motivación

> **Dos autos con el mismo velocímetro**
> Dos autos salen al mismo tiempo; uno va 5 km adelante. Durante todo el viaje sus velocímetros marcan exactamente lo mismo en cada instante. ¿A qué distancia están al final?
> La intuición dice «5 km», y el Teorema del Valor Medio lo convierte en teorema: si dos posiciones tienen la misma derivada en todo un intervalo, su diferencia es constante.
> Dónde falla la analogía: dos autos reales nunca tienen velocímetros idénticos; el teorema pide la igualdad en cada instante y un viaje sin interrupciones (un intervalo).

La misma idea da las herramientas para estudiar la forma de una gráfica:

- si el velocímetro marca siempre un número positivo, el auto avanza (la función crece);
- si la velocidad pasa de positiva a negativa, ahí hubo un punto de máximo avance;
- si la velocidad misma crece, la gráfica se curva hacia arriba (es convexa).

Definiciones

Definición C1-034.D1 (convexidad e inflexión)

f es **convexa** en un intervalo I si para $x < t < y$ en I,

$$f(t) \le f(x) + \big(f(y) - f(x)\big)\frac{t-x}{y-x};$$

- **estrictamente convexa** si vale $<$;
- **cóncava** si $-f$ es convexa.

Un **punto de inflexión** es un punto interior a donde f es continua y f pasa de convexa a cóncava (o al revés) en intervalos a cada lado de a.

Geometría. El lado derecho es la altura en t de la secante entre $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$: convexa significa que la gráfica queda por debajo de sus secantes.

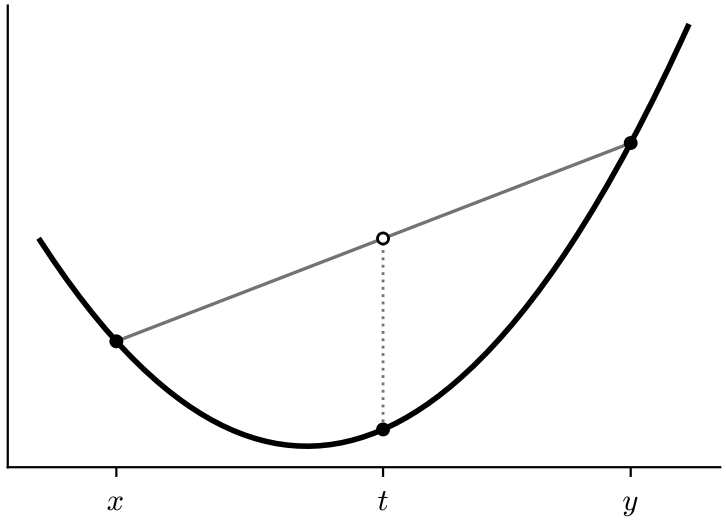


Figura 34: Convexa: entre x e y, la gráfica queda por debajo de la secante.

Resultados

En las demostraciones se usa varias veces el siguiente hecho: *si I es un intervalo y $x < y$ están en I, entonces $[x, y] \subset I$ y todo $z \in (x, y)$ es interior de I* (C1-004.D2: con $r = \min(z - x, y - z) > 0$, $(z - r, z + r) \subset (x, y) \subset I$).

Derivada cero

Teorema C1-034.T1

Sea f continua en un intervalo I y derivable en su interior. Si $f' = 0$ en el interior, f es constante en I; si $f' = g'$ (g en las mismas condiciones), $f - g$ es constante.

> **Idea de la demostración**
> El TVM entre dos puntos cualesquiera da una pendiente promedio igual a una $f'(c) = 0$.

Demostración.

1. Sean $x < y$ en I. Por el hecho anterior, f es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y).
2. Por el TVM (C1-033.T1) hay $c \in (x, y)$ con (K5, K8, C1-002.T3)

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0 \cdot (y - x) = 0.$$

3. Luego $f(x) = f(y)$. Como dos puntos distintos de I siempre se pueden ordenar (C1-003.T1), f toma el mismo valor en todo I.
4. Si $f' = g'$, la función $h = f - g$ es continua en I (C1-022.T2) y derivable en el interior con $h' = f' - g' = 0$ (C1-029.T1); por lo anterior, h es constante. ■

Crecimiento

Teorema C1-034.T2
Con f como en T1: $f' > 0$ en el interior ⇒ f estrictamente creciente en I; $f' \geq 0$ ⇒ creciente (análogos decrecientes).

Demostración.

1. Sean $x < y$ en I. Como en T1, el TVM da $c \in (x, y)$ con $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$.
2. Como $y - x > 0$ (C1-003.D1): si $f'(c) > 0$, el producto es > 0 (O3), y si $f'(c) \geq 0$, es ≥ 0 (C1-003.T4, C1-003.T9, C1-002.T3).
3. Así $f(x) < f(y)$, o $f(x) \leq f(y)$, respectivamente.
4. Los casos decrecientes salen aplicando lo anterior a $-f$ (C1-029.T1, C1-003.T9). ■

Criterio de la primera derivada

Teorema C1-034.T3 (criterio de la 1.ª derivada)

Si f es continua en a, derivable en $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, con $f' > 0$ en $(a-\delta, a)$ y $f' < 0$ en $(a, a+\delta)$, entonces f tiene un máximo local estricto en a (análogo mínimo).

Demostración.

1. En $(a-\delta, a)$, f es derivable, luego continua (C1-028.T1); junto con la continuidad en a, f es continua en el intervalo $(a-\delta, a]$, cuyo interior es $(a-\delta, a)$, donde $f' > 0$.
2. Por C1-034.T2, f es estrictamente creciente en $(a-\delta, a]$: $f(x) < f(a)$ para $a-\delta < x < a$.
3. Del mismo modo, en $[a, a+\delta)$ es estrictamente decreciente: $f(x) < f(a)$ para $a < x < a+\delta$.
4. Luego $f(x) < f(a)$ si $0 < |x-a| < \delta$: máximo local estricto en a (C1-032.D1).
5. El mínimo se obtiene con $-f$. ■

Criterio de la segunda derivada

Teorema C1-034.T4 (criterio de la 2.ª derivada)

Sea f derivable en un intervalo abierto que contiene a a, con $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$. Entonces f tiene un mínimo local estricto en a (análogo máximo con $f''(a) < 0$).

Demostración.

1. Que exista $f''(a)$ significa (C1-031.D1, C1-027.D1) que f' está definida en un intervalo $(a-s, a+s)$ y es derivable en a; en particular f es derivable, y por tanto continua (C1-028.T1), en ese intervalo.
2. Como $f'(a) = 0$,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h} > 0.$$

3. Por C1-019.T3 (signo del límite), hay $r \in (0, s)$ con $f'(a+h)/h > 0$ para $0 < |h| < r$.
4. Para $0 < h < r$ eso da $f'(a+h) > 0$, y para $-r < h < 0$, $f'(a+h) < 0$ (C1-003.T4).
5. Así $f' < 0$ en $(a-r, a)$ y $f' > 0$ en $(a, a+r)$.
6. Por el criterio de la 1.ª derivada (C1-034.T3, versión mínimo) f tiene un mínimo local estricto en a.

7. El máximo se obtiene con $-f$. ■

Convexidad

Teorema C1-034.T5

Sea f derivable en un intervalo abierto I. f' creciente ⇒ f convexa; f' estrictamente creciente (en particular $f'' > 0$) ⇒ f estrictamente convexa.

Idea de la demostración
El TVM a la izquierda y a la derecha de t da dos pendientes de secantes que son valores de f'; como f' crece, la de la izquierda es menor.

Demostración.

1. Sean $x < t < y$ en I; f es continua en I (C1-028.T1).
2. Por el TVM (C1-033.T1) en $[x, t]$ y en $[t, y]$ hay $c_1 \in (x, t)$ y $c_2 \in (t, y)$ con
$$s_1 := \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(c_1), \qquad s_2 := \frac{f(y) - f(t)}{y - t} = f'(c_2).$$
3. Como $c_1 < t < c_2$ y f' es creciente, $s_1 \le s_2$ ($s_1 < s_2$ si es estrictamente creciente).
4. Entonces (K1, K9; C1-003.T4 con $y - t > 0$; C1-003.T3)
$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= s_1(t - x) + s_2(y - t) \\ &\ge s_1(t - x) + s_1(y - t) \\ &= s_1(y - x). \end{aligned}$$
5. Dividiendo entre $y - x > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4), $(f(y) - f(x))/(y - x) \ge s_1$.
6. Multiplicando por $t - x > 0$ y sumando $f(x)$ (C1-003.T4, C1-003.T3):
$$f(x) + \big(f(y) - f(x)\big)\frac{t - x}{y - x} \;\ge\; f(x) + s_1(t - x) = f(t),$$
que es la convexidad; con $s_1 < s_2$ todas las desigualdades son estrictas.
7. Si $f'' > 0$ en I, f' es derivable, luego continua (C1-028.T1), en el intervalo abierto I y por C1-034.T2 aplicado a f' es estrictamente creciente. ■

Ejemplo: $x^3 - 3x$

$f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

1. f' es positiva en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y negativa en $(-1, 1)$: por C1-034.T2, f crece, decrece y vuelve a crecer.
2. Por C1-034.T3 hay máximo local en -1 ($f(-1) = 2$) y mínimo local en 1 ($f(1) = -2$), lo que confirma C1-034.T4 con $f''(\pm 1) = \pm 6$.
3. Como $f''(x) = 6x$, por C1-034.T5 f es estrictamente convexa en $(0, \infty)$ y, aplicado a $-f$, estrictamente cóncava en $(-\infty, 0)$: 0 es un punto de inflexión (C1-034.D1).

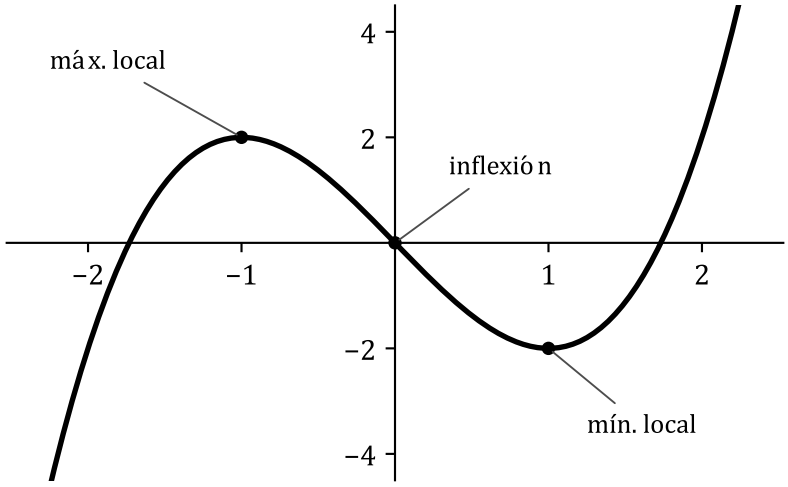


Figura 35: $x^3 - 3x$: máximo local en -1, mínimo local en 1 e inflexión en 0.

Por qué cada hipótesis

⚠ I intervalo (T1, T2)

$f(x) = 0$ si $-1 < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$: $f' = 0$ en todo su dominio $(-1, 0) \cup (0, 1)$, que no es un intervalo, y f no es constante.

Para T2: $f(x) = -1/x$ en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ tiene $f'(x) = 1/x^2 > 0$ (C1-029.C1), pero $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$.

⚠ Continuidad en I (T1)

$f(x) = 0$ en $[0, 1)$, $f(1) = 1$: $f' = 0$ en $(0, 1)$ y f no es constante.

⚠ Derivabilidad en todo el interior (T1)

Si f es continua y solo deja de ser derivable en un punto p, la conclusión sigue valiendo (T1 a cada lado de p y continuidad en p).
El contraejemplo verdadero es la función de Cantor, continua en $[0, 1]$, con derivada 0 salvo en un conjunto no numerable y $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$; no se construye en este curso.

⚠ Criterio de la 2.ª derivada sin f''(a) distinto de 0

$f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$, $k(x) = x^3$: las tres tienen primera y segunda derivada 0 en 0, y en 0 hay, respectivamente, un mínimo, un máximo y ningún extremo. El criterio no decide.

⚠ Convexidad e inflexión: f'' = 0 no basta

$f(x) = x^4$ tiene $f''(0) = 0$, pero es convexa en todo $\mathbb{R}$ ($f' = 4x^3$ es estrictamente creciente): 0 no es punto de inflexión.

Ejercicios

1. Demuestra que si $f'(x) = 2x$ para todo x y $f(0) = 3$, entonces $f(x) = x^2 + 3$.
2. Estudia crecimiento, extremos locales y convexidad de $f(x) = x^4 - 2x^2$.
3. Demuestra que $x^3 + x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
4. Demuestra que si f es derivable en un intervalo abierto I y f' es creciente, la gráfica queda por encima de cada tangente: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ para $a, x \in I$.
5. Da una función con $f' > 0$ en todo su dominio que no sea creciente, y explica qué hipótesis de C1-034.T2 falla.

Respuestas

1. $h(x) = f(x) - x^2$ tiene $h' = 0$ en $\mathbb{R}$; por T1, h es constante, $h(0) = 3$.
2. $f' = 4x(x - 1)(x + 1)$: decrece en $(-\infty, -1]$, crece en $[-1, 0]$, decrece en $[0, 1]$, crece en $[1, \infty)$;

mínimos en ± 1 ($f = -1$), máximo en 0 ($f = 0$); $f'' = 12x^2 - 4$: cóncava en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, convexa fuera; inflexiones en $\pm 1/\sqrt{3}$.

3. $f' = 3x^2 + 1 > 0$ (C1-003.T5, O2) y T2.
4. TVM: $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ con c entre a y x. Si $x > a$, $f'(c) \geq f'(a)$ y $x - a > 0$; si $x < a$, $f'(c) \leq f'(a)$ y $x - a < 0$. En ambos casos $f'(c)(x - a) \geq f'(a)(x - a)$ (C1-003.T4, C1-003.T9).
5. $f(x) = -1/x$ en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$: $f' = 1/x^2 > 0$ pero $f(-1) > f(1)$; el dominio no es un intervalo.

C1-035 · Trazado de curvas y optimización

Motivación

> **¿A qué velocidad conviene manejar?**
> Vas a manejar 300 km. Cada hora de manejo te cuesta 240 pesos y la gasolina cuesta, aproximadamente, $0.024v$ pesos por kilómetro si vas a v km/h. Por kilómetro, el costo es
>
> $$C(v) = \frac{240}{v} + 0.024\,v, \qquad 40 \le v \le 110.$$
>
> Ir lento ahorra gasolina pero cuesta tiempo; ir rápido, al revés. A 40 km/h el viaje cuesta 2,088 pesos; a 80, 1,476; a 110, 1,446.55.
> ¿Hay una velocidad óptima? El resultado de esta clase da un método seguro: la respuesta es 100 km/h, con 1,440 pesos.
> Dónde falla el modelo: el consumo real no es proporcional a la velocidad (tiene un mínimo a velocidades intermedias) y el costo del tiempo depende de cada persona. El método es exacto para la función que se escribió; la calidad de la respuesta depende de la del modelo.

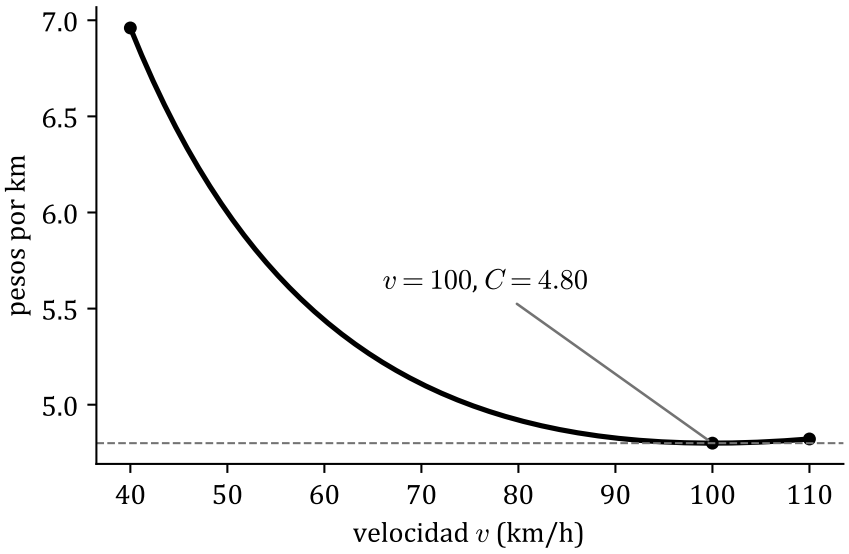


Figura 36: Costo por kilómetro $C(v)$ en $[40, 110]$: el mínimo está en el punto crítico $v = 100$.

Definiciones

Se usan los extremos locales y puntos críticos (C1-032.D1) y la convexidad (C1-034.D1).

Resultados

Dónde pueden estar los extremos

Teorema C1-035.T1

Sean $a < b$ y f continua en $[a, b]$. Todo punto donde f alcanza su máximo o su mínimo en $[a, b]$ es a, b, un punto crítico, o un punto de (a, b) donde f no es derivable.

> **Idea de la demostración**
> Si el máximo está adentro y ahí hay derivada, Fermat obliga a que la derivada sea 0.

Demostración.

1. Por Weierstrass (C1-024.T2), f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.

2. Sea x^* un punto donde f alcanza su máximo (el caso del mínimo es análogo).
3. Si $x^* \in \{a, b\}$, o si $x^* \in (a, b)$ y f no es derivable en x^*, x^* está en la lista.
4. Queda el caso $x^* \in (a, b)$ con f derivable en x^*. Con $r = \min(x^* - a, b - x^*) > 0$ se tiene $(x^* - r, x^* + r) \subset [a, b]$ (C1-004.D2), así que x^* es interior.
5. $f(x) \leq f(x^*)$ para $|x - x^*| < r$: f tiene un máximo local en x^* (C1-032.D1).
6. Por Fermat (C1-032.T1), $f'(x^*) = 0$, es decir, x^* es un punto crítico. ■

Método para optimizar en $[a, b]$

1. Verificar que f es continua en $[a, b]$.
2. Hacer la lista de candidatos: a, b, los puntos críticos en (a, b) y los puntos de (a, b) sin derivada.
3. Evaluar f en cada candidato.

Por C1-024.T2 y C1-035.T1, el mayor valor es el máximo y el menor es el mínimo.

Método para trazar una curva

1. Dominio y simetrías.
2. Signo de f' (crecimiento, C1-034.T2).
3. Extremos locales (C1-034.T3, C1-034.T4).
4. Signo de f'' (convexidad e inflexión, C1-034.T5, C1-034.D1).
5. Asíntotas y comportamiento en $\pm\infty$ (C1-020.D1, C1-020.T3).

Ejemplos

> **Ejemplo 1 (el viaje)**
>
> 1. C es continua en $[40, 110]$ (C1-022.T2) y derivable con $C'(v) = -240/v^2 + 0.024$ (C1-029.C1, C1-029.T1).
> 2. $C'(v) = 0 \iff v^2 = 10{,}000 \iff v = 100$ (en $v > 0$). No hay puntos sin derivada.
> 3. Candidatos: $C(40) = 6.96$, $C(100) = 4.80$, $C(110) \approx 4.82$.
> 4. El mínimo es 4.80 pesos por km, en $v = 100$: 1,440 pesos por el viaje.

Ejemplo 2 (trazado)
$f(x) = x^3 - 3x$.

1. $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$; f crece en $(-\infty, -1]$, decrece en $[-1, 1]$ y crece en $[1, \infty)$.
2. Máximo local $f(-1) = 2$, mínimo local $f(1) = -2$.
3. $f''(x) = 6x$: cóncava en $(-\infty, 0)$, convexa en $(0, \infty)$, inflexión en 0.
4. $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$ (C1-020.T3).
5. En $[-2, 3]$ los candidatos dan $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$: el máximo es 18 (en el extremo 3) y el mínimo es -2 (en -2 y en 1).

Ejemplo 3 (el huerto)
Con 120 m de malla se cerca un rectángulo junto a un río, sin cercar el lado del río.

1. Si x es el lado perpendicular al río, el área es $A(x) = x(120 - 2x)$ para $x \in [0, 60]$.
2. $A'(x) = 120 - 4x$ se anula en $x = 30$.
3. Candidatos: $A(0) = A(60) = 0$, $A(30) = 1{,}800$ m^2.
4. El óptimo es 30 m por 60 m.

Por qué cada hipótesis

⚠ Intervalo cerrado

En $(0, 1)$, $f(x) = x$ no alcanza máximo ni mínimo (C1-024.E1); la lista de candidatos no sirve si no hay garantía de que el máximo exista.

⚠ Continuidad

$f(x) = x$ en $[0, 1)$, $f(1) = 0$: el supremo de f en $[0, 1]$ es 1 y no se alcanza.

⚠ Los cuatro tipos de candidatos hacen falta

En $[0, 4]$, $f(x) = |x - 1|$: el mínimo está en 1, donde f no es derivable, y el máximo en el extremo 4; f' nunca vale 0.

Ejercicios

1. Encuentra el máximo y el mínimo de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ en $[0, 4]$.
2. Una caja sin tapa se hace de una lámina de 30 cm × 30 cm cortando cuadrados de lado x en las esquinas. ¿Qué x da el mayor volumen?
3. Traza $f(x) = x/(1 + x^2)$: crecimiento, extremos, asíntota horizontal.
4. Encuentra el punto de la recta $y = 2x$ más cercano a $(5, 0)$ (minimiza el cuadrado de la distancia).
5. Demuestra que si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f' \neq 0$ en (a, b), entonces el máximo y el mínimo están en los extremos.

Respuestas

1. $f' = 3(x - 1)(x - 3)$; candidatos $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$: máximo 4 (en 1 y 4), mínimo 0 (en 0 y 3).
2. $V(x) = x(30 - 2x)^2$ en $[0, 15]$; $V' = (30 - 2x)(30 - 6x)$; candidatos 0, 5, 15; $V(5) = 2{,}000$ cm^3.
3. $f' = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2$: mínimo $-1/2$ en -1, máximo $1/2$ en 1; $f \to 0$ en $\pm\infty$ (C1-020.T3).
4. $d^2(x) = (x - 5)^2 + 4x^2$, derivada $10x - 10$: $x = 1$, punto $(1, 2)$.
5. Por C1-035.T1 los candidatos son solo a y b: no hay críticos ni puntos sin derivada en (a, b).

C1-036 · Método de Newton

Motivación

Una calculadora sin tecla de raíz

Una calculadora que solo suma, resta, multiplica y divide no tiene tecla de raíz. ¿Cómo obtener $\sqrt{2}$ con diez decimales?

La idea de Newton: cerca de un punto, la curva $y = x^2 - 2$ se parece a su tangente; la raíz de la tangente es fácil de calcular y queda cerca de la raíz de la curva. Repetir la idea da la sucesión

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \qquad x_0 = 2,$$

que vale 1.5, 17/12 ≈ 1.4166667, 577/408 ≈ 1.414215686 y 1.4142135624 …

En cuatro pasos hay más de diez decimales correctos (0, 0, 2, 5 y 11 decimales en $x_0, \dots, x_4$).

Dónde falla la analogía: una calculadora real trabaja con precisión finita; a partir de cierto paso los redondeos dominan y ya no se ganan decimales. El teorema habla de la sucesión exacta.

Definiciones

Iteración de Newton

Si f es derivable en x_n y $f'(x_n) \neq 0$, la tangente $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ corta al eje x en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

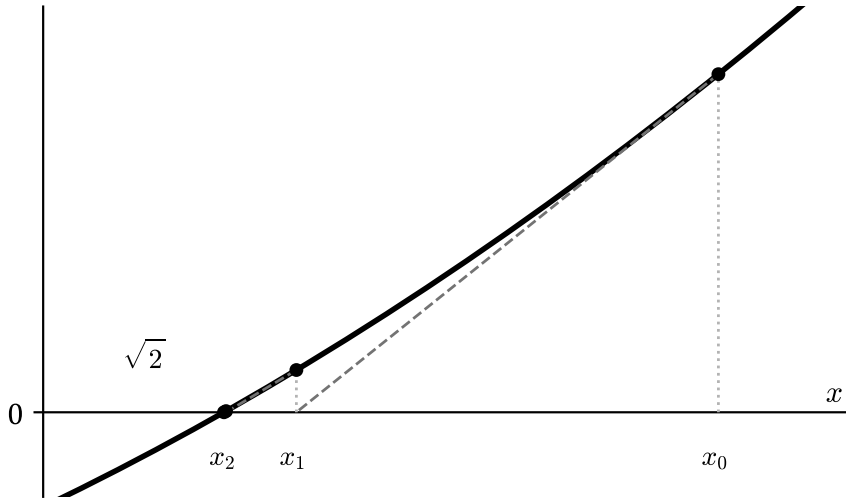


Figura 37: Newton para $x^2 - 2$ desde $x_0 = 2$: cada tangente corta al eje entre la raíz y el punto anterior.

Resultados

Teorema C1-036.T1

Sea f dos veces derivable en un intervalo abierto que contiene a $[r, b]$, con $f(r) = 0$, $f' > 0$ y $f'' > 0$ en $[r, b]$. Para $x_0 \in (r, b]$, la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ es decreciente, cumple $x_n > r$ y converge a r.

Idea de la demostración

Como f es convexa, su tangente en x_n queda por debajo de la curva; por eso corta al eje entre r y x_n. La sucesión baja y está acotada, así que converge, y el límite resuelve $f(L) = 0$.

Demostración.

Paso 0: preparación.

1. Sea J el intervalo abierto del enunciado. f y f' son derivables en J, luego continuas en J (C1-028.T1).
2. Aplicando C1-034.T2 a f en $[r, b]$ (continua, con $f' > 0$ en el interior) y a f' en $[r, b]$ (continua, con $(f')' = f'' > 0$ en el interior), f y f' son estrictamente crecientes en $[r, b]$.

3. Para $x \in (r, b]$ sea $N(x) := x - f(x)/f'(x)$, bien definido porque $f'(x) > 0$.

Paso 1: $N(x) < x$.

1. Como f es estrictamente creciente y $x > r$, $f(x) > f(r) = 0$.
2. Como $f'(x) > 0$, también $1/f'(x) > 0$ (C1-003.T7) y $f(x)/f'(x) > 0$ (O3).
3. Luego $N(x) < x$ (C1-003.T3, C1-003.T9).

Paso 2: $N(x) > r$.

1. f es continua en $[r, x]$ y derivable en (r, x); por el TVM (C1-033.T1) hay $c \in (r, x)$ con $f(x) = f(x) - f(r) = f'(c)(x - r)$.
2. Como f' es estrictamente creciente y $c < x$, $f'(c) < f'(x)$.
3. Como $x - r > 0$, $f(x) = f'(c)(x - r) < f'(x)(x - r)$ (C1-003.T4).
4. Multiplicando por $1/f'(x) > 0$ (C1-003.T4, C1-003.T7), $f(x)/f'(x) < x - r$, es decir, $N(x) > r$ (C1-003.T3).

Paso 3: la sucesión converge.

1. Por los pasos 1 y 2, N manda $(r, b]$ en $(r, x] \subset (r, b]$.
2. Por inducción (C1-005.T1): $x_0 \in (r, b]$, y si $x_n \in (r, b]$ entonces $x_{n+1} = N(x_n) \in (r, b]$ y $x_{n+1} < x_n$.
3. Así (x_n) es decreciente y acotada inferiormente por r; por C1-014.T2 converge a $L = \inf\{x_n\}$.
4. Como $x_n > r$ para todo n, $L \geq r$ (C1-013.T3). También $L \leq x_0 \leq b$, así que $L \in [r, b]$.

Paso 4: el límite es r.

1. Para todo n, $x_{n+1} f'(x_n) = x_n f'(x_n) - f(x_n)$ (K5-K9).
2. Como f y f' son continuas en L, $f(x_n) \to f(L)$ y $f'(x_n) \to f'(L)$ (C1-022.T1).
3. La sucesión (x_{n+1}) es una subsucesión de (x_n), así que $x_{n+1} \to L$ (C1-015.T1).
4. Por el álgebra de límites (C1-013.T2) y la unicidad del límite (C1-012.T1), $Lf'(L) = Lf'(L) - f(L)$, es decir, $f(L) = 0$ (C1-002.T1).
5. Como f es estrictamente creciente en $[r, b]$, es inyectiva (C1-010.T1), y de $f(L) = 0 = f(r)$ se sigue $L = r$. ■

Ejemplo 1

$f(x) = x^2 - 2, r = \sqrt{2}$ (C1-008.T2), $b = 2$: f es un polinomio, $f'(x) = 2x > 0$ y $f'' = 2 > 0$ en $[\sqrt{2}, 2]$. La iteración es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right);$$

por el teorema, desde $x_0 = 2$ decrece hacia $\sqrt{2}$ sin bajar de él.

Ejemplo 2

$f(x) = x^3 - 10, r = \sqrt[3]{10} \approx 2.1544$ (C1-023.C2), $b = 3$: $f' = 3x^2 > 0$ y $f'' = 6x > 0$ en $[r, 3]$. Desde $x_0 = 3$: $x_1 = 64/27 \approx 2.37037$, $x_2 \approx 2.1735$, $x_3 \approx 2.1546$, y x_4 difiere de r en menos de 2×10^{-8}.

Por qué cada hipótesis

⚠ f' > 0 y f' ' > 0 cerca de la raíz

$f(x) = x^3 - 2x + 2$ con $x_0 = 0$: $x_1 = 0 - 2/(-2) = 1$, $x_2 = 1 - 1/1 = 0$, y la sucesión cicla $0, 1, 0, 1, \ldots$ sin converger. Ningún intervalo $[r, b]$ con las hipótesis contiene a $x_0 = 0$ ($f'(0) = -2 < 0$).

⚠ Empezar a la derecha de r

$f(x) = x^2 - 2$ con $x_0 = 1 < \sqrt{2}$: $x_1 = 1.5 > \sqrt{2}$. La sucesión no es decreciente desde el inicio (sube primero); desde x_1 ya cumple el teorema.

⚠ f' ' > 0

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ (raíz $r = 0$, extendida a $x < 0$ como en C1-027): la iteración da $x_{n+1} = x_n - 3x_n = -2x_n$, que se aleja de la raíz desde cualquier $x_0 \neq 0$. Aquí, además, f no es derivable en r.

⚠ f(r) = 0

Si $f > 0$ en todo $[r, b]$ (por ejemplo $f(x) = x^2 + 1$ en $[0, 1]$), no hay raíz a la cual converger: con $x_{n+1} = (x_n - 1/x_n)/2$ y $x_0 = 1$ se obtiene $x_1 = 0$, donde $f'(0) = 0$ y x_2 ya no está definido.

Ejercicios

1. Escribe la iteración de Newton para $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ y verifica las hipótesis de C1-036.T1 con $x_0 > \sqrt{a}$.
2. Calcula x_1, x_2 para $\sqrt{10}$ con $x_0 = 4$.
3. Demuestra que, en las hipótesis del teorema, $0 < x_{n+1} - r < x_n - r$ para todo n.
4. Explica por qué la iteración para $f(x) = x^3 - 2x + 2$ con $x_0 = 0$ no contradice el teorema.
5. Demuestra que, en las hipótesis del teorema, $x_{n+1} - r \leq \frac{M}{2m}(x_n - r)^2$ si $f'' \leq M$ y $f' \geq m > 0$ en $[r, b]$ (usa la fórmula de Taylor de C1-038 con $n = 1$; ejercicio para después de C1-038).

Respuestas

1. $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$; $f(x) = x^2 - a$ con $f' = 2x > 0$ y $f'' = 2 > 0$ en $[\sqrt{a}, b]$.
2. $x_1 = (4 + 2.5)/2 = 3.25$; $x_2 = (3.25 + 10/3.25)/2 \approx 3.16346$.
3. Es (i) y (ii) de la demostración, restando r.
4. Fuera de las hipótesis el teorema no afirma nada; $x_0 = 0$ no está en ningún $(r, b]$ admisible.
5. Por C1-038.T2, $0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + f''(t)(r - x_n)^2/2$; despejando, $x_{n+1} - r = f''(t)(x_n - r)^2/(2f'(x_n))$.

C1-037 · TVM de Cauchy y regla de L'Hôpital

Motivación

> **Dos corredores**
> Dos corredores salen juntos de la línea. A los t segundos, A ha recorrido $f(t) = 3t + t^2$ metros y B, $g(t) = 2t + 4t^2$.
> Al principio los dos están en 0 y el cociente f/g tiene la forma $0/0$, que no dice nada por sí sola. Sin embargo, en $t = 0.01$ el cociente vale aproximadamente 1.4755, y parece acercarse a $3/2$: justo el cociente de las velocidades iniciales, $f'(0)/g'(0) = 3/2$.
> Al principio domina A, con 1.5 veces la distancia de B (aunque B lo alcanza en $t = 1/3$ s y después lo rebasa).
> Dónde falla la analogía: en este ejemplo bastaba simplificar, $f/g = (3 + t)/(2 + 4t) \to 3/2$. La regla se vuelve indispensable cuando no hay álgebra que ayude, como en $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x} - 1)/x$.

La regla de L'Hôpital convierte esta observación en teorema: cerca de un punto donde ambas funciones se anulan, el cociente de las funciones se comporta como el cociente de sus derivadas. La herramienta es una versión del TVM para dos funciones a la vez, debida a Cauchy.

Definiciones

Se usan los límites laterales y en $\pm\infty$ y los límites infinitos de C1-020.D1. «Cerca de a» es el sentido de C1-017.D1: para $0 < |x - a| < r$ con algún $r > 0$.

Resultados

TVM de Cauchy

Teorema C1-037.T1 (TVM de Cauchy)

Sean $a < b$ y f, g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Existe $c \in (a, b)$ con

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c).$$

> **Idea de la demostración**
> Se combina f y g en una sola función que vale lo mismo en a y en b, y se aplica Rolle.

Demostración.

1. Sea, en $[a, b]$,
$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x).$$
2. Por C1-022.T2, h es continua en $[a, b]$; por C1-029.T1, es derivable en (a, b) con
$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x).$$
3. Desarrollando (K1-K9, C1-002.T4),
$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b).$$
4. Por Rolle (C1-032.T2) hay $c \in (a, b)$ con $h'(c) = 0$, que es la igualdad buscada. ■

Observación. Con $g(x) = x$ se recupera el TVM (C1-033.T1).

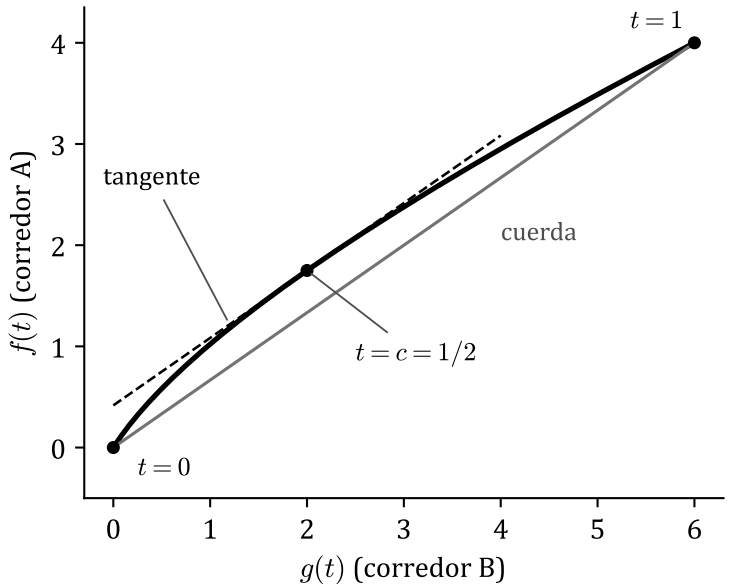


Figura 38: TVM de Cauchy para los corredores en $[0,1]$: en la curva $(g(t), f(t))$, la tangente en $t = c = 1/2$ es paralela a la cuerda.

L'Hôpital, forma $0/0$

Teorema C1-037.T2 (L'Hôpital, 0/0)

Sean f, g derivables cerca de a (salvo quizá en a), $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = 0$, $g' \neq 0$ cerca de a, y $\lim_{x\to a} f'/g' = L \in \mathbb{R}$. Entonces $g \neq 0$ cerca de a y $\lim_{x\to a} f/g = L$. Lo mismo vale para $x \to a^+$ (o $x \to a^-$) con las hipótesis en $(a, a+r)$ (o en $(a-r, a)$) y los límites laterales.

Idea de la demostración

Se definen f y g como 0 en a; el TVM de Cauchy en $[a, x]$ da $f(x)/g(x) = f'(c)/g'(c)$ con c entre a y x, y cuando $x \to a$ también $c \to a$.

Demostración.

Paso 1: extensión continua.

1. Por hipótesis hay $r > 0$ tal que f y g son derivables y $g' \neq 0$ en $(a-r, a) \cup (a, a+r)$.
2. Sean $F, G : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ iguales a f, g fuera de a, con $F(a) = G(a) = 0$.

3. Como el límite en a no depende del valor en a (C1-017.D1), $\lim_{x\to a} F = 0 = F(a)$, y F es continua en a (C1-022.T0); lo mismo G.
4. En los demás puntos, F y G son derivables, luego continuas (C1-028.T1).

Paso 2: $g \neq 0$ cerca de a.

1. Si $g(x) = 0$ para algún $x \in (a, a+r)$, entonces G es continua en $[a,x]$, derivable en (a,x) y $G(a) = G(x) = 0$.
2. Por Rolle (C1-032.T2) habría $c \in (a,x)$ con $g'(c) = G'(c) = 0$, contra la hipótesis.
3. Así $g \neq 0$ en $(a, a+r)$, y del mismo modo en $(a-r, a)$.

Paso 3: el cociente.

1. Para $x \in (a, a+r)$, el TVM de Cauchy (C1-037.T1) aplicado a F, G en $[a,x]$ da un $c_x \in (a,x)$ con $F(x)G'(c_x) = G(x)F'(c_x)$, es decir, $f(x)\,g'(c_x) = g(x)\,f'(c_x)$.
2. Como $g(x) \neq 0$ y $g'(c_x) \neq 0$ (K8),
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$
3. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f'/g' \to L$, hay $\delta > 0$, que podemos tomar $\leq r$ (C1-003.T1), tal que $0 < |t-a| < \delta$ implica $|f'(t)/g'(t) - L| < \varepsilon$ (C1-017.D1).
4. Si $a < x < a+\delta$, el punto c_x cumple $a < c_x < x < a+\delta$, así que
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| < \varepsilon.$$
(Basta que *exista* un tal c_x para cada x; no hace falta elegir uno.)
5. Por C1-020.D1, $\lim_{x\to a^+} f/g = L$.
6. El mismo argumento con $x \in (a-r, a)$ y el intervalo $[x,a]$ da $\lim_{x\to a^-} f/g = L$.
7. Por C1-020.T1, $\lim_{x\to a} f/g = L$. ■

Observación (versión lateral). La demostración trata cada lado por separado: si las hipótesis valen solo en $(a, a+r)$ y los límites son por la derecha, la conclusión vale por la derecha (análogo por la izquierda). Esta versión se usa en el apéndice.

L'Hôpital, forma ∞/∞ y en ∞

Teorema C1-037.T3 ⚠ (L'Hôpital, ∞/∞ y en ∞)

Sean f, g derivables en $(a, a+r)$ con $g' \neq 0$ ahí, $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty$ y $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to a^+} f/g = L$. Lo mismo vale para $x \to a^-$, $x \to a$ y $x \to \pm\infty$; la versión $0/0$ también vale cuando $x \to \pm\infty$.

⚠ Solo se enuncia en el video

En el video este teorema solo se enuncia. Su demostración completa está en el apéndice de este capítulo. Ningún resultado posterior de Cálculo I lo usa en una demostración.

Ejemplos

1. $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)/x$: numerador y denominador tienden a 0 (C1-022.T2, C1-031.C1 con C1-028.T1), las derivadas son $1/(2\sqrt{1+x})$ y 1, y su cociente tiende a $1/2$; por C1-037.T2, el límite es $1/2$.
2. Aplicando la regla dos veces, verificando en cada paso la forma $0/0$ y las demás hipótesis:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(2\sqrt{1+x})-1/2}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

3. En ∞ (C1-037.T3 dos veces), que coincide con C1-020.T3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{2} = 3.$$

Por qué cada hipótesis

⚠ La forma $0/0$

$f(x) = x + 1$, $g(x) = x$, $a = 0$: $f'/g' = 1 \to 1$, pero $f/g = 1 + 1/x$ tiende a $+\infty$ por la derecha y a $-\infty$ por la izquierda (C1-020.D1): no hay límite.
El error típico: $\lim_{x\to 1}(x^2 + 1)/(x + 1) = 2/2 = 1$ por C1-018.C1, mientras que $2x/1 \to 2$.

⚠ g' distinta de 0 y derivabilidad cerca de a

Sin ellas, f'/g' no está definida cerca de a y la hipótesis $\lim f'/g' = L$ no tiene sentido. (Los contraejemplos clásicos en que g' se anula en puntos que se acumulan en a usan trigonometría y no se tratan en Cálculo I.)

⚠ Que exista lím f'/g'

Es una hipótesis suficiente: si $\lim f'/g'$ no existe, el teorema no dice nada, y $\lim f/g$ puede existir o no.

Ejercicios

1. Calcula $\lim_{x\to 1}(x^3 - 1)/(x - 1)$ con L'Hôpital y sin él.
2. Calcula $\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{1 + x} - 1)/x$.
3. Calcula $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1 + x} - 1 - x/2)/x^2$ y justifica cada aplicación de la regla.
4. Encuentra el c del TVM de Cauchy para $f(t) = 3t + t^2$, $g(t) = 2t + 4t^2$ en $[0, 1]$.
5. Explica el error en «$\lim_{x\to 1}(x^2 + 1)/(x + 1) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$».

Respuestas

1. 3 (con la regla: $3x^2/1 \to 3$; sin ella: $x^2 + x + 1 \to 3$ por C1-005.T8).
2. $1/3$ (derivadas $\frac{1}{3}(1 + x)^{-2/3}$ y 1, por C1-031.C1 y C1-030.T1).
3. $-1/8$ (ver el ejemplo 2).
4. $(4)(2 + 8c) = (6)(3 + 2c)$, $c = 1/2$.
5. No hay forma $0/0$: el límite es 1 por continuidad (C1-018.C1).

Apéndice · Demostración de C1-037.T3

Lema A

Si $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty$, entonces $g \neq 0$ cerca de a por la derecha y $\lim_{x\to a^+} 1/g(x) = 0$.

Demostración.

1. Dado $\varepsilon > 0$, por C1-020.D1 hay $\delta > 0$ con $|g(x)| > 1/\varepsilon$ para $a < x < a + \delta$.
2. Ahí $g(x) \neq 0$ (C1-004.T1) y $|1/g(x)| = 1/|g(x)| < \varepsilon$ (C1-004.T6, C1-003.T7). ■

Lema B

Para h definida en (R, ∞) con $R > 0$: $\lim_{x\to\infty} h(x) = L$ si y solo si $\lim_{t\to 0^+} h(1/t) = L$; y $\lim_{x\to\infty} |h(x)| = \infty$ si y solo si $\lim_{t\to 0^+} |h(1/t)| = \infty$. Análogo con $x \to -\infty$ y $t \to 0^-$.

Demostración.

1. Si $|h(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x > M$ (con $M > R$, C1-020.D1), entonces para $0 < t < 1/M$ se tiene $1/t > M$ (C1-003.T7) y $|h(1/t) - L| < \varepsilon$.
2. Recíprocamente, si $|h(1/t) - L| < \varepsilon$ para $0 < t < \delta$, entonces para $x > 1/\delta$ se tiene $0 < 1/x < \delta$ y $|h(x) - L| < \varepsilon$.
3. El caso $|h| \to \infty$ y el de $-\infty$ son iguales. ■

Caso $x \to a^+$

Paso 1: el punto fijo y. Sea $\varepsilon > 0$.

1. Por hipótesis hay $\delta_1 \in (0, r)$ con $|f'(t)/g'(t) - L| < \varepsilon/2$ para $a < t < a + \delta_1$.
2. Fija $y = a + \delta_1/2$, de modo que $a < y < a + \delta_1$ (C1-003.T8).

Paso 2: el cociente $Q(x)$. Para $x \in (a, y)$:

1. f, g son continuas en $[x, y]$ (C1-028.T1) y derivables en (x, y).
2. $g(x) \neq g(y)$: si fueran iguales, Rolle (C1-032.T2) daría $c \in (x, y)$ con $g'(c) = 0$.

3. Por el TVM de Cauchy (C1-037.T1) hay $c \in (x, y) \subset (a, a + \delta_1)$ con $(f(x) - f(y))\, g'(c) = (g(x) - g(y))\, f'(c)$.
4. Dividiendo entre $g'(c)(g(x) - g(y)) \neq 0$,

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad |Q(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |Q(x)| < |L| + \frac{\varepsilon}{2}$$

(la última por la desigualdad del triángulo C1-004.T4).

Paso 3: los términos que sobran son pequeños.

1. Por el lema A hay $\delta_2 \in (0, y - a)$ tal que, para $a < x < a + \delta_2$, $g(x) \neq 0$ y

$$\Big(|L| + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{|g(y)|}{|g(x)|} + \frac{|f(y)|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(el lado izquierdo es una constante por $1/|g(x)|$, que tiende a 0 por el lema A y C1-018.T1 en su versión lateral, C1-020.T2).
2. Para esos x, de $f(x) = f(y) + Q(x)\,(g(x) - g(y))$ se obtiene (K1-K9, C1-002.T6)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \big(Q(x) - L\big) - Q(x)\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

3. Por C1-004.T2 y C1-004.T4,

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - L\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \Big(|L| + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{|g(y)|}{|g(x)|} + \frac{|f(y)|}{|g(x)|} < \varepsilon.$$

4. Como ε era arbitrario, $\lim_{x\to a^+} f/g = L$ (C1-020.D1). ■

Casos $x \to a^-$ y $x \to a$

- **Caso $x \to a^-$.** Con las hipótesis en $(a - r, a)$, la misma demostración con $y = a - \delta_1/2$, $x \in (y, a)$ y el TVM de Cauchy en $[y, x]$.
- **Caso $x \to a$.** Si las hipótesis valen a ambos lados, los dos casos anteriores dan los límites laterales iguales a L, y C1-020.T1 da el límite.

Caso $x \to \pm\infty$

1. Sean f, g derivables en (R, ∞) con $R > 0$, $g' \neq 0$ ahí, $\lim_{x\to\infty} f'/g' = L$, y además $\lim_{x\to\infty} |g| = \infty$ (caso ∞/∞) o $\lim_{x\to\infty} f = \lim_{x\to\infty} g = 0$ (caso $0/0$).
2. Sean $\varphi(t) = f(1/t)$ y $\gamma(t) = g(1/t)$ para $0 < t < 1/R$.

3. Por la regla de la cadena (C1-030.T1) y $(1/t)' = -1/t^2$ (C1-029.C1), φ y γ son derivables con

$$\varphi'(t) = -\frac{f'(1/t)}{t^2}, \qquad \gamma'(t) = -\frac{g'(1/t)}{t^2} \neq 0 \quad \text{(C1-002.T5)}, \qquad \frac{\varphi'(t)}{\gamma'(t)} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}.$$

4. Por el lema B, $\varphi'/\gamma' \to L$ cuando $t \to 0^+$, y $|\gamma| \to \infty$ (o $\varphi, \gamma \to 0$).
5. Por el caso $x \to a^+$ ya probado (con $a = 0$), o por la versión lateral de C1-037.T2 en el caso $0/0$, $\varphi/\gamma \to L$ cuando $t \to 0^+$.
6. Por el lema B, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = L$.
7. El caso $x \to -\infty$ es igual, con $t \to 0^-$. ■

C1-038 · Polinomios de Taylor y residuo de Lagrange

Motivación

> **Predecir dónde estarás en 6 minutos**
> Vas en el kilómetro 100 a 90 km/h y aceleras a 20 km/h^2. ¿Dónde estarás dentro de 6 minutos (0.1 h)? Con la posición, la velocidad y la aceleración de ahora, la predicción natural es
>
> $$100 + 90(0.1) + \frac{20}{2}(0.1)^2 = 109.1 \text{ km}.$$
>
> ¿Qué tan confiable es? Si sabes que la aceleración no cambia más rápido que 60 km/h^3, el teorema de esta clase garantiza que el error es a lo más
>
> $$\frac{60\,(0.1)^3}{3!} = 0.01 \text{ km}:$$
>
> estarás entre 109.09 y 109.11 km. Por ejemplo, el viaje $f(t) = 100 + 90t + 10t^2 + 10t^3$ cumple todo y da $f(0.1) = 109.11$ km.
> Dónde falla la analogía: en la vida real nadie conoce una cota exacta de la tercera derivada de la posición; el teorema convierte una cota así en una garantía, pero no la inventa.

La predicción es un polinomio que copia en el instante actual la posición, la velocidad y la aceleración: el polinomio de Taylor de grado 2. El residuo de Lagrange dice exactamente cuánto se equivoca.

Definiciones

Definición C1-038.D1

Si $f^{(n)}(a)$ existe (C1-031.D1; en particular $f^{(n-1)}$ está definida en un intervalo abierto alrededor de a),

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

es el *polinomio de Taylor* de grado n de f en a (con la convención $(x-a)^0 := 1$, C1-005.D2), y $R_{n,a} = f - P_{n,a}$ es el *residuo*.

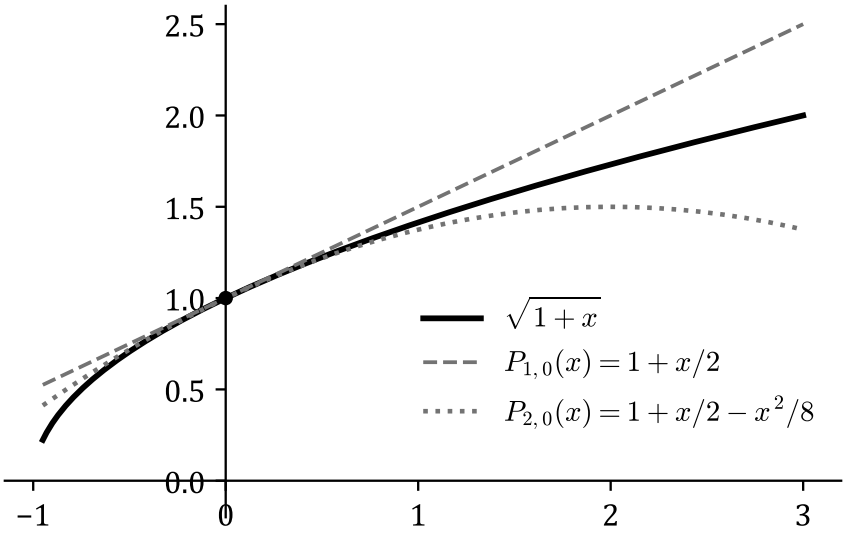


Figura 39: $\sqrt{1+x}$ (línea gruesa) y sus polinomios de Taylor en 0 de grado 1 (rayas) y 2 (puntos): cerca de 0 se pegan a la curva.

Resultados

Derivadas de $(x-a)^j$

Lema

Para enteros $j, k \geq 0$, la derivada k-ésima de $x \mapsto (x-a)^j$ es $\frac{j!}{(j-k)!}(x-a)^{j-k}$ si $k \leq j$, y 0 si $k > j$. En particular, en $x = a$ vale $j!$ si $k = j$ y 0 si $k \neq j$.

Demostración.

1. Por la regla de la cadena (C1-030.T1) y C1-028.T2, $((x-a)^m)' = m(x-a)^{m-1}$ para $m \geq 1$, y la derivada de una constante es 0.
2. La fórmula sale por inducción sobre k (C1-005.T1), usando C1-029.T1 y $(j-k)\cdot\frac{j!}{(j-k)!} = \frac{j!}{(j-k-1)!}$ (C1-005.D2).
3. En $x = a$: si $k < j$, $(a-a)^{j-k} = 0$ (C1-005.T9); si $k = j$, $(x-a)^0 = 1$ y el valor es $j!/0! = j!$; si $k > j$, es 0. ■

El polinomio de Taylor es único

Teorema C1-038.T1

$P_{n,a}$ es el único polinomio de grado $\leq n$ con $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, \ldots, n$.

Demostración.

Existencia.

1. Desarrollando cada $(x-a)^k$ (inducción y K9) se ve que $P_{n,a}$ es un polinomio de grado $\leq n$ (C1-010.D2).
2. Por C1-029.T1 y el lema, para $0 \leq k \leq n$,

$$P_{n,a}^{(k)}(a) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\left[(x-a)^j\right]^{(k)}\Big|_{x=a} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,k! = f^{(k)}(a).$$

Unicidad.

1. Sea Q otro polinomio de grado $\leq n$ con $Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, \dots, n$, y sea $D = P_{n,a} - Q$, de grado $\leq n$, con $D^{(k)}(a) = 0$ para $k \leq n$ (C1-029.T1).
2. Como $x = (x - a) + a$, por inducción (C1-005.T1, K9, C1-005.T9) cada x^m con $m \leq n$ se escribe como combinación de $1, (x - a), \dots, (x - a)^m$.
3. Luego $D(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j (x - a)^j$ para ciertos $c_j \in \mathbb{R}$.
4. Por el lema, $D^{(k)}(a) = k!\, c_k$, así que $c_k = 0$ para todo k y $D(x) = 0$ para todo x.
5. Por la identidad de polinomios (C1-020.T4), todos los coeficientes de D son 0: Q y $P_{n,a}$ tienen los mismos coeficientes, es decir, son el mismo polinomio (C1-010.D2). ■

Residuo de Lagrange

Teorema C1-038.T2 (residuo de Lagrange)

Si $f^{(n+1)}$ existe en un intervalo abierto I con $a, x \in I$, existe t entre a y x con

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\,(x - a)^{n+1}.$$

> **Idea de la demostración**
> Se fija x y se mueve el punto de apoyo s de a a x: el residuo con apoyo en s, $F(s)$, y $G(s) = (x - s)^{n+1}$ valen 0 en $s = x$. El TVM de Cauchy compara sus cambios entre a y x, y la derivada de F se simplifica porque sus términos se cancelan en cadena.

Demostración.

Paso 0: casos.

1. Si $x = a$, $R_{n,a}(a) = f(a) - f(a) = 0$ (por la convención $(a - a)^0 = 1$ solo sobrevive el término $k = 0$), y la igualdad vale con $t = a$.
2. Sea $a < x$ (el caso $x < a$ es idéntico con el intervalo $[x, a]$). Como I es un intervalo, $[a, x] \subset I$ (C1-004.D2).

Paso 1: las funciones auxiliares. Para $s \in [a, x]$ define

$$F(s) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(s)}{k!}(x - s)^k, \qquad G(s) = (x - s)^{n+1}.$$

1. $F(a) = R_{n,a}(x)$ (C1-038.D1) y $F(x) = f(x) - f(x) = 0$.
2. $G(a) = (x-a)^{n+1}$ y $G(x) = 0$.

Paso 2: continuidad y derivabilidad.

1. Para $k \leq n$, $f^{(k)}$ es derivable en I (porque $f^{(n+1)}$ existe en I, C1-031.D1), luego continua (C1-028.T1).
2. La función $s \mapsto (x-s)^k$ es un polinomio con derivada $-k(x-s)^{k-1}$ (C1-028.T2, C1-030.T1).
3. Por C1-029.T1 y C1-029.T2, F y G son continuas en $[a,x]$ y derivables en (a,x).

Paso 3: la derivada telescópica.

1. Por la regla del producto (C1-029.T2), para $k \geq 1$ (usando $k/k! = 1/(k-1)!$, C1-005.D2),

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(x-s)^k\right] = \frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}(x-s)^k - \frac{f^{(k)}(s)}{(k-1)!}(x-s)^{k-1},$$

   y para $k = 0$ la derivada es $f'(s)$.
2. Sumando de $k = 0$ a n (C1-029.T1), cada término $\frac{f^{(k)}(s)}{(k-1)!}(x-s)^{k-1}$ con $1 \leq k \leq n$ aparece una vez con signo $+$ (en el término $k-1$) y otra con signo $-$ (en el término k).
3. Por inducción sobre n (C1-005.T1) queda

$$F'(s) = -\frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n, \qquad G'(s) = -(n+1)(x-s)^n.$$

Paso 4: Cauchy.

1. Por el TVM de Cauchy (C1-037.T1) en $[a,x]$ hay $t \in (a,x)$ con $(F(x) - F(a))\,G'(t) = (G(x) - G(a))\,F'(t)$.
2. Es decir (C1-002.T4),

$$R_{n,a}(x)\,(n+1)(x-t)^n = (x-a)^{n+1}\,\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

3. Como $t < x$, $(x-t)^n \neq 0$ (C1-005.T9, C1-002.T5); cancelando (C1-002.T1) y dividiendo entre $n+1 \neq 0$, con $(n+1)! = (n+1)\,n!$ (C1-005.D2), se obtiene

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Cota del error

Corolario (cota del error)

Si además $|f^{(n+1)}| \le M$ en I, entonces $|R_{n,a}(x)| \le M|x-a|^{n+1}/(n+1)!$ (C1-004.T2, C1-005.T9, C1-003.T4).

Ejemplo (el viaje)
Con $n=2$, $f(a)=100$, $f'(a)=90$, $f''(a)=20$ y $|f'''| \le 60$, en $x-a=0.1$: $P_{2,a}=109.1$ y

$$|R_{2,a}| \le \frac{60 \cdot 0.001}{6} = 0.01.$$

El seno cerca de 0

Ejemplo C1-038.E1 (⚠ G1; Lagrange con n = 4)
$|\operatorname{sen} x - (x - x^3/6)| \le |x|^5/120$.

⚠ Depende de G1

Este ejemplo usa la trigonometría provisional C1-021.G1 y C1-028.T3 (rehechas desde la integral en C2-014). Ningún teorema de Cálculo I depende de él.

Demostración.

1. Por C1-028.T3 y C1-029.T1, sen tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$ (C1-031.D1):

$$\operatorname{sen}' = \cos, \quad \operatorname{sen}'' = -\operatorname{sen}, \quad \operatorname{sen}''' = -\cos, \quad \operatorname{sen}^{(4)} = \operatorname{sen}, \quad \operatorname{sen}^{(5)} = \cos.$$

2. En 0 valen $0, 1, 0, -1, 0$ (C1-021.G1: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$), así que $P_{4,0}(x) = x - x^3/6$.
3. Por C1-038.T2 con $I = \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x - (x - x^3/6) = \cos(t)\, x^5/120$ para algún t entre 0 y x.
4. Como $|\cos t| \le 1$ (C1-021.T0), el valor absoluto es a lo más $|x|^5/120$ (C1-004.T2, C1-005.T9). ■

Con $x = 0.1$: $0.1 - 0.1^3/6 = 0.0998333\ldots$ con error a lo más $0.1^5/120 \approx 8.33 \times 10^{-8}$.

Por qué cada hipótesis

⚠ La derivada de orden n + 1 en todo el intervalo

$f(x) = x|x|, n = 1, a = -1, x = 1$. $f'(x) = 2|x|$ existe en todo $\mathbb{R}$, pero f'' no existe en 0. $P_{1,-1}(1) = -1 + 2 \cdot 2 = 3$ y $R_{1,-1}(1) = 1 - 3 = -2$. La fórmula pediría $f''(t) \cdot 4/2 = -2$, es decir, $f''(t) = -1$; pero $f'' = -2$ en $(-1, 0)$ y $f'' = 2$ en $(0, 1)$.

⚠ a y x en un mismo intervalo donde vale la hipótesis

$f(x) = 1/x, n = 0, a = -1, x = 1$: ningún intervalo que contenga a -1 y a 1 está en el dominio. $R_{0,-1}(1) = 1 - (-1) = 2$ y la fórmula pediría $f'(t) \cdot 2 = 2$, es decir $-1/t^2 = 1$: imposible.

Ejercicios

1. Escribe $P_{2,0}$ de $\sqrt{1+x}$ y acota el error en $x = 0.1$.
2. Escribe $P_{3,1}$ de x^3 y comprueba que es el propio x^3 desarrollado en potencias de $x - 1$.
3. Demuestra que si $f''' \equiv 0$ en un intervalo abierto I, entonces f es un polinomio de grado ≤ 2 en I.
4. (⚠ G1) ¿Cuántos términos de Taylor de cos en 0 hacen falta para tener cos 0.5 con error menor que 10^{-4}?
5. Demuestra con Lagrange ($n = 1$) que $\sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$ para $x > -1$.

Respuestas

1. $1 + x/2 - x^2/8$; $f'''(t) = \frac{3}{8}(1+t)^{-5/2} \leq \frac{3}{8}$ para $t \geq 0$; error $\leq \frac{3}{8} \cdot 0.001/6 = 6.25 \times 10^{-5}$.
2. $1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$, que al desarrollar es x^3.
3. Lagrange con $n = 2$: $R_{2,a} = 0$.
4. Con $P_{4,0} = 1 - x^2/2 + x^4/24$: error $\leq 0.5^6/720 \approx 2.2 \times 10^{-5}$ (usando $n = 5$, pues el término de grado 5 es 0).
5. $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + f''(t)x^2/2$ con $f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2} < 0$.