# Cálculo integral

Todas las demostraciones, explicadas paso a paso

Cálculo II · según el programa de la Facultad de Ciencias, UNAM

Guillermo Izquierdo

con revisión de Claude Opus 5.5 (Anthropic)

PyPro · pypro.mx · 2026

# Prólogo

Este libro continúa *Cálculo diferencial* con el mismo objetivo: **demostrar todo**. Cada teorema del cálculo integral que aparece aquí se demuestra completo, paso a paso, sin «es fácil ver», sin «se deja al lector» y sin usar nada que no se haya demostrado antes, aquí o en el primer libro.

El recorrido sigue el programa de **Cálculo Diferencial e Integral II** de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM: la integral definida con sumas de Darboux, los dos teoremas fundamentales y las integrales impropias, el logaritmo y la exponencial definidos por integrales, la trigonometría construida desde la integral, los métodos de integración, las aplicaciones (áreas, longitudes, volúmenes, trabajo, ecuaciones diferenciales) y las series, hasta los primeros ejemplos de series de Fourier. El orden de los temas es el del programa oficial.

## Cómo está hecho

- **Todo parte de los mismos axiomas.** Los axiomas de los números reales (K1–K9, O1–O3 y S) y lo demostrado en *Cálculo diferencial* son el punto de partida. Los resultados del primer libro se citan con su número, por ejemplo «(C1-033.T1)»; los de este libro empiezan con C2.
- **Cada paso dice qué usa.** Las justificaciones aparecen entre paréntesis con el número del resultado que se aplica, por ejemplo «(C2-008.T1)». El número indica la clase (C2-008) y la pieza dentro de ella (T1 = primer teorema).
- **Se salda una deuda.** En *Cálculo diferencial*, el seno, el coseno y π venían de un dibujo: eran hechos geométricos provisionales, marcados con ⚠. Aquí se construyen desde la integral, sin usar esos hechos: π es el doble del área de un semicírculo unitario, el ángulo se define por el área de un sector y sen y cos son funciones que se definen a partir de él (capítulo C2-014). Ahí se demuestra cada hecho geométrico que se había usado, y los resultados de Cálculo I que dependían de ellos (el límite de sen x / x, las derivadas de sen y cos, la cota de Lagrange para el polinomio de Taylor del seno) quedan demostrados sin ⚠. Ningún capítulo anterior a C2-014 usa trigonometría.
- **Lo que no se demuestra se declara.** Unas pocas piezas llevan ⚠ y nunca sostienen una demostración del libro:

    - *Enunciados que se demuestran en otra materia:* el criterio de Lebesgue (C2-005.T6), la de-

rivación e integración término a término de series de potencias (C2-028.T5) y el teorema de Dirichlet sobre series de Fourier (C2-029.T5) se demuestran en *Cálculo IV*; la factorización real de polinomios (C2-017.T6), en *Variable Compleja*, con el teorema fundamental del álgebra; que ciertas primitivas no son elementales (Liouville, C2-013.T4) queda fuera del programa.
- *Definiciones de conceptos geométricos o físicos (⚠ def):* el área entre gráficas y en polares, el volumen por secciones, el área de una superficie de revolución y el trabajo se **definen** aquí por una integral; su teoría general y su coherencia con otras definiciones son de *Cálculo IV*.

– **Intuición primero, formalidad siempre.** Cada capítulo abre con una situación cotidiana (un auto que acelera, el termómetro de un día, un GPS contra un odómetro) y dice dónde falla la analogía. Después vienen la definición o el teorema formal, su demostración y un contraejemplo por cada hipótesis, para que se vea por qué está ahí.

## Cómo leerlo

Cada capítulo corresponde a una clase en video (algunos, a dos partes) del curso *Cálculo integral: todas las demostraciones, explicadas paso a paso* de PyPro (pypro.mx). Se puede leer solo, pero funciona mejor junto con el video: el video da la idea y la imagen; el libro da cada detalle por escrito.

Los recuadros ayudan a orientarse:

– **Teorema, definición:** el enunciado exacto, tal como se usa después.
– **Idea:** la estrategia de la demostración en una o dos frases.
– **En la vida diaria:** la situación cotidiana y el límite de la analogía.
– **Cuidado:** errores frecuentes, lo que pasa si se quita una hipótesis y por qué una pieza lleva ⚠.

Al final de cada capítulo hay ejercicios con sus respuestas. El último capítulo (C2-030) es un mapa de lo demostrado en los dos libros y de lo que queda pendiente.

# Agradecimientos

A la **Facultad de Ciencias de la UNAM**, por un plan de estudios extraordinario y por haber formado a tantas generaciones de matemáticas y matemáticos. Este libro sigue su programa de Cálculo Diferencial e Integral II y no existiría sin él.

A los creadores de **Claude**, en Anthropic, por su esfuerzo de condensar el conocimiento del mundo en un modelo capaz de revisar, cuestionar y verificar cada línea de una demostración. Claude Opus 5.5 revisó la estructura lógica de este libro: que cada enunciado esté completo, que ningún paso use algo no demostrado y que no haya contradicciones entre capítulos ni con *Cálculo diferencial*.

A quienes estudian este material: las demostraciones son la parte del cálculo que más se salta y la que más enseña.

*Guillermo Izquierdo*

# Índice general

**Prólogo** I

**Agradecimientos** III

**C2-001 · Área y trabajo: sumas de Darboux** 1

**C2-002 · Refinamientos e integrabilidad** 10

**C2-003 · Continua implica integrable** 19

**C2-004 · Propiedades de la integral** 26

**C2-005 · Discontinuidades: Dirichlet y Riemann** 34

**C2-006 · Teorema del valor medio para integrales** 43

**C2-007 · La integral como función** 49

**C2-008 · Primer Teorema Fundamental** 54

**C2-009 · Segundo Teorema Fundamental** 60

**C2-010 · Integrales impropias** 66

**C2-011 · El logaritmo como integral** 76

**C2-012 · La exponencial** 83

**C2-013 · Funciones definidas por integrales** 92

**C2-014 · π y las funciones trigonométricas, rigurosamente** 99

**C2-015 · Cambio de variable** 115

**C2-016 · Integración por partes y residuo de Taylor integral** 122

**C2-017 · Fracciones parciales** **128**

**C2-018 · Integración numérica** **137**

**C2-019 · Áreas, también en polares** **143**

**C2-020 · Longitud de una curva** **148**

**C2-021 · Volúmenes y superficies de revolución** **156**

**C2-022 · Trabajo, masa y momentos** **165**

**C2-023 · Ecuaciones diferenciales que resuelve la integral** **171**

**C2-024 · Series convergentes** **179**

**C2-025 · Criterios para términos positivos** **186**

**C2-026 · Series alternantes y convergencia absoluta** **193**

**C2-027 · Reordenamientos** **200**

**C2-028 · Series de potencias** **209**

**C2-029 · Series de Fourier: ejemplos** **220**

**C2-030 · Cierre de Cálculo II** **229**

# C2-001 · Área y trabajo: sumas de Darboux

## Motivación

> **El velocímetro sin odómetro**
> Un auto arranca y acelera parejo durante una hora: en el instante $t$ (en horas) su velocidad es $v(t) = 60t$ km/h. No tienes odómetro; solo puedes mirar el velocímetro. ¿Cuántos kilómetros recorriste?
> Corta la hora en cuatro cuartos. En el cuarto $i$ la velocidad está entre $15(i-1)$ y $15i$ km/h. Si en cada cuarto hubieras ido siempre a la velocidad más baja, habrías recorrido
>
> $$0.25\,(0 + 15 + 30 + 45) = 22.5 \text{ km};$$
>
> si hubieras ido siempre a la más alta,
>
> $$0.25\,(15 + 30 + 45 + 60) = 37.5 \text{ km}.$$
>
> La distancia real queda encerrada entre esos dos números. Con diez tramos de 6 minutos el encierro mejora: entre 27 y 33 km.
> Lo mismo pasa con el **trabajo** de empujar una caja con una fuerza que cambia a lo largo del camino: en cada tramo, fuerza mínima por longitud da una cota inferior, y fuerza máxima por longitud, una superior. Y con el **área** bajo una gráfica: rectángulos por abajo y por arriba.
> Dónde falla la analogía: un velocímetro real solo da lecturas sueltas, no el valor más bajo ni el más alto de cada tramo; aquí suponemos que conocemos la función en todo punto. Además, que «la distancia es el área bajo la velocidad» todavía no es un teorema: se demuestra en C2-009.

Para hacer esto con rigor hacen falta tres herramientas que Cálculo I no enunció: algunas propiedades más de las sumas Σ, el supremo y el ínfimo de una función en un conjunto, y la manera de cortar un intervalo.

# Lemas sobre sumas y supremos

**Proposición C2-001.T1 (más propiedades de Σ)**

Para $n \in \mathbb{N}$ y reales $c_0, \dots, c_n, a_1, \dots, a_n$:

(a) (telescópica) $\sum_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1}) = c_n - c_0$;

(b) (partir la suma) para $1 \le j < n$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$, donde $\sum_{k=j+1}^{n} a_k := \sum_{i=1}^{n-j} a_{j+i}$;

(c) (triángulo) $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

*Demostración.*

1. (a) Sea $A$ el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ tales que la igualdad vale para toda lista $c_0, \dots, c_n$.
2. Para $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} (c_k - c_{k-1}) = c_1 - c_0$ (C1-005.D2). Así $1 \in A$.
3. Si $n \in A$, por la definición recursiva (C1-005.D2) y la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (c_k - c_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1}) + (c_{n+1} - c_n) \\ &= (c_n - c_0) + (c_{n+1} - c_n) \\ &= c_{n+1} - c_0 \end{aligned}$$

   (K1, K2, K4). Así $n + 1 \in A$; por inducción (C1-005.T1), $A = \mathbb{N}$.
4. (b) Fijo $j$, sea $B$ el conjunto de los $m \in \mathbb{N}$ con $\sum_{k=1}^{j+m} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{i=1}^{m} a_{j+i}$. Como $n > j$, $n - j \in \mathbb{N}$ (C1-005.T2), y basta ver que $B = \mathbb{N}$.
5. $m = 1$: $\sum_{k=1}^{j+1} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + a_{j+1}$ y $\sum_{i=1}^{1} a_{j+i} = a_{j+1}$ (C1-005.D2). Así $1 \in B$.

6. Si $m \in B$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+m+1} a_k &= \sum_{k=1}^{j+m} a_k + a_{j+m+1} \\ &= \sum_{k=1}^{j} a_k + \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{j+i} + a_{j+m+1}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{i=1}^{m+1} a_{j+i}\end{aligned}$$

   (C1-005.D2, K1). Por inducción (C1-005.T1), $B = \mathbb{N}$.

7. (c) Para $n = 1$ es una igualdad. Si vale para $n$, por la desigualdad del triángulo (C1-004.T4) y la hipótesis de inducción sumada con $|a_{n+1}| \leq |a_{n+1}|$ (C1-003.T9):

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\Big| \leq \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

   Por inducción (C1-005.T1) vale para todo $n$. ■

**Notación**

Sean $S \subset \mathbb{R}$ no vacío y $f : S \to \mathbb{R}$ acotada. $\sup_S f := \sup f(S)$ e $\operatorname{ınf}_S f := \operatorname{ınf} f(S)$. Existen por el axioma S y C1-006.T3, porque $f(S)$ es no vacío y acotado.

**Proposición C2-001.T2 (supremos e ínfimos de funciones)**

Sean $S \subset \mathbb{R}$ no vacío y $f, g : S \to \mathbb{R}$ acotadas.

(a) $\operatorname{ınf}_S f \leq \sup_S f$, y si $\emptyset \neq S' \subset S$, $\operatorname{ınf}_S f \leq \operatorname{ınf}_{S'} f \leq \sup_{S'} f \leq \sup_S f$.

(b) $\sup_S(f+g) \leq \sup_S f + \sup_S g$ e $\operatorname{ınf}_S(f+g) \geq \operatorname{ınf}_S f + \operatorname{ınf}_S g$.

(c) Si $c \geq 0$, $\sup_S(cf) = c \sup_S f$ e $\operatorname{ınf}_S(cf) = c \operatorname{ınf}_S f$; si $c < 0$, $\sup_S(cf) = c \operatorname{ınf}_S f$ e $\operatorname{ınf}_S(cf) = c \sup_S f$.

(d) (oscilación) $\sup_S f - \operatorname{ınf}_S f = \sup\{|f(x)-f(y)| : x, y \in S\}$; en particular, si $|f(x)-f(y)| \leq \eta$ para todos $x, y \in S$, entonces $\sup_S f - \operatorname{ınf}_S f \leq \eta$.

*Demostración.*

1. (a) Tomemos $x \in S$ (existe porque $S \neq \emptyset$). Como $\inf_S f$ es cota inferior y $\sup_S f$ cota superior de $f(S)$, $\inf_S f \leq f(x) \leq \sup_S f$ (C1-006.D1), y por transitividad (C1-003.T9) $\inf_S f \leq \sup_S f$.
2. Si $S' \subset S$, $\sup_S f$ es cota superior de $f(S') \subset f(S)$; como $\sup_{S'} f$ es la menor, $\sup_{S'} f \leq \sup_S f$ (C1-006.D1). Igual, $\inf_S f \leq \inf_{S'} f$. La desigualdad del medio es el paso 1 aplicado a $S'$.
3. (b) Para $x \in S$, $f(x) + g(x) \leq \sup_S f + \sup_S g$ (C1-003.T9, versión con $\leq$ de C1-003.T6). Así $\sup_S f + \sup_S g$ es cota superior de $(f+g)(S)$ y $\sup_S(f+g) \leq \sup_S f + \sup_S g$ (C1-006.D1). La del ínfimo es análoga.
4. (c) Si $c = 0$, $cf$ vale 0 en todo $S$ y ambos lados valen 0 (C1-002.T3). Si $c > 0$, $(cf)(S) = 0 + c\,f(S)$ y C1-006.T4 da $\sup_S(cf) = c \sup_S f$.
5. Para el ínfimo con $c > 0$, por C1-006.T3 y el paso 4 aplicado a $-f$:

$$\inf(cf)(S) = -\sup\big(c\,(-f)(S)\big) = -c\sup(-f)(S) = c\,\inf f(S)$$

   (C1-002.T4).
6. Si $c < 0$, $cf = (-c)(-f)$ con $-c > 0$; por los pasos 4-5 y C1-006.T3, $\sup_S(cf) = (-c)\sup_S(-f) = (-c)(-\inf_S f) = c\inf_S f$, y análogamente $\inf_S(cf) = c\sup_S f$ (C1-002.T4).
7. (d) Sean $s = \sup_S f$, $i = \inf_S f$ y $A = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}$. Para $x, y \in S$, $i \leq f(x), f(y) \leq s$, luego $f(x) - f(y) \leq s - i$ y $f(y) - f(x) \leq s - i$ (C1-003.T9). Por C1-004.T3, $|f(x) - f(y)| \leq s - i$. Así $A$ es acotado superiormente y $\sup A \leq s - i$ (S, C1-006.D1).
8. Sea $\varepsilon > 0$. Por C1-006.T2 hay $x \in S$ con $f(x) > s - \varepsilon/2$, y por C1-006.T3 con C1-006.T2 (aplicado a $-f$) hay $y \in S$ con $f(y) < i + \varepsilon/2$.
9. Entonces, como $u \leq |u|$ (C1-004.T1),

$$\sup A \geq |f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > s - i - \varepsilon.$$

10. Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, $s - i \leq \sup A$ (C1-003.T9, última parte). Con el paso 7, $s - i = \sup A$.
11. Si $|f(x) - f(y)| \leq \eta$ para todos $x, y$, $\eta$ es cota superior de $A$ y $s - i = \sup A \leq \eta$ (C1-006.D1). ■

# Particiones

**Definición C2-001.D1 (partición)**

Sean $a < b$. Una **partición** de $[a, b]$ es un conjunto finito $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$; sus puntos se escriben siempre en orden creciente. $[t_{i-1}, t_i]$ es su $i$-ésimo subintervalo y $\Delta t_i := t_i - t_{i-1} > 0$. La **norma** de $P$ es $\|P\| := \max(\Delta t_1, \dots, \Delta t_n)$. La **partición regular** en $n$ partes es $P_n := \{a + i(b-a)/n : i = 0, 1, \dots, n\}$.

La norma existe por C1-005.T13. En $P_n$ los puntos crecen porque $(b-a)/n > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4), y todos los subintervalos miden $(b-a)/n$.

**Proposición C2-001.T3 (agregar y partir)**

Sean $a < b$ y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$.

(a) Si $s \in (a, b)$ y $s \notin P$, existe un único $i$ con $t_{i-1} < s < t_i$, y $P \cup \{s\} = \{t_0, \dots, t_{i-1}, s, t_i, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$.

(b) Si $Q$ es otra partición de $[a, b]$, $P \cup Q$ (los puntos de ambas, sin repetir, en orden creciente) es una partición de $[a, b]$, que se obtiene de $P$ agregando uno por uno los puntos de $Q$ que no están en $P$.

(c) Si $c = t_j$ con $0 < j < n$, $\{t_0, \dots, t_j\}$ y $\{t_j, \dots, t_n\}$ son particiones de $[a, c]$ y de $[c, b]$; y recíprocamente, la unión de una partición de $[a, c]$ y una de $[c, b]$ es una partición de $[a, b]$ que contiene a $c$.

*Demostración.*

1. (a) El conjunto $J = \{k \in \{1, \dots, n\} : s < t_k\}$ no es vacío, pues $s < b = t_n$. Sea $i$ su mínimo (buen orden, C1-005.T3).
2. Como $i - 1 \notin J$ (si $i - 1 \geq 1$) o $t_{i-1} = t_0 = a < s$ (si $i = 1$), se tiene $t_{i-1} \leq s$ (C1-003.T1); y $s \neq t_{i-1}$ porque $s \notin P$. Así $t_{i-1} < s < t_i$.
3. Unicidad: si también $t_{k-1} < s < t_k$ con $k < i$, entonces $k \in J$, contra la minimalidad de $i$; si $k > i$, $t_i \leq t_{k-1} < s$, contra $s < t_i$ (C1-003.T2, C1-003.T1).
4. La lista $t_0 < \cdots < t_{i-1} < s < t_i < \cdots < t_n$ es estrictamente creciente, empieza en $a$ y termina en $b$: es una partición (C2-001.D1).

5. (b) Los puntos de $Q$ que no están en $P$ son finitos y están en $(a, b)$ (los extremos están en ambas). Agregándolos uno por uno con (a), por inducción sobre su cantidad (C1-005.T1, C1-005.T2), se obtiene una partición cuyos puntos son exactamente los de $P \cup Q$.
6. (c) $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_j = c$ es creciente y va de $a$ a $c$; igual $t_j < \cdots < t_n$ va de $c$ a $b$. Recíprocamente, si $a = u_0 < \cdots < u_k = c$ y $c = w_0 < \cdots < w_l = b$, la lista $u_0 < \cdots < u_k = w_0 < \cdots < w_l$ es creciente (C1-003.T2) y va de $a$ a $b$. ■

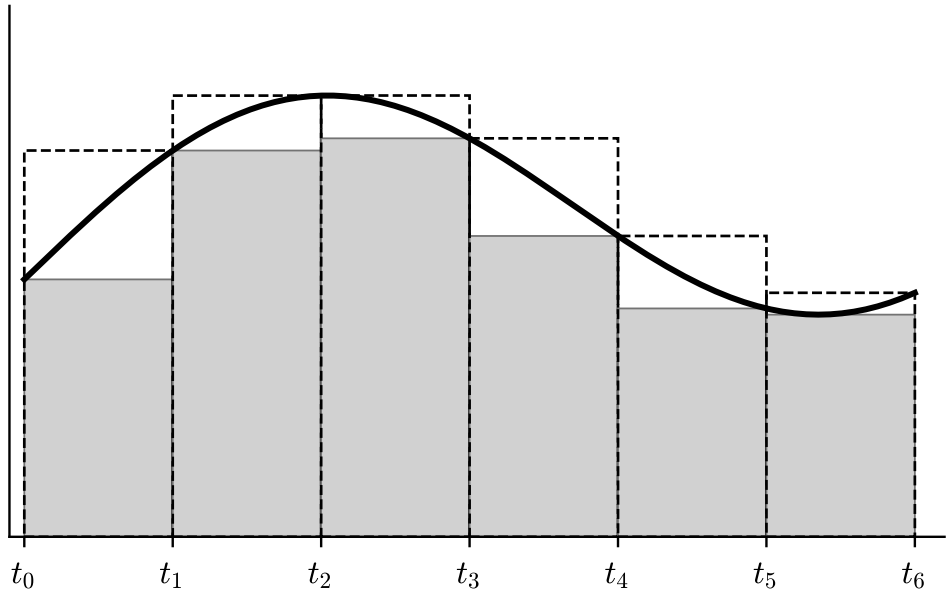



Figura 1: Sumas de Darboux de una función que sube y baja: rectángulos inferiores (grises) y superiores (contorno). En cada tramo la altura es un ínfimo o un supremo, no necesariamente un valor en los extremos.

## Sumas inferior y superior

**Definición C2-001.D2 (sumas de Darboux)**

Sean $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$.

$$m_i := \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f, \qquad M_i := \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f;$$

**suma inferior** $L(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta t_i$ y **suma superior** $U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta t_i$.

$m_i$ y $M_i$ existen porque $f$ es acotada en cada subintervalo (S, C1-006.T3, notación de C2-001.T2).

**Proposición C2-001.T4**

Sean $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $m, M \in \mathbb{R}$ con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Para toda partición $P$ de $[a,b]$:

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a).$$

**Idea de la demostración**

En cada tramo, $m \leq m_i \leq M_i \leq M$; se multiplica por $\Delta t_i$ y se suma. La suma de los anchos es $b-a$ por la telescópica.

*Demostración.*

1. $f$ es acotada (por $m$ y $M$), así que las sumas están definidas (C2-001.D2).
2. En cada subintervalo, $m$ es cota inferior y $M$ cota superior de $f$, luego $m \leq m_i$ y $M_i \leq M$ (C1-006.D1); además $m_i \leq M_i$ (C2-001.T2 a). Así $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.
3. Multiplicando por $\Delta t_i > 0$ (C1-003.T4, C1-003.T9):

$$m\,\Delta t_i \leq m_i \Delta t_i \leq M_i \Delta t_i \leq M\,\Delta t_i.$$

4. Sumando de $i = 1$ a $n$ (C1-005.T12 d):

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\Delta t_i \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} M\,\Delta t_i.$$

5. Por C1-005.T12 (a) y la telescópica (C2-001.T1 a),

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\Delta t_i = m\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = m\,(t_n - t_0) = m\,(b-a),$$

y lo mismo con $M$. ■

**Ejemplo C2-001.E1**

Si $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, $L(f,P) = U(f,P) = c(b-a)$ para toda $P$. Para $f(x) = x$ en

> $[0,1]$ y la partición regular $P_n$:
>
> $$L(f,P_n)=\frac{n-1}{2n},\qquad U(f,P_n)=\frac{n+1}{2n}.$$

*Demostración.*

1. Constante: con $m=M=c$ en C2-001.T4, $c(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le c(b-a)$, y por la tricotomía (C1-003.T1) todo es igual.
2. $f(x)=x$: en $[(i-1)/n, i/n]$ el valor $(i-1)/n$ está en $f$ del tramo y es cota inferior, así que es el ínfimo; igual, $i/n$ es el supremo (C1-006.D1).
3. Con $\Delta t_i = 1/n$, por C1-005.T12 y C1-005.T4,

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}.$$

4. Y

$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\Big(\frac{n(n+1)}{2}-n\Big)=\frac{n-1}{2n}.\qquad\blacksquare$$

Para el auto del principio, $v(t)=60t$ en $[0,1]$ da 60 veces estas sumas: con $n=4$, $L=60\cdot 3/8=22.5$ y $U=60\cdot 5/8=37.5$; con $n=10$, $L=27$ y $U=33$.

## Ejemplos que cumplen y que no

**⚠ Sin acotación no hay sumas**

$f(x)=1/x$ en $(0,1]$, $f(0)=0$. En el primer tramo $[0,t_1]$, para cada $K>0$ hay $x$ con $0<x<t_1$ y $1/x>K$ (C1-007.C1, C1-003.T7): $f$ no tiene supremo ahí y $U(f,P)$ no está definida.

**⚠ El ínfimo no siempre está en un extremo**

Si la función sube y baja dentro de un tramo, $m_i$ y $M_i$ pueden estar en su interior (figura de arriba). Tomar los valores en los extremos da otra cosa: una suma de Riemann (C2-002.D3), no una de Darboux.

## Ejercicios

1. Calcula $L(f, P)$ y $U(f, P)$ para $f(x) = 2 - x$ en $[0, 2]$ con $P = \{0, 1/2, 1, 2\}$.
2. Demuestra que si $f \leq g$ en $[a, b]$ (ambas acotadas), entonces $L(f, P) \leq L(g, P)$ y $U(f, P) \leq U(g, P)$.
3. Para $f(x) = x$ en $[0, 1]$, ¿cuántos tramos iguales hacen falta para que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < 0.01$?
4. Demuestra que $\|P_n\| = (b - a)/n$ y que $L(-f, P) = -U(f, P)$.
5. Sea $f(x) = 1$ si $x = 1/2$ y $f(x) = 0$ en otro caso, en $[0, 1]$. Calcula $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ para $n$ par y para $n$ impar.

### Respuestas

1. Tramos de ancho $1/2, 1/2, 1$; ínfimos $3/2, 1, 0$; supremos $2, 3/2, 1$. $L = 3/4 + 1/2 + 0 = 5/4$ y $U = 1 + 3/4 + 1 = 11/4$.
2. En cada tramo $\operatorname{ınf} f \leq f(x) \leq g(x)$, así que $\operatorname{ınf} f$ es cota inferior de $g$ y $\operatorname{ınf} f \leq \operatorname{ınf} g$ (C1-006.D1); igual con los supremos. Se multiplica por $\Delta t_i$ y se suma (C1-005.T12 d).
3. $U - L = 1/n$ (C2-001.E1); hace falta $n > 100$, por ejemplo $n = 101$.
4. Todos los $\Delta t_i$ valen $(b - a)/n$. Para lo segundo, C2-001.T2 (c) con $c = -1$ da $\operatorname{ınf}(-f) = -\sup f$ en cada tramo; se suma con C1-005.T12 (a).
5. Siempre $L = 0$. Con $n$ par, $1/2$ es extremo de dos tramos y $U = 2/n$; con $n$ impar, está en el interior de uno y $U = 1/n$.

# C2-002 · Refinamientos e integrabilidad

## Motivación

> **Mirar el velocímetro más seguido**
> El auto de C2-001 acelera con $v(t) = 60t$ km/h durante una hora. Un copiloto mira el velocímetro cada 15 minutos y encierra la distancia entre 22.5 y 37.5 km. Otro, más paciente, mira en esos mismos instantes y además a la mitad de cada cuarto de hora: su encierro es [26.25, 33.75]. Con 100 tramos iguales, [29.7, 30.3].
> Dos preguntas:
>
> - ¿Mirar más seguido puede empeorar alguna de las cotas?
> - ¿Hay un único número atrapado entre todas las cotas posibles?
>
> Para esta función, no y sí: $U - L = 60/n$ y el número atrapado es 30.
> Dónde falla la analogía: que ese número sea «la distancia recorrida» es una interpretación que se justifica en C2-009; y para funciones muy irregulares (C2-005.E1) las cotas no se cierran nunca.

## Refinamientos

**Definición C2-002.D1 (refinamiento)**

Sean $a < b$ y $P, Q$ particiones de $[a, b]$. $Q$ **refina** a $P$ si $P \subset Q$.

**Proposición C2-002.T1 (agregar un punto)**

Sean $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P$ una partición de $[a, b]$, $s \in (a, b)$ con $s \notin P$ y $Q := P \cup \{s\}$. Entonces $L(f, P) \leq L(f, Q)$ y $U(f, Q) \leq U(f, P)$.

> **Idea de la demostración**
> Solo cambia el tramo que contiene a $s$: se parte en dos, y en cada mitad el ínfimo es mayor o igual que en el tramo completo.

*Demostración.*

1. Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$. Por C2-001.T3 (a) hay un único $i$ con $t_{i-1} < s < t_i$, y $Q = \{t_0, \dots, t_{i-1}, s, t_i, \dots, t_n\}$.
2. Sean $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f$, $m' = \inf_{[t_{i-1}, s]} f$ y $m'' = \inf_{[s, t_i]} f$. Como los dos intervalos pequeños están contenidos en $[t_{i-1}, t_i]$, $m_i \le m'$ y $m_i \le m''$ (C2-001.T2 a).
3. Partiendo las sumas en los términos anteriores a $i$, el término $i$ y los posteriores (C2-001.T1 b), $L(f, P)$ y $L(f, Q)$ tienen los mismos términos salvo que $m_i\,(t_i - t_{i-1})$ se cambia por $m'(s - t_{i-1}) + m''(t_i - s)$.
4. Como $t_i - t_{i-1} = (s - t_{i-1}) + (t_i - s)$, por K9,

$$m'(s - t_{i-1}) + m''(t_i - s) - m_i(t_i - t_{i-1}) = (m' - m_i)(s - t_{i-1}) + (m'' - m_i)(t_i - s).$$

5. Los dos sumandos de la derecha son productos de números $\ge 0$, así que la diferencia es $\ge 0$ (C1-003.T6, C1-003.T9). Con C1-005.T12, $L(f, Q) - L(f, P) \ge 0$.
6. Para las sumas superiores, $\sup_{[t_{i-1}, s]} f \le M_i$ y $\sup_{[s, t_i]} f \le M_i$ (C2-001.T2 a), y el mismo cálculo da $U(f, Q) \le U(f, P)$. ■

**Proposición C2-002.T2 (refinamiento)**

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si $Q$ refina a $P$:

$$L(f, P) \le L(f, Q) \le U(f, Q) \le U(f, P).$$

*Demostración.*

1. Si $Q = P$ no hay nada que probar más que $L(f, P) \le U(f, P)$, que es C2-001.T4 (con $m, M$ cotas de $f$).
2. Si no, $Q$ se obtiene de $P$ agregando uno por uno sus puntos que no están en $P$ (C2-001.T3 b).
3. En cada paso $L$ no baja y $U$ no sube (C2-002.T1); por inducción sobre la cantidad de puntos agregados (C1-005.T1) y transitividad (C1-003.T9), $L(f, P) \le L(f, Q)$ y $U(f, Q) \le U(f, P)$.
4. La desigualdad del medio es C2-001.T4. ■

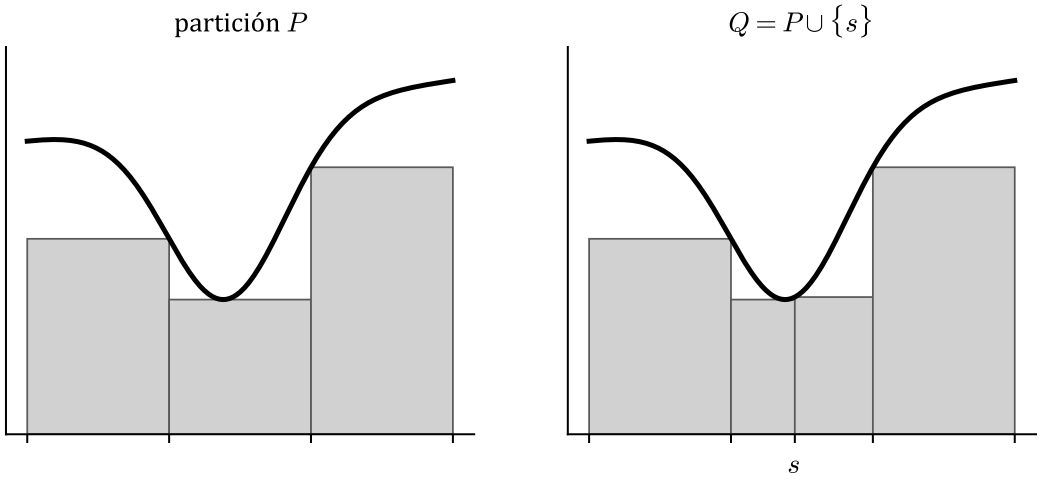



Figura 2: Agregar el punto $s$ parte un rectángulo inferior en dos; cada mitad tiene un ínfimo mayor o igual. La suma inferior sube.

Refinar tampoco agranda los tramos. Este hecho se usará al medir longitudes de curvas (C2-020.T3).

**Proposición C2-002.T7 (refinar no aumenta la norma)**

Sean $a < b$ y $P, Q$ particiones de $[a, b]$. Si $Q$ refina a $P$, cada subintervalo de $Q$ está contenido en un subintervalo de $P$, y $\|Q\| \leq \|P\|$.

*Demostración.*

Sean $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ y $Q = \{s_0, \dots, s_m\}$, con $P \subset Q$, y sea $[s_{j-1}, s_j]$ un subintervalo de $Q$.

1. Sea $u := (s_{j-1} + s_j)/2$; entonces $s_{j-1} < u < s_j$ (C1-003.T8), así que $u \in (a, b)$ y $u \notin Q$ (entre dos puntos consecutivos de $Q$ no hay otros; C2-001.D1). Como $P \subset Q$, $u \notin P$.
2. Por C2-001.T3 (a) hay un $i$ con $t_{i-1} < u < t_i$.
3. $t_{i-1} \in P \subset Q$, digamos $t_{i-1} = s_k$. Como $s_k < u < s_j$, es $k < j$ (si fuera $k \geq j$, sería $s_k \geq s_j$), es decir, $k \leq j - 1$, y por lo tanto $t_{i-1} = s_k \leq s_{j-1}$.
4. Del mismo modo $t_i = s_l$ con $s_l > u > s_{j-1}$, así que $l \geq j$ y $t_i \geq s_j$.
5. Entonces $[s_{j-1}, s_j] \subset [t_{i-1}, t_i]$ y, restando (C1-003.T9),

$$s_j - s_{j-1} \leq t_i - t_{i-1} \leq \|P\|$$

(C2-001.D1, C1-005.T13).

6. Así todo $\Delta s_j$ es $\leq \|P\|$; como $\|Q\|$ es uno de los $\Delta s_j$ (C1-005.T13), $\|Q\| \leq \|P\|$. ■

**Proposición C2-002.T3**

Sean $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P, Q$ particiones de $[a,b]$. Entonces $L(f,P) \leq U(f,Q)$.

*Demostración.*

1. $R := P \cup Q$ es una partición que refina a $P$ y a $Q$ (C2-001.T3 b).
2. Por C2-002.T2 aplicado a $P \subset R$ y a $Q \subset R$:

$$L(f,P) \leq L(f,R) \leq U(f,R) \leq U(f,Q),$$

y por transitividad (C1-003.T9) $L(f,P) \leq U(f,Q)$. ■

## La integral

**Definición C2-002.D2 (integral)**

Sean $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. **Integral inferior** $L(f) := \sup\{L(f,P) : P \text{ partición de } [a,b]\}$ e **integral superior** $U(f) := \inf\{U(f,P) : P \text{ partición de } [a,b]\}$ (existen por C2-002.T3). $f$ es **integrable** (en el sentido de Riemann) en $[a,b]$ si $L(f) = U(f)$, y ese número es

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por definición, toda función integrable en $[a,b]$ es acotada.

Los conjuntos no son vacíos ($\{a,b\}$ es una partición) y, por C2-002.T3, cualquier $U(f,Q)$ es cota superior de las sumas inferiores y cualquier $L(f,P)$ cota inferior de las superiores; el supremo y el ínfimo existen por S y C1-006.T3.

**Proposición C2-002.T4**

$L(f) \leq U(f)$. Si $f$ es integrable en $[a,b]$, $\int_a^b f$ es el único número $I$ tal que $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$ para toda partición $P$ de $[a,b]$.

*Demostración.*

1. Fija $Q$. Por C2-002.T3, $U(f, Q)$ es cota superior de $\{L(f, P)\}$, así que $L(f) \leq U(f, Q)$ (C1-006.D1).
2. Entonces $L(f)$ es cota inferior de $\{U(f, Q)\}$, y $L(f) \leq U(f)$ (C1-006.D1).
3. Si $f$ es integrable e $I = L(f) = U(f)$: para toda $P$, $L(f, P) \leq L(f) = I = U(f) \leq U(f, P)$ (C1-006.D1).
4. Si $J$ también cumple $L(f, P) \leq J \leq U(f, P)$ para toda $P$, entonces $J$ es cota superior de las sumas inferiores ($L(f) \leq J$) y cota inferior de las superiores ($J \leq U(f)$) (C1-006.D1). Así $I \leq J \leq I$ y, por tricotomía (C1-003.T1), $J = I$. ■

## El criterio de Riemann

**Teorema C2-002.T5 (criterio de Riemann)**

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. $f$ es integrable en $[a, b]$ $\iff$ para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P$ de $[a, b]$ con

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

**Idea de la demostración**

Si las cotas se cierran, una inferior y una superior casi óptimas, juntadas en una misma partición, quedan a menos de $\varepsilon$. Si para cada $\varepsilon$ hay una partición buena, el hueco entre $L(f)$ y $U(f)$ es menor que todo $\varepsilon$, así que es cero.

*Demostración.*

1. ($\Rightarrow$) Sea $I = \int_a^b f = L(f) = U(f)$ y sea $\varepsilon > 0$; entonces $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8).
2. Por la caracterización $\varepsilon$ del supremo (C1-006.T2) hay $P_1$ con $L(f, P_1) > I - \varepsilon/2$, y por la del ínfimo (C1-006.T3 con C1-006.T2) hay $P_2$ con $U(f, P_2) < I + \varepsilon/2$.
3. $P := P_1 \cup P_2$ refina a ambas (C2-001.T3 b), así que $L(f, P_1) \leq L(f, P)$ y $U(f, P) \leq U(f, P_2)$ (C2-002.T2).
4. Por lo tanto (C1-003.T6, C1-003.T9),

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_2) - L(f, P_1) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

5. (⇐) Para toda partición $P$, $L(f,P) \le L(f) \le U(f) \le U(f,P)$ (C2-002.D2, C2-002.T4), luego

$$0 \le U(f) - L(f) \le U(f,P) - L(f,P)$$

(C1-003.T9).

6. Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ hay $P$ con $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$; así $U(f) - L(f) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, y $U(f) - L(f) \le 0$ (C1-003.T9, última parte).
7. Con el paso 5, $U(f) - L(f) = 0$ (C1-003.T1): $f$ es integrable. ■

**Corolario C2-002.C1**

$f$ acotada en $[a,b]$ es integrable $\iff$ existe una sucesión de particiones $(P_k)$ de $[a,b]$ con $U(f,P_k) - L(f,P_k) \to 0$; en ese caso $L(f,P_k) \to \int_a^b f$ y $U(f,P_k) \to \int_a^b f$.

*Demostración.*

1. (⇒) Para cada $k \in \mathbb{N}$, C2-002.T5 con $\varepsilon = 1/k$ da una partición con $U - L < 1/k$; elegimos una, $P_k$, para cada $k$ (EN).
2. Así $0 \le U(f,P_k) - L(f,P_k) < 1/k$ (C2-001.T4). Como $1/k \to 0$ y la constante 0 tiende a 0 (C1-012.T2), por el sándwich (C1-014.T1) $U(f,P_k) - L(f,P_k) \to 0$.
3. (⇐) Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de límite (C1-012.D1) hay $k$ con $U(f,P_k) - L(f,P_k) < \varepsilon$; por C2-002.T5, $f$ es integrable.
4. En ese caso, con $I = \int_a^b f$, por C2-002.T4:

$$0 \le I - L(f,P_k) \le U(f,P_k) - L(f,P_k), \qquad 0 \le U(f,P_k) - I \le U(f,P_k) - L(f,P_k).$$

5. Por el sándwich (C1-014.T1), $I - L(f,P_k) \to 0$ y $U(f,P_k) - I \to 0$; sumando la constante $I$ (C1-013.T2), $L(f,P_k) \to I$ y $U(f,P_k) \to I$. ■

## Sumas de Riemann

**Definición C2-002.D3 (sumas de Riemann)**

Para una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ y puntos $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ con $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$:

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta t_i.$$

**Proposición C2-002.T6**

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. $L(f, P) \le S(f, P, \xi) \le U(f, P)$ para toda $P$ y toda elección $\xi$. Si $f$ es integrable y $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, entonces $|S(f, P, \xi) - \int_a^b f| < \varepsilon$.

*Demostración.*

1. Como $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ (C1-006.D1, C2-001.T2). Multiplicando por $\Delta t_i > 0$ y sumando (C1-003.T9, C1-005.T12 d), $L(f, P) \le S(f, P, \xi) \le U(f, P)$.
2. Si $f$ es integrable, también $L(f, P) \le I \le U(f, P)$ con $I = \int_a^b f$ (C2-002.T4).
3. Restando (C1-003.T9),

$$-(U(f, P) - L(f, P)) \le S(f, P, \xi) - I \le U(f, P) - L(f, P),$$

y por C1-004.T3, $|S(f, P, \xi) - I| \le U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. ■

**Ejemplo C2-002.E1**
Para $c \in \mathbb{R}$ y $a < b$, $\int_a^b c\, dx = c(b - a)$; $\int_0^1 x\, dx = 1/2$.

*Demostración.*

1. Para $f = c$, $L(f, P) = U(f, P) = c(b - a)$ para toda $P$ (C2-001.E1). Así $U - L = 0 < \varepsilon$ para todo $\varepsilon$: $f$ es integrable (C2-002.T5), y $c(b - a)$ cumple la condición de C2-002.T4, así que es la integral.
2. Para $f(x) = x$ en $[0, 1]$, $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{n+1}{2n} - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{n} \to 0$ (C2-001.E1, C1-012.T2).
3. Por C2-002.C1, $f$ es integrable y $\int_0^1 x\, dx = \lim L(f, P_n) = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ (C1-013.T2, C1-012.T2). ■

Para el auto, $v = 60t$ da 60 veces estas sumas: $U - L = 60/n \to 0$ y el número atrapado es $60 \cdot \frac{1}{2} = 30$.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ $f$ acotada**

Para $f(x) = 1/x$ en $(0, 1]$, $f(0) = 0$, ninguna suma superior existe (C2-001, sección de ejemplos): el criterio ni siquiera se puede plantear. Por eso la definición de integral exige que $f$ sea acotada.

**⚠ «Para todo $\varepsilon$», no para uno**

La función de Dirichlet $D$ (1 en los racionales, 0 en los irracionales) cumple $L(D, P) = 0$ y $U(D, P) = 1$ en $[0, 1]$ para toda $P$, porque cada tramo contiene racionales e irracionales (C1-007.T3, C1-008.T3). Con $\varepsilon = 2$, cualquier partición da $U - L < 2$; con $\varepsilon = 1/2$, ninguna. $D$ no es integrable (se estudia en C2-005.E1).

**⚠ Juntar las particiones**

En el paso 3 del criterio no basta comparar $P_1$ con $P_2$: la diferencia $U(f, P_2) - L(f, P_1)$ no es la de una sola partición. Se usa $P_1 \cup P_2$, que es mejor que las dos (C2-002.T2).

## Ejercicios

1. Para $v(t) = 60t$ en $[0, 1]$, calcula $L$ y $U$ con 8 tramos iguales y verifica que el intervalo está dentro del de 4 tramos.
2. Demuestra que si $f$ es integrable en $[a, b]$ y $(P_k)$ es una sucesión de particiones con $U(f, P_k) - L(f, P_k) \to 0$, entonces $S(f, P_k, \xi^{(k)}) \to \int_a^b f$ para cualesquiera puntos $\xi^{(k)}$.
3. Sea $f(x) = 0$ en $[0, 1]$ salvo $f(1/2) = 5$. Usa el criterio de Riemann para mostrar que $f$ es integrable.
4. Demuestra que $L(f) = U(f)$ implica, para cada $\varepsilon$, una partición con $U - L < \varepsilon$, sin usar el criterio (es decir, reescribe la parte $\Rightarrow$ con tus palabras).
5. ¿Es cierto que si $L(f, P) = U(f, P)$ para alguna partición, $f$ es constante en cada tramo? Demuéstralo.

## Respuestas

1. $L = 60 \cdot 7/16 = 26.25$, $U = 60 \cdot 9/16 = 33.75$; $[26.25, 33.75] \subset [22.5, 37.5]$ (C2-002.T2).
2. Por C2-002.T6, $|S(f, P_k, \xi^{(k)}) - I| \leq U(f, P_k) - L(f, P_k) \to 0$; sándwich (C1-014.T1).
3. $L(f, P_n) = 0$ y $U(f, P_n) \leq 2 \cdot 5/n$ (el punto toca a lo más dos tramos); $U - L \leq 10/n < \varepsilon$ si $n > 10/\varepsilon$ (C1-007.C1).
4. Es la parte (⇒) de C2-002.T5.
5. Sí: $\sum(M_i - m_i)\Delta t_i = 0$ con todos los sumandos $\geq 0$ obliga a $M_i = m_i$ en cada tramo (C1-003.T6), y entonces $m_i \leq f \leq M_i = m_i$.

# C2-003 · Continua implica integrable

## Motivación

> **Leer el termómetro con la frecuencia correcta**
> Volvamos al día de C1-025: la temperatura del patio entre las 6:00 y las 20:00 es
>
> $$T(t) = 12 + 3(t-6) - \tfrac{1}{4}(t-6)^2.$$
>
> Ahí vimos que con lecturas cada 7.5 minutos, dos instantes a menos de 7.5 minutos nunca difieren más de medio grado.
> ¿Basta eso para conocer la temperatura **promedio** del día con error menor que medio grado? Sí: con 112 tramos de 7.5 minutos, en cada tramo la diferencia entre la temperatura más alta y la más baja es a lo más 0.5 °C, así que $U - L \leq 0.5 \cdot 14 = 7$ °C·h. Dividiendo entre las 14 horas, el promedio queda encerrado en una franja de ancho a lo más 0.5 °C. (Con la fórmula, el ancho real es $\approx 0.223$ °C.)
> Lo notable es que el argumento no usa la fórmula de $T$: solo que $T$ es continua en un intervalo cerrado.
> Dónde falla la analogía: el teorema garantiza que *existe* una frecuencia de lectura suficiente, pero no dice cuál (aquí la conocemos porque tenemos la fórmula); y un termómetro real da lecturas, no ínfimos ni supremos.

## El teorema

| **Teorema C2-003.T1** |
| --- |
| Sean $a < b$ y $f$ continua en $[a, b]$. Entonces $f$ es integrable en $[a, b]$. |

**Idea de la demostración**

Heine da un $\delta$ que sirve en todo el intervalo; con tramos más cortos que $\delta$, en cada uno la oscilación es menor que $\eta$, y $U - L$ queda menor que $\eta(b-a)$, que se elige menor que $\varepsilon$.

*Demostración.*

1. Por C1-024.T1, $f$ es acotada en $[a,b]$; así sus sumas de Darboux existen (C2-001.D2).
2. Sea $\varepsilon > 0$ y sea
$$\eta := \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$$
(C1-003.T7, C1-003.T4).
3. Por el teorema de Heine (C1-025.T1), $f$ es uniformemente continua en $[a,b]$: existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \eta$ para $x, y \in [a,b]$ (C1-025.D1).
4. Por C1-007.C1 hay $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \delta/(b-a)$, es decir, $(b-a)/n < \delta$ (C1-003.T4). Sea $P_n$ la partición regular (C2-001.D1).
5. Si $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces $-\Delta t_i \le x - y \le \Delta t_i$, así que $|x-y| \le \Delta t_i = (b-a)/n < \delta$ (C1-004.T3), y por el paso 3, $|f(x) - f(y)| < \eta$.
6. Por la oscilación (C2-001.T2 d), $M_i - m_i \le \eta$ en cada subintervalo.
7. Por C1-005.T12, C1-003.T9 y la telescópica (C2-001.T1 a):
$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta t_i \\ &\le \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \eta\,(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$
8. Por el criterio de Riemann (C2-002.T5), $f$ es integrable en $[a,b]$. ■

## Monótonas

**Proposición C2-003.T2**

Sean $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces $f$ es integrable en $[a,b]$; con la partición regular,

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{|f(b) - f(a)|\,(b-a)}{n}.$$

*Demostración.*

1. Supongamos $f$ creciente (C1-010.D2); el caso decreciente es igual cambiando los papeles de los extremos.
2. Para $x \in [a,b]$, $f(a) \le f(x) \le f(b)$: $f$ es acotada.
3. En $[t_{i-1}, t_i]$, $f(t_{i-1})$ es un valor de $f$ y cota inferior, y $f(t_i)$ un valor y cota superior; luego $m_i = f(t_{i-1})$ y $M_i = f(t_i)$ (C1-006.D1).
4. Con $\Delta t_i = (b-a)/n$, por C1-005.T12 y la telescópica (C2-001.T1 a):

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big) = \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big),$$

   y $f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$ porque es $\ge 0$ (C1-004.D1).
5. Sea $\varepsilon > 0$. Si $f(b) = f(a)$ la diferencia es $0 < \varepsilon$. Si no, por C1-007.C1 hay $n$ con $n > (b-a)(f(b) - f(a))/\varepsilon$, y entonces la diferencia es $< \varepsilon$ (C1-003.T4, C1-003.T7).
6. Por el criterio de Riemann (C2-002.T5), $f$ es integrable. ■

Una función monótona puede tener saltos (por ejemplo, $f = 0$ en $[0,1)$ y $f(1) = 1$): la continuidad es suficiente para integrar, pero no necesaria.

## El área de Arquímedes

**Proposición C2-003.T3 (suma de cuadrados)**

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Demostración.*

1. Para $n = 1$: ambos lados valen 1 (C1-005.D2).
2. Si vale para $n$, por C1-005.D2 y la hipótesis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

   que es la fórmula para $n+1$ (axiomas de campo, C1-005.T12).
3. Por inducción (C1-005.T1), vale para todo $n$. ■

> **Ejemplo C2-003.E1 (Arquímedes)**
> Para $b > 0$, $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$ (con particiones regulares).

*Demostración.*

1. $f(x) = x^2$ es creciente en $[0, b]$: si $0 \le x < y$, $x^2 < y^2$ (C1-003.T9). Con $P_n$, $t_i = ib/n$, y como en C2-003.T2, $m_i = ((i-1)b/n)^2$ y $M_i = (ib/n)^2$.
2. Por C1-005.T12 y C2-003.T3,

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(2+\frac{1}{n}\Big).$$

3. Igual, recorriendo el índice $j = i - 1$ (C1-005.T12 c) y usando C2-003.T3 con $n-1$ (para $n \ge 2$;

con $n = 1$ ambos lados valen 0):

$$L(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

4. $U(f, P_n) - L(f, P_n) = b^3/n$ (C2-003.T2 con $f(b) - f(0) = b^2$), que tiende a 0 (C1-012.T2, C1-013.T2).
5. Por C2-002.C1, $f$ es integrable y su integral es $\lim L(f, P_n)$. Como $1/n \to 0$, por el álgebra de límites (C1-013.T2, C1-012.T2), $L(f, P_n) \to \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{b^3}{3}$. ■

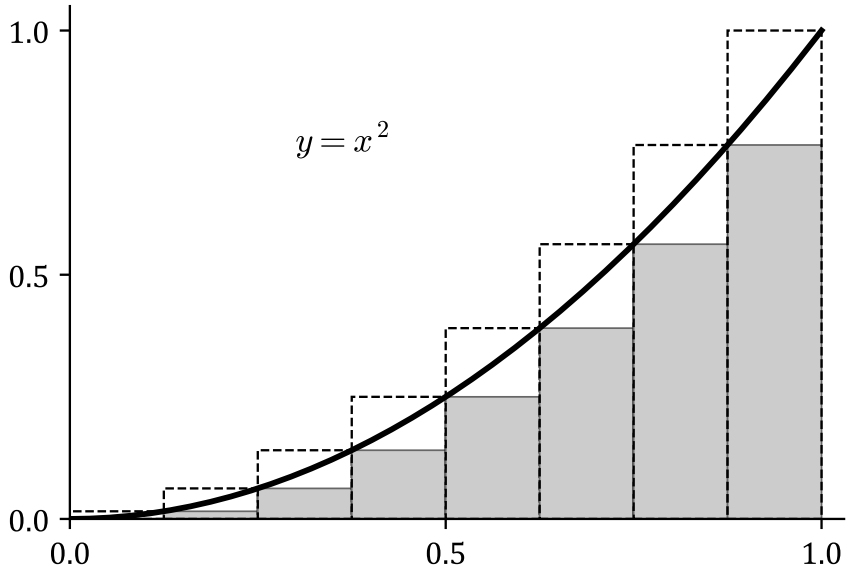



Figura 3: Arquímedes: sumas inferior (gris) y superior (contorno) de $x^2$ en $[0, 1]$ con 8 tramos. Su diferencia es $1/8$; ambas se acercan a $1/3$.

Algunos valores en $[0, 1]$: con $n = 4$, $[0.21875, 0.46875]$; con $n = 10$, $[0.285, 0.385]$; con $n = 100$, $[0.32835, 0.33835]$.

## Por qué cada hipótesis

> **Ejemplo C2-003.E2**
> La continuidad en $[a, b]$ no puede bajarse a continuidad en $(a, b]$: $f(x) = 1/x$ en $(0, 1]$, $f(0) = 0$, es continua en $(0, 1]$ y no es acotada, así que no es integrable en $[0, 1]$.

*Demostración.*

1. En $(0, 1]$, $f$ es un cociente de polinomios con denominador $\neq 0$: es continua ahí (C1-022.T2).
2. Para $K > 0$, por C1-007.C1 hay $n \in \mathbb{N}$ con $n > K$; $x = 1/n \in (0, 1]$ cumple $f(x) = n > K$. Así $f$ no es acotada.
3. Por definición (C2-002.D2), una función integrable es acotada: $f$ no es integrable en $[0, 1]$. ■

> **⚠ La continuidad es suficiente, no necesaria**
>
> $f = 0$ en $[0, 1)$, $f(1) = 1$ no es continua y sí es integrable (es monótona, C2-003.T2). En C2-005 se verán funciones integrables con infinitas discontinuidades, y la de Dirichlet, que no es integrable.

## Ejercicios

1. Calcula $U(f, P_4)$ y $L(f, P_4)$ para $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$.
2. Demuestra que $f(x) = 1 - x^2$ es integrable en $[-1, 1]$, aunque no es monótona ahí.
3. ¿Cuántos tramos iguales garantizan $U - L < 10^{-3}$ para $x^2$ en $[0, 1]$?
4. Sea $f$ continua en $[a, b]$ con $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Demuestra que $U(f, P_n) - L(f, P_n) \leq K(b - a)^2/n$.
5. Usa sumas de Darboux con $P_n$ para mostrar que $\int_0^1 x^3\,dx = 1/4$, sabiendo que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n + 1)^2/4$.

### Respuestas

1. $t_i = i/2$. $U = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4) = 3.75$ y $L = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}) = 1.75$.
2. Es un polinomio, continuo (C1-022.T2), y C2-003.T1 concluye.
3. $U - L = 1/n$; basta $n = 1001$.

4. En cada tramo, $|f(x) - f(y)| \leq K(b-a)/n$, así que $M_i - m_i \leq K(b-a)/n$ (C2-001.T2 d); se multiplica por $\Delta t_i$ y se suma.
5. $U(P_n) = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \to \frac{1}{4}$ y $U - L = 1/n \to 0$ (C2-003.T2, C2-002.C1).

# C2-004 · Propiedades de la integral

## Motivación

> **Un viaje en dos tramos, y uno de ida y vuelta**
> El auto de siempre va a $v(t) = 60t$ km/h durante una hora. A la media hora hace una parada técnica. Con sumas de Darboux, lo «recorrido» en la primera media hora es $\int_0^{1/2} 60t\,dt = 7.5$ y en la segunda $\int_{1/2}^{1} 60t\,dt = 22.5$; la suma es $30 = \int_0^1 60t\,dt$.
> ¿Siempre se suman así? ¿Y si el viaje completo tiene integral, la tiene cada tramo?
> Otra situación: un repartidor va al norte a 60 km/h media hora y regresa al sur a 40 km/h otra media hora. Con velocidad con signo, la integral de $v$ es el desplazamiento (10 km) y la de $|v|$ lo que marca el odómetro (50 km). El desplazamiento nunca supera lo recorrido: $|\int v| \le \int |v|$.
> Dónde falla la analogía: que estas integrales sean distancias es una interpretación que se justifica en C2-009; lo que se demuestra aquí no depende de ella.

## Aditividad

**Teorema C2-004.T1 (aditividad)**

Sean $a < c < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. $f$ es integrable en $[a, b] \iff f$ es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$; en ese caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

> **Idea de la demostración**
> Toda partición se puede refinar agregando $c$, y entonces se parte en una de cada lado. Los $U - L$ se suman: uno chico equivale a dos chicos. La suma de las dos integrales queda atrapada entre todas las sumas de $[a, b]$.

*Demostración.*

1. Si $P$ es una partición de $[a,b]$ con $c \in P$, por C2-001.T3 (c), $P = P_1 \cup P_2$ con $P_1$ partición de $[a,c]$ y $P_2$ de $[c,b]$.
2. Los subintervalos de $P$ son los de $P_1$ seguidos de los de $P_2$, con los mismos ínfimos y supremos (C2-001.D2). Partiendo la suma (C2-001.T1 b):

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2), \qquad U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2).$$

3. ($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Riemann (C2-002.T5) hay $P$ con $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Si $c \notin P$, $P \cup \{c\}$ es partición (C2-001.T3 a) y, por C2-002.T2, tiene $U - L$ aún menor o igual. Podemos suponer $c \in P$.
4. Por el paso 2,

$$\big[U(f,P_1) - L(f,P_1)\big] + \big[U(f,P_2) - L(f,P_2)\big] < \varepsilon,$$

   y cada corchete es $\geq 0$ (C2-001.T4). Así cada corchete es $< \varepsilon$ (C1-003.T9).
5. Por el criterio de Riemann (C2-002.T5), $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ ($f$ es acotada en cada uno).
6. ($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$; $\varepsilon/2 > 0$ (C1-003.T8). Por C2-002.T5 hay $P_1$ de $[a,c]$ y $P_2$ de $[c,b]$ con $U - L < \varepsilon/2$ en cada una.
7. $P = P_1 \cup P_2$ es partición de $[a,b]$ (C2-001.T3 c) y, por el paso 2 y C1-003.T6, $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Por C2-002.T5, $f$ es integrable en $[a,b]$.
8. Valor. Sean $I_1 = \int_a^c f$ e $I_2 = \int_c^b f$. Si $c \in P$, por C2-002.T4 en cada lado y el paso 2,

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \leq I_1 + I_2 \leq U(f,P_1) + U(f,P_2) = U(f,P)$$

   (C1-003.T9).
9. Si $c \notin P$, con $P' = P \cup \{c\}$ y C2-002.T2: $L(f,P) \leq L(f,P') \leq I_1 + I_2 \leq U(f,P') \leq U(f,P)$.
10. Así $I_1 + I_2$ está entre $L(f,P)$ y $U(f,P)$ para **toda** partición $P$ de $[a,b]$; por la unicidad de C2-002.T4, $\int_a^b f = I_1 + I_2$. ■

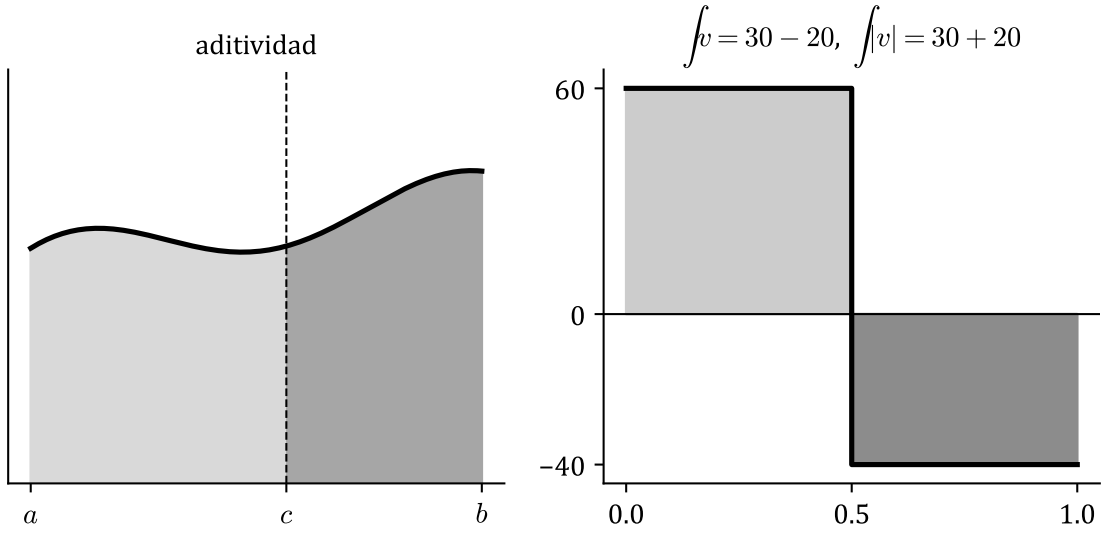



Figura 4: Aditividad: el área de $a$ a $b$ es la de $a$ a $c$ más la de $c$ a $b$ (izquierda). Desplazamiento contra distancia: $|\int v| \le \int |v|$ (derecha).

## Convenciones y cualquier orden

**Definición C2-004.D1 (convenciones)**

$\int_a^a f := 0$ si $f$ está definida en $a$; si $a < b$ y $f$ es integrable en $[a, b]$, $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

**Corolario C2-004.C1**

Sean $p < q$ y $f$ integrable en $[p, q]$.

(a) $f$ es integrable en todo $[c, d]$ con $p \le c < d \le q$.

(b) Para cualesquiera $a, b, c \in [p, q]$, en cualquier orden y con C2-004.D1:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Demostración.*

1. (a) Si $p < c$, por C2-004.T1 en $p < c < q$, $f$ es integrable en $[c, q]$; si $c = p$, ya lo es. Si $d < q$,

por C2-004.T1 en $c < d < q$, $f$ es integrable en $[c, d]$.

2. (b) Si dos de los tres puntos coinciden, la igualdad es inmediata con C2-004.D1: por ejemplo, si $a = c$, $\int_a^a f + \int_a^b f = 0 + \int_a^b f$; si $a = b$, $\int_a^c f + \int_c^a f = 0$ (K4).
3. Si son distintos, por tricotomía (C1-003.T1) hay seis órdenes. Si $a < c < b$, es C2-004.T1 (con (a)).
4. Si $a < b < c$: C2-004.T1 da $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, luego $\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$ (C2-004.D1).
5. Los otros cuatro órdenes ($b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, $c < b < a$) se reducen igual: se escribe C2-004.T1 para el orden creciente de los tres puntos y se despeja con C2-004.D1 y K1-K4. ■

## Linealidad y monotonía

**Teorema C2-004.T2 (linealidad)**

Sean $a < b$, $f$ y $g$ integrables en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f + g$ y $cf$ son integrables en $[a, b]$,

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

Con C2-004.D1 vale para $a, b$ en cualquier orden.

*Demostración.*

1. $f+g$ y $cf$ son acotadas. En cada subintervalo de una partición $P$, por C2-001.T2 (b), $\inf f + \inf g \leq \inf(f + g)$ y $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Multiplicando por $\Delta t_i$ y sumando (C1-003.T9, C1-005.T12):

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P) \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P).$$

2. Sea $\varepsilon > 0$. Hay $P_f$ y $P_g$ con $U - L < \varepsilon/2$ para $f$ y para $g$ (C1-003.T8, C2-002.T5); con $P = P_f \cup P_g$ (C2-001.T3 b) ambas desigualdades siguen (C2-002.T2).
3. Por el paso 1, $U(f+g, P) - L(f+g, P) \leq [U(f, P) - L(f, P)] + [U(g, P) - L(g, P)] < \varepsilon$ (C1-003.T6). Por C2-002.T5, $f + g$ es integrable.
4. Para esa $P$, los dos números $\int_a^b (f + g)$ y $\int_a^b f + \int_a^b g$ están en el intervalo $[L(f, P) + L(g, P),\ U(f, P) + U(g, P)]$ (paso 1 y C2-002.T4), cuya longitud es $< \varepsilon$. Su distancia es $< \varepsilon$ (C1-004.T3).
5. Como $\varepsilon$ es arbitrario, la distancia es 0 (C1-003.T9, última parte, y C1-004.T1): las dos integrales

son iguales.

6. $cf$ con $c \geq 0$: por C2-001.T2 (c), en cada tramo $\inf(cf) = c \inf f$ y $\sup(cf) = c \sup f$; con C1-005.T12, $L(cf, P) = c\, L(f, P)$ y $U(cf, P) = c\, U(f, P)$ para toda $P$.
7. Si $c = 0$, $cf = 0$ y es C2-002.E1. Si $c > 0$, eligiendo $P$ con $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/c$ se obtiene $U(cf, P) - L(cf, P) < \varepsilon$ (C1-003.T4); $cf$ es integrable. Además $L(cf, P) = cL(f, P) \leq c \int f \leq cU(f, P) = U(cf, P)$ para toda $P$ (C1-003.T9), y por C2-002.T4, $\int cf = c \int f$.
8. $c < 0$: por C2-001.T2 (c), $L(cf, P) = c\, U(f, P)$ y $U(cf, P) = c\, L(f, P)$, y el mismo argumento (multiplicar por $c < 0$ invierte las desigualdades, C1-003.T4) da la integrabilidad y $\int cf = c \int f$.
9. Cualquier orden: si $b < a$, por C2-004.D1 y lo anterior en $[b, a]$, $\int_a^b (f + g) = -\int_b^a (f + g) = -\int_b^a f - \int_b^a g = \int_a^b f + \int_a^b g$ (K9); igual con $cf$. Si $a = b$, todo vale 0. ■

**Proposición C2-004.T3 (monotonía)**

Sean $a < b$ y $f, g$ integrables en $[a, b]$ con $f \leq g$. Entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; en particular $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.

*Demostración.*

1. $h := g - f = g + (-1)f$ es integrable y $\int h = \int g - \int f$ (C2-004.T2).
2. $h \geq 0$ en $[a, b]$; por C2-001.T4 con $m = 0$, $L(h, P) \geq 0$ para toda $P$.
3. Por C2-002.T4, $\int h \geq L(h, P) \geq 0$; así $\int g - \int f \geq 0$.
4. La segunda parte es el caso $f := 0$, $g := f$, con $\int 0 = 0$ (C2-002.E1). ■

## Valor absoluto y producto

**Proposición C2-004.T4**

Sean $a < b$ y $f$ integrable en $[a, b]$. Entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Demostración.*

1. $|f|$ es acotada. En un subintervalo $I_i$, para $x, y \in I_i$, $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i$

(C1-004.T5, C2-001.T2 d).

2. Por la oscilación (C2-001.T2 d) aplicada a $|f|$, $\sup_{I_i}|f| - \inf_{I_i}|f| \le M_i - m_i$.
3. Multiplicando por $\Delta t_i$ y sumando (C1-005.T12), $U(|f|,P) - L(|f|,P) \le U(f,P) - L(f,P)$. Con C2-002.T5, $|f|$ es integrable.
4. Como $-|f| \le f \le |f|$ (C1-004.T1), por C2-004.T3 y C2-004.T2,

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

y por C1-004.T3, $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$. ■

**Proposición C2-004.T5 (producto)**

Sean $a < b$ y $f, g$ integrables en $[a,b]$. Entonces $fg$ es integrable en $[a,b]$.

*Demostración.*

1. $f$ y $g$ son acotadas: hay $K > 0$ con $|f|, |g| \le K$ en $[a,b]$ (si las dos cotas son 0, se toma $K = 1$). Así $|fg| \le K^2$ (C1-004.T2).
2. Para $x, y$ en un subintervalo $I_i$ de una partición $P$, por K9, C1-004.T2 y C1-004.T4:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)\,(g(x)-g(y)) + g(y)\,(f(x)-f(y))| \\ &\le K\,|g(x)-g(y)| + K\,|f(x)-f(y)| \\ &\le K\,(M_i^g - m_i^g) + K\,(M_i^f - m_i^f) \end{aligned}$$

(C2-001.T2 d para $f$ y $g$).

3. Por la oscilación (C2-001.T2 d) para $fg$, $M_i^{fg} - m_i^{fg} \le K(M_i^g - m_i^g) + K(M_i^f - m_i^f)$, y sumando (C1-005.T12):

$$U(fg,P) - L(fg,P) \le K\big[U(g,P) - L(g,P)\big] + K\big[U(f,P) - L(f,P)\big].$$

4. Dado $\varepsilon > 0$, hay $P_f$, $P_g$ con diferencias $< \varepsilon/(2K)$ (C2-002.T5, C1-003.T7, C1-003.T8); con $P = P_f \cup P_g$ siguen valiendo (C2-001.T3 b, C2-002.T2) y el paso 3 da $U(fg,P) - L(fg,P) < \varepsilon$ (C1-003.T6). Por C2-002.T5, $fg$ es integrable. ■

**Corolario C2-004.C2**

Sean $p < q$, $f$ integrable en $[p,q]$ con $|f| \leq M$ en $[p,q]$, y $a, b \in [p,q]$ en cualquier orden. Entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M\,|b-a|.$$

*Demostración.*

1. Si $a = b$, ambos lados valen 0 (C2-004.D1).
2. Si $a < b$, $f$ es integrable en $[a,b]$ (C2-004.C1 a) y, por C2-004.T4, C2-004.T3 y C2-002.E1, $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b M = M(b-a) = M|b-a|$ (C1-004.D1).
3. Si $b < a$, por C2-004.D1 y C1-004.T1, $|\int_a^b f| = |\int_b^a f| \leq M(a-b) = M|b-a|$. ■

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Integrable en los dos tramos**

$f = 0$ en $[0,1]$ y $f$ igual a la función de Dirichlet en $(1,2]$. En $[0,1]$ es integrable; en $[1,2]$ cada tramo tiene racionales e irracionales (C1-007.T3, C1-008.T3), así que $L = 0$ y $U = 1$ ahí. Por la aditividad, $f$ tampoco es integrable en $[0,2]$.

**⚠ Acotada**

$f(x) = 1/(1-x)$ en $[0,1)$, $f(1) = 0$: es continua, y por tanto integrable, en $[0,1/2]$; pero no es acotada en $[1/2,1]$, así que no hay integral de Riemann en $[0,1]$.

**⚠ El orden de los límites**

$\int_0^1 f = \int_0^2 f + \int_2^1 f$ no tiene sentido con C2-002.D2 sola (pide límite inferior menor que el superior). Con la convención C2-004.D1 sí, y es C2-004.C1 (b).

**⚠ La desigualdad puede ser estricta**

El repartidor: $v = 60$ en $[0, 1/2]$ y $v = -40$ en $(1/2, 1]$. Por la aditividad, $\int_0^1 v = 30+(-20) = 10$ y $\int_0^1 |v| = 30 + 20 = 50$. (En $[1/2, 1]$, $v$ es monótona y $L(v, P_n) = -20$ para todo $n$; C2-003.T2 y C2-002.C1.) Así $|\int v| = 10 < 50 = \int |v|$.

## Ejercicios

1. Sin calcular sumas, demuestra que $\int_0^1 (3x + 2)\, dx = 7/2$ usando C2-002.E1 y la linealidad.
2. Demuestra que si $f$ es integrable en $[a, b]$ y $m \le f \le M$, entonces $m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a)$ usando solo C2-004.T3.
3. Da $f$ con $|f|$ integrable en $[0, 1]$ y $f$ no integrable.
4. Demuestra que si $f$ es integrable en $[a, b]$, entonces $f^2$ también, y que $(\int_a^b f)^2 \le (b - a) \int_a^b f^2$. (Sugerencia: $\int (f - t)^2 \ge 0$ para todo $t$.)
5. Calcula $\int_2^0 x^2\, dx$.

### Respuestas

1. $\int (3x + 2) = 3 \int_0^1 x + \int_0^1 2 = 3/2 + 2 = 7/2$ (C2-004.T2, C2-002.E1).
2. $m \le f \le M$, monotonía con las constantes y C2-002.E1.
3. $f = 1$ en los racionales y $-1$ en los irracionales: $|f| = 1$ es integrable y $f$ tiene $L = -1$, $U = 1$.
4. $f^2 = f \cdot f$ es integrable (C2-004.T5). Con $I = \int f$, $J = \int f^2$ y $\ell = b - a$, para todo $t$: $0 \le \int (f - t)^2 = J - 2tI + t^2 \ell$ (C2-004.T2, C2-004.T3); con $t = I/\ell$ queda $0 \le J - I^2/\ell$.
5. $\int_2^0 x^2 = -\int_0^2 x^2 = -8/3$ (C2-004.D1, C2-003.E1).

# C2-005 · Discontinuidades: Dirichlet y Riemann

## Motivación

> **La regla con una marca en cada fracción**
> Imagina una regla ideal de 0 a 1 con una marca en cada fracción $p/q$ escrita en su forma más simple, de altura $1/q$: las marcas de 0 y 1 miden 1, la de $1/2$ mide $1/2$, las de $1/3$ y $2/3$ miden $1/3$, y así. Hay una infinidad de marcas y entre dos cualesquiera hay otras.
> ¿Cuánta «tinta» tiene la regla, es decir, cuánta área hay bajo las marcas?
> Las marcas de altura al menos $1/10$ son solo 33. Las sumas superiores con 10, 100 y 1000 tramos iguales valen aproximadamente 0.457, 0.131 y 0.037; las inferiores, siempre 0. La tinta es 0.
> Dónde falla la analogía: una regla real tiene finitas marcas, cada una con grosor. Lo que sí es fiel: para la tinta importa cuántas marcas son *altas*, no cuántas hay.

## Extremos y finitas discontinuidades

**Proposición C2-005.T1**

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f$ es integrable en $[c, d]$ para todos $c, d$ con $a < c < d < b$. Entonces $f$ es integrable en $[a, b]$.

> **Idea de la demostración**
> Cerca de los extremos la función puede ser muy rara, pero es acotada: dos tramos muy delgados en las orillas aportan poco a $U - L$, y el centro es bueno por hipótesis.

*Demostración.*

1. Sea $K > 0$ con $|f| \leq K$ en $[a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$.
2. Por C1-007.C1 hay $h > 0$ con $h < (b - a)/2$ y $4Kh < \varepsilon/2$ (se toma $h = 1/n$ con $n$ grande). Sean $c = a + h$ y $d = b - h$; entonces $a < c < d < b$ (C1-003.T8, C1-003.T3).
3. Por hipótesis y el criterio de Riemann (C2-002.T5), hay una partición $Q$ de $[c, d]$ con $U(f, Q) - L(f, Q) < \varepsilon/2$.
4. $P := \{a\} \cup Q \cup \{b\}$ es una partición de $[a, b]$ (C2-001.T3 c, dos veces). Partiendo la suma (C2-001.T1 b), $U(f, P) - L(f, P)$ es la suma de tres partes: el tramo $[a, c]$, los tramos de $Q$ y el tramo $[d, b]$.
5. En $[a, c]$, $-K \leq m_1 \leq M_1 \leq K$ (C2-001.T4 en ese tramo), así que $(M_1 - m_1)h \leq 2Kh$; igual en $[d, b]$.
6. Por lo tanto (C1-003.T6, C1-003.T9),

$$U(f, P) - L(f, P) \leq 2Kh + \big(U(f, Q) - L(f, Q)\big) + 2Kh < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

7. Por C2-002.T5, $f$ es integrable en $[a, b]$. ■

**Corolario C2-005.C1 (finitas discontinuidades)**

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y continua en todo punto de $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos. Entonces $f$ es integrable en $[a, b]$.

*Demostración.*

1. Sea $E$ el conjunto (finito) de los puntos de discontinuidad. Los puntos de $E \cup \{a, b\}$ en orden creciente forman una partición $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_r = b$ (C2-001.D1, C2-001.T3).
2. En cada $(s_{j-1}, s_j)$ no hay discontinuidades. Si $s_{j-1} < c < d < s_j$, $f$ es continua en cada punto de $[c, d]$ (como función en $[a, b]$, y por tanto restringida a $[c, d]$, C1-022.D1), así que es integrable en $[c, d]$ (C2-003.T1).
3. Por C2-005.T1, $f$ es integrable en cada $[s_{j-1}, s_j]$.
4. Por la aditividad (C2-004.T1) e inducción sobre $j$ (C1-005.T1), $f$ es integrable en $[s_0, s_j]$ para cada $j$; con $j = r$, en $[a, b]$. ■

**Proposición C2-005.T2 (cambiar finitos valores)**

Sean $a < b$, $f$ integrable en $[a, b]$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $g(x) = f(x)$ salvo en un número finito de puntos. Entonces $g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b g = \int_a^b f$.

*Demostración.*

1. Sea $h := g - f$; $h = 0$ salvo en puntos $x_1, \dots, x_k$. Sea $K = \max(|h(x_1)|, \dots, |h(x_k)|)$ (C1-005.T13); entonces $|h| \leq K$ en $[a, b]$.
2. Un punto $x$ está en a lo más dos subintervalos cerrados de una partición: si $x \in [t_{i-1}, t_i]$ y $x \in [t_{j-1}, t_j]$ con $i + 1 < j$, sería $t_i < t_{j-1} \leq x \leq t_i$ (C2-001.D1, C1-003.T2), imposible (C1-003.T1).
3. En la partición regular $P_n$, en los subintervalos que no contienen ningún $x_l$, $h = 0$, así que $m_i = M_i = 0$. Hay a lo más $2k$ subintervalos que contienen algún $x_l$, y en ellos $|m_i|, |M_i| \leq K$.
4. Así (C1-005.T12, C2-001.T1 c),

$$|L(h, P_n)| \leq \frac{2kK(b-a)}{n}, \qquad |U(h, P_n)| \leq \frac{2kK(b-a)}{n},$$

   y ambos tienden a 0 (C1-012.T2, C1-013.T2, C1-014.T1); en particular $U(h, P_n) - L(h, P_n) \to 0$.
5. Por C2-002.C1, $h$ es integrable y $\int_a^b h = \lim L(h, P_n) = 0$.
6. $g = f + h$ es integrable y $\int g = \int f + \int h = \int f$ (C2-004.T2). ■

## La función de Dirichlet

> **Ejemplo C2-005.E1 (Dirichlet)**
> Sean $a < b$ y $D(x) := 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) := 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Para toda partición $P$ de $[a, b]$, $L(D, P) = 0$ y $U(D, P) = b - a$; por lo tanto $D$ (acotada) no es integrable en $[a, b]$.

*Demostración.*

1. En cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ hay un racional (C1-007.T3) y un irracional (C1-008.T3). Como $0 \leq D \leq 1$, $m_i = 0$ y $M_i = 1$ (C1-006.D1).
2. $L(D, P) = \sum 0 \cdot \Delta t_i = 0$ y $U(D, P) = \sum \Delta t_i = b - a$ (C2-001.T1 a).
3. Así $L(D) = 0$ y $U(D) = b - a > 0$ (C2-002.D2): $D$ no es integrable. ■

## La función de Riemann

**Definición C2-005.D1 (función de Riemann o de Thomae)**

Para $x \in \mathbb{Q}$ sea $q(x) := \min\{q \in \mathbb{N} : qx \in \mathbb{Z}\}$. $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R(x) := 1/q(x)$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $R(x) := 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

Si $x = p/q'$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{N}$ (C1-005.D1), el conjunto $\{q \in \mathbb{N} : qx \in \mathbb{Z}\}$ contiene a $q'$; su mínimo existe por el buen orden (C1-005.T3). Así $R(0) = R(1) = 1$, $R(1/2) = 1/2$ y $R(6/8) = R(3/4) = 1/4$.

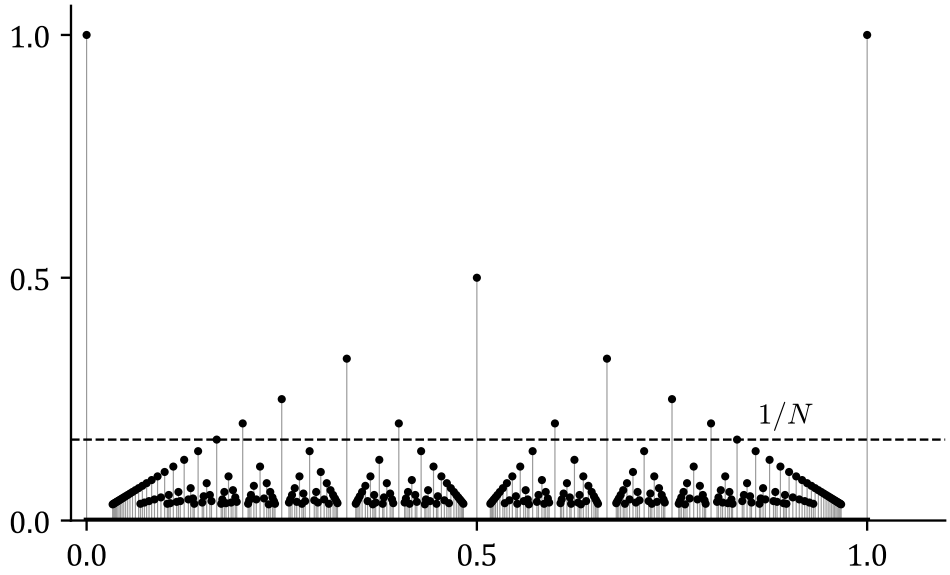



Figura 5: La función de Riemann en $[0, 1]$ (puntos $(p/q, 1/q)$ con $q \leq 30$). Por encima de la línea discontinua, en altura $1/N$, solo hay finitos puntos.

**Proposición C2-005.T3**

Para $N \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x \in [0, 1] : R(x) \geq 1/N\}$ es finito: sus elementos son de la forma $p/q$ con $q \in \{1, \dots, N\}$ y $p \in \{0, \dots, q\}$, así que tiene a lo más $N(N + 3)/2$ elementos.

*Demostración.*

1. Si $R(x) \geq 1/N > 0$, entonces $x \in \mathbb{Q}$ y $1/q(x) \geq 1/N$, es decir, $q := q(x) \leq N$ (C1-003.T7).
2. $p := qx \in \mathbb{Z}$ y $x = p/q$. Como $0 \leq x \leq 1$ y $q > 0$, $0 \leq p \leq q$ (C1-003.T4).

3. Así el conjunto está contenido en $\{p/q : 1 \leq q \leq N,\ 0 \leq p \leq q\}$, que tiene a lo más $\sum_{q=1}^{N}(q+1)$ elementos.
4. Por C1-005.T12 y C1-005.T4,

$$\sum_{q=1}^{N}(q+1) = \frac{N(N+1)}{2} + N = \frac{N(N+3)}{2}. \qquad \blacksquare$$

**Proposición C2-005.T4**

$R$ es continua en cada irracional y discontinua en cada racional (como función en $\mathbb{R}$ y restringida a $[0,1]$).

*Demostración.*

1. (Traslación.) Si $j \in \mathbb{Z}$: $x \in \mathbb{Q} \iff x + j \in \mathbb{Q}$, y para $q \in \mathbb{N}$, $qx \in \mathbb{Z} \iff q(x+j) \in \mathbb{Z}$ (C1-005.T6). Así $q(x+j) = q(x)$ y $R(x+j) = R(x)$.
2. Por C2-005.T3 y el paso 1, para cada $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x \in [m, m+1] : R(x) \geq 1/N\} = m + \{y \in [0,1] : R(y) \geq 1/N\}$ es finito.
3. (Irracional.) Sea $x_0 \notin \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$; hay $N$ con $1/N < \varepsilon$ (C1-007.C1). Sea $m = \lfloor x_0 \rfloor$ (C1-007.T2). El conjunto $F$ de los $x \in [m-1, m+2]$ con $R(x) \geq 1/N$ es finito (paso 2, tres veces) y no contiene a $x_0$.
4. Sea $\delta > 0$ menor que 1 y que todas las distancias $|x - x_0|$ con $x \in F$ (mínimo de una lista finita, C1-005.T13). Si $|x - x_0| < \delta$, entonces $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1) \subset [m-1, m+2]$ (C1-004.T3) y $x \notin F$, así que $|R(x) - R(x_0)| = R(x) < 1/N < \varepsilon$. $R$ es continua en $x_0$ (C1-022.D1).
5. (Racional.) Sea $x_0 = p/q$ con $q = q(x_0)$, de modo que $R(x_0) = 1/q > 0$. Con $\varepsilon = 1/q$: para todo $\delta > 0$ hay un irracional $x$ con $|x - x_0| < \delta$ (C1-008.T3), y $|R(x) - R(x_0)| = 1/q \not< \varepsilon$. $R$ no es continua en $x_0$ (C1-022.D1).
6. Restringida a $[0,1]$, los pasos 4 y 5 valen igual tomando solo $x \in [0,1]$ (en el paso 5, el irracional se toma en $[0,1]$, en el intervalo entre $x_0$ y $x_0 \pm \delta$ que cae dentro). $\blacksquare$

**Teorema C2-005.T5**

$R$ es integrable en $[0,1]$ y $\int_0^1 R = 0$.

**Idea de la demostración**

Las sumas inferiores son 0. Para las superiores, las pocas marcas altas caben en pocos tramos, muy delgados, y en los demás tramos todo está por debajo de $1/N$.

*Demostración.*

1. Por C2-005.D1, $0 \leq R \leq 1$ ($1/q \leq 1$ para $q \in \mathbb{N}$, C1-005.T2, C1-003.T7): $R$ es acotada.
2. Para toda partición $P$ de $[0, 1]$, cada subintervalo contiene un irracional (C1-008.T3), donde $R = 0$; como $R \geq 0$, $m_i = 0$ (C1-006.D1) y $L(R, P) = 0$.
3. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ con $1/N < \varepsilon/2$ (C1-007.C1, C1-003.T8). Por C2-005.T3, $F := \{x \in [0, 1] : R(x) \geq 1/N\}$ es finito; sea $k$ su número de elementos ($k \geq 1$, pues $0 \in F$).
4. En la partición regular $P_n$, cada punto de $F$ está en a lo más dos subintervalos (como en C2-005.T2, paso 2): a lo más $2k$ subintervalos tocan $F$, y en ellos $M_i \leq 1$.
5. En cada uno de los demás, $R(x) < 1/N$ para todo $x$ del subintervalo, así que $M_i \leq 1/N$ (C1-006.D1).
6. Partiendo la suma en los dos tipos de subintervalos (C1-005.T12, C2-001.T1):

$$U(R, P_n) \leq 2k \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \frac{2k}{n} + \frac{1}{N} < \frac{2k}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

7. Si $n > 4k/\varepsilon$ (C1-007.C1), $2k/n < \varepsilon/2$ y $U(R, P_n) < \varepsilon$. Con el paso 2, $U(R, P_n) - L(R, P_n) < \varepsilon$; por el criterio de Riemann (C2-002.T5), $R$ es integrable.
8. Por C2-002.T4, $0 = L(R, P_n) \leq \int_0^1 R \leq U(R, P_n) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\int_0^1 R \leq 0$ (C1-003.T9) y, con $\int_0^1 R \geq 0$, $\int_0^1 R = 0$ (C1-003.T1). ■

Por ejemplo, con $\varepsilon = 0.2$: $N = 11$ cumple $1/N < 0.1$, hay $k = 43$ marcas de altura $\geq 1/11$, y con $n = 861$ tramos $U(R, P_n) < 0.2$.

## Infinitas discontinuidades, otra vez

> **Ejemplo C2-005.E2 (infinitas discontinuidades)**
> $g(x) := 1$ si $x = 1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $g(x) := 0$ en otro caso: $g$ es discontinua en 0 y en cada $1/n$, y es integrable en $[0,1]$ con $\int_0^1 g = 0$. Igual que $R$ (C2-005.T4, C2-005.T5), tiene una infinidad de discontinuidades.

*Demostración.*

1. Discontinuidades: en $x_0 = 1/n$, $g(x_0) = 1$ y hay irracionales arbitrariamente cerca, donde $g = 0$ (C1-008.T3); en 0, $g(0) = 0$ y $g(1/n) = 1$ con $1/n$ arbitrariamente cerca de 0 (C1-007.C1). Con $\varepsilon = 1$ ningún $\delta$ sirve (C1-022.D1).
2. Si $0 < c < d < 1$, los $1/n$ en $[c,d]$ cumplen $n \leq 1/c$, así que son finitos (C1-007.C1). En $[c,d]$, $g$ coincide con la función 0 salvo en finitos puntos; por C2-005.T2 y C2-002.E1, $g$ es integrable en $[c,d]$.
3. $g$ es acotada ($0 \leq g \leq 1$). Por C2-005.T1, $g$ es integrable en $[0,1]$.
4. Para $c \in (0,1)$, el mismo argumento del paso 2 en $[c,1]$ da $\int_c^1 g = 0$, y por C2-004.C1 y C2-004.C2,
$$\left|\int_0^1 g\right| = \left|\int_0^c g + \int_c^1 g\right| = \left|\int_0^c g\right| \leq 1 \cdot c.$$
5. Como esto vale para todo $c \in (0,1)$, $|\int_0^1 g| \leq c$ para todo $c > 0$ pequeño, y por C1-003.T9, $\int_0^1 g = 0$ (C1-004.T1). ■

| **Teorema C2-005.T6 ⚠ C4 (criterio de Lebesgue, enunciado)** |
|---|
| Sean $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. $f$ es integrable en $[a,b]$ $\iff$ el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero. |

«Medida cero» y la demostración son de Cálculo IV. Aquí explica por qué C2-005.C1, C2-005.T5 y C2-005.E2 funcionan (los conjuntos finitos, los racionales y $\{0\} \cup \{1/n\}$ tienen medida cero, y $[a,b]$ no), pero **no se usa** en ninguna demostración.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Finitas marcas altas**

En Dirichlet todas las marcas miden 1: el conjunto de puntos con $D \geq 1/N$ es $\mathbb{Q} \cap [a, b]$, infinito y denso, y cada tramo de cada partición lo toca. Por eso $U(D, P) = b - a$ siempre.

**⚠ Acotada, en C2-005.T1**

$f(x) = 1/x$ en $(0, 1]$, $f(0) = 0$, es integrable en cada $[c, d] \subset (0, 1)$ (continua) y no es integrable en $[0, 1]$: no es acotada (C2-003.E2). La acotación no se puede quitar.

**⚠ Infinitas discontinuidades no es el problema**

$R$ y $g$ tienen infinitas discontinuidades y son integrables. Lo que importa es «cuántas» en el sentido de Lebesgue, no si son finitas.

## Ejercicios

1. Calcula $R(0.75)$, $R(0.6)$ y $R(\frac{10}{15})$.
2. Demuestra que la función que vale $x$ en los racionales y 0 en los irracionales no es integrable en $[0, 1]$. (Sugerencia: $U(f, P) \geq U$ de la identidad.)
3. Sea $f = 1$ en $[0, 1]$ salvo $f(1/k) = 0$ para $k = 1, \ldots, 100$. Calcula $\int_0^1 f$.
4. Cuenta los elementos de $\{x \in [0, 1] : R(x) \geq 1/4\}$ y compáralo con la cota $N(N + 3)/2$.
5. Demuestra que $\int_a^b R = 0$ para todos $a < b$.

### Respuestas

1. $0.75 = 3/4$: $R = 1/4$; $0.6 = 3/5$: $R = 1/5$; $10/15 = 2/3$: $R = 1/3$.
2. $L(f, P) = 0$ y, en cada tramo, el supremo de $f$ es $t_i$ (por densidad de $\mathbb{Q}$ y C1-006.T2), así que $U(f, P) = U(\mathrm{id}, P) \geq \int_0^1 x\,dx = 1/2$; $U(f) \geq 1/2 > 0 = L(f)$.
3. $\int_0^1 f = 1$ (C2-005.T2 y C2-002.E1).
4. $\{0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4\}$: 7 elementos; la cota es $4 \cdot 7/2 = 14$.
5. La demostración de C2-005.T5 funciona igual en $[a, b]$: $L(R, P) = 0$ por la densidad de los irracionales, y por el paso 2 de C2-005.T4 el conjunto de los $x \in [a, b]$ con $R(x) \geq 1/N$ es finito (está

dentro de una unión finita de intervalos $[m, m+1]$); el resto del argumento no cambia.

# C2-006 · Teorema del valor medio para integrales

## Motivación

**La temperatura promedio del día**

En el día de C1-025 la temperatura del patio entre las 6:00 y las 20:00 es

$$T(t) = 12 + 3(t-6) - \tfrac{1}{4}(t-6)^2.$$

Su **promedio** es la integral dividida entre la duración: $\frac{1}{14}\int_6^{20} T = \frac{50}{3} \approx 16.67$ °C (el valor exacto de la integral, $700/3$, se calcula en C2-009).

¿Hubo un instante en que el termómetro marcó *exactamente* 16.67 °C? Sí, dos: cerca de las 7:50 y de las 16:10.

En la gráfica: el rectángulo de base $[6, 20]$ con la misma área que la región bajo la curva tiene altura igual al promedio, y esa altura la alcanza la curva.

Dónde falla la analogía: el teorema asegura que el instante existe, no cuándo ni cuántas veces; si la temperatura saltara de golpe, podría no alcanzarse (C2-006.E1).

## Cotas y valor medio

**Proposición C2-006.T1**

Sean $a < b$, $f$ integrable en $[a, b]$ y $m \le f \le M$ en $[a, b]$. Entonces

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

*Demostración.*

1. Para cualquier partición $P$, $m(b-a) \le L(f,P)$ y $U(f,P) \le M(b-a)$ (C2-001.T4).
2. Por C2-002.T4, $L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P)$.
3. Por transitividad (C1-003.T9), $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$. ■

**Teorema C2-006.T2 (TVM para integrales)**

Sean $a < b$ y $f$ continua en $[a,b]$. Existe $c \in [a,b]$ con

$$\int_a^b f = f(c)\,(b-a).$$

**Idea de la demostración**

El promedio queda entre la mínima y la máxima, que la función alcanza; entre esos dos puntos, el valor intermedio da un punto donde $f$ vale exactamente el promedio.

*Demostración.*

1. $f$ es integrable en $[a,b]$ (C2-003.T1).
2. Por el teorema de Weierstrass (C1-024.T2) existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ con

$$m := f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) =: M \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

3. Por C2-006.T1, $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.
4. Como $b-a > 0$, $1/(b-a) > 0$ (C1-003.T7); multiplicando (C1-003.T4, C1-003.T9), el número

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

   cumple $m \le \mu \le M$.
5. Si $x_1 = x_2$, entonces $m = M$, así que $\mu = m$ (C1-003.T1) y $c := x_1$ sirve.
6. Si $x_1 \ne x_2$, sea $[\alpha,\beta]$ el intervalo cerrado con extremos $x_1$ y $x_2$ ($\alpha < \beta$). $f$ es continua en $[\alpha,\beta]$ (restricción, C1-022.D1) y $\mu$ está entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$, que son $m$ y $M$ en algún orden.
7. Por el teorema del valor intermedio (C1-023.C1) hay $c \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ con $f(c) = \mu$.
8. Multiplicando por $b-a$ (K5-K8), $f(c)(b-a) = \int_a^b f$. ■

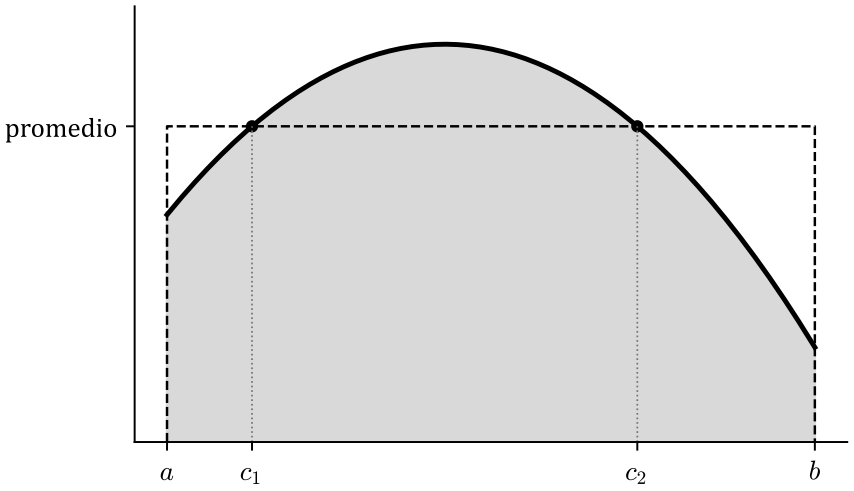



Figura 6: TVM para integrales: el rectángulo de altura $f(c)$ sobre $[a, b]$ tiene la misma área que la región bajo la curva.

## Positividad

| **Proposición C2-006.T3 (positividad)** |
|---|
| Sean $a < b$ y $f$ continua en $[a, b]$ con $f \geq 0$. Si $f(c) > 0$ para algún $c \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f > 0$. |

*Demostración.*

1. La función $f - f(c)/2$ es continua (C1-022.T2) y vale $f(c)/2 > 0$ en $c$ (C1-003.T8). Por la conservación del signo (C1-022.T4) hay $\delta > 0$ con $f(x) > f(c)/2$ para todo $x \in [a, b]$ con $|x - c| < \delta$.
2. Sean $\alpha := \max(a, c - \delta/2)$ y $\beta := \min(b, c + \delta/2)$ (C1-005.T13). Entonces $a \leq \alpha < \beta \leq b$: si $c < b, \beta > c \geq \alpha$; si $c = b, \alpha < b = \beta$ porque $a < b$ (C1-003.T8, C1-003.T1).
3. Todo $x \in [\alpha, \beta]$ cumple $|x - c| \leq \delta/2 < \delta$ (C1-004.T3), así que $f(x) > f(c)/2$.
4. Por C2-004.C1 (b) (con C2-004.D1 si $\alpha = a$ o $\beta = b$),

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b f.$$

5. El primer y el último sumando son $\geq 0$ (C2-004.T3 con $f \geq 0$, o valen 0 por C2-004.D1). El del medio es $\geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$ (C2-006.T1, C1-003.T4).
6. Sumando (C1-003.T6, C1-003.T9), $\int_a^b f > 0$. ■

⚠ **Consecuencia útil**

Si $f$ es continua, $f \geq 0$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f = 0$, entonces $f = 0$ en todo $[a,b]$ (contrarrecíproca de C2-006.T3). Sin continuidad es falso: $f = 1$ en un punto y 0 en el resto tiene integral 0 (C2-005.T2).

## Versión ponderada

**Proposición C2-006.T4 (TVM ponderado)**

Sean $a < b$, $f$ continua en $[a,b]$ y $g$ integrable en $[a,b]$ con $g \geq 0$. Existe $c \in [a,b]$ con

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

*Demostración.*

1. $f$ es integrable (C2-003.T1) y $fg$ también (C2-004.T5).
2. Por Weierstrass (C1-024.T2), $m := f(x_1) \leq f \leq f(x_2) =: M$ en $[a,b]$.
3. Como $g \geq 0$, $mg \leq fg \leq Mg$ (C1-003.T4, C1-003.T9). Por la monotonía y la linealidad (C2-004.T3, C2-004.T2),
$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g.$$
4. $\int_a^b g \geq 0$ (C2-004.T3). Si $\int_a^b g = 0$, el paso 3 da $\int_a^b fg = 0$ (C1-003.T1) y cualquier $c \in [a,b]$ sirve.
5. Si $\int_a^b g > 0$, dividiendo (C1-003.T7, C1-003.T4), $\mu := \int fg / \int g$ cumple $m \leq \mu \leq M$, y como en C2-006.T2 (pasos 5-7, con C1-023.C1) hay $c \in [a,b]$ con $f(c) = \mu$. ■

## Por qué cada hipótesis

> **Ejemplo C2-006.E1**
> La continuidad hace falta en C2-006.T2: $f := 0$ en $[0,1]$ y $f := 1$ en $(1,2]$ es integrable en $[0,2]$ con $\int_0^2 f = 1$, y ningún $c$ cumple $f(c)\cdot 2 = 1$.

*Demostración.*

1. $f$ es acotada y continua salvo en 1: es integrable en $[0,2]$ (C2-005.C1).
2. Por la aditividad (C2-004.T1), $\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f$. El primero es $\int_0^1 0 = 0$ (C2-002.E1).
3. En $[1,2]$, $f$ coincide con la constante 1 salvo en el punto 1; por C2-005.T2 y C2-002.E1, $\int_1^2 f = 1$.
4. Así $\int_0^2 f = 1$, pero $f(c)\cdot 2 \in \{0,2\}$ para todo $c$: nunca es 1. ■

**⚠ $g \geq 0$ en la versión ponderada**

$f(x) = x$ en $[-1,1]$ y $g = -1$ en $[-1,0)$, $g = 1$ en $[0,1]$. Por la aditividad, C2-005.T2 y C2-002.E1, $\int_{-1}^1 g = -1 + 1 = 0$. Pero $fg = |x|$ es continua, $\geq 0$ y vale 1 en 1, así que $\int fg > 0$ (C2-006.T3). Ningún $c$ cumple $\int fg = f(c)\cdot 0$.

## Ejercicios

1. Encuentra todos los $c$ del TVM para integrales de $f(x) = x^2$ en $[0,1]$.
2. Demuestra que $\frac{1}{10} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+9x^2} \leq 1$ sin calcular la integral.
3. Sea $f$ continua en $[a,b]$ con $\int_a^b f = 0$. Demuestra que $f$ se anula en algún punto de $[a,b]$.
4. Demuestra que si $f$ y $g$ son continuas en $[a,b]$, $f \leq g$ y $f \neq g$, entonces $\int_a^b f < \int_a^b g$.
5. ¿Por qué el ejemplo C2-006.E1 no contradice C2-006.T1? Escribe las cotas $m(b-a) \leq \int f \leq M(b-a)$ para él.

### Respuestas

1. $\int_0^1 x^2 = 1/3$ (C2-003.E1); $c^2 = 1/3$ con $c \in [0,1]$ da $c = 1/\sqrt[2]{3}$, el único (C1-023.C2).
2. En $[0,1]$, $1/10 \leq 1/(1+9x^2) \leq 1$ (C1-003.T7), y C2-006.T1 (es continua, C2-003.T1).
3. Por C2-006.T2 hay $c$ con $f(c)(b-a) = 0$, y $b - a \neq 0$ (C1-002.T5).
4. $g - f$ es continua, $\geq 0$ y positiva en algún punto: C2-006.T3 y C2-004.T2.

5. $m = 0, M = 1$: $0 \leq 1 \leq 2$. T1 no pide continuidad; lo que falla es alcanzar el promedio.

# C2-007 · La integral como función

## Motivación

> **El odómetro no salta**
> Vas por la autopista sin pasar nunca de 120 km/h, pero frenas y aceleras de golpe varias veces: la aguja del velocímetro salta. ¿Puede el odómetro dar un salto?
> No. En 6 minutos (0.1 h) avanza a lo más $120 \cdot 0.1 = 12$ km; en 36 segundos, a lo más 1.2 km. Cuanto más corto el intervalo, menos avanza.
> Lo que sí puede pasar es que, en el instante del frenón, la lectura del odómetro cambie de ritmo de golpe: su gráfica tiene una «esquina».
> Dónde falla la analogía: que $\int_a^x v$ sea lo que marca el odómetro es una interpretación que justifica el segundo TFC (C2-009). Aquí solo se usa la integral.

## La función integral

**Definición C2-007.D1**

Sean $a < b$ y $f$ integrable en $[a, b]$. $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_a^x f \qquad (F(a) = 0).$$

$F$ está bien definida: $f$ es integrable en cada $[a, x]$ con $a < x \leq b$ (C2-004.C1 a), y $F(a) = 0$ por C2-004.D1.

**Teorema C2-007.T1**

Si además $|f| \leq M$ en $[a, b]$, entonces

$$|F(y) - F(x)| \leq M\,|y - x| \quad \text{para todos } x, y \in [a, b];$$

en particular $F$ es uniformemente continua, y por tanto continua, en $[a, b]$.

**Idea de la demostración**
$F(y) - F(x)$ es la integral de $x$ a $y$, y una integral no puede superar a la altura máxima por el ancho.

*Demostración.*

1. Sean $x, y \in [a, b]$ en cualquier orden. Por C2-004.C1 (b),
$$\int_a^y f = \int_a^x f + \int_x^y f, \quad \text{es decir,} \quad F(y) - F(x) = \int_x^y f.$$
2. Por C2-004.C2 (con $[p, q] = [a, b]$),
$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq M\,|y - x|.$$
3. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta := \varepsilon/(M + 1)$; como $M \geq 0$, $M + 1 > 0$ y $\delta > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
4. Si $|x - y| < \delta$, por el paso 2 (C1-003.T4, C1-003.T9),
$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x| \leq (M + 1)|y - x| < (M + 1)\delta = \varepsilon.$$
5. Así $F$ es uniformemente continua en $[a, b]$ (C1-025.D1), y por C1-025.T2, continua. ■

Todo $f$ integrable es acotada (C2-002.D2), así que siempre existe un tal $M$: **la función integral de una función integrable es siempre continua.**

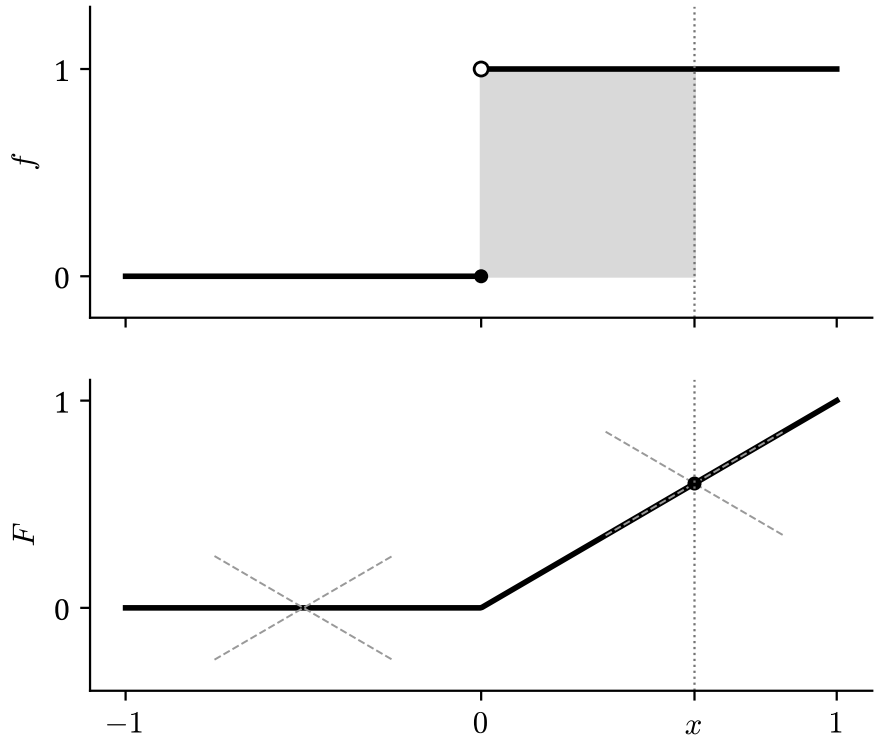



Figura 7: Arriba, el escalón $f$; abajo, $F(x) = \int_{-1}^{x} f$. $F$ es continua (nunca sale del cono de pendientes $\pm M$) pero tiene una esquina en 0.

## Continua no quiere decir derivable

> **Ejemplo C2-007.E1**
> Para $f := 0$ en $[-1, 0]$ y $f := 1$ en $(0, 1]$, $F(x) = \int_{-1}^{x} f$ vale 0 si $x \leq 0$ y $x$ si $x > 0$: $F$ es continua en $[-1, 1]$ y no es derivable en 0.

*Demostración.*

1. $f$ es acotada y continua salvo en 0, así que es integrable en $[-1, 1]$ (C2-005.C1).
2. Si $-1 < x \leq 0$, $f = 0$ en $[-1, x]$ y $F(x) = 0$ (C2-002.E1); $F(-1) = 0$ (C2-004.D1).
3. Si $0 < x \leq 1$, por C2-004.C1 (b), $F(x) = \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{x} f = 0 + \int_{0}^{x} f$. En $[0, x]$, $f$ coincide con la constante 1 salvo en el punto 0, así que $\int_{0}^{x} f = x$ (C2-005.T2, C2-002.E1).
4. $F$ es continua por C2-007.T1 (con $M = 1$).

5. Para $0 < |h| < 1$, el cociente $(F(h) - F(0))/h$ vale $0/h = 0$ si $h < 0$ y $h/h = 1$ si $h > 0$.
6. Así $\lim_{h\to 0^-} = 0$ y $\lim_{h\to 0^+} = 1$ (C1-020.D1); como son distintos, el límite no existe (C1-020.T1) y $F$ no es derivable en 0 (C1-027.D1). ■

## Por qué cada hipótesis

**⚠ No pedir de más**

La conclusión es continuidad, no derivabilidad: el escalón (C2-007.E1) lo muestra. Cuándo $F$ sí es derivable lo dice el primer TFC (C2-008.T1): en los puntos donde $f$ es continua.

**⚠ $f$ acotada (integrable)**

$f(x) = 1/x$ en $(0, 1]$, $f(0) = 0$, no es acotada, y $\int_0^x f$ no existe como integral de Riemann (C2-003.E2). El tema regresa con las integrales impropias (C2-010).

**⚠ El recíproco es falso**

$F$ continua no implica $f$ continua: en el escalón, $F$ es continua y $f$ salta. Integrar «suaviza».

## Ejercicios

1. Para $f = 3$ en $[0, 2]$ y $f = -1$ en $(2, 5]$, calcula $F(x) = \int_0^x f$ para todo $x \in [0, 5]$ y dibújala.
2. Con el ejercicio 1, calcula $F(5) - F(1)$ y compáralo con la cota $M|5 - 1|$.
3. Demuestra que si $f \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $F$ es creciente.
4. Sea $f$ integrable en $[a, b]$. Demuestra que $G(x) := \int_x^b f$ es continua en $[a, b]$.
5. Da una función integrable $f$ en $[0, 2]$ cuya $F$ tenga esquinas en $x = 1/2$ y en $x = 3/2$.

### Respuestas

1. $F(x) = 3x$ en $[0, 2]$ y $F(x) = 6 - (x - 2)$ en $(2, 5]$ (C2-004.C1, C2-005.T2, C2-002.E1).
2. $F(5) - F(1) = 3 - 3 = 0 \leq 12$.
3. Si $x < y$, $F(y) - F(x) = \int_x^y f \geq 0$ (C2-004.C1, C2-004.T3).
4. $G(x) = \int_a^b f - F(x)$ (C2-004.C1 b); diferencia de una constante y una continua.

5. $f = 0$ en $[0, 1/2]$, $f = 1$ en $(1/2, 3/2]$, $f = 0$ en $(3/2, 2]$.

# C2-008 · Primer Teorema Fundamental

## Motivación

> **El ritmo del odómetro**
> El auto acelera con $v(t) = 60t$ km/h y el odómetro, puesto en cero al arrancar, marca $F(t) = \int_0^t v$. A la media hora, el velocímetro marca 30 km/h. ¿A qué ritmo sube el odómetro en ese instante?
> Los cocientes $\big(F(0.5+h) - F(0.5)\big)/h$ valen 33 con $h = 0.1$, 30.3 con $h = 0.01$ y 30.03 con $h = 0.001$ (aquí $F(t) = 30t^2$, como se justifica en C2-009). Se acercan a 30: el ritmo del odómetro es lo que marca el velocímetro.
> Dónde falla la analogía: un velocímetro real promedia sobre un intervalo corto, y ningún auto cambia de velocidad en un instante. En el modelo con saltos (C2-007.E1), el odómetro no tiene ritmo bien definido en el salto.

## El teorema

**Teorema C2-008.T1 (primer TFC)**

Sean $a < b$, $f$ integrable en $[a, b]$, $F(x) := \int_a^x f$ y $c \in (a, b)$. Si $f$ es continua en $c$, entonces $F$ es derivable en $c$ y

$$F'(c) = f(c).$$

> **Idea de la demostración**
> El cociente de $F$ menos $f(c)$ es el promedio de $f(t) - f(c)$ sobre una franja muy delgada junto a $c$, y la continuidad en $c$ hace que ese promedio sea tan chico como se quiera.

*Demostración.*

1. $F$ está definida en $[a, b]$ (C2-007.D1), que contiene al intervalo abierto $(a, b)$ alrededor de $c$, como pide C1-027.D1.
2. Para $h \neq 0$ con $c + h \in [a, b]$, por C2-004.C1 (b),

$$F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f,$$

y por C2-002.E1 (con C2-004.D1 si $h < 0$), $f(c)\, h = \int_c^{c+h} f(c)\, dt$.

3. Restando (C2-004.T2) y dividiendo entre $h$ (K5-K9):

$$\frac{F(c + h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \big(f(t) - f(c)\big)\, dt.$$

4. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f$ es continua en $c$ (C1-022.D1), hay $\delta > 0$ con $|f(t) - f(c)| < \varepsilon/2$ para $t \in [a, b]$, $|t - c| < \delta$ (C1-003.T8). Achicando, $\delta \leq \min(c - a, b - c)$ (C1-005.T13).
5. Sea $0 < |h| < \delta$; entonces $c + h \in (a, b)$. Todo $t$ entre $c$ y $c + h$ cumple $|t - c| \leq |h| < \delta$ (C1-004.T3), así que $|f(t) - f(c)| \leq \varepsilon/2$ en ese intervalo.
6. Por C2-004.C2 aplicado a $f - f(c)$ en el intervalo de extremos $c$ y $c + h$,

$$\left| \int_c^{c+h} \big(f(t) - f(c)\big)\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h|.$$

7. Con el paso 3, dividiendo entre $|h| > 0$ (C1-003.T7, C1-004.T2):

$$\left| \frac{F(c + h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

8. Por la definición de límite (C1-017.D1), $\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$, es decir, $F$ es derivable en $c$ y $F'(c) = f(c)$ (C1-027.D1). ■

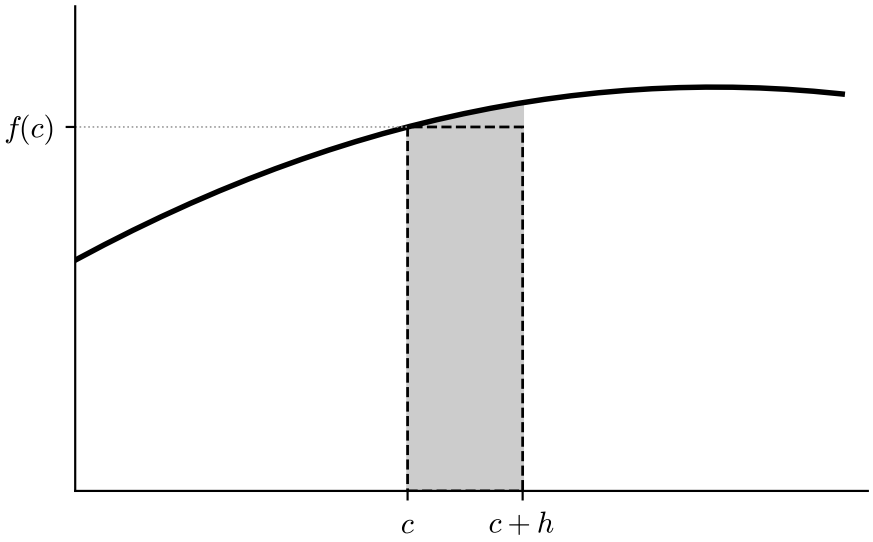



Figura 8: La franja entre $c$ y $c+h$ (área $F(c+h)-F(c)$) y el rectángulo de altura $f(c)$: al achicar $h$, su diferencia dividida entre $h$ tiende a 0.

## Primitivas

**Corolario C2-008.C1**

Sean $a < b$ y $f$ continua en $[a,b]$. $F(x) := \int_a^x f$ es continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ y $F' = f$ en $(a,b)$. $G(x) := \int_x^b f$ es continua en $[a,b]$ y $G' = -f$ en $(a,b)$.

*Demostración.*

1. $f$ es integrable (C2-003.T1) y acotada; $F$ es continua por C2-007.T1.
2. $f$ es continua en cada $c \in (a,b)$, así que $F'(c) = f(c)$ por C2-008.T1.
3. Por C2-004.C1 (b), $G(x) = \int_a^b f - F(x)$: es continua (C1-022.T2) y, como la derivada de una constante es 0, $G' = -F' = -f$ en $(a,b)$ (C1-029.T1). ■

**Corolario C2-008.C2 (primitiva en un intervalo abierto)**

Sean $I$ un intervalo abierto, $f$ continua en $I$ y $c \in I$. Para $x \in I$ sea $F(x) := \int_c^x f$ (C2-004.D1). Entonces $F$ es derivable en $I$ y $F' = f$ en $I$.

*Demostración.*

1. Sea $x_0 \in I$. Como $I$ es abierto, $c$ y $x_0$ son interiores (C1-004.D2), y hay $p, q \in I$ con $p < \min(c, x_0)$ y $q > \max(c, x_0)$.
2. $f$ es continua en $[p, q] \subset I$, así que es integrable ahí (C2-003.T1) y, para $x \in [p, q]$, $F(x)$ está definida (C2-004.C1, C2-004.D1).
3. Sea $F_p(x) := \int_p^x f$. Por C2-004.C1 (b), $F(x) = F_p(x) - F_p(c)$ para $x \in [p, q]$.
4. Por C2-008.C1, $F_p$ es derivable en $(p, q)$ con $F_p' = f$. Como $F$ y $F_p - F_p(c)$ coinciden en el intervalo abierto $(p, q) \ni x_0$, sus cocientes de C1-027.D1 coinciden cerca de $x_0$, y con C1-029.T1, $F'(x_0) = F_p'(x_0) = f(x_0)$. ■

**Definición C2-008.D1 (primitiva)**

Sea $I$ un intervalo abierto. $G$ es una **primitiva** de $f$ en $I$ si $G$ es derivable en $I$ y $G' = f$ en $I$.

**Proposición C2-008.T2**

Toda $f$ continua en un intervalo abierto $I$ tiene primitiva en $I$, y dos primitivas de $f$ en $I$ difieren en una constante.

*Demostración.*

1. Existencia: con $c \in I$, $F(x) = \int_c^x f$ es primitiva (C2-008.C2, C2-008.D1).
2. Si $G_1$ y $G_2$ son primitivas, $G_1 - G_2$ es derivable en $I$ con derivada $f - f = 0$ (C1-029.T1), y es continua (C1-028.T1).
3. Por C1-034.T1, $G_1 - G_2$ es constante en $I$. ■

**Corolario C2-008.C3 (límites variables)**

Sean $I$ y $J$ intervalos abiertos, $f$ continua en $I$ y $u, v : J \to I$ derivables. Entonces $H(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f$ es derivable en $J$ y

$$H'(x) = f(v(x))\, v'(x) - f(u(x))\, u'(x).$$

*Demostración.*

1. Fija $c \in I$ y sea $F(y) = \int_c^y f$ para $y \in I$. Por C2-004.C1 (b), $H(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.
2. $F$ es derivable en $I$ con $F' = f$ (C2-008.C2). Por la regla de la cadena (C1-030.T1), $(F \circ v)'(x) = f(v(x))\, v'(x)$ y $(F \circ u)'(x) = f(u(x))\, u'(x)$.
3. Restando (C1-029.T1) se obtiene la fórmula. ■

## Por qué cada hipótesis

> **Ejemplo C2-008.E1**
> Sin continuidad en $c$ el primer TFC falla: en C2-007.E1, $F$ no es derivable en 0.

**⚠ Discontinua en $c$ sin esquina**

$f = 0$ en $[-1, 1]$ salvo $f(0) = 1$. Por C2-005.T2, $F = 0$, así que $F'(0) = 0 \neq 1 = f(0)$. $F$ puede ser derivable en $c$ y aun así $F'(c) \neq f(c)$ cuando $f$ no es continua en $c$.

**⚠ Punto interior**

En este curso la derivada solo se define en puntos interiores (C1-027.D1). En $c = a$ o $c = b$, el teorema no dice nada; por eso C2-008.C1 afirma $F' = f$ solo en $(a, b)$.

## Ejercicios

1. Calcula $H'(x)$ para $H(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{t}$ con $x > 0$, y $H'(1)$.
2. Calcula la derivada de $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{dt}{1+t^2}$.
3. Sea $f$ continua en $\mathbb{R}$ con $\int_0^x f = x^3 + x$ para todo $x$. Encuentra $f$.
4. Demuestra que si $f$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\int_0^x f = 0$ para todo $x$, entonces $f = 0$.
5. ¿Es $x \mapsto \int_0^x R$ (la función de Riemann, C2-005.D1) derivable en todo punto? ¿Cuánto vale su derivada?

### Respuestas

1. $H'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$ (C2-008.C3); $H'(1) = 2$.
2. $\frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ (C2-008.C3).

3. Derivando (C2-008.C2): $f(x) = 3x^2 + 1$ (C1-028.T2, C1-029.T1).
4. Derivando, $f(x) = 0$ para todo $x$ (C2-008.C2).
5. $\int_0^x R = 0$ para todo $x$ (como en C2-005.T5; ver ejercicio 5 de C2-005), así que la derivada es 0 en todo punto: coincide con $R$ en los irracionales y no en los racionales.

# C2-009 · Segundo Teorema Fundamental

## Motivación

> **El odómetro en las casetas**
> Vuelven las casetas de C1-033: el odómetro marcaba 12,345 km en la caseta de entrada, a las 10:00, y 12,495 km en la de salida, a las 11:15. Tienes la gráfica completa del velocímetro. ¿Cuánto vale el área bajo ella entre las 10:00 y las 11:15?
> La respuesta es $12{,}495 - 12{,}345 = 150$, sin importar la forma de la gráfica.
> La razón: corta el viaje en tramos. En cada tramo, el TVM da un instante en que el velocímetro marcó exactamente la velocidad promedio del tramo. El rectángulo con esa altura tiene área igual a lo recorrido en el tramo, y al sumar los tramos se obtiene lo recorrido en total. Esa suma de Riemann es *exacta*, y queda entre la suma inferior y la superior.
> Dónde falla la analogía: supone un odómetro sin errores y una velocidad que es exactamente la derivada de la posición en cada instante. Lo que aquí se demuestra es la versión matemática: $\int_a^b g' = g(b) - g(a)$.

## El teorema

**Teorema C2-009.T1 (segundo TFC)**

Sean $a < b$, $g$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, y $f$ integrable en $[a, b]$ con $f(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

> **Idea de la demostración**
> Para cualquier partición, el TVM en cada tramo convierte la subida de $g$ en $f(\xi_i)\Delta t_i$; sumando,

> $g(b) - g(a)$ queda entre $L(f, P)$ y $U(f, P)$ para toda $P$, y el único número así es la integral.

*Demostración.*

1. Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$.
2. En cada $[t_{i-1}, t_i]$, $g$ es continua (restricción de una continua, C1-022.D1) y derivable en $(t_{i-1}, t_i) \subset (a, b)$ (C1-027.D1 es una condición en cada punto).
3. Por el TVM (C1-033.T1) existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ con

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\xi_i)\,\Delta t_i = f(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

4. Como $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ (C2-001.D2, C1-006.D1). Multiplicando por $\Delta t_i > 0$ (C1-003.T4, C1-003.T9):

$$m_i\,\Delta t_i \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i\,\Delta t_i.$$

5. Sumando de $i = 1$ a $n$ (C1-005.T12 d) y usando la telescópica (C2-001.T1 a):

$$L(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f, P).$$

6. Esto vale para **toda** partición $P$. Como $f$ es integrable, por la unicidad de C2-002.T4, $\int_a^b f = g(b) - g(a)$. ■

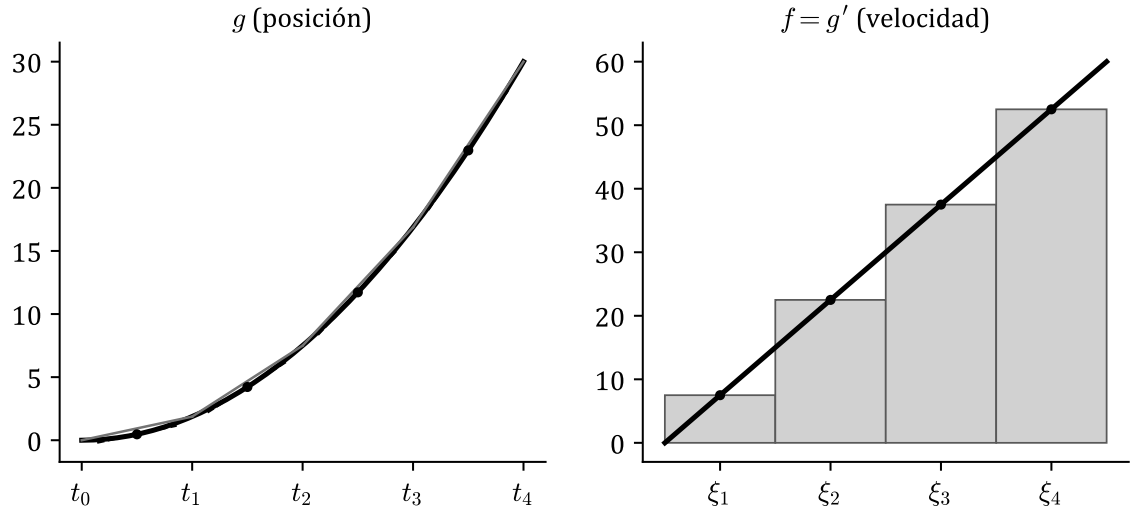



Figura 9: En cada tramo, el TVM da $\xi_i$ con tangente paralela a la cuerda (izquierda); los rectángulos de altura $f(\xi_i)$ tienen área exactamente $g(t_i) - g(t_{i-1})$ (derecha).

Para $g(t) = 30t^2$ en $[0, 1]$ (velocidad $f = 60t$), los $\xi_i$ son los puntos medios de los tramos, y $\sum f(\xi_i)\Delta t_i = 30$ para todo $n$. No hace falta que $f$ sea continua: solo integrable.

## Regla de Barrow y primeras integrales

**Corolario C2-009.C1 (regla de Barrow)**

Sean $a < b$, $f$ continua en $[a, b]$ y $G$ continua en $[a, b]$ con $G' = f$ en $(a, b)$ (por ejemplo, $G$ primitiva de $f$ en un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$). Entonces

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) =: G\Big|_a^b.$$

Si $f$ es continua en un intervalo abierto $I$ y $G$ es primitiva de $f$ en $I$, la fórmula vale para $a, b \in I$ en cualquier orden (C2-004.D1).

*Demostración.*

1. $f$ es integrable en $[a, b]$ (C2-003.T1); C2-009.T1 con $g = G$ da la fórmula.
2. Si $G$ es primitiva en un intervalo abierto $J \supset [a, b]$, $G$ es derivable en $J$ (C2-008.D1) y por tanto continua en $[a, b]$ (C1-028.T1), con $G' = f$ en $(a, b)$.

3. Cualquier orden: si $a = b$, ambos lados valen 0 (C2-004.D1). Si $b < a$, por el caso anterior en $[b, a]$ y C2-004.D1, $\int_a^b f = -\int_b^a f = -(G(a) - G(b)) = G(b) - G(a)$. ■

**Ejemplo C2-009.E1**

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

y de ahí la integral de cualquier polinomio. Para $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$, y $a, b > 0$:

$$\int_a^b x^r \, dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}.$$

*Demostración.*

1. $G(x) = x^{n+1}/(n+1)$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $G'(x) = x^n$ (C1-028.T2, C1-029.T1; para $n = 0$, $x^0 := 1$, C1-005.D2). $x^n$ es continua (C1-022.T2). Por Barrow (C2-009.C1) en el intervalo abierto $\mathbb{R}$, vale la fórmula.
2. Un polinomio $\sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ es combinación lineal de potencias; por la linealidad (C2-004.T2), su integral es $\sum_{k=0}^{m} c_k (b^{k+1} - a^{k+1})/(k+1)$.
3. Para $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$: en $(0, \infty)$, $G(x) = x^{r+1}/(r+1)$ es derivable con $G'(x) = x^{(r+1)-1} = x^r$ (C1-031.C1, C1-023.T2, C1-029.T1). $x^r$ es continua en $(0, \infty)$ porque es derivable (C1-031.C1, C1-028.T1). Barrow en el intervalo abierto $(0, \infty)$ concluye. ■

Por ejemplo, $\int_0^1 x^2 \, dx = 1/3$ (Arquímedes, C2-003.E1, en una línea), $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) \, dx = (x^3 - 2x^2 + x)\big|_0^2 = 2$ y $\int_1^8 x^{1/3} \, dx = \frac{3}{4}(8^{4/3} - 1) = \frac{45}{4}$. También, para el día de C1-025, $\int_6^{20} T = 700/3$, con promedio $50/3$ (C2-006).

## Por qué cada hipótesis

**Ejemplo C2-009.E2 (la integrabilidad de $f$ no sobra)**

$g(x) := \sqrt[2]{x}$ para $x > 0$ y $g(0) := 0$ es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$ con $g'(x) = 1/(2\sqrt[2]{x})$, que no es acotada en $(0, 1)$: ninguna función integrable en $[0, 1]$ coincide con $g'$ en $(0, 1)$, y C2-009.T1 no se aplica (lo resuelve la integral impropia, C2-010.E1).

*Demostración.*

1. $\sqrt[2]{x}$ existe para $x > 0$ (C1-023.C2). En $(0,1)$, $g$ es derivable con $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ (C1-031.C1), y es continua en $(0,1]$ (C1-028.T1 en $(0,1)$; en 1, por la misma fórmula en $(0,2)$).
2. Continuidad en 0: dado $\varepsilon > 0$, si $0 \leq x < \varepsilon^2$ entonces $\sqrt[2]{x} < \varepsilon$, porque para números $\geq 0$, $a < b \iff a^2 < b^2$ (C1-003.T9). Así $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$ si $|x| < \varepsilon^2$ (C1-022.D1).
3. $g'$ no es acotada: dado $K > 0$, sea $x = 1/(4(K+1)^2) \in (0,1)$; entonces $\sqrt[2]{x} = 1/(2(K+1))$ y $g'(x) = K + 1 > K$ (C1-023.C2, C1-003.T7).
4. Si $f$ fuera integrable en $[0,1]$ con $f = g'$ en $(0,1)$, $f$ sería acotada (C2-002.D2), y $g'$ también: contradicción. ■

**⚠ $g$ continua en los extremos**

$g = 0$ en $[0,1)$, $g(1) = 1$: $g' = 0$ en $(0,1)$, y $f = 0$ es integrable, pero $\int_0^1 0 = 0 \neq 1 = g(1) - g(0)$. Sin continuidad en $[a,b]$ el TVM del paso 3 falla en el último tramo.

**⚠ Derivable en todo $(a,b)$**

Si $g$ deja de ser derivable en un número finito de puntos, el teorema sigue valiendo: se parte $[a,b]$ en esos puntos y se usa la aditividad (ejercicio 5). El contraejemplo famoso (la escalera de Cantor, continua, con derivada 0 salvo en un conjunto muy pequeño, y que sube de 0 a 1) necesita una infinidad no numerable de puntos malos y no se construye en este curso.

## Ejercicios

1. Calcula $\int_{-1}^{2}(x^3 - x)\,dx$ y $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[2]{x}}$.
2. Demuestra con C2-009.T1 que si $g$ es continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ con $g' = 0$, entonces $g(b) = g(a)$. ¿Qué resultado de Cálculo I dice lo mismo?
3. Sea $g(x) = |x|\,x$. Calcula $g'$ y $\int_{-1}^{1} g'$.
4. Usa C2-009.T1 para mostrar que $\sum f(\xi_i)\Delta t_i = 30$ para $f = 60t$ en $[0,1]$ cuando $\xi_i$ es el punto medio de cada tramo de $P_n$.
5. Demuestra: si $g$ es continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ salvo en $s_1 < \cdots < s_k$, y $f$ es integrable en $[a,b]$ con $f = g'$ donde $g'$ existe, entonces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

## Respuestas

1. $(x^4/4 - x^2/2)\big|_{-1}^{2} = (4-2) - (1/4 - 1/2) = 9/4$; $\int_1^4 x^{-1/2} = 2x^{1/2}\big|_1^4 = 2$ (C2-009.E1).
2. $\int_a^b 0 = 0 = g(b) - g(a)$ (C2-002.E1). Es C1-034.T1 (en esa forma, consecuencia del TVM).
3. $g(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y $-x^2$ para $x < 0$; $g' = 2|x|$, continua; $\int_{-1}^{1} 2|x| = g(1) - g(-1) = 2$.
4. $g(t) = 30t^2$ cumple $g(t_i) - g(t_{i-1}) = 60\,\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\,\Delta t_i$; la telescópica da $g(1) - g(0) = 30$.
5. Con $s_0 = a$, $s_{k+1} = b$, C2-009.T1 en cada $[s_{j-1}, s_j]$ y la aditividad (C2-004.C1).

# C2-010 · Integrales impropias

## Motivación

> **Dos autos que frenan sin detenerse**
> Dos autos salen a la hora $t = 1$ y van frenando sin detenerse nunca: el primero va a $60/t^2$ km/h y el segundo a $60/t$ km/h. Los dos tienden a velocidad 0. ¿Alguno llega a cualquier distancia, si esperas lo suficiente?
>
> - El primero recorre $\int_1^b 60\, t^{-2}\, dt = 60(1 - 1/b)$ km hasta la hora $b$: 54 km a la hora 10, 59.4 a la hora 100, y nunca llega a 60.
> - El segundo, en cada tramo $[2^{k-1}, 2^k]$ va al menos a $60/2^k$, así que recorre al menos $(60/2^k) \cdot 2^{k-1} = 30$ km. A la hora $1024 = 2^{10}$ lleva al menos 300 km, y sigue sin tope.
>
> Dónde falla la analogía: ningún viaje dura infinitas horas. La integral «hasta infinito» es un límite; la analogía solo muestra que frenar hacia 0 puede ser lo bastante rápido ($1/t^2$) o no ($1/t$).

El segundo TFC tampoco pudo con $\sqrt[2]{x}$ en $[0, 1]$ (C2-009.E2): su derivada no es acotada. Las dos situaciones se resuelven igual: se integra en un intervalo donde todo está bien y se toma un límite.

## Límites de funciones monótonas

**Proposición C2-010.T1 (límites de funciones monótonas)**

Sean $a < b$ ($b \in \mathbb{R}$, o $b = \infty$ con $(a, \infty)$ en lugar de $(a, b)$) y $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ creciente. Si $F$ está acotada superiormente, $\lim_{x \to b^-} F(x) = \sup F((a, b))$ ($\lim_{x \to \infty}$ si $b = \infty$); si no lo está, ese límite es $\infty$. Si $F$ está acotada inferiormente, $\lim_{x \to a^+} F(x) = \inf F((a, b))$. Análogos para $F$ decreciente.

*Demostración.*

1. Sea $F$ acotada superiormente y $s := \sup F((a,b))$ (S). Dado $\varepsilon > 0$, por C1-006.T2 hay $x_1 \in (a,b)$ con $F(x_1) > s - \varepsilon$.
2. Para $x \in (x_1, b)$, como $F$ es creciente (C1-010.D2), $s - \varepsilon < F(x_1) \le F(x) \le s$, y así $|F(x) - s| < \varepsilon$ (C1-004.T3).
3. Si $b \in \mathbb{R}$, con $\delta = b - x_1$ esto es la definición de $\lim_{x \to b^-} F = s$; si $b = \infty$, con $M = x_1$ es la de $\lim_{x \to \infty} F = s$ (C1-020.D1).
4. Si $F$ no está acotada superiormente, para cada $K$ hay $x_1$ con $F(x_1) > K$, y para $x > x_1$, $F(x) \ge F(x_1) > K$: el límite es $\infty$ (C1-020.D1).
5. En $a^+$: si $F$ está acotada inferiormente, $i := \inf F((a,b))$ existe (C1-006.T3); dado $\varepsilon$, hay $x_1$ con $F(x_1) < i + \varepsilon$ (C1-006.T3 con C1-006.T2), y para $a < x < x_1$, $i \le F(x) \le F(x_1)$. Con $\delta = x_1 - a$ se obtiene el límite (C1-020.D1).
6. Para $F$ decreciente se aplica lo anterior a $-F$ (C1-006.T3). ■

## Definición

**Definición C2-010.D1 (integrales impropias)**

(a) Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ para todo $b > a$,

$$\int_a^{\infty} f := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f$$

cuando el límite existe en $\mathbb{R}$ (la integral **converge**); si no, **diverge**. Análogo $\int_{-\infty}^b f$ con $\lim_{a \to -\infty}$.

(b) Si $a < b$ y $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[c,b]$ para todo $c \in (a,b)$, $\int_a^b f := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f$ si existe; análogo en el extremo $b$ para $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, con $c \to b^-$.

(c) Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) es integrable en cada $[c,d] \subset (a,b)$, se fija $c \in (a,b)$ y $\int_a^b f$ converge si convergen $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ (en el sentido de (a) o (b)), y entonces $\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$; por ejemplo, $\int_{-\infty}^{\infty} f := \int_{-\infty}^c f + \int_c^{\infty} f$. Las singularidades interiores (un punto de $(a,b)$ donde $f$ no es acotada) no se tratan en este curso.

**Proposición C2-010.T2 (coherencia y linealidad)**

(a) Si $f$ es integrable en $[a,b]$, la integral impropia de C2-010.D1 (b) converge y vale $\int_a^b f$ (análogo en $b$).

(b) En C2-010.D1 (c) la convergencia y el valor no dependen de $c$.

(c) Si $\int f$ y $\int g$ convergen (del mismo tipo, en el mismo intervalo) y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int(\alpha f + \beta g)$ converge y vale $\alpha \int f + \beta \int g$.

(d) (colas) Si $a < x_0$ y $f$ es integrable en cada $[a,b]$ con $b > a$, $\int_a^\infty f$ converge $\iff$ $\int_{x_0}^\infty f$ converge, y entonces $\int_a^\infty f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^\infty f$; análogo en las singularidades de C2-010.D1 (b).

*Demostración.*

1. (a) Sea $F(x) = \int_a^x f$, continua en $[a,b]$ (C2-007.T1). Para $c \in (a,b)$, $\int_c^b f = F(b) - F(c)$ (C2-004.C1). Como $F$ es continua en $a$, $\lim_{c\to a^+} F(c) = F(a) = 0$ (C1-022.T0 b), y por el álgebra de límites (C1-018.T1 con C1-020.T2, C1-017.E1), $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f = F(b) = \int_a^b f$. En el extremo $b$: $\lim_{c\to b^-} F(c) = F(b)$, por la misma razón.
2. (d) Para $b > x_0$, $\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$ (C2-004.C1). El primer sumando no depende de $b$. Si $\int_{x_0}^b f$ tiene límite $J$ cuando $b \to \infty$, el lado izquierdo tiene límite $\int_a^{x_0} f + J$; y si el izquierdo tiene límite, $\int_{x_0}^b f = \int_a^b f - \int_a^{x_0} f$ también (C1-018.T1, C1-020.T2, C1-017.E1). En una singularidad en $a$ es igual con $c \to a^+$ y un punto fijo $x_0 \in (a,b)$.
3. (b) Sean $c < c'$ en $(a,b)$. Por (d) en el extremo $b$ (de tipo (a) o (b)), $\int_c^b f$ converge $\iff$ $\int_{c'}^b f$ converge, y $\int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f$; por (d) en el extremo $a$, $\int_a^{c'} f = \int_a^c f + \int_c^{c'} f$, con las mismas convergencias.
4. Sumando, $\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
5. (c) Para cada $b$ finito, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ (C2-004.T2); se toma el límite (C1-018.T1, C1-020.T2). Para el tipo (c), se aplica a cada mitad. ■

## Integrandos no negativos y comparación

**Proposición C2-010.T3 (integrando no negativo)**

Si $f \geq 0$ en $[a, \infty)$ y es integrable en cada $[a, b]$, $\int_a^\infty f$ converge $\iff \{\int_a^b f : b > a\}$ está acotado; si no, $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f = \infty$. Análogo en las singularidades de C2-010.D1 (b).

*Demostración.*

1. Sea $F(b) = \int_a^b f$ para $b > a$. Si $a < b < b'$, $F(b') - F(b) = \int_b^{b'} f \geq 0$ (C2-004.C1, C2-004.T3): $F$ es creciente.
2. Por C2-010.T1, si $F$ está acotada (superiormente; inferiormente lo está por $F \geq 0$), $\lim_{b\to\infty} F(b)$ existe y vale $\sup F$; si no, el límite es $\infty$ y la integral diverge (C1-020.D1).
3. Si la integral converge, el límite es $\sup F$ y por tanto $F$ está acotada. En una singularidad en $a$, $c \mapsto \int_c^b f$ es decreciente y se usa la parte de $a^+$ de C2-010.T1. ■

**Proposición C2-010.T4 (comparación)**

Sean $0 \leq f \leq g$ en $[a, \infty)$, integrables en cada $[a, b]$. Si $\int_a^\infty g$ converge, $\int_a^\infty f$ converge y $\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$; si $\int_a^\infty f$ diverge, $\int_a^\infty g$ diverge. Análogo en singularidades.

*Demostración.*

1. Sean $F(b) = \int_a^b f$ y $G(b) = \int_a^b g$. Por C2-004.T3, $F(b) \leq G(b)$.
2. Si $\int_a^\infty g$ converge, $G$ es creciente con límite $\sup G = \int_a^\infty g$ (C2-010.T3, C2-010.T1), así que $F(b) \leq G(b) \leq \int_a^\infty g$: $F$ está acotada y $\int_a^\infty f$ converge (C2-010.T3).
3. Pasando al límite en $F(b) \leq G(b)$ (C1-019.T3 con C1-020.T2), $\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$.
4. La segunda afirmación es la contrarrecíproca de la primera. ■

**Proposición C2-010.T5 (comparación al límite)**

Sean $f, g > 0$ en $[a, \infty)$, integrables en cada $[a, b]$, con $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = L$ y $0 < L < \infty$. Entonces $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ convergen ambas o divergen ambas. Análogo en singularidades.

*Demostración.*

1. Con $\varepsilon = L/2 > 0$ (C1-003.T8) en C1-020.D1, hay $M$ tal que $x > M$ implica $|f(x)/g(x) - L| < L/2$, es decir, $L/2 < f(x)/g(x) < 3L/2$ (C1-004.T3).
2. Sea $x_0 > \max(a, M)$. Multiplicando por $g(x) > 0$ (C1-003.T4), en $[x_0, \infty)$:

$$\frac{L}{2}\, g \le f \le \frac{3L}{2}\, g.$$

3. Si $\int_a^\infty g$ converge, $\int_{x_0}^\infty g$ converge (colas, C2-010.T2 d), y $\int_{x_0}^\infty \frac{3L}{2} g$ también (C2-010.T2 c); por C2-010.T4, $\int_{x_0}^\infty f$ converge, y por las colas, $\int_a^\infty f$.
4. Si $\int_a^\infty f$ converge, igual con $g \le \frac{2}{L} f$ en $[x_0, \infty)$ (C1-003.T7). ■

**Proposición C2-010.T6 (convergencia absoluta)**

Si $f$ es integrable en cada $[a, b]$ y $\int_a^\infty |f|$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge y $|\int_a^\infty f| \le \int_a^\infty |f|$. Análogo en singularidades.

*Demostración.*

1. $|f|$ y $f + |f|$ son integrables en cada $[a, b]$ (C2-004.T4, C2-004.T2), y $0 \le f + |f| \le 2|f|$ (C1-004.T1).
2. $\int_a^\infty 2|f|$ converge (C2-010.T2 c); por comparación (C2-010.T4), $\int_a^\infty (f + |f|)$ converge.
3. $f = (f + |f|) - |f|$, así que $\int_a^\infty f$ converge (C2-010.T2 c).
4. Para cada $b$, $-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$ (C2-004.T4 y C1-004.T3). Pasando al límite (C1-019.T3 con C1-020.T2): $-\int_a^\infty |f| \le \int_a^\infty f \le \int_a^\infty |f|$, y por C1-004.T3 se obtiene la cota. ■

## Potencias racionales

Antes de integrar $x^{-p}$ hace falta saber cómo se comportan las potencias racionales cerca de 0 y de $\infty$. C1-023.T2 da sus leyes de exponentes, pero no su monotonía ni sus límites.

**Proposición C2-010.T0 (potencias racionales positivas)**

Para $s \in \mathbb{Q}$ con $s > 0$: $x \mapsto x^s$ es estrictamente creciente en $(0, \infty)$; $\lim_{x\to\infty} x^s = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^{-s} = 0$; $\lim_{x\to 0^+} x^s = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} x^{-s} = \infty$.

**Idea de la demostración**
Con $s = m/q$, $x^s = (\sqrt[q]{x})^m$: es la composición de dos funciones crecientes. Para que $x^s$ pase de $K$ basta que $\sqrt[q]{x}$ pase de $K$, es decir, que $x$ pase de $K^q$.

*Demostración.*

Sea $s = m/q$ con $m, q \in \mathbb{N}$, de modo que $x^s = (\sqrt[q]{x})^m$ para $x > 0$ (C1-023.D1, C1-023.T2).

*Paso 1: monotonía.*

1. Si $0 < x < y$, entonces $\sqrt[q]{x} < \sqrt[q]{y}$: si fuera $\sqrt[q]{y} \leq \sqrt[q]{x}$, por C1-005.T9 (con igualdad si son iguales) sería $y = (\sqrt[q]{y})^q \leq (\sqrt[q]{x})^q = x$ (C1-023.C2), contra $x < y$.
2. Elevando a la $m$ (C1-005.T9), $x^s = (\sqrt[q]{x})^m < (\sqrt[q]{y})^m = y^s$.
3. Para $c > 0$, $\sqrt[q]{c^q} = c$, por la unicidad de C1-023.C2; en particular $\sqrt[q]{1} = 1$.

*Paso 2: dos cotas para $u^m$.*

1. Si $u \geq 1$, entonces $u^{m-1} \geq 1^{m-1} = 1$ (C1-005.T9; si $m = 1$, $u^0 = 1$), y $u^m = u \cdot u^{m-1} \geq u$ (C1-003.T9).
2. Si $0 < u \leq 1$, del mismo modo $0 < u^{m-1} \leq 1$ y $u^m \leq u$ (C1-005.T9, C1-003.T9).

*Paso 3: en $\infty$.*

1. Sea $K > 0$ y $x > \max(1, K^q)$ (C1-005.T13). Por el paso 1, $\sqrt[q]{x} > \sqrt[q]{1} = 1$ y $\sqrt[q]{x} > \sqrt[q]{K^q} = K$.
2. Por el paso 2, $x^s = (\sqrt[q]{x})^m \geq \sqrt[q]{x} > K$. Así $\lim_{x\to\infty} x^s = \infty$ (C1-020.D1).
3. $x^{-s} = 1/x^s$, porque $x^s x^{-s} = x^0 = 1$ (C1-023.T2). Dado $\varepsilon > 0$, por el punto 2 hay $M$ con $x^s > 1/\varepsilon$ si $x > M$; entonces $0 < x^{-s} < \varepsilon$ (C1-003.T7). Así $\lim_{x\to\infty} x^{-s} = 0$ (C1-020.D1).

*Paso 4: en $0^+$.*

1. Sea $\varepsilon > 0$ y $0 < x < \min(1, \varepsilon^q)$ (C1-005.T13). Por el paso 1, $\sqrt[q]{x} < 1$ y $\sqrt[q]{x} < \sqrt[q]{\varepsilon^q} = \varepsilon$.
2. Por el paso 2, $0 < x^s = (\sqrt[q]{x})^m \leq \sqrt[q]{x} < \varepsilon$ (C1-023.T2 para $x^s > 0$). Así $\lim_{x\to 0^+} x^s = 0$ (C1-020.D1).

3. Dado $K > 0$, por el punto 2 con $\varepsilon = 1/K$ hay $\delta > 0$ con $0 < x^s < 1/K$ si $0 < x < \delta$; entonces $x^{-s} = 1/x^s > K$ (C1-003.T7). Así $\lim_{x\to 0^+} x^{-s} = \infty$ (C1-020.D1). ■

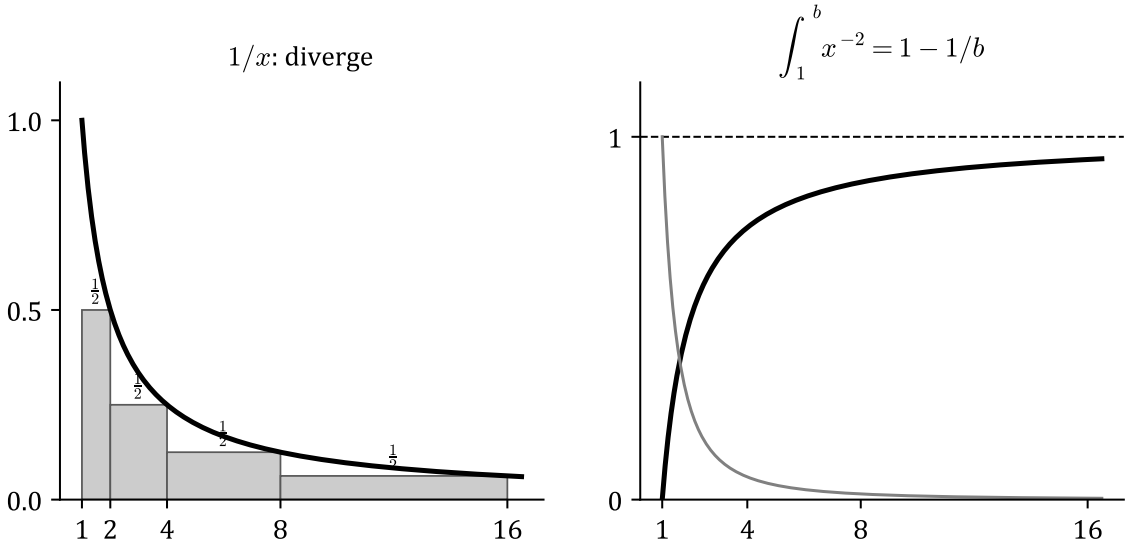



Figura 10: Bajo $1/x$, cada tramo diádico $[2^{k-1}, 2^k]$ contiene un rectángulo de área $1/2$ (izquierda): la integral en $[1, \infty)$ diverge. Bajo $1/x^2$, el área acumulada $1 - 1/b$ tiene techo 1 (derecha).

**Ejemplo C2-010.E1 (potencias racionales)**
Para $p \in \mathbb{Q}$: $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ converge $\iff p > 1$, y entonces vale $1/(p-1)$; $\int_0^1 x^{-p}\,dx$ converge $\iff p < 1$, y entonces vale $1/(1-p)$. En particular $\int_0^1 dx/\sqrt[2]{x} = 2$. Para $p = 1$ se usa, sin logaritmo, que $\int dx/x \geq 1/2$ en cada $[2^{k-1}, 2^k]$ y en cada $[2^{-k}, 2^{1-k}]$.

**Idea de la demostración**
Para $p \neq 1$, Barrow da la integral hasta $b$ y basta ver si $b^{1-p}$ tiende a 0 o a $\infty$ (C2-010.T0). Para $p = 1$, en vez de logaritmo, cada tramo diádico aporta al menos $1/2$.

*Demostración.*

1. ($[1, \infty)$, $p \neq 1$.) $x^{-p}$ es derivable, luego continua, en $(0, \infty)$ (C1-031.C1, C1-028.T1), e integrable

en cada $[1, b]$ (C2-003.T1). Por C2-009.E1 con $r = -p \neq -1$:

$$\int_1^b x^{-p}\,dx = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}.$$

2. Si $p > 1$, $b^{1-p} = b^{-(p-1)} \to 0$ (C2-010.T0 con $s = p - 1$), y la integral tiende a $\frac{0-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$ (C1-018.T1, C1-020.T2): converge.
3. Si $p < 1$, $b^{1-p} \to \infty$ (C2-010.T0 con $s = 1 - p$) y, como $1 - p > 0$, la integral tiende a $\infty$ (C1-020.D1): diverge.
4. ($[1, \infty)$, $p = 1$.) En $[2^{k-1}, 2^k]$, $1/x \geq 1/2^k$ (C1-003.T7), así que por C2-006.T1,

$$\int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{2^k}\,(2^k - 2^{k-1}) = \frac{1}{2}$$

(C1-005.T9).

5. Por la aditividad (C2-004.C1) e inducción sobre $N$ (C1-005.T1), $\int_1^{2^N} dx/x \geq N/2$. Dado $K$, hay $N > 2K$ (C1-007.C1): el conjunto $\{\int_1^b dx/x : b > 1\}$ no está acotado y, por C2-010.T3, la integral diverge.
6. ($[0, 1]$.) Para $p \neq 1$ y $c \in (0, 1)$, por C2-009.E1, $\int_c^1 x^{-p}\,dx = \frac{1-c^{1-p}}{1-p}$. Si $p < 1$, $c^{1-p} \to 0$ cuando $c \to 0^+$ (C2-010.T0) y la integral tiende a $1/(1-p)$ (C1-018.T1, C1-020.T2). Si $p > 1$, $c^{1-p} = c^{-(p-1)} \to \infty$ (C2-010.T0) y diverge (C1-020.D1).
7. Para $p = 1$, en $[2^{-k}, 2^{1-k}]$, $1/x \geq 2^{k-1}$, así que $\int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} dx/x \geq 2^{k-1} \cdot 2^{-k} = 1/2$; como en el paso 5, $\int_{2^{-N}}^1 dx/x \geq N/2$ y diverge (C2-010.T3 en la singularidad).
8. Con $p = 1/2$: $\int_0^1 dx/\sqrt[2]{x} = 1/(1 - 1/2) = 2$. ■

Para $p \leq 0$, $x^{-p}$ no tiene singularidad en 0; por la coherencia (C2-010.T2 a), la integral impropia coincide con la de Riemann en $[0, 1]$ (definiendo el valor en 0 por continuidad).

> **Ejemplo C2-010.E2**
> $\int_0^\infty dx/(1+x^2)$ converge (en $[1, \infty)$, $1/(1+x^2) \leq 1/x^2$, y se agrega $[0, 1]$ con las colas, C2-010.T2 d); su valor $\pi/2$ se obtiene en C2-014.T12.

*Demostración.*

1. $1/(1 + x^2)$ es continua en $\mathbb{R}$ (C1-022.T2), luego integrable en cada $[0, b]$ (C2-003.T1).
2. En $[1, \infty)$, $0 < x^2 < 1 + x^2$, así que $0 < 1/(1 + x^2) < 1/x^2$ (C1-003.T7).
3. $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ converge (C2-010.E1, $p = 2$); por comparación (C2-010.T4), $\int_1^\infty dx/(1+x^2)$ converge,

y por las colas (C2-010.T2 d), $\int_0^\infty dx/(1+x^2)$ también (C2-010.D1 a). ■

## Por qué cada hipótesis

**⚠ $f \geq 0$ en C2-010.T3**

$f = 1$ en $[2k, 2k+1)$ y $f = -1$ en $[2k+1, 2k+2)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Las integrales $\int_0^b f$ están entre 0 y 1 (acotadas), pero oscilan: valen 1 en cada $b$ impar y 0 en cada $b$ par. No tienen límite y la integral diverge.

**⚠ $f \to 0$ no basta**

$1/x \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\int_1^\infty dx/x$ diverge (C2-010.E1). Que el integrando tienda a 0 es necesario para muchas cosas, pero no suficiente para converger.

**⚠ No acotada no quiere decir divergente**

$1/\sqrt[2]{x}$ no es acotada en $(0, 1]$, y $\int_0^1 dx/\sqrt[2]{x} = 2$. Las integrales impropias existen justo para estos casos.

**⚠ Signo en la comparación**

$f = -x \leq 0 = g$ en $[1, \infty)$: $\int g$ converge y $\int f$ diverge. C2-010.T4 exige $0 \leq f$.

## Ejercicios

1. ¿Converge $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$? ¿Y $\int_1^\infty \frac{dx}{2x+1}$?
2. Calcula $\int_0^1 x^{-2/3}\,dx$ y $\int_8^\infty x^{-4/3}\,dx$.
3. Decide si converge $\int_1^\infty \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx$ usando comparación al límite con $2/x^2$.
4. Demuestra que $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ converge.
5. Da $f$ continua en $[0, \infty)$ con $\int_0^\infty f$ convergente y $f$ no acotada. (Sugerencia: picos triangulares de altura $k$ y base $1/k^3$ centrados en cada entero $k \geq 1$; no se enciman.)

## Respuestas

1. La primera converge: $0 < 1/(x + x^2) \leq 1/x^2$ (C2-010.T4, C2-010.E1). La segunda diverge: el cociente con $1/x$ tiende a $1/2$ (C2-010.T5).
2. $\int_0^1 x^{-2/3} = 1/(1-2/3) = 3$. $\int_8^\infty x^{-4/3} = \lim_b(3\cdot 8^{-1/3} - 3b^{-1/3}) = 3/2$ (C2-009.E1 y C2-010.T0).
3. El cociente $\frac{(2x+1)/(x^3+x)}{2/x^2} = \frac{2x^3+x^2}{2x^3+2x} \to 1$ (C1-020.T3), y $\int_1^\infty 2/x^2$ converge: converge.
4. En $(-\infty, -1]$, $0 < 1/(1+x^2) < 1/x^2$, y $-1/x$ es primitiva de $x^{-2}$ en $(-\infty, 0)$, así que $\int_a^{-1} x^{-2}\,dx = 1+1/a \to 1$ cuando $a \to -\infty$ (C2-009.C1). Por comparación y colas, $\int_{-\infty}^0$ converge; con C2-010.E2 y C2-010.D1 (c) con $c = 0$, converge en $\mathbb{R}$.
5. El pico $k$ tiene área $\frac{1}{2}\cdot k \cdot 1/k^3 = 1/(2k^2) \leq 1/k^2$. Como $1/k^2 \leq 1/(k(k-1)) = 1/(k-1) - 1/k$ para $k \geq 2$, por la telescópica (C2-001.T1) $\sum_{k=1}^n 1/k^2 \leq 2 - 1/n < 2$: las integrales hasta $b$ están acotadas por 2, y $f \geq 0$, así que converge (C2-010.T3), aunque $f(k) = k$.

# C2-011 · El logaritmo como integral

## Motivación

**La regla de cálculo**

Antes de las calculadoras, los ingenieros multiplicaban con una regla de cálculo: dos reglas graduadas de modo que, al poner una longitud a continuación de otra, se lee el producto. Para que eso funcione hace falta una «longitud» $L(x)$ con

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$

Bajo la curva $y = 1/t$, la franja de 1 a 2 y la franja de 2 a 4 tienen la misma área: la segunda es el doble de ancha, pero la curva va a la mitad de altura. Lo mismo pasa con la franja de 3 a 6. El área bajo $1/t$ desde 1 es justo la «longitud» que la regla necesita.

Dónde falla la analogía: una regla de cálculo es finita y se lee con unas tres cifras. El logaritmo está definido para todo $x > 0$, toma todos los valores reales y su exactitud no depende de la vista.

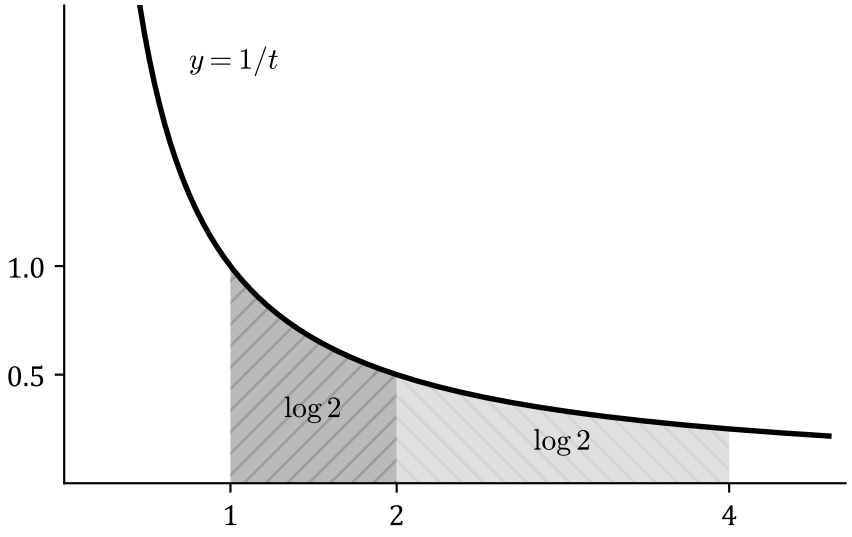



Figura 11: Las franjas $[1, 2]$ y $[2, 4]$ bajo $y = 1/t$ tienen la misma área, $\log 2$.

En Cálculo I no teníamos ninguna primitiva de $1/t$: la fórmula $x^{r+1}/(r+1)$ de C2-009.E1 falla justo en $r = -1$. El primer teorema fundamental (C2-008.C2) nos da una gratis.

## Definiciones

**Definición C2-011.D1 (logaritmo)**

Para $x > 0$:

$$\log x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

(con C2-004.D1 si $x < 1$; $\log 1 = 0$).

La definición tiene sentido: $t \mapsto 1/t$ es continua en $(0, \infty)$ (C1-022.T2), así que es integrable en todo intervalo cerrado contenido en $(0, \infty)$ (C2-003.T1). Si $x > 1$ se integra en $[1, x]$; si $0 < x < 1$, $\int_1^x = -\int_x^1$ (C2-004.D1); y $\int_1^1 = 0$ (C2-004.D1).

## Resultados

**Teorema C2-011.T1**

log es derivable en $(0, \infty)$ con $\log' x = 1/x$; es continua y estrictamente creciente; $\log x < 0$ si $0 < x < 1$ y $\log x > 0$ si $x > 1$.

*Demostración.*

1. $I = (0, \infty)$ es un intervalo abierto, $f(t) = 1/t$ es continua en $I$ (C1-022.T2) y $1 \in I$.
2. Por C2-008.C2, $F(x) = \int_1^x f$ es derivable en $I$ con $F' = f$; es decir, $\log' x = 1/x$.
3. Derivable implica continua (C1-028.T1): log es continua en $(0, \infty)$.
4. Para $x > 0$, $1/x > 0$ (C1-003.T7), así que $\log' > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$, y log es estrictamente creciente (C1-034.T2).
5. Como $\log 1 = 0$: si $0 < x < 1$, $\log x < \log 1 = 0$; si $x > 1$, $\log x > 0$. ■

**Teorema C2-011.T2 (log del producto)**

Para $x, y > 0$: $\log(xy) = \log x + \log y$.

**Idea de la demostración**

Fijado $y$, las funciones $x \mapsto \log(xy)$ y $x \mapsto \log x$ tienen la misma derivada en un intervalo; por lo tanto difieren en una constante, que se lee en $x = 1$. No hace falta el cambio de variable (C2-015).

*Demostración.*

1. Fijemos $y > 0$ y sea $h(x) := \log(xy)$ para $x > 0$; está definida porque $xy > 0$ (C1-003.T4).
2. $x \mapsto xy$ es derivable con derivada $y$ (C1-028.T2), y log es derivable en $xy$ (C2-011.T1).
3. Por la regla de la cadena (C1-030.T1),

$$h'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y = x^{-1}y^{-1}y = \frac{1}{x}$$

   (C1-002.T6: $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$; K5-K7).
4. Así $h' = \log'$ en el intervalo $(0, \infty)$, y por C1-034.T1, $h - \log$ es constante en $(0, \infty)$.
5. Esa constante es $h(1) - \log 1 = \log y - 0 = \log y$ (C2-011.D1).
6. Por lo tanto $\log(xy) - \log x = \log y$, es decir, $\log(xy) = \log x + \log y$ (K1-K4). ■

**Corolario C2-011.C1**

Para $x, y > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{Q}$: $\log(1/x) = -\log x$; $\log(x/y) = \log x - \log y$; $\log(x^n) = n \log x$; $\log(x^r) = r \log x$.

*Demostración.*

1. Por C2-011.T2 con $y = 1/x$: $\log x + \log(1/x) = \log(x \cdot x^{-1}) = \log 1 = 0$ (K8, C2-011.D1), luego $\log(1/x) = -\log x$ (C1-002.T1).
2. $\log(x/y) = \log(x \cdot y^{-1}) = \log x + \log(1/y) = \log x - \log y$ (C1-002.D1, C2-011.T2, paso 1).
3. Para $n \in \mathbb{N}$, por inducción (C1-005.T1): $\log(x^1) = 1 \cdot \log x$; si $\log(x^n) = n \log x$, entonces $\log(x^{n+1}) = \log(x^n x) = \log(x^n) + \log x = (n+1) \log x$ (C1-005.D2, C2-011.T2).
4. Para $n = 0$: $x^0 = 1$ y $\log 1 = 0 = 0 \cdot \log x$.

5. Para $n = -m$ con $m \in \mathbb{N}$: $x^{-m} = 1/x^m$ (C1-005.T9), así que $\log(x^{-m}) = -\log(x^m) = -m \log x$ (paso 1, paso 3).
6. Sea $r = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, y $u := x^{p/q}$. Por C1-023.D1 y C1-023.T2, $u > 0$ y $u^q = x^p$.
7. Por los pasos 3-5, $q \log u = \log(u^q) = \log(x^p) = p \log x$; dividiendo entre $q$, $\log(x^r) = r \log x$ (C1-002.T1). ■

**Teorema C2-011.T3**

$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ y $\log((0,\infty)) = \mathbb{R}$.

*Demostración.*

1. Por C2-011.T1, $\log 2 > 0$.
2. Sea $K \in \mathbb{R}$. Por C1-007.C1 existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > |K|/\log 2$, es decir, $n \log 2 > |K| \geq K$ (C1-003.T4, C1-003.T7, C1-004.T1).
3. Por C2-011.C1, $\log(2^n) = n \log 2$ y $\log(2^{-n}) = -n \log 2$.
4. Si $x > 2^n$, por la monotonía (C2-011.T1), $\log x > n \log 2 > K$. Por C1-020.D1 (con $M = 2^n$), $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.
5. Si $0 < x < 2^{-n}$, $\log x < -n \log 2 < -|K| \leq K$. Por C1-020.D1 (con $\delta = 2^{-n}$), $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.
6. log es continua en el intervalo $(0,\infty)$, así que $\log((0,\infty))$ es un intervalo (C1-026.T1, C1-004.D2).
7. Dado $y \in \mathbb{R}$, por los pasos 4 y 5 hay $x_1, x_2 > 0$ con $\log x_1 < y < \log x_2$; como la imagen es un intervalo, contiene a $y$. Por lo tanto $\log((0,\infty)) = \mathbb{R}$. ■

⚠ **Por qué no se usa** $\log(1/x) = -\log x$ **para el límite en** $0^+$

Sería natural escribir $\log x = -\log(1/x)$ y usar que $1/x \to \infty$. Pero ninguna pieza anterior dice «$g \to 0^+ \Rightarrow 1/g \to \infty$» para componer límites así. La prueba de arriba va directo con la definición C1-020.D1.

**Teorema C2-011.T4**

Para $x > 0$: $1 - 1/x \leq \log x \leq x - 1$.

*Demostración.*

1. Si $x = 1$, los tres términos valen 0.

2. Si $x > 1$: para $t \in [1, x]$, $1/x \leq 1/t \leq 1$ (C1-003.T7, C1-003.T9). Como $1/t$ es integrable en $[1, x]$ (C2-003.T1), C2-006.T1 da

$$\frac{x-1}{x} \leq \int_1^x \frac{dt}{t} \leq x - 1,$$

y $(x-1)/x = 1 - 1/x$.

3. Si $0 < x < 1$: para $t \in [x, 1]$, $1 \leq 1/t \leq 1/x$, y C2-006.T1 da

$$1 - x \leq \int_x^1 \frac{dt}{t} \leq \frac{1-x}{x}.$$

4. Como $\log x = -\int_x^1 dt/t$ (C2-004.D1), multiplicando por $-1$ (C1-003.T9):

$$\log x \leq -(1-x) = x - 1,$$
$$\log x \geq -\frac{1-x}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

■

| **Corolario C2-011.C2** |
|---|
| $\lim_{h\to 0} \log(1+h)/h = 1$ y $\lim_{x\to\infty} (\log x)/x = 0$. |

*Demostración.*

1. Como $\log 1 = 0$, para $h \neq 0$ con $1 + h > 0$:

$$\frac{\log(1+h)}{h} = \frac{\log(1+h) - \log 1}{h}.$$

2. Por la definición de derivada (C1-027.D1) y C2-011.T1, ese cociente tiende a $\log'(1) = 1$ cuando $h \to 0$.
3. Para $x > 1$, sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2} > 1$ (C1-023.C2, C1-023.D1). Por C2-011.C1 y C2-011.T4,

$$0 < \log x = 2 \log u \leq 2(u-1) < 2u = 2\sqrt{x}$$

(C2-011.T1 para $\log x > 0$).

4. Dividiendo entre $x > 0$ (C1-003.T4, C1-003.T7):

$$0 < \frac{\log x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

5. $2/\sqrt{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$: dado $\varepsilon > 0$, si $x > 4/\varepsilon^2$ entonces $\sqrt{x} > 2/\varepsilon$ (C1-003.T9, C1-023.T2) y

$2/\sqrt{x} < \varepsilon$ (C1-003.T7); es C1-020.D1.

6. Por el sándwich para límites en $\infty$ (C1-019.T2, C1-020.T2), $(\log x)/x \to 0$. ■

## Por qué cada hipótesis

⚠ $x, y > 0$

Con $x = y = -1$ se tiene $xy = 1$, pero $\log(-1)$ no está definido: $\int_1^{-1} dt/t$ pediría integrar $1/t$ en $[-1, 1]$, donde no es acotada (como en C2-003.E2), y ni siquiera como integral impropia converge (C2-010.E1 con $p = 1$).

**⚠ El dominio tiene que ser un intervalo**

Sea $\varphi := \log$ en $(0, 1)$ y $\varphi := \log + 1$ en $(2, \infty)$. Entonces $\varphi' = 1/x$ en todo su dominio, igual que log, pero

$$\varphi(3 \cdot 3) = \log 9 + 1 \neq \varphi(3) + \varphi(3) = \log 9 + 2.$$

El paso «misma derivada ⇒ difieren en una constante» (C1-034.T1) necesita un intervalo.

**⚠ Productos, no sumas**

$\log(x + y) \neq \log x + \log y$ en general: con $x = y = 1$, $\log 2 > 0 = \log 1 + \log 1$ (C2-011.T1).

## Ejercicios

1. Demuestra que $\int_a^{ab} dt/t = \log b$ para todos $a, b > 0$.
2. Usa C2-011.T4 para probar que $\frac{1}{2} \leq \log 2 \leq 1$. ¿Basta esa misma cota para decidir si $\log 3 > 1$?
3. Demuestra que $\log x < \sqrt{x}$ para todo $x > 0$.
4. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) = 1/x$ y $f(1) = 0$. Demuestra que $f = \log$.
5. Calcula $\lim_{n\to\infty} n \log(1 + 1/n)$.

### Respuestas

1. $\int_a^{ab} = \int_1^{ab} - \int_1^a = \log(ab) - \log a = \log b$ (C2-004.C1, C2-011.T2).

2. Con $x = 2$: $1 - 1/2 \leq \log 2 \leq 1$. Con $x = 3$ la cota da $2/3 \leq \log 3 \leq 2$, que no decide; hace falta otra herramienta (en C2-012: $\log 3 > \log e = 1$ porque $e < 3$).
3. $g(x) = \sqrt{x} - \log x$ es derivable en $(0, \infty)$ con $g'(x) = (\sqrt{x} - 2)/(2x)$ (C1-031.C1, C2-011.T1). $g' < 0$ en $(0, 4)$ y $g' > 0$ en $(4, \infty)$, así que $g(x) \geq g(4) = 2(1 - \log 2)$ (C1-034.T2). Y $\log 2 < 1$: $1 - 1/t$ es continua, $\geq 0$ en $[1, 2]$ y vale $1/2$ en $t = 2$, así que $1 - \log 2 = \int_1^2 (1 - 1/t)\, dt > 0$ (C2-006.T3, C2-004.T2). Luego $g > 0$.
4. $f - \log$ tiene derivada 0 en el intervalo $(0, \infty)$, luego es constante (C1-034.T1), igual a $f(1) - \log 1 = 0$.
5. $n \log(1 + 1/n) = \log(1 + h)/h$ con $h = 1/n \to 0$, $h \neq 0$; por C2-011.C2 y C1-019.T1, el límite es 1.

# C2-012 · La exponencial

## Motivación

> **El banco que capitaliza cada instante**
> El banco imaginario de C1-014 paga 100 % de interés anual. Con \$1,000 y capitalización $n$ veces al año, el saldo es $1000(1 + 1/n)^n$: \$2,613.04 si es mensual, \$2,714.57 si es diaria, \$2,718.13 si es cada hora. El saldo se acerca a 1000 $e$, con $e = \lim(1 + 1/n)^n$ (C1-014.D1).
> Hoy aparece otro número natural: el $y$ con $\log y = 1$, es decir, el punto donde el área bajo $1/t$ desde 1 vale exactamente 1. Este capítulo demuestra que es el mismo número.
> Dónde falla la analogía: un banco real redondea a centavos y capitaliza un número finito de veces; exp y $e$ son límites exactos.

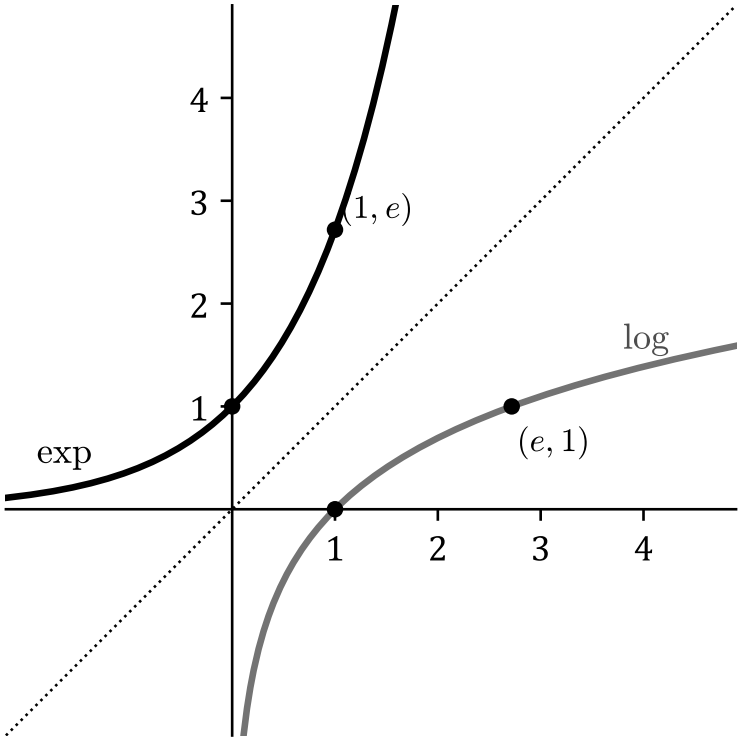



Figura 12: La exponencial es el reflejo de log en la diagonal: $(1, 0) \leftrightarrow (0, 1)$ y $(e, 1) \leftrightarrow (1, e)$.

## Definiciones

| **Definición C2-012.D1 (exponencial)** |
| --- |
| $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es la inversa de $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. |

La definición tiene sentido: log es estrictamente creciente (C2-011.T1), luego inyectiva (C1-010.T1), y su imagen es $\mathbb{R}$ (C2-011.T3). Así log es biyectiva de $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ y tiene inversa (C1-011.T1, C1-011.D1).

| **Definición C2-012.D2 (potencias reales)** |
| --- |
| Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$: $a^x := \exp(x \log a)$. |

## Resultados

**Teorema C2-012.T1**

exp es biyectiva, continua y estrictamente creciente; $\exp 0 = 1$ y $\exp x > 0$; es derivable en $\mathbb{R}$ y $\exp' = \exp$.

*Demostración.*

1. exp es la inversa de una biyección, luego es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(0, \infty)$ (C1-011.T1); en particular $\exp x > 0$.
2. Si $x < y$ y fuera $\exp x \geq \exp y$, como log es creciente, $x = \log(\exp x) \geq \log(\exp y) = y$ (C1-010.D2), absurdo. Luego exp es estrictamente creciente.
3. log es continua y estrictamente monótona en el intervalo $(0, \infty)$ (C2-011.T1), así que su inversa $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es continua (C1-026.T3).
4. $\log 1 = 0$, luego $\exp 0 = 1$.
5. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $a := \exp x > 0$, punto interior de $(0, \infty)$. log es derivable en $a$ con $\log'(a) = 1/a \neq 0$ (C2-011.T1).
6. Por C1-031.T1, exp es derivable en $\log a = x$ y

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(a)} = a = \exp x.$$

■

**Teorema C2-012.T2**

Para $x, y \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$; $\exp(-x) = 1/\exp x$; $\exp(rx) = (\exp x)^r$.

*Demostración.*

1. Por C2-011.T2, $\log(\exp x \cdot \exp y) = \log \exp x + \log \exp y = x + y$.
2. Aplicando exp (C2-012.D1, C1-011.D1): $\exp x \cdot \exp y = \exp(x + y)$.
3. Por C2-011.C1, $\log(1/\exp x) = -\log \exp x = -x$; aplicando exp, $1/\exp x = \exp(-x)$.
4. Por C2-011.C1, $\log((\exp x)^r) = r \log \exp x = rx$; aplicando exp, $(\exp x)^r = \exp(rx)$. ■

**Teorema C2-012.T3 (el número e)**

$\exp 1 = e$, donde $e = \lim(1 + 1/n)^n$ es el de C1-014.D1; equivalentemente, $\log e = 1$.

**Idea de la demostración**

En lugar de $a_n = (1 + 1/n)^n$ se mira su logaritmo: es $\log(1 + h)/h$ con $h = 1/n$, que tiende a 1. Se regresa con exp, que es continua, y la unicidad del límite identifica los dos números.

*Demostración.*

1. Sea $a_n := (1 + 1/n)^n > 0$. Por C2-011.C1, $\log a_n = n \log(1 + 1/n)$.
2. Con $h_n := 1/n$ se tiene $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$ (C1-012.T2) y
$$\log a_n = \frac{\log(1 + h_n)}{h_n}.$$
3. Por C2-011.C2 y la caracterización por sucesiones (C1-019.T1), $\log a_n \to 1$.
4. exp es continua en 1 (C2-012.T1), así que $a_n = \exp(\log a_n) \to \exp 1$ (C1-022.T1).
5. Por C1-014.T4 y C1-014.D1, $a_n \to e$.
6. Por la unicidad del límite (C1-012.T1), $\exp 1 = e$; y $\log e = \log(\exp 1) = 1$. ■

**Teorema C2-012.T4 (coherencia)**

Para $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$, $a^r$ de C2-012.D2 coincide con $a^r$ de C1-023.D1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp x$.

*Demostración.*

1. Sea $b := a^r$ en el sentido de C1-023.D1; $b > 0$ y, por C2-011.C1, $\log b = r \log a$.
2. Entonces $\exp(r \log a) = \exp(\log b) = b$ (C1-011.D1): las dos definiciones coinciden.
3. Por C2-012.T3, $\log e = 1$, así que $e^x = \exp(x \log e) = \exp x$. ■

Desde aquí se escribe indistintamente $e^x$ o $\exp x$.

**Teorema C2-012.T5 (leyes de exponentes reales)**

Para $a, b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$: $\log(a^x) = x \log a$; $a^x > 0$; $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$; $a^{-x} = 1/a^x$.

*Demostración.*

1. $\log(a^x) = \log \exp(x \log a) = x \log a$ (C2-012.D2, C1-011.D1), y $a^x > 0$ (C2-012.T1).
2. $a^x a^y = \exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp((x + y) \log a) = a^{x+y}$ (C2-012.T2).
3. $(a^x)^y = \exp(y \log(a^x)) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$ (paso 1).
4. $(ab)^x = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x \log a) \exp(x \log b) = a^x b^x$ (C2-011.T2, C2-012.T2).
5. $a^{-x} = \exp(-x \log a) = 1/\exp(x \log a) = 1/a^x$ (C2-012.T2). ■

**Teorema C2-012.T6 (derivadas)**

Para $a > 0$, $(a^x)' = a^x \log a$ en $\mathbb{R}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ es derivable en $(0, \infty)$ con $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

*Demostración.*

1. $x \mapsto x \log a$ es derivable con derivada $\log a$ (C1-028.T2), y $\exp' = \exp$ (C2-012.T1). Por la regla de la cadena (C1-030.T1), $(a^x)' = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a$.
2. Para $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$. Como $\log' x = 1/x$ (C2-011.T1), la cadena y C1-029.T1 dan

$$(x^\alpha)' = \exp(\alpha \log x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^\alpha x^{-1}.$$

3. Por C2-012.T4, $x^{-1}$ (real) es $1/x$, y por C2-012.T5, $x^\alpha x^{-1} = x^{\alpha-1}$. ■

**Teorema C2-012.T7 (derivación logarítmica)**

$x \mapsto \log|x|$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con derivada $1/x$. Si $f$ es derivable en $a$ y $f(a) \neq 0$, $\log|f|$ es derivable en $a$ y $(\log|f|)'(a) = f'(a)/f(a)$.

*Demostración.*

1. En $(0, \infty)$, $\log|x| = \log x$ (C1-004.D1), con derivada $1/x$ (C2-011.T1).
2. En el intervalo abierto $(-\infty, 0)$, $\log|x| = \log(-x)$ (C1-004.D1). La derivada en un punto solo

depende de los valores en un intervalo abierto que lo contiene (C1-027.D1), y por la cadena (C1-030.T1, C1-028.T2),

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

3. Sea $f$ derivable en $a$ con $f(a) > 0$. $f$ es continua en $a$ (C1-028.T1), así que $f > 0$ en un intervalo abierto alrededor de $a$ (C1-022.T4). Ahí $\log|f| = \log\circ f$ y la cadena da $(\log|f|)'(a) = f'(a)/f(a)$.
4. Si $f(a) < 0$, igual: cerca de $a$, $\log|f| = \log\circ(-f)$, con derivada $(-f'(a))/(-f(a)) = f'(a)/f(a)$. ■

**Derivación logarítmica en acción**

Para $x > 0$, $g(x) = x^x = \exp(x\log x)$. Por la cadena y el producto, $g'(x) = x^x(\log x + 1)$. Lo mismo sale de $(\log g)' = g'/g$ con $\log g = x\log x$.

**Teorema C2-012.T8 (crecimiento comparado)**

$\lim_{x\to\infty}\exp x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\exp x = 0$; para $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = 0$; para $\alpha > 0$, $\lim_{x\to\infty}(\log x)/x^\alpha = 0$; $\sqrt[n]{n}\to 1$.

*Demostración.*

1. Dado $K$, sea $M := \log(|K|+1)$. Si $x > M$, $\exp x > |K|+1 > K$ (C2-012.T1). Por C1-020.D1, $\exp x\to\infty$.
2. Dado $\varepsilon > 0$, si $x < \log\varepsilon$, entonces $0 < \exp x < \varepsilon$. Por C1-020.D1, $\exp x\to 0$ cuando $x\to-\infty$.
3. *El caso $t/e^t$.* Sea $\eta > 0$. Por C2-011.C2 hay $M$ con $0 \le (\log y)/y < \eta$ si $y > M$ (para $y > 1$). Por el paso 1 hay $T$ con $e^t > \max(M, 1)$ si $t > T$. Para $t > T$, con $y = e^t$ y $\log y = t$: $0 \le t/e^t < \eta$.
4. *El caso $x^n/e^x$.* Sea $\varepsilon > 0$ y $\eta := \min(1, \varepsilon/n^n)$. Para $x > 0$, con $t = x/n$, $e^x = (e^t)^n$ (C2-012.T2) y

$$\frac{x^n}{e^x} = n^n\Big(\frac{t}{e^t}\Big)^n.$$

5. Si $x > nT$ (con $T$ del paso 3 para este $\eta$), entonces $0 \le t/e^t < \eta \le 1$, así que $(t/e^t)^n \le t/e^t < \eta$ (inducción, C1-005.T1, con C1-003.T4), y $0 \le x^n/e^x < n^n\eta \le \varepsilon$. Es C1-020.D1.
6. *El caso $(\log x)/x^\alpha$.* Para $x > 1$, $y := x^\alpha = \exp(\alpha\log x)$ cumple $\log y = \alpha\log x$ (C2-012.T5), así que $(\log x)/x^\alpha = (1/\alpha)(\log y)/y$. Dado $\varepsilon$, sea $M$ con $0 \le (\log y)/y < \alpha\varepsilon$ si $y > M$ (C2-011.C2). Como $\alpha\log x\to\infty$ (C2-011.T3), por el paso 1 hay $X$ con $x^\alpha > M$ si $x > X$; para esos $x$,

$0 \le (\log x)/x^{\alpha} < \varepsilon$.

7. *El caso* $\sqrt[n]{n}$. Por C2-012.T4, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp((\log n)/n)$. Por C2-011.C2 en $x = n \to \infty$ (C1-020.D1 con $x = n$), $(\log n)/n \to 0$; como exp es continua en 0 (C2-012.T1), $\exp((\log n)/n) \to \exp 0 = 1$ (C1-022.T1). ■

**Proposición C2-012.T9 (composición con un límite infinito)**

Sea «$x \to \alpha$» cualquiera de los tipos de límite de C1-017.D1 y C1-020.D1 ($\alpha = a, a^+, a^-, \infty$ o $-\infty$). Si $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$ y $f$ está definida en un intervalo $(c, \infty)$ con $\lim_{u\to\infty} f(u) = L$ ($L \in \mathbb{R}, L = \infty$ o $L = -\infty$), entonces $f(g(x))$ está definida para los $x \in \operatorname{dom} g$ cercanos a $\alpha$ y $\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = L$. Lo mismo si $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, $f$ está definida en $(-\infty, c)$ y $\lim_{u\to-\infty} f(u) = L$.

**Idea de la demostración**

Para que $f(u)$ esté cerca de $L$ basta $u > M$; y para que $g(x) > M$ basta que $x$ esté cerca de $\alpha$.

*Demostración.*

Llamemos **entorno** de $\alpha$ al conjunto de los $x$ con $0 < |x - a| < \delta$, $a < x < a + \delta$, $a - \delta < x < a$, $x > M$ o $x < M$, según el tipo; son las condiciones sobre $x$ de C1-017.D1 y C1-020.D1. La intersección de dos entornos del mismo tipo contiene otro (con $\min(\delta, \delta')$ o $\max(M, M')$, C1-005.T13).

1. Como $g \to \infty$, con $K = c$ hay un entorno $E_0$ de $\alpha$ con $g(x) > c$ para $x \in \operatorname{dom} g \cap E_0$ (C1-020.D1). Ahí $g(x) \in (c, \infty) \subset \operatorname{dom} f$ y $f(g(x))$ está definida.
2. Caso $L \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$. Hay $M$ con $|f(u) - L| < \varepsilon$ si $u \in \operatorname{dom} f$ y $u > M$ (C1-020.D1).
3. Como $g \to \infty$, con $K = M$ hay un entorno $E_1$ con $g(x) > M$ para $x \in \operatorname{dom} g \cap E_1$.
4. Para $x \in \operatorname{dom} g$ en un entorno contenido en $E_0 \cap E_1$: $g(x) \in \operatorname{dom} f$ y $g(x) > M$, así que $|f(g(x)) - L| < \varepsilon$. Por C1-017.D1 o C1-020.D1, según el tipo, $\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = L$.
5. Caso $L = \infty$ (o $-\infty$). Dado $K$, hay $M$ con $f(u) > K$ (o $f(u) < K$) si $u > M$, y los pasos 3 y 4, con esta conclusión, dan $f(g(x)) > K$ (o $< K$) en un entorno de $\alpha$ (C1-020.D1).
6. Si $g \to -\infty$ y $f$ está definida en $(-\infty, c)$, sean $\tilde{g} := -g$ y $\tilde{f}(u) := f(-u)$ en $(-c, \infty)$. Por C1-020.D1, $\tilde{g} \to \infty$ (cambiando $K$ por $-K$) y $\tilde{f}(u) \to L$ cuando $u \to \infty$ (pues $u > -M \Leftrightarrow -u < M$). Como $\tilde{f}(\tilde{g}(x)) = f(g(x))$, lo anterior concluye. ■

**Corolario C2-012.C1 (potencias reales en integrales impropias)**

Para $p \in \mathbb{R}$: $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $p > 1$; $\int_0^1 x^{-p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $p < 1$. Además $\int_1^b dx/x = \log b \to \infty$.

*Demostración.*

1. Si $p \neq 1$, $G(x) := x^{1-p}/(1-p)$ es primitiva de $x^{-p}$ en $(0,\infty)$ (C2-012.T6), y $x^{-p}$ es continua ahí. Por Barrow (C2-009.C1), para $b > 1$ y $0 < c < 1$:
$$\int_1^b x^{-p}\,dx = \frac{b^{1-p}-1}{1-p}, \qquad \int_c^1 x^{-p}\,dx = \frac{1-c^{1-p}}{1-p}.$$
2. $b^{1-p} = \exp((1-p)\log b)$ (C2-012.D2). Como $\log b \to \infty$ (C2-011.T3), $(1-p)\log b \to -\infty$ si $p > 1$ y $\to \infty$ si $p < 1$ (C1-020.T5). Con $\lim_{u\to-\infty} \exp u = 0$ y $\lim_{u\to\infty} \exp u = \infty$ (C2-012.T8) y la composición (C2-012.T9): si $p > 1$, $b^{1-p} \to 0$ y la integral tiende a $1/(p-1)$ (C1-018.T1, C1-020.T2); si $p < 1$, $b^{1-p} \to \infty$ y la integral diverge (C1-020.T5, C2-010.D1).
3. $c^{1-p} = \exp((1-p)\log c)$ con $\log c \to -\infty$ cuando $c \to 0^+$ (C2-011.T3). Del mismo modo (C1-020.T5, C2-012.T8, C2-012.T9): si $p < 1$, $(1-p)\log c \to -\infty$, $c^{1-p} \to 0$ y la integral tiende a $1/(1-p)$; si $p > 1$, $(1-p)\log c \to \infty$, $c^{1-p} \to \infty$ y diverge.
4. Si $p = 1$: $\int_1^b dx/x = \log b \to \infty$ y $\int_c^1 dx/x = -\log c \to \infty$ (C2-011.D1, C2-011.T3): ambas divergen. ■

> **Ejemplo C2-012.E1**
> $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$: $-e^{-x}$ es primitiva de $e^{-x}$ (C2-012.T1, C1-030.T1), así que $\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 - e^{-b}$ (C2-009.C1), y $e^{-b} \to 0$ cuando $b \to \infty$ (C2-012.T8, C1-020.T2).

## Por qué cada hipótesis

⚠ **La continuidad de exp en la prueba de** $\exp 1 = e$

El paso 4 «mete el límite» dentro de exp. Con una función que no es continua en 1 eso falla: si $s(y) := 0$ para $y < 1$ y $s(y) := 5$ para $y \geq 1$, con $g_n = 1 - 1/n \to 1$ se tiene $s(g_n) = 0 \to 0 \neq s(1) = 5$.

**⚠ El valor exacto del límite**

Con $b_n := (1 + 2/n)^n$, $\log b_n = 2 \cdot \log(1 + h)/h$ con $h = 2/n$, que tiende a 2: $b_n \to e^2 \approx 7.389$. El número que sale es la exponencial del límite.

**⚠ Base positiva en $a^x$**

Con $a = -8$ uno quisiera $(-8)^{1/3} = -2$, pero $(-8)^{2/6} = ((-8)^2)^{1/6} = 2$: el valor dependería de cómo se escribe la fracción. Por eso $a^x$ se define solo para $a > 0$ (y $\log a$ no existe si $a \leq 0$).

## Ejercicios

1. Demuestra que exp es convexa en $\mathbb{R}$ (C1-034.T5).
2. Demuestra que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Calcula la derivada de $x \mapsto 2^{x^2}$.
4. Demuestra que $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$.
5. ¿Para qué $p$ converge $\int_2^\infty dx/(x(\log x)^p)$? (Sugerencia: el cambio de variable llega en C2-015; aquí basta derivar $(\log x)^{1-p}$.)

### Respuestas

1. $\exp' = \exp$ es estrictamente creciente (C2-012.T1); por C1-034.T5, exp es convexa.
2. Con $y = e^x > 0$ en C2-011.T4: $\log y \leq y - 1$, es decir, $x \leq e^x - 1$.
3. Por la cadena y C2-012.T6: $2^{x^2} \log 2 \cdot 2x$.
4. Con $x = 1/y$, $x \log x = -(\log y)/y$, y $(\log y)/y \to 0$ cuando $y \to \infty$ (C2-011.C2); se hace con $\varepsilon$ directamente (C1-020.D1).
5. Si $p \neq 1$, $(\log x)^{1-p}/(1 - p)$ es primitiva (C2-012.T6, C1-030.T1); converge $\Leftrightarrow p > 1$, como en C2-012.C1. Si $p = 1$, $\log \log x$ es primitiva y diverge.

# C2-013 · Funciones definidas por integrales

## Motivación

> **La línea de una pista elíptica**
> Una pista de entrenamiento tiene forma de elipse de 100 m por 50 m. Para pintar su borde necesitas el perímetro. Para un círculo de radio $r$ hay fórmula, $2\pi r$; para la elipse no hay ninguna fórmula exacta escrita con raíces, potencias, $\pi$, log y exp. Con semiejes $a = 50$ y $b = 25$, el perímetro es $4a\,E(k) \approx 242.21$ m, con $k = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ y $E(k)$ una función nueva definida por una integral (la fórmula se demuestra en C2-020.E2).
> Es la misma situación que con el logaritmo: $1/t$ no tenía primitiva conocida, y la fabricamos con una integral.
> Dónde falla la analogía: una pista real tiene ancho y la línea tiene grosor; el perímetro de la elipse ideal es un número exacto, aunque no tenga «fórmula cerrada». Las aproximaciones (como la primera de Ramanujan, 242.2105 m; la segunda da 242.2112 m) son muy buenas, pero no son exactas.

La herramienta de fondo es el primer teorema fundamental: si $g$ es continua en un intervalo abierto, $x \mapsto \int_c^x g$ es derivable con derivada $g$ (C2-008.C2). Toda integral de una continua define una función, la conozcamos o no.

## Definiciones

**Definición C2-013.D1 (integrales elípticas)**

Para $0 \le k < 1$ y $x \in [0, 1)$:

$$F(k; x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad E(k; x) := \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Los integrandos son continuos en $(-1, 1)$.

Aquí $\sqrt{u}$ es la raíz cuadrada positiva de $u > 0$ (C1-023.C2). Veamos que los integrandos son continuos en $(-1, 1)$:

1. Si $|t| < 1$, entonces $t^2 < 1$ (C1-004.T6, C1-003.T9) y $k^2t^2 \le t^2 < 1$ (C1-003.T9, pues $k^2 < 1$), así que $1 - t^2 > 0$ y $1 - k^2t^2 > 0$.
2. $u \mapsto \sqrt{u} = u^{1/2}$ es derivable en $(0, \infty)$ (C1-031.C1), luego continua (C1-028.T1).
3. Los polinomios son continuos (C1-022.T2), la composición de continuas es continua (C1-022.T3) y el cociente de continuas con denominador $\neq 0$ también (C1-022.T2).
4. Por lo tanto ambos integrandos son continuos en $(-1, 1)$, y para $x \in [0, 1)$ son integrables en $[0, x]$ (C2-003.T1; si $x = 0$ la integral es 0 por C2-004.D1).

## Resultados

**Teorema C2-013.T1**

Para $0 \le k < 1$, las integrales impropias

$$K(k) := F(k; 1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad E(k) := E(k; 1) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

convergen.

**Idea de la demostración**

El integrando se dispara en $t = 1$, pero como $1/\sqrt{1-t}$, cuya integral sí conocemos y es finita. Se compara con ella y se usa que, para integrandos $\ge 0$, la impropia converge si las integrales

> parciales están acotadas.

*Demostración.*

1. Para $t \in [0,1)$: $1 - t^2 = (1-t)(1+t) \geq 1 - t > 0$ (pues $1 + t \geq 1$; C1-003.T9) y $1 - k^2t^2 \geq 1 - k^2 > 0$ (pues $k^2t^2 \leq k^2$). Multiplicando (C1-003.T9),

$$(1 - t^2)(1 - k^2t^2) \geq (1 - t)(1 - k^2).$$

2. La raíz cuadrada es creciente en $[0, \infty)$ (C1-003.T9) y $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$ para $u, v > 0$ (ambos lados son positivos y tienen el mismo cuadrado; unicidad de C1-023.C2). Tomando recíprocos (C1-003.T7):

$$0 < \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

3. $G(t) := -2\sqrt{1-t}$ es derivable en $(-\infty, 1)$ con $G'(t) = 1/\sqrt{1-t}$ (C1-031.C1, C1-030.T1). Por Barrow (C2-009.C1), para $x \in [0,1)$:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2 - 2\sqrt{1-x} \leq 2.$$

4. Por la monotonía de la integral (C2-004.T3) y los pasos 2 y 3, para todo $x \in [0,1)$:

$$0 \leq F(k;x) \leq \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}.$$

5. El integrando es $\geq 0$ y las integrales parciales están acotadas: por C2-010.T3 (versión en la singularidad del extremo $b = 1$, C2-010.D1 b), $K(k)$ converge.
6. Para $E$: como $0 < 1 - k^2t^2 \leq 1$, $\sqrt{1-k^2t^2} \leq 1$; y por el paso 1, $1 - t^2 \geq 1 - t$. Así

$$0 < \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

y los pasos 3-5 dan $0 \leq E(k;x) \leq 2$ y la convergencia de $E(k)$ (C2-010.T4). ■

**Teorema C2-013.T2**

Para $0 \leq k < 1$, $x \mapsto F(k;x)$ (con $F(k;1) := K(k)$) es continua y estrictamente creciente en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ con derivada $1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$; lo mismo para $E(k;\cdot)$, con derivada $\sqrt{1-k^2x^2}/\sqrt{1-x^2}$.

*Demostración.* (Para $F$; para $E$ es idéntica con su integrando.) Sea $g$ el integrando de $F$.

1. Sea $x \in (0,1)$ y $b \in (x,1)$. $g$ es continua en $[0,b]$, así que por C2-008.C1, $F(k;\cdot)$ es continua en $[0,b]$, derivable en $(0,b)$ y su derivada en $x$ es $g(x)$.
2. Como $x \in (0,1)$ es arbitrario, $F(k;\cdot)$ es derivable en $(0,1)$ con derivada $g > 0$, y es continua en $[0,1)$ (paso 1 con $b$ arbitrario).
3. En $x = 1$: por la definición de la impropia (C2-010.D1 b) y C2-013.T1, $\lim_{x\to 1^-} F(k;x) = K(k) = F(k;1)$, así que $F(k;\cdot)$ es continua en 1 (C1-022.T0 b).
4. $F(k;\cdot)$ es continua en $[0,1]$ y su derivada es $> 0$ en el interior $(0,1)$: por C1-034.T2 es estrictamente creciente en $[0,1]$. ■

**La inversa sn existe.** $F(k;\cdot)$ es continua y estrictamente creciente en $[0,1]$, luego inyectiva (C1-010.T1); su imagen es un intervalo (C1-026.T1) que contiene a $F(k;0) = 0$ y a $F(k;1) = K(k)$, y está contenida en $[0,K(k)]$ por la monotonía. Así $F(k;\cdot) : [0,1] \to [0,K(k)]$ es biyectiva y tiene inversa (C1-011.D1).

**Definición C2-013.D2 (función elíptica sn)**

Para $0 \le k < 1$, $\operatorname{sn}(k;\cdot) : [0,K(k)] \to [0,1]$ es la inversa de $F(k;\cdot) : [0,1] \to [0,K(k)]$.

**Teorema C2-013.T3**

$\operatorname{sn}(k;\cdot)$ es continua y estrictamente creciente en $[0,K(k)]$, $\operatorname{sn}(k;0) = 0$, $\operatorname{sn}(k;K(k)) = 1$, y es derivable en $(0,K(k))$ con

$$\operatorname{sn}' = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2)}.$$

*Demostración.*

1. sn es la inversa de una función continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0,1]$: es continua (C1-026.T3) y estrictamente creciente (si $s < s'$ y $\operatorname{sn} s \ge \operatorname{sn} s'$, aplicando $F$ creciente, $s \ge s'$; C1-010.D2).
2. $F(k;0) = 0$ y $F(k;1) = K(k)$ dan $\operatorname{sn}(k;0) = 0$ y $\operatorname{sn}(k;K(k)) = 1$.
3. Sea $s \in (0,K(k))$ y $x := \operatorname{sn}(k;s) \in (0,1)$, interior de $[0,1]$. $F(k;\cdot)$ es derivable en $x$ con $F'(k;x) = g(x) > 0$ (C2-013.T2).

4. Por C1-031.T1, sn es derivable en $s$ y

$$\operatorname{sn}'(s) = \frac{1}{g(x)} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

(C1-003.T7; el recíproco de $1/\sqrt{u}$ es $\sqrt{u}$). ■

**Ejemplo C2-013.E1 (la función Φ)**
$\Phi(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $\Phi'(x) = e^{-x^2}$, estrictamente creciente, y $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ converge.

1. $t \mapsto e^{-t^2} = \exp(-t^2)$ es continua en $\mathbb{R}$ (C1-022.T2, C1-022.T3, C2-012.T1, C2-012.T4).
2. Por C2-008.C2 con $I = \mathbb{R}$ y $c = 0$, Φ es derivable con $\Phi'(x) = e^{-x^2} > 0$, y por C1-034.T2 es estrictamente creciente.
3. Si $t \geq 1$, $t^2 \geq t$, luego $-t^2 \leq -t$ y $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (C1-003.T9, C2-012.T1).
4. $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ converge (C2-012.E1), luego $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ también (colas, C2-010.T2 d).
5. Por comparación (C2-010.T4), $\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$ converge, y agregando $[0,1]$ con las colas (C2-010.T2 d), $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ converge.

Numéricamente, $\Phi(1) \approx 0.746824$ y $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \approx 0.886227$ (su valor exacto, $\sqrt{\pi}/2$, se demuestra en Cálculo IV con integrales dobles).

**Teorema C2-013.T4 ⚠ (Liouville, enunciado)**

Φ, y $F(k;\cdot)$ y $E(k;\cdot)$ con $0 < k < 1$, no son funciones elementales: no se obtienen de polinomios, exp, log, raíces y funciones trigonométricas (C2-014) y sus inversas con un número finito de operaciones algebraicas y composiciones.

**⚠ Por qué se marca**

La demostración necesita álgebra diferencial, fuera de la licenciatura básica; este enunciado **no se usa en ninguna demostración**. Solo explica por qué hace falta definir funciones por integrales. «Elemental» se usa en el sentido informal del enunciado.

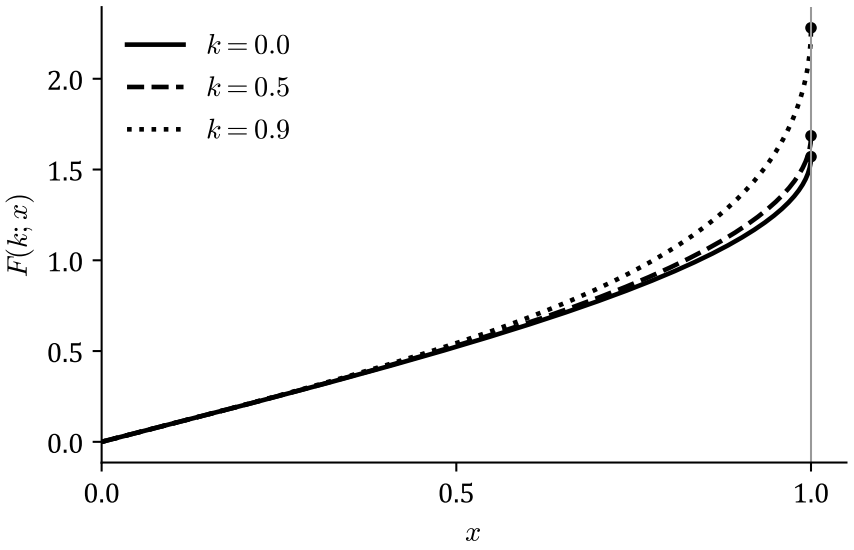



Figura 13: Las funciones $x \mapsto F(k; x)$ para $k = 0, 0.5, 0.9$: crecen, llegan a $K(k)$ en $x = 1$ con tangente vertical.

## Por qué cada hipótesis

⚠ $k < 1$

Con $k = 1$ el integrando de $K$ es $1/(1-t^2)$, y $1 - t^2 = (1-t)(1+t) \leq 2(1-t)$ en $[0, 1)$, así que $1/(1-t^2) \geq 1/(2(1-t))$. Como $-\log(1-t)$ es primitiva de $1/(1-t)$ en $(-\infty, 1)$ (C2-011.T1, C1-030.T1), $\int_0^x dt/(1-t) = -\log(1-x) \to \infty$ cuando $x \to 1^-$ (C2-011.T3). Por comparación (C2-010.T4), $K(1)$ diverge.

⚠ $x < 1$ **en la definición**

En $[0, 1)$ el integrando de $F$ no es acotado (es $\geq 1/\sqrt{1-t}$, que crece sin cota), así que no es integrable en $[0, 1]$ en el sentido de Riemann (C2-002.D2). Por eso $K(k)$ y $E(k)$ son integrales impropias.

**⚠ Integrando que se dispara no es lo mismo que área infinita**

El integrando de $K(k)$ tiende a $\infty$ en $t = 1$, y aun así $K(k) \leq 2/\sqrt{1-k^2}$. Lo que decide es *qué tan rápido* crece: como $1/\sqrt{1-t}$ converge, como $1/(1-t)$ diverge.

## Ejercicios

1. Demuestra que $E(k;x) \leq F(k;x)$ para $x \in [0,1)$ y $0 \leq k < 1$.
2. Demuestra que $k \mapsto K(k)$ es creciente en $[0,1)$.
3. Calcula $\Phi'(0)$, $\Phi''(x)$ y decide dónde $\Phi$ es convexa.
4. Demuestra que $\Phi$ es impar.
5. Sea $L(x) := \int_0^x dt/\sqrt{1+t^4}$. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} L(x)$ existe.

### Respuestas

1. $\sqrt{1-k^2t^2} \leq 1/\sqrt{1-k^2t^2}$ porque $0 < 1-k^2t^2 \leq 1$; divide entre $\sqrt{1-t^2}$ e integra (C2-004.T3).
2. Si $k < k'$, $1-k^2t^2 \geq 1-k'^2t^2 > 0$ y el integrando de $K(k)$ es menor o igual que el de $K(k')$; compara las integrales parciales y pasa al límite (C2-004.T3, C2-010.T4).
3. $\Phi'(0) = 1$; $\Phi''(x) = -2xe^{-x^2}$ (C1-030.T1); $\Phi''$ es $> 0$ en $(-\infty, 0)$, así que $\Phi'$ crece ahí y $\Phi$ es convexa en $(-\infty, 0]$ (C1-034.T5); cóncava en $[0,\infty)$.
4. $H(x) := \Phi(x) + \Phi(-x)$ tiene $H' = e^{-x^2} - e^{-x^2} = 0$ y $H(0) = 0$ (C1-034.T1).
5. $L$ es creciente; para $t \geq 1$, $1/\sqrt{1+t^4} \leq 1/t^2$, y $\int_1^\infty dt/t^2$ converge (C2-010.E1); comparación (C2-010.T4) y colas (C2-010.T2 d).

# C2-014 · π y las funciones trigonométricas, rigurosamente

## Motivación

> **La rebanada de pizza**
> Una pizza de radio 1. Cortas una rebanada cuya área es exactamente 0.5. ¿Cuál es su ángulo? En un círculo de radio 1, el área de un sector es la mitad de su ángulo; así que el ángulo es 1 radián, unos 57.30°, y el borde de la rebanada cae en $x = \cos 1 \approx 0.5403$. No hace falta medir ningún arco: basta saber calcular áreas.
> Esa es la idea de este capítulo. En Cálculo I, sen y cos venían de un dibujo (la ⚠ G1 de C1-021). Aquí se construyen solo con integrales: el «ángulo» se *define* como el doble del área de un sector, y el área es una integral.
> Dónde falla la analogía: una pizza real no es un círculo perfecto ni tiene radio 1. Y aquí el ángulo se define por el área; que coincida con la longitud del arco es un teorema posterior (C2-020.E1).

**⚠ Regla de esta clase**

Ninguna pieza anterior a C2-014.C2 cita C1-021.G1, C1-021.T0, C1-021.T1, C1-021.T2, C1-028.T3 ni C1-038.E1: todo se construye con la integral (C2-001 … C2-013) y el Cálculo I no trigonométrico.

El capítulo tiene dos partes, como el video: la primera construye $\pi$, cos y sen y sus derivadas; la segunda deduce las fórmulas de suma, demuestra los hechos de G1 y define las inversas.

# Parte 1 · De un área a π, cos y sen

## La raíz cuadrada en $[0, \infty)$

**Definición C2-014.D1 (raíz cuadrada)**

Para $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ es el único $y \geq 0$ con $y^2 = x$ (es $\sqrt[2]{x}$ de C1-023.C2 si $x > 0$, y $\sqrt{0} := 0$).

La definición tiene sentido:

1. Si $x > 0$, C1-023.C2 da un único $y > 0$ con $y^2 = x$; y $y = 0$ no sirve porque $0^2 = 0 \neq x$ (C1-002.T3).
2. Si $x = 0$: $0^2 = 0$, y si $y^2 = 0$ entonces $y = 0$ (C1-002.T5).

**Teorema C2-014.T1**

$\sqrt{} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es biyectiva, continua y estrictamente creciente, y derivable en $(0, \infty)$ con $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.

*Demostración.*

1. Sea $q(y) := y^2$ en $[0, \infty)$. $q$ es continua (C1-022.T2) y estrictamente creciente: para $0 \leq y < y'$, $y^2 < y'^2$ (C1-003.T9).
2. Por C2-014.D1, $q$ es sobre $[0, \infty)$ y $\sqrt{}$ es su inversa: $\sqrt{y^2} = y$ y $(\sqrt{x})^2 = x$ (C1-011.D1). Así $\sqrt{}$ es biyectiva.
3. $\sqrt{}$ es estrictamente creciente: si $0 \leq x < x'$ y fuera $\sqrt{x} \geq \sqrt{x'}$, elevando, $x \geq x'$ (C1-003.T9), absurdo.
4. Por C1-026.T3 (inversa de una continua estrictamente monótona en un intervalo), $\sqrt{}$ es continua.
5. Sea $x > 0$ y $a := \sqrt{x} > 0$, interior de $[0, \infty)$. $q'(a) = 2a \neq 0$ (C1-028.T2). Por C1-031.T1, $\sqrt{}$ es derivable en $x$ y $(\sqrt{x})' = 1/(2a) = 1/(2\sqrt{x})$. ■

## Un lema de derivadas

**Teorema C2-014.T2 (límite de la derivada)**

Sean $a \in \mathbb{R}, r > 0$ y $f$ definida en $(a-r, a+r)$, continua en $a$ y derivable en $(a-r, a) \cup (a, a+r)$, con $\lim_{x \to a} f'(x) = L$. Entonces $f$ es derivable en $a$ y $f'(a) = L$.

*Demostración.*

1. Sea $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis sobre el límite (C1-017.D1) hay $\delta \in (0, r]$ con $|f'(t) - L| < \varepsilon$ si $0 < |t - a| < \delta$.
2. Sea $x \in (a, a + \delta)$. $f$ es continua en $[a, x]$: en $a$ por hipótesis y en $(a, x]$ porque ahí es derivable (C1-028.T1). Y es derivable en $(a, x)$.
3. Por el TVM (C1-033.T1) hay $c_x \in (a, x)$ con
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$
4. Como $0 < c_x - a < \delta$, el paso 1 da $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| < \varepsilon$.
5. Igual para $x \in (a - \delta, a)$, con el TVM en $[x, a]$.
6. Así los dos límites laterales del cociente en $a$ valen $L$ (C1-020.D1), el límite existe y vale $L$ (C1-020.T1); con $x = a + h$, es la definición de $f'(a)$ (C1-027.D1). ■

**⚠ La continuidad en $a$ no sobra**

$f := 0$ en $(-1, 0]$ y $f := 1$ en $(0, 1)$: $f' = 0$ fuera de 0 y $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, pero $f$ no es continua en 0, luego no es derivable ahí (C1-028.T1).

## El área del sector y π

**Definición C2-014.D2 (área del sector y π)**

$A : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$A(x) := \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

(el área del sector del círculo unitario entre los radios a $(1,0)$ y a $(x,\sqrt{1-x^2})$), y

$$\pi := 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Para $|t| \le 1$, $t^2 \le 1$ (C1-004.T6), así que $1-t^2 \ge 0$ y $\sqrt{1-t^2}$ está definida. Es continua en $[-1,1]$ (C2-014.T1, C1-022.T2, C1-022.T3), luego integrable en cada $[x,1]$ (C2-003.T1, C2-004.C1; si $x=1$ la integral es 0 por C2-004.D1).

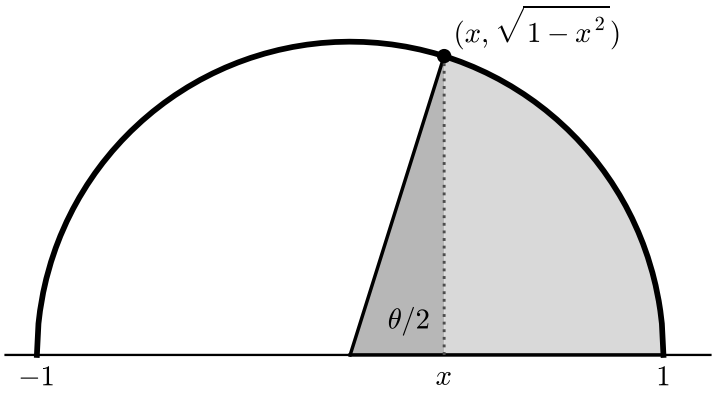



Figura 14: El sector de área $A(x)$: un triángulo de área $x\sqrt{1-x^2}/2$ más la región bajo $\sqrt{1-t^2}$ entre $x$ y 1. Si $A(x)=\theta/2$, entonces $x=\cos\theta$.

**Teorema C2-014.T3**

$A$ es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$ con $A'(x) = -1/(2\sqrt{1-x^2}) < 0$; es estrictamente decreciente, $A(1)=0$, $A(-1)=\pi/2$, $\pi>0$, y $A$ es biyectiva de $[-1,1]$ en $[0,\pi/2]$.

*Demostración.*

1. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}/2$ es continua en $[-1,1]$ (C1-022.T2, C1-022.T3, C2-014.T1).
2. $G(x) := \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ es continua en $[-1,1]$ y $G'(x) = -\sqrt{1-x^2}$ en $(-1,1)$ (C2-008.C1). Luego $A$ es continua en $[-1,1]$.
3. En $(-1,1)$, $1-x^2>0$; por la cadena (C1-030.T1, C2-014.T1, C1-028.T2),

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Por la regla del producto (C1-029.T2) y C1-029.T1:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{(1-x^2) - x^2 - 2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} < 0 \end{aligned}$$

   (C1-003.T7).
5. $A$ es continua en $[-1,1]$ con $A' < 0$ en $(-1,1)$: es estrictamente decreciente (C1-034.T2).
6. $A(1) = 0 + \int_1^1 = 0$ (C2-004.D1) y $A(-1) = 0 + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi/2$.
7. Por el paso 5, $\pi/2 = A(-1) > A(1) = 0$, así que $\pi > 0$.
8. $A$ es inyectiva (C1-010.T1); su imagen es un intervalo (C1-026.T1) que contiene a $A(1) = 0$ y a $A(-1) = \pi/2$ y, por la monotonía, está contenido en $[0, \pi/2]$. Así $A([-1,1]) = [0,\pi/2]$. ■

**Corolario C2-014.C3**

$2 < \pi < 4$.

*Demostración.*

1. *Cota superior.* Para $|t| \le 1$, $0 \le 1-t^2 \le 1$, así que $\sqrt{1-t^2} \le 1$ (C2-014.T1). La función $1-\sqrt{1-t^2}$ es continua y $\ge 0$ en $[-1,1]$ y vale 1 en $t = 1$.
2. Por C2-006.T3, $\int_{-1}^1 (1-\sqrt{1-t^2})\,dt > 0$; por linealidad (C2-004.T2) y C2-002.E1, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt < 2$. Luego $\pi < 4$.
3. *Cota inferior.* Para $|t| \le 1$, $0 \le 1 - |t| \le 1 + |t|$ (C1-004.T1, C1-004.T3), así que

$$(1-|t|)^2 \le (1-|t|)(1+|t|) = 1 - |t|^2 = 1 - t^2$$

   (C1-003.T9, C1-004.T6).
4. Como $1 - |t| \ge 0$, $\sqrt{(1-|t|)^2} = 1 - |t|$ (C2-014.D1), y por la monotonía de $\sqrt{}$ (C2-014.T1), $\sqrt{1-t^2} \ge 1 - |t|$. En $t = 1/2$ la desigualdad es estricta: $3/4 > 1/4$.
5. En $[0,1]$, $1 - |t| = 1 - t$ (C1-004.D1), y $\sqrt{1-t^2} - (1-t)$ es continua, $\ge 0$ y $> 0$ en $1/2$. Por C2-006.T3 y C2-009.E1,

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt > \int_0^1 (1-t)\,dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

6. En $[-1,0]$, $1-|t| = 1+t$, y por C2-004.T3 y C2-009.E1, $\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,dt \ge \int_{-1}^0 (1+t)\,dt = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

7. Por la aditividad (C2-004.T1), $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt > 1$, y $\pi > 2$. ■

## cos y sen en $[0,\pi]$

**Definición C2-014.D3 (cos y sen en $[0,\pi]$)**

Para $x \in [0,\pi]$: $\cos x$ es el único $y \in [-1,1]$ con $A(y) = x/2$, y $\operatorname{sen} x := \sqrt{1-(\cos x)^2}$.

Tiene sentido: $x/2 \in [0,\pi/2]$ y $A$ es biyectiva de $[-1,1]$ en $[0,\pi/2]$ (C2-014.T3); es decir, $\cos = A^{-1} \circ (x \mapsto x/2)$. Como $|\cos x| \leq 1$, $1-\cos^2 x \geq 0$ (C1-004.T6).

**Teorema C2-014.T4**

En $[0,\pi]$: cos es continua y estrictamente decreciente, $\cos 0 = 1$ y $\cos \pi = -1$; sen es continua, $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = 0$ y $\operatorname{sen} x > 0$ si $0 < x < \pi$; $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. En $(0,\pi)$, cos y sen son derivables con $\cos' = -\operatorname{sen}$ y $\operatorname{sen}' = \cos$.

**Idea de la demostración**
cos es la inversa de $A$ (con un factor $1/2$), así que su derivada es el recíproco de $A'$, que resulta ser $-$ sen. La derivada de sen $= \sqrt{1-\cos^2}$ sale por la cadena.

*Demostración.*

1. $A^{-1} : [0,\pi/2] \to [-1,1]$ es continua (C1-026.T3) y estrictamente decreciente (si $u < u'$ y $A^{-1}(u) \leq A^{-1}(u')$, aplicando $A$ decreciente, $u \geq u'$; C1-010.D2).
2. $\cos = A^{-1} \circ (x \mapsto x/2)$ es continua (C1-022.T3) y estrictamente decreciente en $[0,\pi]$; $\cos 0 = A^{-1}(0) = 1$ y $\cos \pi = A^{-1}(\pi/2) = -1$, porque $A(1) = 0$ y $A(-1) = \pi/2$ (C2-014.T3).
3. $\operatorname{sen} = \sqrt{} \circ (1-\cos^2)$ es continua (C2-014.T1, C1-022.T2, C1-022.T3); $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = \sqrt{0} = 0$.
4. Si $0 < x < \pi$, por la monotonía estricta, $-1 = \cos \pi < \cos x < \cos 0 = 1$, así que $\cos^2 x < 1$ (C1-003.T9) y $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} > 0$ (C2-014.D1).
5. $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$ por C2-014.D1.
6. Sea $x \in (0,\pi)$ e $y := \cos x \in (-1,1)$. $A$ es derivable en $y$ con $A'(y) = -1/(2\sqrt{1-y^2}) \neq 0$ (C2-014.T3), y $y$ es interior de $[-1,1]$.

7. Por C1-031.T1, $A^{-1}$ es derivable en $A(y) = x/2$ y

$$(A^{-1})'(x/2) = \frac{1}{A'(y)} = -2\sqrt{1-y^2} = -2\operatorname{sen} x.$$

8. Por la cadena (C1-030.T1, C1-028.T2), $\cos'(x) = (A^{-1})'(x/2) \cdot \frac{1}{2} = -\operatorname{sen} x$.
9. Por el paso 4, $1 - \cos^2 x > 0$, y por la cadena (C2-014.T1, C1-029.T1, C1-029.T2):

$$\operatorname{sen}'(x) = \frac{-2\cos x \cdot \cos' x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{2\cos x \operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x} = \cos x.$$

■

## Extensión a todo $\mathbb{R}$

**Definición C2-014.D4 (extensión a $\mathbb{R}$)**

Para $x \in [-\pi, 0)$: $\cos x := \cos(-x)$ y $\operatorname{sen} x := -\operatorname{sen}(-x)$. Para $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, sea $k := \lfloor (x+\pi)/(2\pi) \rfloor \in \mathbb{Z}$; entonces $y := x - 2\pi k \in [-\pi, \pi)$, y $\cos x := \cos y$, $\operatorname{sen} x := \operatorname{sen} y$.

Tiene sentido: si $x \in [-\pi, 0)$, $-x \in (0, \pi]$ (C1-003.T9). Y $k \leq (x+\pi)/(2\pi) < k+1$ (C1-007.T2) da $2\pi k - \pi \leq x < 2\pi k + \pi$ (C1-003.T4, $\pi > 0$), es decir, $y \in [-\pi, \pi)$.

**Lema del representante.** Si $z \in [-\pi, \pi)$ y $m \in \mathbb{Z}$, el $k$ de C2-014.D4 para $x = z + 2\pi m$ es $m$, y el $y$ correspondiente es $z$. En efecto, $(x+\pi)/(2\pi) = m + (z+\pi)/(2\pi)$ con $(z+\pi)/(2\pi) \in [0, 1)$, y por la unicidad de la parte entera (C1-007.T2), $k = m$.

**Teorema C2-014.T5**

Las definiciones C2-014.D3 y C2-014.D4 coinciden en $[0, \pi]$. Para todo $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x+2\pi) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$; $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$; $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. sen y cos son continuas en $\mathbb{R}$.

*Demostración.*

1. *Coincidencia.* Si $x \in [0, \pi)$, el lema con $m = 0$ da $y = x$, y D4 usa el valor de D3. Si $x = \pi$, se tiene $x = -\pi + 2\pi$ y el lema da $y = -\pi \in [-\pi, 0)$; la primera línea de D4 asigna a $-\pi$ el valor de D3 en $\pi$ para cos (es decir, $-1$) y menos el valor de D3 en $\pi$ para sen (es decir, $-0 = 0$). Ambos coinciden con D3 en $\pi$ (C2-014.T4).
2. *Periodicidad.* Si $x = y + 2\pi k$ con $y \in [-\pi, \pi)$, entonces $x + 2\pi = y + 2\pi(k+1)$, y por el lema

su representante también es $y$. Así $\cos(x + 2\pi) = \cos y = \cos x$; igual para sen. Más en general, $\cos(x + 2\pi m) = \cos x$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

3. *Paridad en* $(-\pi, \pi)$. Si $x \in (0, \pi)$, $-x \in (-\pi, 0)$ y por D4, $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Si $x \in (-\pi, 0)$, es lo mismo leído al revés. Si $x = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$.
4. *Paridad en general.* Sea $x = y + 2\pi k$ con $y \in [-\pi, \pi)$. Si $y \neq -\pi$, $-x = (-y) + 2\pi(-k)$ con $-y \in (-\pi, \pi)$, y por el lema y el paso 3, $\cos(-x) = \cos(-y) = \cos y = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Si $y = -\pi$, $-x = -\pi + 2\pi(1 - k)$ tiene representante $-\pi$, así que $\cos(-x) = \cos x$, y $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(-\pi) = -\operatorname{sen}\pi = 0 = -\operatorname{sen} x$.
5. *Suma de cuadrados.* En $[0, \pi]$ es C2-014.T4; en $[-\pi, 0)$ se sigue de D4 ($(-a)^2 = a^2$, C1-002.T4); en general, por el representante. De ahí $\cos^2 x \leq 1$ y $\operatorname{sen}^2 x \leq 1$, es decir, $|\cos x|, |\operatorname{sen} x| \leq 1$ (C1-004.T6).
6. *Continuidad en* $(0, \pi)$ *y en* $(-\pi, 0)$. En $(0, \pi)$, D4 coincide con D3 en el intervalo $[0, \pi]$, y C2-014.T4 da la continuidad. En $(-\pi, 0)$, $\cos x = \cos(-x)$ y $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$ son composiciones de continuas (C1-022.T3).
7. *Continuidad en 0.* $\lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0$ (C2-014.T4, C1-022.T0) y $\lim_{x\to 0^-} \cos x = \lim_{x\to 0^-} \cos(-x) = \cos 0$; por C1-020.T1 y C1-022.T0, cos es continua en 0. Igual sen: los dos laterales valen $\operatorname{sen} 0 = 0$.
8. *Continuidad en* $\pi$. Por la izquierda, $\cos x \to \cos\pi = -1$ (C2-014.T4). Por la derecha, para $x \in (\pi, 2\pi)$, $\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(2\pi - x)$ (pasos 2 y 4) con $2\pi - x \to \pi^-$, así que $\cos x \to \cos\pi$. Igual $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x) \to -\operatorname{sen}\pi = 0$.
9. *Continuidad en todo* $\mathbb{R}$. Todo $a$ es $z + 2\pi m$ con $z \in (-\pi, \pi]$, y $\cos x = \cos(x - 2\pi m)$ para todo $x$ (paso 2). Como cos es continua en $z$ (pasos 6-8) y $x \mapsto x - 2\pi m$ es continua, cos es continua en $a$ (C1-022.T3, C1-022.T2). Igual sen. ■

**Teorema C2-014.T6**

sen y cos son derivables en $\mathbb{R}$, con $\operatorname{sen}' = \cos$ y $\cos' = -\operatorname{sen}$.

*Demostración.*

1. En $(0, \pi)$ es C2-014.T4.
2. En $(-\pi, 0)$: $\cos x = \cos(-x)$, y por la cadena (C1-030.T1, C1-028.T2), $\cos'(x) = -\cos'(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (C2-014.T5). Y $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$ da $\operatorname{sen}'(x) = \cos(-x) = \cos x$.
3. En $(\pi, 2\pi)$: ahí $\cos x = \cos(x - 2\pi)$ con $x - 2\pi \in (-\pi, 0)$, y la cadena con el paso 2 da $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x - 2\pi) = -\operatorname{sen} x$; igual para sen.
4. En 0: cos es continua en 0 (C2-014.T5), derivable en $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ con derivada $-\operatorname{sen}$, y $\lim_{x\to 0}(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} 0 = 0$ por continuidad (C1-022.T0). Por C2-014.T2, $\cos'(0) = 0 =$

$-\operatorname{sen} 0$. Igual, $\operatorname{sen}'(0) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$.

5. En $\pi$: lo mismo con $r = \pi$, usando la derivabilidad en $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ (pasos 1 y 3).
6. En cualquier $a = z + 2\pi m$ con $z \in (-\pi, \pi]$: $\cos x = \cos(x - 2\pi m)$ para todo $x$, y la cadena da $\cos'(a) = \cos'(z) = -\operatorname{sen} z = -\operatorname{sen} a$ (pasos 1, 2, 4, 5; C2-014.T5). Igual para sen. ■

## Parte 2 · Fórmulas de suma y G1 como teorema

> **El resorte sin fricción**
> Una masa en un resorte ideal, estirada a 1 y soltada sin velocidad, cumple $x'' + x = 0$ (en unidades donde la constante vale 1). Si repites el experimento con la misma posición y la misma velocidad iniciales, la masa se mueve igual: el movimiento queda determinado. Ese es el teorema de unicidad, y de él salen las fórmulas de suma.
> Dónde falla la analogía: un resorte real tiene fricción y la ley de Hooke solo vale para estiramientos pequeños.

**Teorema C2-014.T7 (unicidad para $f'' + f = 0$)**

Si $f$ es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y $f'' + f = 0$, entonces $f = f(0) \cdot \cos + f'(0) \cdot \operatorname{sen}$. En particular, si $f(0) = f'(0) = 0$, entonces $f = 0$.

> **Idea de la demostración**
> Se resta la candidata; la diferencia $g$ cumple la misma ecuación con datos 0. Su «energía» $g^2 + g'^2$ tiene derivada 0, así que vale lo que valía en 0: cero.

*Demostración.*

1. Por C2-014.T6, $\cos'' = -\cos$ y $\operatorname{sen}'' = -\operatorname{sen}$ (C1-031.D1). Sea $g := f - f(0)\cos - f'(0)\operatorname{sen}$; es dos veces derivable y

$$g'' + g = f'' + f(0)\cos + f'(0)\operatorname{sen} + f - f(0)\cos - f'(0)\operatorname{sen} = f'' + f = 0$$

   (C1-029.T1).
2. $g(0) = f(0) - f(0) \cdot 1 - f'(0) \cdot 0 = 0$ y $g'(0) = f'(0) + f(0)\operatorname{sen} 0 - f'(0)\cos 0 = 0$ (C2-014.T4).

3. $E := g^2 + g'^2$ es derivable y $E' = 2gg' + 2g'g'' = 2g'(g + g'') = 0$ (C1-029.T2, C1-029.T1).
4. Por C1-034.T1 en el intervalo $\mathbb{R}$, $E$ es constante: $E = E(0) = 0$.
5. $0 \leq g^2 \leq g^2 + g'^2 = 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9), así que $g^2 = 0$ y $g = 0$ (C1-002.T5). ■

**Teorema C2-014.T8 (fórmulas de suma)**

Para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y, \qquad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

*Demostración.*

1. Fijemos $y$ y sea $h(x) := \operatorname{sen}(x + y)$. Por la cadena (C1-030.T1, C1-028.T2) y C2-014.T6, $h'(x) = \cos(x + y)$ y $h''(x) = -\operatorname{sen}(x + y) = -h(x)$.
2. $h(0) = \operatorname{sen} y$ y $h'(0) = \cos y$. Por C2-014.T7, $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} y \cos x + \cos y \operatorname{sen} x$.
3. Con $h(x) := \cos(x + y)$: $h'' = -h$, $h(0) = \cos y$, $h'(0) = -\operatorname{sen} y$, y C2-014.T7 da $\cos(x + y) = \cos y \cos x - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$. ■

**Corolario C2-014.C1**

$\cos(\pi/2) = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$; $\cos x > 0$ si $|x| < \pi/2$ y $\cos x < 1$ si $0 < x \leq \pi$; $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$ y $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$; para $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$; $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) > 0$.

*Demostración.*

1. Con $x = y = \pi/2$ en C2-014.T8 y $\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2$:

$$-1 = \cos \pi = \cos^2(\pi/2) - \operatorname{sen}^2(\pi/2) = 2\cos^2(\pi/2) - 1,$$

   así que $\cos^2(\pi/2) = 0$ y $\cos(\pi/2) = 0$ (C1-002.T5). Como $\pi/2 \in (0, \pi)$, $\operatorname{sen}(\pi/2) = \sqrt{1 - 0} = 1$ (C2-014.D3).
2. cos es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$ (C2-014.T4): si $0 \leq x < \pi/2$, $\cos x > \cos(\pi/2) = 0$; si $-\pi/2 < x < 0$, $\cos x = \cos(-x) > 0$ (C2-014.T5). Y si $0 < x \leq \pi$, $\cos x < \cos 0 = 1$.
3. Por C2-014.T8 con $\cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$: $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x + \pi) = -\cos x$; con $\cos(\pi/2) = 0$, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$: $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$.
4. Por inducción (C1-005.T1, C1-005.D2) y el paso 3, para $n \geq 0$: $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$

(con $n = 0$: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$). Para $n < 0$, por la paridad (C2-014.T5) y $(-1)^{-n} = (-1)^n$.

5. $\pi/4 \in (0, \pi/2)$, así que $\operatorname{sen}(\pi/4) > 0$ y $\cos(\pi/4) > 0$ (C2-014.T4, paso 2). Por C2-014.T8, $0 = \cos(\pi/2) = \cos^2(\pi/4) - \operatorname{sen}^2(\pi/4)$, y como ambos son positivos, $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ (C1-003.T9). ■

**Definición C2-014.D5 (tangente)**

$\tan x := \operatorname{sen} x / \cos x$ para los $x$ con $\cos x \neq 0$ (en particular, en $(-\pi/2, \pi/2)$).

**Teorema C2-014.T9**

tan es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ con $\tan' = 1/\cos^2 = 1 + \tan^2 > 0$, estrictamente creciente, $\tan(\pi/4) = 1$, $\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = \infty$, $\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan x = -\infty$ y $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. Para $0 < x < \pi/2$: $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$.

*Demostración.*

1. En $(-\pi/2, \pi/2)$, $\cos > 0$ (C2-014.C1). Por el cociente (C1-029.T3) y C2-014.T6, C2-014.T5:

$$\tan' = \frac{\cos \cdot \cos - \operatorname{sen} \cdot (-\operatorname{sen})}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2 > 0.$$

2. Por C1-034.T2, tan es estrictamente creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$. Por C2-014.C1, $\tan(\pi/4) = 1$.
3. *Límite en $\pi/2^-$.* Sea $K > 0$. cos es continua en $\pi/2$ con $\cos(\pi/2) = 0$, y sen con $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ (C1-022.T0). Hay $\delta \in (0, \pi/2)$ tal que, si $\pi/2 - \delta < x < \pi/2$, $\cos x < 1/(2K)$ y $\operatorname{sen} x > 1/2$ (C1-022.D1). Como ahí $\cos x > 0$, $\tan x > (1/2) \cdot 2K = K$ (C1-003.T7). Es C1-020.D1.
4. *Límite en $-\pi/2^+$.* $\tan(-x) = -\tan x$ (C2-014.T5), y el paso 3 da $\tan x < -K$ si $-\pi/2 < x < -\pi/2 + \delta$.
5. *Imagen.* tan es continua en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (C1-028.T1), así que su imagen es un intervalo (C1-026.T1); por los pasos 3 y 4 no está acotada ni arriba ni abajo, luego es $\mathbb{R}$ (C1-004.D2).
6. *Desigualdades.* $\varphi(x) := x - \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, \pi/2]$, derivable con $\varphi' = 1 - \cos > 0$ en $(0, \pi/2)$ (C2-014.C1); por C1-034.T2, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$. Y $\operatorname{sen} x > 0$ (C2-014.T4).
7. $\psi(x) := \tan x - x$ es continua en $[0, \pi/2)$, con $\psi' = \tan^2 > 0$ en $(0, \pi/2)$ (ahí $\tan > 0$); por C1-034.T2, $\psi(x) > \psi(0) = 0$. ■

**Teorema C2-014.T10 (G1 es teorema)**

Con las definiciones de esta clase, cada hecho de C1-021.G1 queda demostrado: $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ definidos para todo $x \in \mathbb{R}$ (C2-014.D4) y $\pi > 0$ (C2-014.T3); $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$ (C2-014.T4); $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(-x) = \cos x$ (C2-014.T5); $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (C2-014.T5); fórmulas de suma de sen y cos (C2-014.T8); $\tan := \operatorname{sen} / \cos$ (C2-014.D5); $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$ si $0 < x < \pi/2$ (C2-014.T9).

*Demostración.* Cada hecho es la pieza citada entre paréntesis, ya demostrada arriba. ■

**Corolario C2-014.C2 (liberación de la ⚠ G1)**

Para sen y cos de C2-014.D4 valen, sin ⚠ y demostrados aquí directamente (sin importar cómo se probaron en Cálculo I), los enunciados de C1-021.T0, C1-021.T1, C1-021.T2 y C1-028.T3. En consecuencia C1-038.E1 también vale sin ⚠.

*Demostración.*

1. (a) $|\cos x| \leq 1$ es C2-014.T5. Para $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$: si $x = 0$ es igualdad; si $x \neq 0$, el TVM (C1-033.T1) en el intervalo de extremos 0 y $x$ da $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = (\cos c)\, x$, y $|\operatorname{sen} x| = |\cos c|\, |x| \leq |x|$ (C1-004.T2).
2. (b) $\cos x > 0$ si $|x| < \pi/2$ es C2-014.C1.
3. (c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, por continuidad (C2-014.T5, C1-022.T0).
4. (d) Por la definición de derivada (C1-027.D1) y C2-014.T6:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{sen}'(0) = \cos 0 = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = -\cos'(0) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

5. (e) C1-028.T3 es C2-014.T6.
6. La demostración de C1-038.E1 solo usa C1-038.T2, $\operatorname{sen}' = \cos$, $\cos' = -\operatorname{sen}$ y $|\operatorname{sen}|, |\cos| \leq 1$, todos demostrados ya. ■

**⚠ Desde aquí**

La definición geométrica de Cálculo I queda retirada: sen y cos son los de C2-014.D4. El círculo reaparece como teorema: $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ recorre el círculo unitario y $A(\cos\theta) = \theta/2$ es el área del sector de ángulo $\theta \in [0, \pi]$ (C2-014.D2, C2-014.D3; coherencia con el área en C2-019.E2).

## Las inversas

**Definición C2-014.D6 (inversas)**

arcsen : $[-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ es la inversa de sen restringida a $[-\pi/2,\pi/2]$; arc cos : $[-1,1] \to [0,\pi]$, la de cos restringida a $[0,\pi]$; arctan : $\mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$, la de tan restringida a $(-\pi/2,\pi/2)$.

Tiene sentido:

1. En $[-\pi/2,\pi/2]$, sen es continua con $\text{sen}' = \cos > 0$ en el interior (C2-014.T6, C2-014.C1): es estrictamente creciente (C1-034.T2), inyectiva (C1-010.T1), y su imagen es un intervalo (C1-026.T1) con extremos $\text{sen}(\pm\pi/2) = \pm 1$ (C2-014.C1, C2-014.T5): es $[-1,1]$.
2. cos es continua y estrictamente decreciente en $[0,\pi]$ con $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ (C2-014.T4): imagen $[-1,1]$ (C1-023.C1).
3. tan : $(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$ es biyectiva (C2-014.T9, C1-010.T1).

**Teorema C2-014.T11 («arccos por área»)**

$\arccos = 2A$ en $[-1,1]$. arcsen y arc cos son continuas en $[-1,1]$ y derivables en $(-1,1)$ con $\text{arcsen}'\, x = 1/\sqrt{1-x^2}$ y $\arccos' x = -1/\sqrt{1-x^2}$; arctan es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $\arctan' x = 1/(1+x^2)$.

*Demostración.*

1. Sea $y \in [-1,1]$ y $x := 2A(y) \in [0,\pi]$ (C2-014.T3). Por C2-014.D3, $\cos x$ es el único $z \in [-1,1]$ con $A(z) = x/2 = A(y)$; así $z = y$, es decir, $\cos(2A(y)) = y$, y $\arccos y = 2A(y)$ (C1-011.D1).
2. Por C2-014.T3, $\arccos = 2A$ es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$ con $\arccos' x = 2A'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.
3. arcsen es continua (C1-026.T3). Sea $x \in (-1,1)$ y $u := \text{arcsen}\, x \in (-\pi/2,\pi/2)$, interior. Como $\text{sen}'(u) = \cos u > 0$, por C1-031.T1, $\text{arcsen}'\, x = 1/\cos u$.
4. $\cos u > 0$ y $\cos^2 u = 1 - \text{sen}^2 u = 1 - x^2$, así que $\cos u = \sqrt{1-x^2}$ (C2-014.D1) y $\text{arcsen}'\, x = 1/\sqrt{1-x^2}$.
5. arctan es continua (C1-026.T3). Para $x \in \mathbb{R}$ y $u := \arctan x$, $\tan'(u) = 1 + \tan^2 u = 1 + x^2 \neq 0$ (C2-014.T9), y C1-031.T1 da $\arctan' x = 1/(1+x^2)$. ■

**Teorema C2-014.T12**

$\arctan 1 = \pi/4$; $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$ y $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\pi/2$; $\int_0^1 dx/(1+x^2) = \pi/4$ y $\int_0^\infty dx/(1+x^2) = \pi/2$.

*Demostración.*

1. $\tan(\pi/4) = 1$ (C2-014.T9), luego $\arctan 1 = \pi/4$.
2. Sea $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ y $M := \tan(\pi/2 - \varepsilon)$. arctan es creciente (inversa de una creciente) con valores en $(-\pi/2, \pi/2)$; si $x > M$, $\pi/2 - \varepsilon < \arctan x < \pi/2$. Es C1-020.D1. En $-\infty$ es igual, con $\arctan(-x) = -\arctan x$.
3. $1/(1+x^2)$ es continua en $\mathbb{R}$ (C1-022.T2) y arctan es primitiva suya (C2-014.T11). Por Barrow (C2-009.C1), $\int_0^1 dx/(1+x^2) = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4$.
4. Igual, $\int_0^b dx/(1+x^2) = \arctan b \to \pi/2$ cuando $b \to \infty$ (paso 2); por C2-010.D1, la impropia (cuya convergencia ya sabíamos, C2-010.E2) vale $\pi/2$. ■

**Ejemplo C2-014.E1 (el caso $k = 0$ de las integrales elípticas)**
Para $k = 0$: $F(0; x) = \operatorname{arcsen} x$ en $[0, 1]$, $K(0) = \pi/2$ y $\operatorname{sn}(0; \cdot) = \operatorname{sen}$ en $[0, \pi/2]$.

1. Para $x \in [0, 1)$, $F(0; x) = \int_0^x dt/\sqrt{1-t^2}$ (C2-013.D1), y arcsen es primitiva del integrando en $(-1, 1)$ (C2-014.T11): por Barrow, $F(0; x) = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arcsen} x$.
2. $K(0) = \lim_{x\to1^-} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} 1 = \pi/2$ (continuidad, C1-022.T0; C2-014.C1; C2-010.D1).
3. Así $F(0; \cdot) = \operatorname{arcsen}$ en $[0, 1]$ (C2-013.T2), y su inversa es sen en $[0, \pi/2]$ (C2-013.D2, C2-014.D6).

**Ejemplo C2-014.E2 (una derivada no integrable)**
$g(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $g(0) := 0$ es derivable en $\mathbb{R}$, pero $g'$ no es acotada en $[-1, 1]$; por eso C2-009.T1 exige $f$ integrable.

1. Para $x \neq 0$, por la cadena y el producto (C1-030.T1, C1-029.T2, C1-029.C1):

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2).$$

2. En 0: $|g(h)/h| = |h \operatorname{sen}(1/h^2)| \leq |h|$ (C2-014.T5), así que $g(h)/h \to 0$ (C1-019.T2, C1-017.E1) y $g'(0) = 0$ (C1-027.D1).
3. Para $k \in \mathbb{N}$ y $x_k := 1/\sqrt{2\pi k} \in (0,1)$: $1/x_k^2 = 2\pi k$, $\operatorname{sen}(2\pi k) = 0$ y $\cos(2\pi k) = 1$ (C2-014.C1), así que $g'(x_k) = -2\sqrt{2\pi k}$.
4. Por C1-007.C1, $\{-2\sqrt{2\pi k}\}$ no está acotado, así que $g'$ no es acotada en $[-1,1]$ y no es integrable ahí (C2-002.D2).

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Los extremos $\pm 1$ en la derivada de la inversa**

En $y = \pm 1$, $\sqrt{1-y^2} = 0$ y $A$ no es derivable; C1-031.T1 no se aplica en $x = 0$ ni en $x = \pi$. Por eso $\cos'(0)$ y $\cos'(\pi)$ se obtienen aparte, con el límite de la derivada (C2-014.T6, pasos 4 y 5).

**⚠ Primero en $[0,\pi]$, después en $\mathbb{R}$**

$A$ solo toma valores en $[0,\pi/2]$, así que $A^{-1}(x/2)$ no tiene sentido para $x > \pi$. Por eso cos se define primero en $[0,\pi]$ y luego se extiende por paridad y periodicidad (C2-014.D4).

**⚠ La unicidad necesita un intervalo**

En $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$, la función $f := 0$ a la izquierda y $f := \operatorname{sen}$ a la derecha cumple $f'' + f = 0$ y coincide con sen cerca de $x = 1$, pero $f \neq \operatorname{sen}$. En la prueba de C2-014.T7, «$E' = 0 \Rightarrow E$ constante» (C1-034.T1) necesita un intervalo.

**⚠ Productos de senos, no sumas**

$\operatorname{sen}(x+y) \neq \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$: con $x = y = \pi/2$, $\operatorname{sen}\pi = 0 \neq 2$.

## Ejercicios

1. Demuestra que $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
2. Demuestra que $\cos(\pi/3) = 1/2$. (Sugerencia: $\cos(3x)$ en términos de $\cos x$, y $\cos\pi = -1$.)

3. Demuestra que sen es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.
4. Calcula $\int_0^{1/2} dx/\sqrt{1-x^2}$ usando el ejercicio 2.
5. Demuestra que si $f$ es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ con $f'' = -f$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, entonces $f = \cos$.

## Respuestas

1. C2-014.T8 con $x = y$, y $\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2$.
2. Por C2-014.T8 y el ejercicio 1, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Con $x = \pi/3$ y $c := \cos(\pi/3) > 0$ (C2-014.C1): $4c^3 - 3c + 1 = 0$, es decir, $(c+1)(2c-1)^2 = 0$, y $c = 1/2$.
3. $\operatorname{sen}' = \cos > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ (C2-014.C1, C1-034.T2). TVM con $|\cos| \leq 1$.
4. $\operatorname{arcsen}(1/2) - \operatorname{arcsen} 0 = \pi/6$, porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \cos(\pi/2 - \pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$ (C2-014.T8, C2-014.C1).
5. Es C2-014.T7 con $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

# C2-015 · Cambio de variable

## Motivación

> **El mantel de una mesa estirada**
> Tienes un mantel para una mesa redonda de radio 1 m. Te piden otro para una mesa con forma de elipse de 4 m por 2 m: la misma mesa redonda, estirada al doble a lo ancho. ¿Cuánta tela necesitas?
> Si cada franja vertical de la mesa redonda se ensancha al doble y conserva su altura, el área se duplica: $2\pi$ en lugar de $\pi$. Medir el área «en la regla estirada» o «en la regla original» da lo mismo, siempre que se cuente cuánto se estiró la regla en cada punto. Eso es el cambio de variable.
> Dónde falla la analogía: una tela real se estira de forma desigual y tiene grosor; aquí «estirar» es exactamente $x = rt$, y el factor es exactamente $r$.

## Definiciones

**Definición C2-015.D1 (clase $C^n$)**

Sean $J$ un intervalo abierto y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $f$ es **de clase** $C^n$ en $J$ si $f^{(n)}$ existe en todo $J$ (C1-031.D1) y es continua en $J$; $C^0$ = continua.

Si $f$ es de clase $C^n$ con $n \geq 1$, cada $f^{(k)}$ con $k < n$ es derivable en $J$, luego continua (C1-028.T1).

## Resultados

**Teorema C2-015.T1 (cambio de variable)**

Sean $J$ e $I$ intervalos abiertos, $g : J \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ en $J$ con $g(J) \subset I$, y $f$ continua en $I$. Para todos $a, b \in J$:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt.$$

**Idea de la demostración**
Una primitiva $F$ de $f$ en $I$, compuesta con $g$, es primitiva de $f(g)\, g'$ por la regla de la cadena. Barrow hace el resto.

*Demostración.*

1. Como $g(J) \subset I$, $g(a) \in I$. Sea $F(u) := \int_{g(a)}^{u} f$ para $u \in I$ (C2-004.D1). Por C2-008.C2, $F$ es derivable en $I$ y $F' = f$.
2. $H := F \circ g$ está definida en $J$ y, por la regla de la cadena (C1-030.T1),

$$H'(t) = F'(g(t))\, g'(t) = f(g(t))\, g'(t).$$

3. El integrando $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ es continuo en $J$: $g$ es continua (C1-028.T1), $f \circ g$ es continua (C1-022.T3), $g'$ es continua (C2-015.D1) y el producto de continuas es continuo (C1-022.T2).
4. Por la regla de Barrow en el intervalo abierto $J$ (C2-009.C1, en cualquier orden de $a$ y $b$),

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = H(b) - H(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

5. $F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(a)} f = 0$ (C2-004.D1) y $F(g(b)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f$. ■

**Ejemplo C2-015.E2**
Para $a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$: $\int_a^b \tan = \log(\cos a) - \log(\cos b)$. Para $x \in \mathbb{R}$: $\int_0^x te^{t^2}\, dt = (e^{x^2} - 1)/2$.

1. *Tangente.* En $J = (-\pi/2, \pi/2)$, $g = \cos$ es de clase $C^1$ (C2-014.T6) con valores en $I = (0, \infty)$ (C2-014.C1), y $f(u) = 1/u$ es continua en $I$. Como $\tan = \text{sen} / \cos = -f(\cos) \cos'$

(C2-014.D5), C2-015.T1 y C2-004.T2 dan

$$\int_a^b \tan = -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{du}{u} = -(\log\cos b - \log\cos a)$$

(C2-009.C1, C2-011.T1).

2. *El otro.* Con $g(t) = t^2$ ($C^1$ en $\mathbb{R}$) y $f(u) = e^u$ (continua, C2-012.T1):

$$\int_0^x e^{t^2}\, 2t\, dt = \int_0^{x^2} e^u\, du = e^{x^2} - 1$$

(C2-012.T1, C2-012.T4, C2-009.C1), y se divide entre 2 (C2-004.T2).

**Teorema C2-015.T2 (cambio lineal en un intervalo cerrado)**

Sean $a < b$, $r \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$ y $f$ integrable en el intervalo cerrado de extremos $ra + s$ y $rb + s$. Entonces $t \mapsto f(rt + s)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(rt + s)\, dt = \frac{1}{r}\int_{ra+s}^{rb+s} f.$$

**Idea de la demostración**

Las particiones de $[a, b]$ y del intervalo imagen se corresponden por $t \mapsto rt + s$; en subintervalos correspondientes, $f(r \cdot + s)$ y $f$ toman los mismos valores, y las longitudes se multiplican por $|r|$. Así las sumas de Darboux se corresponden, sin pedir continuidad.

*Demostración.* Sea $\varphi(t) := f(rt + s)$ y $\lambda(t) := rt + s$.

1. *Caso* $r > 0$. $\lambda$ es estrictamente creciente y lleva $[a, b]$ sobre $[\alpha, \beta] := [ra + s, rb + s]$, con inversa $u \mapsto (u - s)/r$ (C1-003.T4, C1-003.T3).
2. Si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es partición de $[a, b]$, $P' := \{\lambda(t_0), \dots, \lambda(t_n)\}$ es partición de $[\alpha, \beta]$ (C2-001.D1), y toda partición de $[\alpha, \beta]$ es de esa forma (con la inversa).
3. $\lambda([t_{i-1}, t_i]) = [\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)]$, así que $\varphi([t_{i-1}, t_i]) = f([\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)])$: los mismos valores. Por lo tanto $m_i(\varphi) = m_i(f)$ y $M_i(\varphi) = M_i(f)$ (C2-001.T2), mientras que $\Delta\lambda(t_i) = r\,\Delta t_i$.
4. Por C2-001.D2 y C1-005.T12, $L(f, P') = r\,L(\varphi, P)$ y $U(f, P') = r\,U(\varphi, P)$; en particular $\varphi$ es acotada.
5. Dado $\varepsilon > 0$, como $f$ es integrable hay $P'$ con $U(f, P') - L(f, P') < r\varepsilon$ (C2-002.T5); la $P$ corres-

pondiente cumple $U(\varphi,P)-L(\varphi,P)<\varepsilon$, y $\varphi$ es integrable (C2-002.T5).

6. Sea $I:=\int_\alpha^\beta f$. Para toda $P$, $L(f,P')\le I\le U(f,P')$ (C2-002.T4), así que $L(\varphi,P)\le I/r\le U(\varphi,P)$ (C1-003.T4). Por la unicidad de C2-002.T4, $\int_a^b \varphi = I/r$.
7. *Caso* $r<0$. $\lambda$ es estrictamente decreciente (C1-003.T4) y lleva $[a,b]$ sobre $[\alpha,\beta]:=[rb+s, ra+s]$; $P'$ (escrita en orden creciente) es partición de $[\alpha,\beta]$, el subintervalo $[t_{i-1},t_i]$ va a $[\lambda(t_i),\lambda(t_{i-1})]$ con longitud $|r|\Delta t_i$, y los pasos 3-6 dan, con $|r|=-r$:

$$\int_a^b \varphi = \frac{1}{|r|}\int_{rb+s}^{ra+s} f = \frac{1}{r}\Big(-\int_{rb+s}^{ra+s} f\Big) = \frac{1}{r}\int_{ra+s}^{rb+s} f$$

(C2-004.D1). ■

**⚠ Por qué hace falta T2 además de T1**

C2-015.T1 pide $f$ continua en un intervalo **abierto** que contenga los valores de $g$. Para el área del círculo el integrando es $\sqrt{1-x^2}$, que no está definido fuera de $[-1,1]$: no es continuo en ningún intervalo abierto que contenga a $[-1,1]$. C2-015.T2 no pide continuidad y se aplica directo.

**Corolario C2-015.C1 (simetría y periodicidad)**

Sean $a>0$ y $f$ integrable en $[-a,a]$: si $f$ es impar, $\int_{-a}^{a} f = 0$; si es par, $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es periódica de período $T>0$ e integrable en $[0,T]$, es integrable en todo intervalo cerrado y $\int_c^{c+T} f = \int_0^T f$ para todo $c\in\mathbb{R}$.

*Demostración.*

1. $f$ es integrable en $[-a,0]$ y en $[0,a]$ (C2-004.C1). Por C2-015.T2 con $r=-1, s=0$ en $[0,a]$:

$$\int_0^a f(-t)\,dt = -\int_0^{-a} f = \int_{-a}^0 f.$$

2. Si $f$ es impar, $f(-t)=-f(t)$ y el lado izquierdo es $-\int_0^a f$ (C2-004.T2); por la aditividad (C2-004.T1), $\int_{-a}^a f = -\int_0^a f + \int_0^a f = 0$.
3. Si $f$ es par, el lado izquierdo es $\int_0^a f$, y $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.
4. *Periodicidad.* De $f(t+T)=f(t)$ y la inducción (C1-005.T1), $f(t+kT)=f(t)$ para $k\in\mathbb{Z}$. Por C2-015.T2 con $r=1, s=-kT$ en $[kT,(k+1)T]$: $t\mapsto f(t-kT)=f(t)$ es integrable en $[kT,(k+1)T]$ y $\int_{kT}^{(k+1)T} f = \int_0^T f$.
5. Todo intervalo cerrado $[c,d]$ está contenido en un $[mT,nT]$ con $m<n$ enteros (C1-007.T2),

donde $f$ es integrable por la aditividad (C2-004.T1, varias veces); por C2-004.C1, lo es en $[c, d]$.

6. Sea $k := \lfloor c/T \rfloor$, así que $kT \le c < (k+1)T \le c + T$ (C1-007.T2). Por C2-004.C1,
$$\int_c^{c+T} f = \int_c^{(k+1)T} f + \int_{(k+1)T}^{c+T} f.$$
7. Por C2-015.T2 con $r = 1, s = T$: $\int_{kT}^{c} f(t+T)\,dt = \int_{(k+1)T}^{c+T} f$, y $f(t+T) = f(t)$; si $c = kT$ ambos lados son 0 (C2-004.D1). Así el segundo sumando es $\int_{kT}^{c} f$.
8. Sumando (C2-004.C1), $\int_c^{c+T} f = \int_{kT}^{(k+1)T} f = \int_0^T f$ (paso 4). ■

**Ejemplo C2-015.E1 (área del círculo y de la elipse)**
Para $r > 0$: $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \pi r^2/2$; para $a, b > 0$: $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - x^2/a^2}\,dx = \pi ab/2$.

1. Para $u \in [0, 1]$ y $r > 0$, $\sqrt{r^2 u} = r\sqrt{u}$: ambos son $\ge 0$ con el mismo cuadrado (C2-014.D1, C1-005.T9).
2. Con $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ en $[-r, r]$ (continua, luego integrable) y C2-015.T2 con escala $r$, $s = 0$ en $[-1, 1]$:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - r^2 t^2}\,dt = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$
3. El lado izquierdo es $r\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,dt = r\pi/2$ (paso 1, C2-004.T2, C2-014.D2). Multiplicando por $r$: $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \pi r^2/2$.
4. Igual, con escala $a$: $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - x^2/a^2}\,dx = a\int_{-1}^{1} b\sqrt{1 - t^2}\,dt = \pi ab/2$.

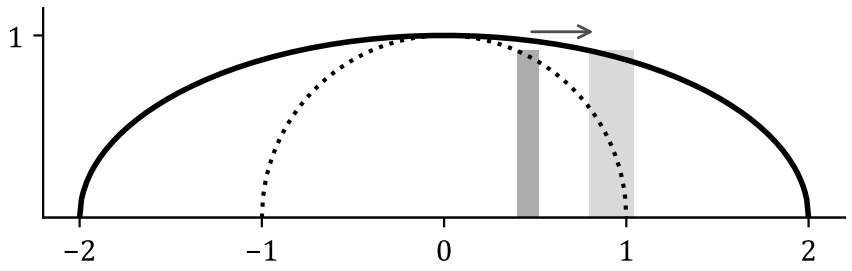



Figura 15: La semielipse de semiejes $a = 2$, $b = 1$ (trazo continuo) y el semicírculo de radio 1 (punteado): cada franja vertical se ensancha al doble y conserva su altura.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ $f$ continua en un intervalo que contenga los valores de $g$**

Con $f(u) = 1/u^2$, $g(t) = t$, $a = -1$, $b = 1$, la cuenta «$\int_{-1}^{1} du/u^2 = [-1/u]_{-1}^{1} = -2$» da un número negativo para un integrando positivo. El error: $1/u^2$ no es continua (ni acotada) en $[-1, 1]$, la integral no existe (C2-002.D2), y $-1/u$ no es primitiva en ningún intervalo que contenga a 0.

**⚠ $g$ de clase $C^1$**

Con $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$, $g(0) = 0$ (C2-014.E2), $f = 1$, $a = -1$, $b = 1$: el lado izquierdo es $\int_{g(-1)}^{g(1)} 1 = 0$, pero el derecho, $\int_{-1}^{1} g'$, no existe porque $g'$ no es acotada en $[-1, 1]$. $g$ es derivable, pero $g'$ no es continua: no es $C^1$.

**⚠ $g(J) \subset I$**

Con $f(u) = 1/u$ en $I = (0, \infty)$ y $g(t) = t$ en $J = (-2, 2)$, $f \circ g$ ni siquiera está definida en $t = 0$.

## Ejercicios

1. Calcula $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx$.
2. Demuestra que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 = 4/3$. (Sugerencia: $\operatorname{sen}^3 = (1 - \cos^2)\operatorname{sen}$.)
3. Calcula $\int_1^e (\log x)/x\, dx$.
4. Demuestra que $\int_0^{2\pi} \cos = 0$ usando la periodicidad y la paridad.
5. ¿Por qué no se puede aplicar C2-015.T1 a $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ con $g(t) = \operatorname{sen} t$ en $J = (-\pi/2 - 1, \pi/2 + 1)$, y cómo se arregla?

### Respuestas

1. $g(x) = 1 - x^2$ y $f(u) = \sqrt{u}$ en $(0, \infty)$ no sirve en $x = 1$ ($g(1) = 0 \notin I$). Se hace en $[0, c]$ con $c < 1$: $\int_0^c x\sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{3}(1 - (1 - c^2)^{3/2})$, y se pasa al límite con la continuidad de $c \mapsto \int_0^c$ (C2-007.T1): $1/3$.
2. $g = \cos$, $f(u) = 1 - u^2$: $\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t\, dt = -\int_1^{-1} (1 - u^2)\, du = 4/3$.
3. $g = \log$ en $(0, \infty)$, $f(u) = u$: $\int_0^1 u\, du = 1/2$ (C2-012.T3).
4. cos es par y $2\pi$-periódica (C2-014.T5). Por C2-015.C1, $\int_0^{2\pi} \cos = \int_{-\pi}^{\pi} \cos = 2\int_0^{\pi} \cos = 2(\operatorname{sen}\pi -$

sen $0) = 0$ (C2-009.C1).

5. $f(u) = \sqrt{1-u^2}$ no es continua en un intervalo abierto que contenga a $[-1, 1]$ (H3). Se arregla en $[-c, c]$ con $c < 1$ y se pasa al límite, o se usa C2-015.T2 como en C2-015.E1.

# C2-016 · Integración por partes y residuo de Taylor integral

## Motivación

> **La calculadora que solo suma y multiplica, otra vez**
> Tu calculadora solo suma y multiplica, y quieres $\log 0.2 = \log(1 + x)$ con $x = -0.8$, usando el polinomio de Taylor $x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots$. La cota de Lagrange, sin saber dónde cae el punto intermedio, da más de 380,000 con 10 términos y $9.9 \times 10^{28}$ con 50. ¿Hay que rendirse?
> No: el error real con 50 términos es de $10^{-6}$. La cota era floja. Escribiendo el residuo como una integral se obtiene otra cota, la de Cauchy, que sí tiende a 0.
> Dónde falla la analogía: una calculadora real no usa esta serie en $x = -0.8$ (converge lento); reduce el argumento primero.

## Resultados

**Teorema C2-016.T1 (integración por partes)**

Sean $J$ un intervalo abierto, $f$ y $g$ de clase $C^1$ en $J$, y $a, b \in J$. Entonces

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

*Demostración.*

1. $f$ y $g$ son derivables en $J$, así que $fg$ también y $(fg)' = f'g + fg'$ (C1-029.T2).
2. $f, g, f', g'$ son continuas en $J$ (C2-015.D1, C1-028.T1), así que $f'g + fg'$ es continua (C1-022.T2).
3. Por Barrow en $J$ (C2-009.C1, en cualquier orden): $\int_a^b (f'g + fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.
4. Por linealidad (C2-004.T2, con C2-004.D1 si $b < a$), $\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$. ■

**Ejemplo C2-016.E1**

Para $x > 0$, $\int_1^x \log t\,dt = x\log x - x + 1$; para $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x te^t\,dt = (x-1)e^x + 1$; $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$.

1. En $J = (0,\infty)$, con $f = \log$ y $g(t) = t$ (C2-011.T1): $\int_1^x \log t \cdot 1\,dt = x\log x - 0 - \int_1^x \frac{1}{t}\,t\,dt = x\log x - (x-1)$ (C2-002.E1).
2. En $\mathbb{R}$, con $f(t) = t$ y $g = \exp$ (C2-012.T1, C2-012.T4): $\int_0^x te^t\,dt = xe^x - 0 - \int_0^x e^t\,dt = xe^x - (e^x - 1)$.
3. Con $f = \operatorname{sen}$ y $g = -\cos$ (C2-014.T6): $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 = [-\operatorname{sen}\cos]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2$, porque $\operatorname{sen}(\pm\pi) = 0$ (C2-014.C1).
4. Por $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ (C2-014.T5) y C2-002.E1, la suma de las dos integrales es $2\pi$; como son iguales, cada una vale $\pi$.

**Teorema C2-016.T2 (residuo en forma integral)**

Sean $J$ un intervalo abierto, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f$ de clase $C^{n+1}$ en $J$ y $a, x \in J$. Entonces

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

**Idea de la demostración**

Inducción sobre $n$. El caso 0 es Barrow. De $n-1$ a $n$ se integra por partes una vez: «sale» exactamente el término nuevo del polinomio de Taylor, y queda la integral con un orden más.

*Demostración.* Por inducción (C1-005.T1) sobre la afirmación «para toda $f$ de clase $C^{n+1}$ en $J$ y todos $a, x \in J$, vale la fórmula».

1. *Caso $n = 0$.* $R_{0,a}(x) = f(x) - f(a)$ (C1-038.D1). Como $f'$ es continua en $J$, Barrow (C2-009.C1) da $f(x) - f(a) = \int_a^x f'$, que es la fórmula con $n = 0$ ($0! = 1$, $(x-t)^0 = 1$).
2. *Paso.* Sea $n \geq 1$ y supongamos la afirmación para $n-1$. Sea $f$ de clase $C^{n+1}$; en particular es de clase $C^n$, y
$$R_{n-1,a}(x) = \int_a^x f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$
3. Sean $u := f^{(n)}$, de clase $C^1$ en $J$, y $v(t) := -(x-t)^n/n!$. Por C1-028.T2, C1-030.T1, C1-029.T1 y

$n! = n \cdot (n-1)!$ (C1-005.D2),

$$v'(t) = \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

y $v$ es de clase $C^1$ (polinomio, C1-029.C1, C1-022.T2).

4. Por partes (C2-016.T1), con $v(x) = 0$ y $v(a) = -(x-a)^n/n!$:

$$\begin{aligned} R_{n-1,a}(x) &= u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u'v \\ &= \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt. \end{aligned}$$

5. Por C1-038.D1, $P_{n,a}(x) = P_{n-1,a}(x) + f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$, así que

$$R_{n,a}(x) = R_{n-1,a}(x) - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

■

**Corolario C2-016.C1 (residuo de Cauchy)**

Con las hipótesis de C2-016.T2, existe $t$ en el intervalo cerrado de extremos $a$ y $x$ con

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n(x-a)}{n!}.$$

*Demostración.* Sea $\varphi(t) := f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!$, continua (C1-022.T2).

1. Si $x = a$, $R_{n,a}(a) = 0$ y basta $t = a$.
2. Si $a < x$: por el TVM para integrales (C2-006.T2) hay $t \in [a, x]$ con $\int_a^x \varphi = \varphi(t)(x-a)$.
3. Si $x < a$: hay $t \in [x, a]$ con $\int_x^a \varphi = \varphi(t)(a-x)$, y $\int_a^x \varphi = -\varphi(t)(a-x) = \varphi(t)(x-a)$ (C2-004.D1).
4. En los dos casos, C2-016.T2 da la fórmula. ■

**Corolario C2-016.C2 (Lagrange desde la integral)**

Con las mismas hipótesis existe $t$ en el intervalo cerrado de extremos $a$ y $x$ con

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!};$$

es C1-038.T2 bajo la hipótesis más fuerte $C^{n+1}$.

*Demostración.*

1. $-(x-t)^{n+1}/(n+1)!$ es primitiva de $(x-t)^n/n!$ (como en el paso 3 de T2), así que por Barrow $\int_a^x (x-t)^n/n!\,dt = (x-a)^{n+1}/(n+1)!$, y para $x<a$, $\int_x^a (t-x)^n/n!\,dt = (a-x)^{n+1}/(n+1)!$.
2. Si $a<x$: el peso $g(t) := (x-t)^n/n!$ es continuo y $\geq 0$ en $[a,x]$, y $f^{(n+1)}$ es continua. Por el TVM ponderado (C2-006.T4) hay $t\in[a,x]$ con
$$R_{n,a}(x) = f^{(n+1)}(t)\int_a^x g = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
3. Si $x<a$: en $[x,a]$, $(x-t)^n = (-1)^n(t-x)^n$ con $\tilde{g}(t) := (t-x)^n/n! \geq 0$. Por C2-004.D1, C2-004.T2 y C2-006.T4, hay $t\in[x,a]$ con
$$R_{n,a}(x) = -(-1)^n\int_x^a f^{(n+1)}\tilde{g} = (-1)^{n+1}f^{(n+1)}(t)\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
4. Si $x=a$, ambos lados son 0. ■

**Ejemplo C2-016.E2 (Cauchy donde Lagrange no alcanza)**
Sean $f(t) := \log(1+t)$ en $J=(-1,\infty)$ y $-1<x<0$. Con C2-016.C1, $|R_{n,0}(x)| \leq |x|^{n+1}/(1+x) \to 0$, así que
$$\log(1+x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$$

1. Por inducción (C1-005.T1, C1-029.C1, C1-030.T1, C2-011.T1), para $k\geq 1$: $f^{(k)}(t) = (-1)^{k+1}(k-1)!/(1+t)^k$. Así $f$ es $C^\infty$ en $J$, $f(0)=0$ y $f^{(k)}(0)/k! = (-1)^{k+1}/k$, de modo que $P_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}x^k/k$ (C1-038.D1).
2. Por C2-016.C1 hay $t\in[x,0]$ con
$$|R_{n,0}(x)| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}}\cdot\frac{|x-t|^n|x|}{n!} = \frac{|x|}{1+t}\Big(\frac{t-x}{1+t}\Big)^n$$
(C1-004.T2; $t-x\geq 0$ y $1+t\geq 1+x>0$).
3. $(t-x)/(1+t) \leq |x| = -x$: equivale a $t-x\leq -x-xt$, es decir, $t(1+x)\leq 0$, cierto porque $t\leq 0$ y $1+x>0$ (C1-003.T4, C1-003.T7).
4. Así $|R_{n,0}(x)| \leq |x|^{n+1}/(1+t) \leq |x|^{n+1}/(1+x)$, y como $|x|<1$, $|x|^{n+1}\to 0$ (C1-014.T3); por el sándwich (C1-014.T1, C1-013.T2), $R_{n,0}(x)\to 0$.

**⚠ Por qué Lagrange no alcanza**

La cota de Lagrange en el mismo ejemplo es $|x|^{n+1}/((n+1)(1+t)^{n+1})$ con $t$ desconocido en $[x, 0]$. En el peor caso, $t$ cerca de $x$, es casi $(|x|/(1+x))^{n+1}/(n+1)$; si $x < -1/2$, $|x|/(1+x) > 1$ y la cota crece sin límite. Con $x = -0.8$ y $n = 10$, vale $4^{11}/11 \approx 381{,}300$. Cauchy gana porque el factor $(x-t)^n$ se encoge justo donde $1/(1+t)^{n+1}$ crece.

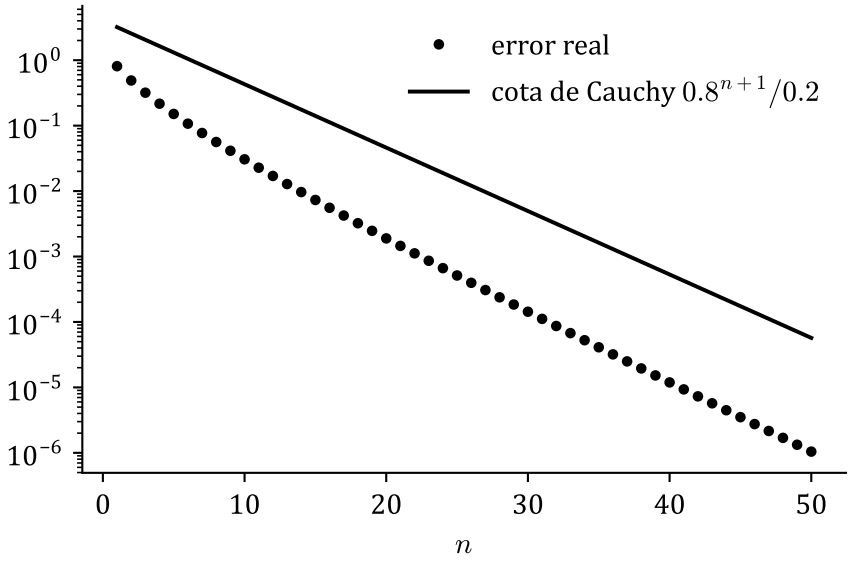



Figura 16: El error real de $\sum_{k\le n}(-1)^{k+1}x^k/k$ frente a $\log(1+x)$ en $x = -0.8$ (puntos) y la cota de Cauchy $0.8^{n+1}/0.2$ (línea), en escala logarítmica.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Un intervalo que contenga a $a$ y a $x$**

$f(t) = 1/t$, $a = 1$, $x = -1$, $n = 0$: $R_{0,1}(-1) = f(-1) - f(1) = -2$, pero $\int_1^{-1} f'$ no existe (entre $-1$ y 1 está el 0, fuera del dominio, y $f' = -1/t^2$ no es acotada).

**⚠ Clase $C^{n+1}$**

$n = 0$, $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(1/t^2)$, $f(0) = 0$ (C2-014.E2), $a = -1$, $x = 1$: $R_{0,-1}(1) = f(1) - f(-1) = 0$ existe, pero $\int_{-1}^{1} f'$ no, porque $f'$ no es acotada. $f$ es derivable pero no $C^1$.

## Ejercicios

1. Calcula $\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t \, dt$.
2. Calcula $\int_1^{e} (\log t)^2 \, dt$.
3. Demuestra que, para $x > 0$, $e^x - (1 + x + x^2/2) \leq x^3 e^x/6$, usando el residuo integral.
4. Con C2-016.E2, ¿cuántos términos garantizan error $< 10^{-3}$ para $\log 0.5$ ($x = -0.5$)?
5. Integra por partes dos veces para calcular $\int_0^{\pi} e^t \operatorname{sen} t \, dt$.

### Respuestas

1. $f = t$, $g = -\cos$: $[-t \cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos = \pi$.
2. $f = (\log t)^2$, $g = t$: $e - 2\int_1^{e} \log t \, dt = e - 2(e - e + 1) = e - 2$ (C2-016.E1).
3. $R_{2,0}(x) = \int_0^{x} e^t (x-t)^2/2 \, dt \leq e^x \int_0^{x} (x-t)^2/2 \, dt = e^x x^3/6$ (C2-004.T3, $e^t \leq e^x$).
4. $0.5^{n+1}/0.5 = 0.5^n < 10^{-3}$ si $n \geq 10$.
5. Con $I := \int_0^{\pi} e^t \operatorname{sen} t \, dt$: partes con $f = \operatorname{sen}$, $g = e^t$ da $I = -\int_0^{\pi} e^t \cos t \, dt$, y otra vez con $f = \cos$ da $\int_0^{\pi} e^t \cos t \, dt = -e^{\pi} - 1 + I$. Así $I = e^{\pi} + 1 - I$ e $I = (e^{\pi} + 1)/2$.

# C2-017 · Fracciones parciales

## Motivación

> **El mueble en piezas estándar**
> Un mueble llega en una caja con piezas de pocos tipos estándar y un instructivo. Sabes atornillar cada pieza; el instructivo garantiza que el mueble se arma solo con ellas.
> Con las funciones racionales pasa lo mismo. $1/(x^2-1)$ no se integra con sustitución ni con partes de forma directa, pero se desarma:
>
> $$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big),$$
>
> y cada pieza tiene primitiva conocida. El «instructivo» es el teorema de descomposición C2-017.T7.
> Dónde falla la analogía: el instructivo supone que ya sabes qué piezas trae la caja, es decir, la factorización del denominador. En general encontrarla exige raíces de polinomios que no siempre se escriben explícitamente; que siempre exista es el teorema fundamental del álgebra (C2-017.T6 ⚠), que aquí solo se enuncia.

El capítulo empieza con el álgebra de polinomios que el método necesita (Cálculo I solo tiene C1-010.D2 y C1-020.T4), y termina con el método.

## Álgebra de polinomios

**Definición C2-017.D1 (álgebra de polinomios)**

Por C1-020.T4, un polinomio (C1-010.D2) determina sus coeficientes y se identifica con ellos. Suma y producto: si $p = \sum a_i x^i$ y $q = \sum b_j x^j$, $p+q$ tiene coeficientes $a_k + b_k$ y $pq$ tiene coeficientes $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$; son los coeficientes de la suma y del producto de las funciones, así que evaluar respeta sumas y productos: $(p+q)(c) = p(c) + q(c)$ y $(pq)(c) = p(c)q(c)$ para

todo $c \in \mathbb{R}$. $\operatorname{gr} p$ es su grado; $p$ es **mónico** si su coeficiente principal es 1. $d$ **divide** a $p$ ($d \mid p$) si $p = dq$ para algún polinomio $q$. $p$ con $\operatorname{gr} p \geq 1$ es **irreducible** si sus únicos divisores son las constantes no nulas y los $c \cdot p$ ($c \neq 0$). $p$ y $q$ son **coprimos** si sus únicos divisores comunes son las constantes no nulas.

La fórmula de $c_k$ es lo que se obtiene al multiplicar las funciones y agrupar potencias de $x$ (asociatividad, conmutatividad y distributividad: K1, K2, K5, K6, K9, con C1-005.T12). Por eso evaluar en $c$ respeta sumas y productos, y el teorema del factor (C2-017.C1) puede evaluar $q \cdot (x - c)$ como $q(c) \cdot 0$.

**Teorema C2-017.T1 (grado del producto)**

Si $p, q \neq 0$, entonces $pq \neq 0$ y $\operatorname{gr}(pq) = \operatorname{gr} p + \operatorname{gr} q$; si $pq = pr$ y $p \neq 0$, entonces $q = r$; si $p + q \neq 0$, $\operatorname{gr}(p + q) \leq \max(\operatorname{gr} p, \operatorname{gr} q)$.

*Demostración.* Sean $m = \operatorname{gr} p$, $n = \operatorname{gr} q$, con coeficientes principales $a_m, b_n \neq 0$.

1. Si $k > m + n$, cada término $a_i b_j$ con $i + j = k$ tiene $i > m$ o $j > n$, luego vale 0: $c_k = 0$.
2. $c_{m+n} = a_m b_n$ (el único término con $i \leq m$, $j \leq n$), y $a_m b_n \neq 0$ (C1-002.T5). Así $pq \neq 0$ y $\operatorname{gr}(pq) = m + n$.
3. Si $pq = pr$, entonces $p(q - r) = 0$ (distributividad, K-axiomas); si $q - r \neq 0$, el paso 2 daría $p(q - r) \neq 0$. Luego $q = r$.
4. Los coeficientes de $p + q$ de índice $> \max(m, n)$ son $0 + 0$. ■

**Teorema C2-017.T2 (división con residuo)**

Si $p$ y $d$ son polinomios y $d \neq 0$, existen únicos polinomios $q$ y $r$ con $p = qd + r$ y ($r = 0$ o $\operatorname{gr} r < \operatorname{gr} d$).

*Demostración.* Sea $n = \operatorname{gr} d$ con coeficiente principal $b_n \neq 0$.

1. *Existencia.* Si $p = 0$ o $\operatorname{gr} p < n$, sirven $q = 0, r = p$.
2. Supongamos que hay polinomios $p$ con $\operatorname{gr} p \geq n$ para los que no existen $q, r$. Por el buen orden (C1-005.T3, aplicado a $\{\operatorname{gr} p + 1\}$), hay uno, $p$, de grado mínimo $m \geq n$, con coeficiente principal $a_m$.
3. $p_1 := p - (a_m / b_n) x^{m-n} d$ tiene el coeficiente de $x^m$ igual a 0, así que $p_1 = 0$ o $\operatorname{gr} p_1 < m$ (C2-

017.T1). Por la minimalidad (o por el paso 1), $p_1 = q_1 d + r$ con $r = 0$ o $\operatorname{gr} r < n$.

4. Entonces $p = (q_1 + (a_m/b_n)x^{m-n})d + r$, contradicción. Así $q, r$ existen siempre.
5. *Unicidad.* Si $qd + r = q'd + r'$, entonces $(q - q')d = r' - r$. Si $q \neq q'$, el lado izquierdo tiene grado $\geq n$ (C2-017.T1) y el derecho es 0 o tiene grado $< n$: imposible. Luego $q = q'$ y $r = r'$. ■

**Corolario C2-017.C1 (teorema del factor)**

$p(c) = 0 \Leftrightarrow (x - c) \mid p$. Un polinomio de grado $n \geq 1$ tiene a lo más $n$ raíces.

*Demostración.*

1. Por C2-017.T2, $p = q \cdot (x - c) + r$ con $r$ constante ($r = 0$ o $\operatorname{gr} r < 1$). Evaluando en $c$, $p(c) = q(c) \cdot 0 + r = r$.
2. Si $p(c) = 0$, entonces $r = 0$ y $(x - c) \mid p$. Si $p = (x - c)q$, $p(c) = 0 \cdot q(c) = 0$.
3. *Raíces.* Por inducción sobre $n$ (C1-005.T1). Si $n = 1$, $p = ax + b$ con $a \neq 0$ tiene la única raíz $-b/a$. Si $\operatorname{gr} p = n + 1$ y $p$ tiene una raíz $c$, $p = (x - c)q$ con $\operatorname{gr} q = n$ (C2-017.T1). Si $c' \neq c$ es raíz, $0 = (c' - c)q(c')$ da $q(c') = 0$ (C1-002.T5); $q$ tiene a lo más $n$ raíces, así que $p$ tiene a lo más $n + 1$. ■

**Teorema C2-017.T3 (Bézout)**

Si $p, q \neq 0$ son coprimos, existen polinomios $A$ y $B$ con $Ap + Bq = 1$.

*Demostración.*

1. El conjunto $\mathcal{S} := \{Ap + Bq \neq 0 : A, B \text{ polinomios}\}$ no es vacío ($p \in \mathcal{S}$). Por el buen orden (C1-005.T3, sobre los grados +1), hay $D = A_0 p + B_0 q \in \mathcal{S}$ de grado mínimo.
2. Por C2-017.T2, $p = sD + r$ con $r = 0$ o $\operatorname{gr} r < \operatorname{gr} D$. Como $r = (1 - sA_0)p + (-sB_0)q$, si $r \neq 0$ estaría en $\mathcal{S}$ con grado menor: absurdo. Luego $r = 0$ y $D \mid p$. Igual, $D \mid q$.
3. $p$ y $q$ son coprimos, así que $D$ es una constante $c \neq 0$, y $(A_0/c)p + (B_0/c)q = 1$. ■

**Teorema C2-017.T4 (lema de Euclides)**

Si $p$ es irreducible y $p \mid fg$, entonces $p \mid f$ o $p \mid g$. En consecuencia, si $p \mid f_1 \cdots f_m$, $p$ divide a algún $f_i$.

*Demostración.*

1. Supongamos $p \nmid f$. Un divisor común $D$ de $p$ y $f$ divide a $p$, luego es una constante no nula o $c \cdot p$ (C2-017.D1); si fuera $c \cdot p$, $p = c^{-1}(cp)$ dividiría a $f$. Así $p$ y $f$ son coprimos ($f \neq 0$ porque $p \nmid f$).
2. Por Bézout (C2-017.T3), $Ap + Bf = 1$, y $g = Apg + B(fg)$. $p$ divide a ambos sumandos, luego $p \mid g$.
3. Por inducción sobre $m$ (C1-005.T1): si $p \mid (f_1 \cdots f_m)f_{m+1}$, el caso de dos factores da $p \mid f_1 \cdots f_m$ o $p \mid f_{m+1}$. ■

**Teorema C2-017.T9 (divisor irreducible)**

Todo polinomio $p$ con $\operatorname{gr} p \geq 1$ tiene un divisor irreducible.

*Demostración.*

1. Los divisores de $p$ de grado $\geq 1$ forman un conjunto no vacío (contiene a $p$). Por el buen orden (C1-005.T3), hay uno, $D$, de grado mínimo.
2. Sea $E \mid D$, $D = EF$. Entonces $E \mid p$ ($p = DG = E(FG)$), $E \neq 0$ y $\operatorname{gr} E + \operatorname{gr} F = \operatorname{gr} D$ (C2-017.T1).
3. Si $\operatorname{gr} E = 0$, $E$ es constante no nula. Si $\operatorname{gr} E \geq 1$, por la minimalidad $\operatorname{gr} E \geq \operatorname{gr} D$, así que $\operatorname{gr} F = 0$, $F = c \neq 0$ y $E = c^{-1}D$.
4. Así los únicos divisores de $D$ son constantes no nulas y múltiplos constantes de $D$: $D$ es irreducible. ■

**Teorema C2-017.T5 (factores irreducibles)**

(a) Todo $x - a$ es irreducible, y $x^2 + bx + d$ con $b^2 < 4d$ es irreducible. (b) Sean $Q_1$ mónico irreducible, $m \in \mathbb{N}$ y $R_1, \ldots, R_s$ polinomios no nulos. Si $Q_1$ es coprimo con cada $R_j$, $Q_1^m$ es coprimo con $R_1 \cdots R_s$. En particular, si $Q_1 \neq Q_2$ son mónicos irreducibles y $m, n \in \mathbb{N}$, $Q_1^m$ y $Q_2^n$ son coprimos.

*Demostración.*

1. *(a), grado 1.* Si $x - a = EF$, $\operatorname{gr} E + \operatorname{gr} F = 1$ (C2-017.T1): o $E$ es constante, o $F$ es constante $c \neq 0$ y $E = c^{-1}(x - a)$.
2. *(a), grado 2.* $x^2 + bx + d = (x + b/2)^2 + (d - b^2/4)$, con $d - b^2/4 > 0$; así $x^2 + bx + d > 0$ para todo $x$ (C1-003.T5, C1-003.T9) y no tiene raíces. Si tuviera un divisor $E$ de grado 1, $E = e(x - c)$

y $(x - c)$ lo dividiría, con raíz $c$ (C2-017.C1): imposible. Los divisores de grado 0 son constantes no nulas y los de grado 2 son $c \cdot (x^2 + bx + d)$ (paso 3 de T9).

3. *(b).* Sea $D$ un divisor común de $Q_1^m$ y $R_1 \cdots R_s$; $D \neq 0$. Si $\operatorname{gr} D \geq 1$, $D$ tiene un divisor irreducible $P$ (C2-017.T9).
4. $P \mid Q_1^m$, así que $P \mid Q_1$ (C2-017.T4); como $Q_1$ es irreducible y $\operatorname{gr} P \geq 1$, $P = c\,Q_1$ con $c \neq 0$.
5. $P \mid R_1 \cdots R_s$, así que $P \mid R_j$ para algún $j$ (C2-017.T4), y $Q_1 = c^{-1}P \mid R_j$: $Q_1$ sería un divisor común no constante de $Q_1$ y $R_j$, contra la hipótesis. Luego $\operatorname{gr} D = 0$.
6. *En particular.* Si $Q_1 \neq Q_2$ son mónicos irreducibles, un divisor común $E$ no constante cumpliría $E = cQ_1 = c'Q_2$; comparando coeficientes principales, $c = c'$ y $Q_1 = Q_2$ (C2-017.T1). Así $Q_1$ y $Q_2$ son coprimos, y (b) con $R_1 = \cdots = R_n = Q_2$ da que $Q_1^m$ y $Q_2^n$ son coprimos. ■

**Teorema C2-017.T6 ⚠ (factorización real, enunciado)**

Todo polinomio $Q$ con $\operatorname{gr} Q \geq 1$ se escribe $Q = c \cdot Q_1^{m_1} \cdots Q_k^{m_k}$ con $c \neq 0$, $m_i \in \mathbb{N}$ y $Q_1, \ldots, Q_k$ mónicos irreducibles distintos, cada uno de la forma $x - a$ o $x^2 + bx + d$ con $b^2 < 4d$.

**⚠ Por qué se marca**

Que todo irreducible real tenga grado $\leq 2$ equivale al teorema fundamental del álgebra (números complejos; se demuestra en Variable Compleja). Solo garantiza que la hipótesis de C2-017.T7 siempre puede cumplirse: T7 y todos los ejemplos dan la factorización explícita y **no usan T6**.

## El método

**Teorema C2-017.T7 (descomposición en fracciones parciales)**

Sean $P, Q$ polinomios con $Q \neq 0$ y $\operatorname{gr} P < \operatorname{gr} Q$ (o $P = 0$), y $Q = c \cdot Q_1^{m_1} \cdots Q_k^{m_k}$ con $c \neq 0$ y $Q_1, \ldots, Q_k$ mónicos irreducibles distintos. Existen polinomios $A_{ij}$, cada uno 0 o de grado $< \operatorname{gr} Q_i$, con

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j} \quad \text{en } \{x : Q(x) \neq 0\}.$$

Si $\operatorname{gr} P \geq \operatorname{gr} Q$, antes se divide (C2-017.T2).

**Idea de la demostración**
Bézout separa factores coprimos; la división con residuo reparte cada potencia en «pisos»; la inducción hace el resto.

*Demostración.* Todas las igualdades que siguen son de polinomios, divididas entre valores no nulos de $Q$.

1. *Separar dos factores coprimos.* Sea $Q = Q'Q''$ con $Q', Q''$ coprimos y $\operatorname{gr} P < \operatorname{gr} Q$. Por Bézout (C2-017.T3), $AQ' + BQ'' = 1$, y multiplicando por $P/Q$:
$$\frac{P}{Q} = \frac{PB}{Q'} + \frac{PA}{Q''}.$$
2. Por C2-017.T2, $PB = sQ' + P'$ con $P' = 0$ o $\operatorname{gr} P' < \operatorname{gr} Q'$. Con $P'' := PA + sQ''$:
$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} + \frac{P''}{Q''}.$$
3. Multiplicando por $Q$: $P''Q' = P - P'Q''$. El lado derecho es 0 o tiene grado $< \operatorname{gr} Q = \operatorname{gr} Q' + \operatorname{gr} Q''$ (C2-017.T1); así $P'' = 0$ o $\operatorname{gr} P'' < \operatorname{gr} Q''$.
4. *Una potencia.* Si $\operatorname{gr} P < m \operatorname{gr} Q_1$, existen $A_1, \dots, A_m$ (cada uno 0 o de grado $< \operatorname{gr} Q_1$) con $P/Q_1^m = \sum_{j=1}^{m} A_j/Q_1^j$. Por inducción sobre $m$ (C1-005.T1): si $m = 1$, $A_1 = P$. Si $m \geq 2$, $P = sQ_1 + A_m$ (C2-017.T2) con $A_m = 0$ o $\operatorname{gr} A_m < \operatorname{gr} Q_1$, y $P/Q_1^m = A_m/Q_1^m + s/Q_1^{m-1}$; si $s \neq 0$, $\operatorname{gr} s + \operatorname{gr} Q_1 \leq \max(\operatorname{gr} P, \operatorname{gr} A_m) < m \operatorname{gr} Q_1$, así que $\operatorname{gr} s < (m-1) \operatorname{gr} Q_1$ y se aplica la hipótesis de inducción a $s$.
5. *Todos los factores.* Por inducción sobre $k$. Si $k = 1$, es el paso 4 con $P/c$. Si $k \geq 2$, sean $Q' := Q_1^{m_1}$ y $Q'' := cQ_2^{m_2} \cdots Q_k^{m_k}$; son coprimos por C2-017.T5 b ($Q_1$ es coprimo con cada $Q_i$, $i \geq 2$, y las constantes no agregan divisores). Los pasos 1-3 separan $P/Q$; el paso 4 descompone $P'/Q'$, y la hipótesis de inducción, $P''/Q''$. ■

**Teorema C2-017.T8 (primitivas de las fracciones simples)**

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $j \in \mathbb{N}$. En cada intervalo abierto que no contiene a $a$, $\log|x-a|$ es primitiva de $1/(x-a)$ y $(x-a)^{1-j}/(1-j)$ lo es de $(x-a)^{-j}$ si $j \geq 2$. Si $b^2 < 4d$ y $x^2+bx+d = (x+b/2)^2+\gamma^2$ con $\gamma > 0$: $\log(x^2+bx+d)$ es primitiva de $(2x+b)/(x^2+bx+d)$, y $(x^2+bx+d)^{1-j}/(1-j)$ de $(2x+b)/(x^2+bx+d)^j$ si $j \geq 2$; $(1/\gamma)\arctan((x+b/2)/\gamma)$ lo es de $1/(x^2+bx+d)$; y

$I_j(u) := \int_0^u ds/(s^2+\gamma^2)^j$ cumple

$$I_{j+1}(u) = \frac{u}{2j\gamma^2(u^2+\gamma^2)^j} + \frac{2j-1}{2j\gamma^2} I_j(u).$$

Por lo tanto, si cada $Q_i$ es de la forma $x-a$ o $x^2+bx+d$ con $b^2 < 4d$, cada $A_{ij}/Q_i^j$ de C2-017.T7 tiene una primitiva explícita: si $Q_i = x^2+bx+d$ y $A_{ij} = \alpha x + \beta$, se separa $\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2}(2x+b) + (\beta - \frac{\alpha b}{2})$, y el segundo sumando se lleva a $I_j$ con $s = x + b/2$.

*Demostración.*

1. $\log|x-a|$: por C2-012.T7 con $f(x) = x-a$, su derivada es $1/(x-a)$. $(x-a)^{1-j}/(1-j)$: por C1-029.C1 y la cadena (C1-030.T1), su derivada es $(x-a)^{-j}$.
2. $\gamma := \sqrt{d - b^2/4} > 0$ (C2-014.D1), y $x^2+bx+d = (x+b/2)^2 + \gamma^2 > 0$. Por C2-011.T1 y la cadena, $(\log(x^2+bx+d))' = (2x+b)/(x^2+bx+d)$; por C1-029.C1 y la cadena, $((x^2+bx+d)^{1-j}/(1-j))' = (2x+b)/(x^2+bx+d)^j$.
3. Por C2-014.T11 y la cadena:

$$\left(\frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x+b/2}{\gamma}\right)' = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{1+(x+b/2)^2/\gamma^2}\cdot\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{(x+b/2)^2+\gamma^2}.$$

4. *Reducción.* Por partes (C2-016.T1) con $f(s) = (s^2+\gamma^2)^{-j}$ y $g(s) = s$:

$$I_j(u) = \frac{u}{(u^2+\gamma^2)^j} + 2j\int_0^u \frac{s^2}{(s^2+\gamma^2)^{j+1}}\,ds.$$

5. Con $s^2 = (s^2+\gamma^2) - \gamma^2$ y linealidad (C2-004.T2): $I_j(u) = u/(u^2+\gamma^2)^j + 2jI_j(u) - 2j\gamma^2 I_{j+1}(u)$. Despejando, se obtiene la fórmula.
6. *Explícita.* Para $Q_i = x-a$, $A_{ij}$ es una constante y basta el paso 1. Para $Q_i = x^2+bx+d$, $A_{ij} = \alpha x+\beta = \frac{\alpha}{2}(2x+b)+(\beta-\alpha b/2)$; la primera parte, por el paso 2. Para la segunda, $x \mapsto I_j(x+b/2)$ es primitiva de $1/((x+b/2)^2+\gamma^2)^j$ (C2-008.C2, C1-030.T1), con $I_1(u) = (1/\gamma)\arctan(u/\gamma)$ (paso 3, C2-009.C1) y $I_j$ explícita por la reducción e inducción (C1-005.T1). ■

**Corolario C2-017.C2 ⚠ (por depender de C2-017.T6)**

Toda función racional $P/Q$ tiene, en cada intervalo abierto donde $Q \neq 0$, una primitiva escrita con funciones racionales, log y arctan.

*Demostración (condicionada a C2-017.T6).* Si $\operatorname{gr} P \geq \operatorname{gr} Q$, $P = sQ + r$ (C2-017.T2) y $P/Q = s + r/Q$; $s$ es un polinomio, con primitiva polinomial (C2-009.E1). Por C2-017.T6 ⚠, $Q$ tiene una factorización como la que pide C2-017.T7; T7 descompone $r/Q$, y C2-017.T8 da una primitiva de cada pieza. ■

**Ejemplo C2-017.E1**
$\int_2^3 dx/(x^2-1) = \frac{1}{2}\log(3/2)$ y $\int_1^2 dx/(x(x^2+1)) = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 5$.

1. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, factores mónicos irreducibles distintos (C2-017.T5 a). Buscamos $A, B$ con $1 = A(x+1) + B(x-1)$: en $x = 1$, $A = 1/2$; en $x = -1$, $B = -1/2$ (C1-020.T4 garantiza que, una vez igualados coeficientes, la igualdad vale para todo $x$; aquí basta comprobar $\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) = 1$).
2. En $(1, \infty)$, por C2-017.T8 y Barrow (C2-009.C1, C2-004.T2):

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big[\log\frac{x-1}{x+1}\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{2} - \log\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

   (C2-011.C1).
3. $x(x^2+1)$: $x$ y $x^2+1$ ($b = 0, d = 1, b^2 = 0 < 4$) son mónicos irreducibles distintos. Con $1 = A(x^2+1) + (Bx + C)x$: $A = 1, B = -1, C = 0$; comprobación: $(x^2+1) - x^2 = 1$.
4. En $(0, \infty)$, $\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ es primitiva (C2-017.T8), y

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log 2 - \frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 5.$$

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Primero dividir si** $\operatorname{gr} P \geq \operatorname{gr} Q$

$x^2/(x^2-1) \neq A/(x-1) + B/(x+1)$ para cualesquiera $A, B$: al sumar, el numerador es $A(x+1) + B(x-1)$, de grado $\leq 1$, y no puede ser $x^2$ (C1-020.T4). Primero se divide: $x^2/(x^2-1) = 1 + 1/(x^2-1)$.

**⚠ Factores realmente irreducibles**

$x^2 - 1$ no es irreducible ($b^2 = 0 > -4 = 4d$): tratarlo como una sola pieza $(\alpha x + \beta)/(x^2-1)$ no está mal, pero no lleva a una primitiva con arctan (C2-017.T8 pide $b^2 < 4d$); hay que factorizarlo.

> ⚠ **Factores repetidos**
>
> Para $1/(x^2(x+1))$ hacen falta las piezas $A_1/x$ y $A_2/x^2$: con solo $A/x + B/(x+1)$ el numerador $A(x+1)+Bx$ tiene grado $\le 1$ y el denominador común sería $x(x+1)$, no $x^2(x+1)$. La forma correcta es $1/(x^2(x+1)) = -1/x + 1/x^2 + 1/(x+1)$.

## Ejercicios

1. Descompón $\dfrac{3x+1}{(x-1)(x+2)}$ y calcula su integral en $[2,3]$.
2. Calcula $\int_0^1 dx/(x^2+x+1)$.
3. Demuestra que si $p$ tiene grado $n$ y se anula en $n+1$ puntos distintos, entonces $p=0$.
4. Usa la fórmula de reducción para calcular $\int_0^1 dx/(x^2+1)^2$.
5. Demuestra que $x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ y que los dos factores son irreducibles.

### Respuestas

1. $\frac{4/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2}$; integral $\frac{4}{3}\log 2 + \frac{5}{3}\log\frac{5}{4}$.
2. $\gamma = \sqrt{3}/2$: $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\pi/3 - \pi/6) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (con $\tan(\pi/3)=\sqrt{3}$ y $\tan(\pi/6)=1/\sqrt{3}$, del ejercicio 2 de C2-014).
3. Si $p \neq 0$, tendría a lo más $n$ raíces (C2-017.C1).
4. $\gamma = 1, j = 1$: $I_2(1) = \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2}I_1(1) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.
5. Multiplica: $(x^2+1)^2 - 2x^2 = x^4+1$. Cada factor tiene $b^2 = 2 < 4 = 4d$ (C2-017.T5 a).

# C2-018 · Integración numérica

## Motivación

> **La calculadora y** $\log 2$
> Tu calculadora solo suma, resta, multiplica y divide, y quieres $\log 2 = \int_1^2 dx/x$ con seis decimales. Puedes evaluar $1/x$ en tantos puntos como quieras. ¿Cuántos hacen falta para *garantizar* un error menor que $10^{-6}$?
> Con trapecios bastan 409 subintervalos; con arcos de parábola (Simpson), 20. Lo importante no es el número sino que se sabe *antes* de calcular, gracias a una cota del error.
> Dónde falla la analogía: la cota es un peor caso, no el error real (con cuatro trapecios el error real es un tercio de la cota); y una calculadora real redondea, así que con $n$ enorme el redondeo acumulado pesa.

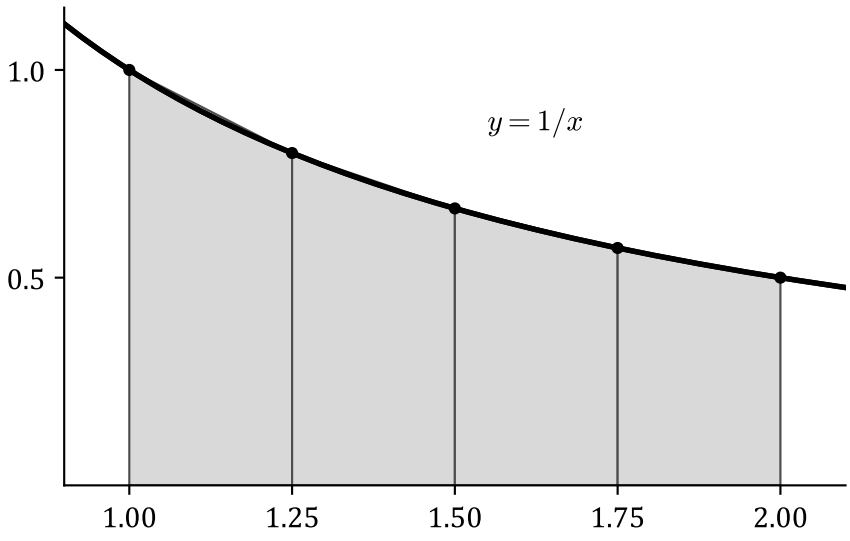



Figura 17: Cuatro trapecios bajo $1/x$ en $[1, 2]$: como la curva es convexa, el trapecio queda por arriba.

## Definiciones

**Definición C2-018.D1 (trapecio y Simpson)**

Sean $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $h := (b - a)/n$ y $x_i := a + ih$. Regla del **trapecio**:

$$T_n(f) := h\Big[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\Big].$$

Si $n$ es par, regla de **Simpson**:

$$S_n(f) := \frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big].$$

Reagrupando (C1-005.T12): $T_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)$, la suma de las áreas de los trapecios; y $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h}{3}\big(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\big)$, una suma sobre pares de subintervalos.

## Resultados

**Teorema C2-018.T1 (integrar una cota)**

Sean $h > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C \geq 0$ y $\psi$ de clase $C^1$ en un intervalo abierto que contiene a $[0, h]$, con $\psi(0) = 0$ y $|\psi'(t)| \leq Ct^k$ para $t \in [0, h]$. Entonces $|\psi(t)| \leq Ct^{k+1}/(k + 1)$ para $t \in [0, h]$.

*Demostración.*

1. Si $t = 0$, ambos lados son 0. Sea $t \in (0, h]$.
2. $\psi'$ es continua, así que por Barrow (C2-009.C1), $\psi(t) = \psi(t) - \psi(0) = \int_0^t \psi'$.
3. Por C2-004.T4 y la monotonía (C2-004.T3):

$$|\psi(t)| \leq \int_0^t |\psi'| \leq \int_0^t Cs^k\, ds = \frac{Ct^{k+1}}{k+1}$$

(C2-009.E1). ■

**Teorema C2-018.T2 (error del trapecio)**

Sean $a < b$, $f$ de clase $C^2$ en un intervalo abierto $J \supset [a,b]$ y $M_2 := \max_{[a,b]} |f''|$. Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_a^b f - T_n(f) \right| \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}.$$

**Idea de la demostración**

En cada subintervalo, el error como función del ancho $t$ se anula con su derivada en $t = 0$, y su segunda derivada está acotada por $(M_2/2)t$. Integrar la cota dos veces da $M_2 h^3/12$.

*Demostración.*

1. $|f''|$ es continua en $[a,b]$ (C1-022.T3), así que $M_2$ existe (C1-024.T2).
2. Sean $h := (b-a)/n$ y $\alpha := x_{i-1}$. Como $J$ es un intervalo abierto que contiene a $[a,b]$, hay $\delta > 0$ con $[a-\delta, b+\delta] \subset J$ (C1-004.D2); para $t \in (-\delta, h+\delta)$, $\alpha + t \in J$.
3. Sea, para esos $t$,
$$\varphi(t) := \int_\alpha^{\alpha+t} f - \frac{t}{2}\big(f(\alpha) + f(\alpha+t)\big).$$
4. Por el primer TFC (C2-008.C2) y la cadena (C1-030.T1), $t \mapsto \int_\alpha^{\alpha+t} f$ tiene derivada $f(\alpha+t)$. Con el producto (C1-029.T2) y C1-029.T1:
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f(\alpha+t) - \tfrac{1}{2}\big(f(\alpha)+f(\alpha+t)\big) - \tfrac{t}{2} f'(\alpha+t) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(f(\alpha+t) - f(\alpha)\big) - \tfrac{t}{2} f'(\alpha+t), \\ \varphi''(t) &= \tfrac{1}{2} f'(\alpha+t) - \tfrac{1}{2} f'(\alpha+t) - \tfrac{t}{2} f''(\alpha+t) = -\tfrac{t}{2} f''(\alpha+t). \end{aligned}$$
5. $\varphi(0) = 0$ (C2-004.D1) y $\varphi'(0) = 0$. $\varphi''$ es continua (C2-015.D1, C1-022.T2), así que $\varphi$ y $\varphi'$ son de clase $C^1$. Para $t \in [0,h]$, $|\varphi''(t)| \leq (M_2/2)t$ (C1-004.T2).
6. C2-018.T1 con $\psi = \varphi'$, $k = 1$, $C = M_2/2$: $|\varphi'(t)| \leq M_2 t^2/4$. Con $\psi = \varphi$, $k = 2$, $C = M_2/4$: $|\varphi(h)| \leq M_2 h^3/12$.
7. $\varphi(h) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$; sumando sobre $i$ (C2-004.C1, C1-005.T12), $\int_a^b f - T_n(f) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(h)$.

8. Por la desigualdad del triángulo (C2-001.T1),

$$\left|\int_a^b f - T_n(f)\right| \le n \cdot \frac{M_2 h^3}{12} = \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}.$$

■

**Teorema C2-018.T3 (error de Simpson)**

Sean $a < b$, $n$ par, $f$ de clase $C^4$ en un intervalo abierto $J \supset [a,b]$ y $M_4 := \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$. Entonces

$$\left|\int_a^b f - S_n(f)\right| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{180n^4}.$$

*Demostración.*

1. $M_4$ existe (C1-022.T3, C1-024.T2). Sean $h := (b-a)/n$ y $m := x_{2i-1}$, el punto medio de $[x_{2i-2}, x_{2i}] = [m-h, m+h]$. Como en T2, $\varphi$ está definida para $t$ en un intervalo abierto que contiene a $[0,h]$:

$$\varphi(t) := \int_{m-t}^{m+t} f - \frac{t}{3}\big(f(m-t) + 4f(m) + f(m+t)\big).$$

2. Por C2-008.C2, la cadena, C1-029.T1 y C1-029.T2:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \tfrac{2}{3}\big(f(m+t) + f(m-t)\big) - \tfrac{4}{3}f(m) - \tfrac{t}{3}\big(f'(m+t) - f'(m-t)\big),\\
\varphi''(t) &= \tfrac{1}{3}\big(f'(m+t) - f'(m-t)\big) - \tfrac{t}{3}\big(f''(m+t) + f''(m-t)\big),\\
\varphi'''(t) &= -\tfrac{t}{3}\big(f'''(m+t) - f'''(m-t)\big).
\end{aligned}$$

3. $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, y $\varphi'''$ es continua (C2-015.D1), así que $\varphi$, $\varphi'$ y $\varphi''$ son de clase $C^1$.
4. Para $t \in (0,h]$, el TVM (C1-033.T1) para $f'''$ en $[m-t, m+t]$ da $f'''(m+t) - f'''(m-t) = f^{(4)}(c)\cdot 2t$, así que $|\varphi'''(t)| \le \frac{2}{3}M_4 t^2$ (C1-004.T2); en $t = 0$ también.
5. C2-018.T1 tres veces: $|\varphi''(t)| \le \frac{2}{9}M_4 t^3$; $|\varphi'(t)| \le \frac{1}{18}M_4 t^4$; $|\varphi(h)| \le \frac{1}{90}M_4 h^5$.
6. $\varphi(h) = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f - \frac{h}{3}(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}))$; sumando sobre los $n/2$ pares (C2-004.C1, C1-005.T12) y con la desigualdad del triángulo (C2-001.T1):

$$\left|\int_a^b f - S_n(f)\right| \le \frac{n}{2} \cdot \frac{M_4 h^5}{90} = \frac{M_4 (b-a)^5}{180n^4}.$$

■

**Ejemplo C2-018.E1**

Para $\log 2 = \int_1^2 dx/x$: $M_2 = 2$ y $M_4 = 24$ en $[1,2]$; el trapecio garantiza error $< 10^{-6}$ con $n = 409$ y Simpson con $n = 20$.

1. $f(x) = 1/x$ es de clase $C^\infty$ en $J = (0,\infty)$ (C2-015.D1, C1-029.C1), con $f''(x) = 2/x^3$ y $f^{(4)}(x) = 24/x^5$; en $[1,2]$ son positivas y decrecientes (C1-003.T7), así que $M_2 = 2$ y $M_4 = 24$.
2. Trapecio: $2/(12n^2) < 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 > 10^6/6 \approx 166{,}666.7$. Como $408^2 = 166{,}464$ y $409^2 = 167{,}281$, basta $n = 409$.
3. Simpson: $24/(180n^4) < 10^{-6} \Leftrightarrow n^4 > 133{,}333.\overline{3}$. Como $18^4 = 104{,}976$ y $20^4 = 160{,}000$, el primer par que basta es $n = 20$.
4. Con $n = 4$: $T_4 \approx 0.697024$ (error real $\approx 0.00388 \le 0.0104$) y $S_4 \approx 0.693254$ (error real $\approx 1.07 \times 10^{-4} \le 5.2 \times 10^{-4}$); $\log 2 \approx 0.693147$.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Clase $C^2$ (o $C^4$) en un abierto que contenga a $[a,b]$**

Con $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0,1]$, $f''(x) = -x^{-3/2}/4$ no es acotada cerca de 0: no hay $M_2$ y la cota no dice nada. De hecho, el error del trapecio para $\sqrt{x}$ decae más lento que $1/n^2$ (numéricamente, como $n^{-3/2}$).

**⚠ Duplicar $n$**

Duplicar $n$ divide la cota del trapecio entre 4 (no entre 2) y la de Simpson entre 16. El error real se comporta igual en $\log 2$: $T_4$ tiene error $\approx 0.003877$ y $T_8$, $\approx 0.000975$.

**⚠ Simpson es exacto para cúbicas**

Si $f$ es un polinomio de grado $\le 3$, $f^{(4)} = 0$, $M_4 = 0$ y $S_n(f) = \int_a^b f$ exactamente: aunque Simpson interpola parábolas, también acierta con cúbicas.

## Ejercicios

1. Calcula $T_2$ y $S_2$ para $\int_0^1 x^2\,dx$ y compara con $1/3$.
2. ¿Qué $n$ garantiza, con el trapecio, error $< 10^{-4}$ para $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$? (Usa $|f''| \le 2$ en $[0,1]$.)
3. Demuestra que si $f'' \ge 0$ en $[a,b]$ (con $f$ de clase $C^2$ en un abierto que contiene a $[a,b]$), entonces $T_n(f) \ge \int_a^b f$.
4. Demuestra que $S_{2m}(f) = \frac{4T_{2m}(f) - T_m(f)}{3}$.

### Respuestas

1. $T_2 = \frac{1}{2}[0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 1]\cdot\frac{1}{2} = 3/8$; $S_2 = \frac{1}{6}[0 + 4\cdot\frac{1}{4} + 1] = 1/3$: exacto (cúbica).
2. $2/(12n^2) < 10^{-4}$: $n^2 > 1666.7$, $n = 41$. ($f'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ y $|f''| \le 2$.)
3. En la prueba de T2, $\varphi'' = -(t/2)f''(\alpha + t) \le 0$; con $\varphi'(0) = 0$, $\varphi' \le 0$ (C1-034.T2), y con $\varphi(0) = 0$, $\varphi(h) \le 0$ en cada subintervalo.
4. Con $h = (b-a)/(2m)$, $T_m$ usa paso $2h$; compara coeficientes: en $x_{\text{par}}$ interiores, $(4\cdot h - 2h)/3 = 2h/3$; en $x_{\text{impar}}$, $4h/3$; en los extremos, $(4h/2 - h)/3 = h/3$.

# C2-019 · Áreas, también en polares

## Motivación

> **El aspersor del jardín**
> Un aspersor gira y su alcance depende del ángulo: en la dirección $\theta$ moja hasta $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ metros (2 m hacia el este, nada hacia el oeste). ¿Cuántos metros cuadrados riega?
> Si se divide la vuelta en rebanadas delgadas de ángulo $\Delta\theta$, cada una es casi un sector de círculo de radio $\rho(\theta_i)$, con área $\frac{1}{2}\rho(\theta_i)^2\Delta\theta$ (C2-014: el sector de radio 1 y ángulo $\theta$ tiene área $\theta/2$). La suma es una suma de Riemann de $\frac{1}{2}\rho^2$, y el área regada resulta $3\pi/2 \approx 4.71$ m$^2$.
> Dónde falla la analogía: un aspersor real moja de forma irregular; y aquí el área en polares es una **definición** motivada por esta cuenta, no un teorema.

Desde C2-001 se dice que la integral «es un área». En este capítulo esa frase se vuelve una definición, y se comprueba que es coherente donde ya teníamos un área: rectángulos, discos, sectores.

**⚠ def: área por definición**

«Área» de una región general del plano es un concepto que este curso no define (contenido de Jordan, Cálculo IV). Aquí se **definen** dos casos por una integral; que coincidan con la teoría general, y entre sí en general, se demuestra en Cálculo IV. Lo que sí se demuestra aquí: las propiedades básicas y la coherencia en sectores.

## Definiciones

**Definición C2-019.D1 ⚠ def (área entre gráficas)**

Sean $a < b$ y $f, g$ continuas en $[a, b]$ con $f \leq g$. El **área** de $\{(x, y) : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ se define como $\int_a^b (g - f)$.

La integral existe: $g - f$ es continua (C1-022.T2), luego integrable (C2-003.T1).

**Definición C2-019.D2 ⚠ def (área en polares)**

Sean $\alpha < \beta$ con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y $\rho : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ continua. El área de la región $\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$ se define como $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2$.

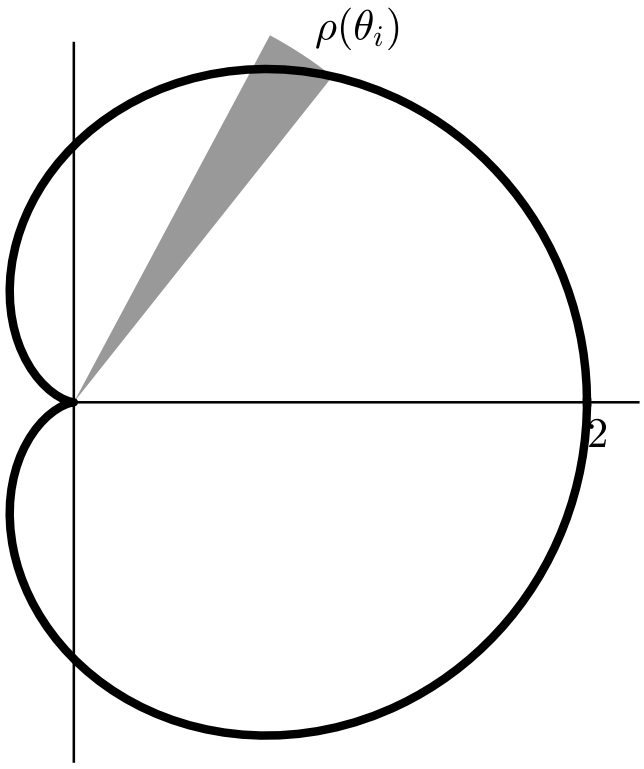



Figura 18: La cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ y un sector delgado de radio $\rho(\theta_i)$: su área es casi $\frac{1}{2}\rho(\theta_i)^2\Delta\theta$.

## Resultados

**Teorema C2-019.T1**

El área de C2-019.D1 es $\geq 0$; es aditiva al partir $[a,b]$ en $a < c < b$; el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ $(c < d)$ tiene área $(b-a)(d-c)$; y para $f, g$ continuas cualesquiera, la región entre $\min(f,g)$ y $\max(f,g)$ tiene área $\int_a^b |g-f|$.

*Demostración.*

1. $g - f \geq 0$, así que $\int_a^b (g-f) \geq 0$ (C2-004.T3).
2. Por la aditividad (C2-004.T1), $\int_a^b (g-f) = \int_a^c (g-f) + \int_c^b (g-f)$: el área de la región es la suma de las áreas de sus partes sobre $[a,c]$ y $[c,b]$.
3. El rectángulo es la región entre $f = c$ y $g = d$: su área es $\int_a^b (d-c) = (d-c)(b-a)$ (C2-002.E1).
4. Para $f, g$ continuas, $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ y $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ (por casos, C1-004.D1); son continuas porque $|\cdot|$ lo es (C1-004.T5) y por C1-022.T2, C1-022.T3. Además $\min \leq \max$ y $\max - \min = |f-g| = |g-f|$ (C1-004.T1). Por D1, el área es $\int_a^b |g-f|$. ■

**Ejemplo C2-019.E1**

El área entre $y = x^2$ e $y = x$ en $[0,1]$ es $1/6$; el disco de radio $r$ tiene área $\pi r^2$; la región encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ tiene área $\pi ab$; para $0 < \rho_1 < \rho_2$, la corona $\rho_1 \leq |(x,y)| \leq \rho_2$ (con $|(x,y)| := \sqrt{x^2+y^2}$) tiene área $\pi(\rho_2^2 - \rho_1^2)$.

1. *Entre parábola y recta.* En $[0,1]$, $x^2 \leq x$ (C1-003.T9). Por C2-009.E1, $\int_0^1 (x - x^2) = 1/2 - 1/3 = 1/6$.
2. *Disco.* $x^2 + y^2 \leq r^2$ equivale a $|x| \leq r$ y $-\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$ (C2-014.D1, C1-004.T3). Su área es $\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \pi r^2$ (C2-004.T2, C2-015.E1).
3. *Elipse.* Igual, entre $\mp b\sqrt{1-x^2/a^2}$ en $[-a,a]$: $2 \cdot \pi ab/2 = \pi ab$ (C2-015.E1).
4. *Corona.* No es una región entre dos gráficas, así que ⚠ def se parte en cuatro que sí lo son, y su área se define como la suma (las piezas solo comparten segmentos de frontera):
   - arriba y abajo: $\sqrt{\rho_1^2 - x^2} \leq \pm y \leq \sqrt{\rho_2^2 - x^2}$ con $|x| \leq \rho_1$;
   - a los lados: $|y| \leq \sqrt{\rho_2^2 - x^2}$ con $\rho_1 \leq |x| \leq \rho_2$.

5. La suma es, por linealidad y aditividad (C2-004.T1, C2-004.T2):

$$2\int_{-\rho_1}^{\rho_1}\left(\sqrt{\rho_2^2-x^2}-\sqrt{\rho_1^2-x^2}\right)dx+\int_{-\rho_2}^{-\rho_1}2\sqrt{\rho_2^2-x^2}\,dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}2\sqrt{\rho_2^2-x^2}\,dx$$
$$=\int_{-\rho_2}^{\rho_2}2\sqrt{\rho_2^2-x^2}\,dx-\int_{-\rho_1}^{\rho_1}2\sqrt{\rho_1^2-x^2}\,dx=\pi\rho_2^2-\pi\rho_1^2$$

(C2-015.E1).

**Ejemplo C2-019.E2 (coherencia en sectores)**

Para $0<\theta<\pi/2$, el sector del círculo unitario entre los ángulos 0 y $\theta$ es la región bajo $g$, con $g(x)=x\tan\theta$ en $[0,\cos\theta]$ y $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ en $[\cos\theta,1]$; su área según C2-019.D1 es $A(\cos\theta)=\theta/2$, igual a $\frac{1}{2}\int_0^\theta 1^2$ de C2-019.D2.

1. $\cos\theta\in(0,1)$ y $\operatorname{sen}\theta>0$ (C2-014.T4, C2-014.C1). En $x=\cos\theta$ las dos fórmulas valen $\cos\theta\tan\theta=\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ (C2-014.D5, C2-014.D3).
2. $g$ es continua en $[0,1]$: en cada pedazo por C1-022.T2 y C2-014.T1; en $\cos\theta$, los dos límites laterales valen $\operatorname{sen}\theta=g(\cos\theta)$ (C1-020.T1, C1-022.T0). Y $0\le g$.
3. Por C2-019.D1 (con $f=0$), aditividad (C2-004.T1) y C2-009.E1:

$$\int_0^1 g=\tan\theta\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}+\int_{\cos\theta}^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta}{2}+\int_{\cos\theta}^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

4. Con $\sqrt{1-\cos^2\theta}=\operatorname{sen}\theta$, eso es $A(\cos\theta)$ (C2-014.D2), y $A(\cos\theta)=\theta/2$ (C2-014.D3).
5. Por C2-019.D2 con $\rho=1$ en $[0,\theta]$: $\frac{1}{2}\int_0^\theta 1=\theta/2$ (C2-002.E1). Coinciden.

**Ejemplo C2-019.E3 (la cardioide)**

La cardioide $\rho=1+\cos\theta$ $(0\le\theta\le2\pi)$ encierra área $3\pi/2$.

1. $\rho\ge0$ (pues $\cos\ge-1$, C2-014.T5), es continua y $\beta-\alpha=2\pi$: se aplica C2-019.D2.
2. $(1+\cos\theta)^2=1+2\cos\theta+\cos^2\theta$. Por linealidad (C2-004.T2):
   - $\int_0^{2\pi}1=2\pi$;
   - $\int_0^{2\pi}\cos=\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}0=0$ (C2-009.C1, C2-014.T6, C2-014.C1);
   - $\int_0^{2\pi}\cos^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2=\pi$ (periodicidad C2-015.C1 con $c=-\pi$; C2-016.E1).

3. El área es $\frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = 3\pi/2$.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ $f \le g$ en D1**

Entre $y = x$ e $y = x^2$ en $[0, 2]$, $\int_0^2 (x - x^2)\,dx = 2 - 8/3 = -2/3 < 0$: no es un área. En $(1, 2]$ se cumple $x^2 > x$; el área correcta es $\int_0^2 |x - x^2|\,dx = 1/6 + 5/6 = 1$ (C2-019.T1).

**⚠ $\beta - \alpha \le 2\pi$ en D2**

Con $\rho = 1$ en $[0, 4\pi]$, $\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} 1 = 2\pi$: la fórmula cuenta el disco dos veces.

**⚠ $\rho \ge 0$ en D2**

Si $\rho(\theta) < 0$, la condición $0 \le r \le \rho(\theta)$ no tiene soluciones. Con $\rho = \cos\theta$ en $[0, \pi]$, $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 = \pi/4$ sí es el área del disco de radio $1/2$ que dibuja la curva, pero solo porque los puntos con «$\rho < 0$» caen del lado opuesto; D2 no cubre ese caso.

## Ejercicios

1. Calcula el área entre $y = x^3$ e $y = x$ en $[-1, 1]$.
2. Calcula el área del pétalo de la rosa $\rho = \cos(2\theta)$ en $[-\pi/4, \pi/4]$.
3. Demuestra con D2 que el sector de radio $R$ y ángulo $\theta \le 2\pi$ tiene área $R^2\theta/2$.
4. ¿Qué área encierra la espiral $\rho = \theta$ en $[0, 2\pi]$?

### Respuestas

1. $\int_{-1}^{1} |x - x^3|\,dx = 2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 1/2$ (la función es impar, $|\cdot|$ es par; C2-015.C1).
2. $\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\theta)\,d\theta = \pi/8$ (con $\cos^2 = (1 + \cos 2\cdot)/2$ y C2-015.T2).
3. $\frac{1}{2}\int_0^{\theta} R^2 = R^2\theta/2$ (C2-002.E1).
4. $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2\,d\theta = \frac{(2\pi)^3}{6} = \frac{4\pi^3}{3}$ (C2-009.E1).

# C2-020 · Longitud de una curva

## Motivación

> **El GPS y el odómetro**
> Un GPS registra tu posición cada cierto tiempo y estima la distancia sumando los segmentos rectos entre registros. El odómetro mide lo que de verdad recorriste. Como un segmento recto es el camino más corto entre dos puntos, la suma del GPS se queda corta, y con más registros se acerca más. La longitud del recorrido es el *supremo* de esas sumas.
> En la parábola $y = x^2$, $x \in [0,1]$, con 1, 2, 4, 8 y 16 tramos iguales, las poligonales miden 1.414214, 1.460405, 1.474280, 1.477778 y 1.478652; la longitud es $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 1.478943$.
> Dónde falla la analogía: un GPS real tiene error de medición, así que su suma puede pasarse; la poligonal ideal usa posiciones exactas.

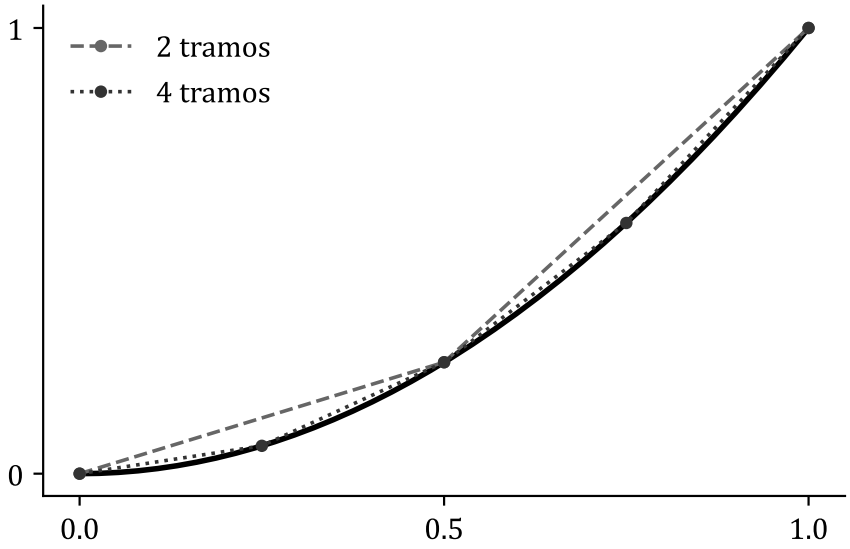



Figura 19: Poligonales inscritas en $y = x^2$ con 2 y 4 tramos: al agregar puntos la poligonal se alarga hacia la longitud de la curva.

## Una desigualdad

**Teorema C2-020.T1 (Minkowski en el plano)**

Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}, \qquad \left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|.$$

*Demostración.*

1. Para $u, v \ge 0$, $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$ (ambos son $\ge 0$ con el mismo cuadrado; C2-014.D1).
2. *Una desigualdad auxiliar:* $ac + bd \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$. Si $ac + bd < 0$ es inmediata (el lado derecho es $\ge 0$). Si $ac + bd \ge 0$, como ambos lados son $\ge 0$, basta comparar cuadrados (C1-003.T9):

   $$(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (ad-bc)^2 \ge 0$$

   (C1-003.T5, paso 1).
3. Los dos lados de la primera desigualdad son $\ge 0$; por C1-003.T9 basta comparar cuadrados. El cuadrado del izquierdo es $a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$; el del derecho, $a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ (C2-014.D1). El paso 2 concluye.
4. *Segunda.* Con $(a, b) = (0, b-c) + (a, c)$, la primera da $\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{(b-c)^2} + \sqrt{a^2+c^2} = |b-c| + \sqrt{a^2+c^2}$, porque $\sqrt{t^2} = |t|$ ($|t| \ge 0$ y $|t|^2 = t^2$; C1-004.T1, C1-004.T6).
5. Intercambiando $b$ y $c$: $\sqrt{a^2+c^2} \le |c-b| + \sqrt{a^2+b^2}$. Los pasos 4 y 5 son la segunda desigualdad (C1-004.T3, C1-004.T1). ■

La primera es la desigualdad del triángulo en el plano: la distancia de 0 a $(a+c, b+d)$ es a lo más la de 0 a $(a, b)$ más la de $(a, b)$ a $(a+c, b+d)$.

## Definiciones

**Definición C2-020.D1 (longitud)**

Sean $a < b$ y $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ (la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$). Para una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$:

$$\ell(\gamma, P) := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

(la poligonal inscrita). $\gamma$ es **rectificable** si $\{\ell(\gamma, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}$ está acotado superiormente, y su **longitud** es $\ell(\gamma) := \sup_P \ell(\gamma, P)$. La gráfica de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es la curva $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$.

El supremo existe por el axioma S cuando el conjunto está acotado (C1-006.D1).

## Resultados

**Teorema C2-020.T2**

Si $Q$ refina a $P$, $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q)$.

*Demostración.*

1. *Un punto.* Sea $Q = P \cup \{s\}$ con $t_{i-1} < s < t_i$ (C2-001.T3 a). Con $a = x(s) - x(t_{i-1})$, $b = y(s) - y(t_{i-1})$, $c = x(t_i) - x(s)$, $d = y(t_i) - y(s)$, C2-020.T1 da que el segmento de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ mide a lo más la suma de los dos segmentos que pasan por $\gamma(s)$.
2. Los demás términos no cambian; partiendo la suma (C2-001.T1 b, C1-005.T12), $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q)$.
3. *En general.* $Q$ se obtiene de $P$ agregando uno por uno sus puntos que no están en $P$ (C2-001.T3 b); por inducción sobre ese número (C1-005.T1), el paso 2 da la desigualdad. ■

**Teorema C2-020.T3 (fórmula de la longitud)**

Sean $a < b$ y $x, y$ de clase $C^1$ en un intervalo abierto $J \supset [a, b]$. Entonces $\gamma$ es rectificable y

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

**Idea de la demostración**

Por el TVM, cada segmento de la poligonal es casi un término de una suma de Riemann de $\sqrt{x'^2 + y'^2}$; la diferencia la controla la continuidad uniforme de $y'$. Para particiones finas la poligonal está cerca de la integral, y como refinar alarga, el supremo es la integral.

*Demostración.*

1. $g := \sqrt{x'^2 + y'^2}$ es continua en $[a, b]$ ($x'$, $y'$ continuas por C2-015.D1; C2-014.T1, C1-022.T2, C1-022.T3), luego integrable (C2-003.T1). Sea $I := \int_a^b g$.
2. *Refinar no aumenta la norma.* Si $P_n$ es la partición regular, $\|P_n\| = (b-a)/n$ (C2-001.D1), y por C2-002.T7, $\|Q\| \le (b-a)/n$ para toda partición $Q \supset P_n$.
3. Sea $\varepsilon > 0$. Por Heine (C1-025.T1), $y'$ es uniformemente continua en $[a, b]$: hay $\delta > 0$ con $|y'(s) - y'(t)| < \varepsilon$ si $s, t \in [a, b]$ y $|s - t| < \delta$ (C1-025.D1).
4. Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ con $\|P\| < \delta$. $x$ e $y$ son continuas en cada $[t_{i-1}, t_i]$ y derivables en el interior; por el TVM (C1-033.T1) hay $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ con

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \qquad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i.$$

5. Como $\Delta t_i > 0$, el $i$-ésimo segmento mide $\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}\,\Delta t_i$ (paso 1 de C2-020.T1, C1-004.T6).
6. Por C2-020.T1 (segunda desigualdad, con $a = x'(\xi_i)$, $b = y'(\eta_i)$, $c = y'(\xi_i)$) y el paso 3:

$$\left|\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} - g(\xi_i)\right| \le |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| < \varepsilon.$$

7. Multiplicando por $\Delta t_i$ y sumando (C2-001.T1 c, C1-005.T12), con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$|\ell(\gamma, P) - S(g, P, \xi)| \le \varepsilon(b - a).$$

8. Como $g$ es integrable, hay una partición $R$ con $U(g, R) - L(g, R) < \varepsilon$ (C2-002.T5). Si $Q$ refina a $R$, $U(g, Q) - L(g, Q) < \varepsilon$ (C2-002.T2), y por C2-002.T6, $|S(g, Q, \xi) - I| < \varepsilon$ para toda elección $\xi$.

9. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $(b-a)/n < \delta$ (C1-007.C1). Dada cualquier partición $P$, sea $Q := P \cup R \cup P_n$ (C2-001.T3 b). Por el paso 2, $\|Q\| < \delta$; por los pasos 7 y 8,

$$|\ell(\gamma, Q) - I| < \varepsilon + \varepsilon(b-a) = \varepsilon(1+b-a).$$

10. Por C2-020.T2, $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q) < I + \varepsilon(1+b-a)$. Así el conjunto de las $\ell(\gamma, P)$ está acotado: $\gamma$ es rectificable, y $\ell(\gamma) \le I + \varepsilon(1+b-a)$ (C1-006.D1).
11. Además $\ell(\gamma) \ge \ell(\gamma, Q) > I - \varepsilon(1+b-a)$ para la $Q$ del paso 9.
12. Así $|\ell(\gamma) - I| \le \varepsilon(1+b-a)$ para todo $\varepsilon > 0$. Si fuera $\ell(\gamma) \ne I$, con $\varepsilon := |\ell(\gamma) - I|/(2(1+b-a)) > 0$ se tendría $|\ell(\gamma) - I| \le |\ell(\gamma) - I|/2$, absurdo (C1-003.T4). Por lo tanto $\ell(\gamma) = I$. ■

**Corolario C2-020.C1 (gráficas y distancia recorrida)**

Si $f$ es de clase $C^1$ en un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$, su gráfica tiene longitud $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$. Si $x(t)$ es la posición de un móvil en la recta, de clase $C^1$ en un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$, la distancia recorrida en $[a, b]$, $\ell$ de la curva $(x(t), 0)$, es $\int_a^b |x'(t)|\, dt$.

*Demostración.*

1. Para la gráfica, $x(t) = t$ tiene $x' = 1$ (C1-028.T2) y es $C^1$; C2-020.T3 da $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$.
2. Para el móvil, $y = 0$ y $\sqrt{x'^2 + 0} = |x'|$ (C2-014.D1, C1-004.T6); C2-020.T3 concluye. ■

**Ejemplo C2-020.E1**

La circunferencia $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, mide $2\pi$; el arco de $y = x^2$ en $[0, 1]$ mide $\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.

1. cos y sen son $C^1$ en $\mathbb{R}$ con derivadas $-\operatorname{sen}$ y cos (C2-014.T6), y $\sqrt{\operatorname{sen}^2 + \cos^2} = 1$ (C2-014.T5). Por C2-020.T3 y C2-002.E1, la longitud es $\int_0^{2\pi} 1 = 2\pi$.
2. Para $y = x^2$, $f' = 2x$ y C2-020.C1 da $\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 1.478943$.

En particular, para $\theta \in [0, 2\pi]$ el arco $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \theta]$, mide $\theta$: el ángulo que en C2-014 se definió por el área (el doble del área del sector) es también la longitud del arco.

**Ejemplo C2-020.E2 (longitud de la elipse)**

Para $0 < b < a$, la elipse $(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$, tiene longitud $4a\,E(k)$, con $k := \sqrt{1 - b^2/a^2}$ y $E(k)$ de C2-013.T1.

1. *Rapidez.* $x' = -a\,\mathrm{sen}\,t$, $y' = b\cos t$, y con $\mathrm{sen}^2 = 1 - \cos^2$ (C2-014.T5):

$$x'^2 + y'^2 = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t = a^2(1 - k^2\cos^2 t),$$

   así que $\sqrt{x'^2 + y'^2} = a\,h(t)$ con $h(t) := \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}$ (C2-014.D1). Por C2-020.T3, $\ell = a\int_0^{2\pi} h$.
2. *Simetría.* $\cos(t + \pi) = -\cos t$ (C2-014.C1), así que $h$ tiene período $\pi$; y $h$ es par (C2-014.T5). Por C2-015.C1: $\int_0^{2\pi} h = 2\int_0^{\pi} h = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h = 4\int_0^{\pi/2} h$.
3. *De* cos *a* sen. Con C2-015.T2 ($r = -1$, $s = \pi/2$) y $\cos(\pi/2 - t) = \mathrm{sen}\,t$ (C2-014.T8, C2-014.C1, C2-014.T5): $\int_0^{\pi/2} h = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt$.
4. *La sustitución* $s = \mathrm{sen}\,t$. Sea $u \in (0, \pi/2)$. En $J = (-\pi/2, \pi/2)$, sen es $C^1$ con valores en $I = (-1, 1)$, y $\phi(s) := \sqrt{1 - k^2 s^2}/\sqrt{1 - s^2}$ es continua en $I$ (C2-013.D1). Como $\cos t > 0$ en $J$, $\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\,t} = \cos t$, y C2-015.T1 da

$$E(k; \mathrm{sen}\,u) = \int_0^{\mathrm{sen}\,u} \phi = \int_0^u \phi(\mathrm{sen}\,t)\cos t\,dt = \int_0^u \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt.$$

5. *Límite.* Cuando $u \to \pi/2^-$: el lado derecho tiende a $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt$ (continuidad de la integral como función del extremo, C2-008.C1, C1-022.T0); el izquierdo, a $E(k)$, porque $\mathrm{sen}\,u \to 1^-$ y $E(k;\cdot)$ es continua en 1 (C2-013.T2, C1-022.T3, C1-022.T0).
6. Por la unicidad del límite, $\int_0^{\pi/2} h = E(k)$, y $\ell = 4a\,E(k)$.

**Ejemplo C2-020.E3 (curva continua no rectificable)**

$f(x) := x\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) := 0$, es continua en $[0, 1]$ y su gráfica no es rectificable.

1. *Continuidad.* En $x \neq 0$, por C1-022.T2, C1-022.T3 y C2-014.T5. En 0: $|f(x)| \leq |x|$ (C2-014.T5), y por el sándwich (C1-019.T2), $f(x) \to 0 = f(0)$ (C1-022.T0).
2. *Los picos.* Para $k \in \mathbb{N}$ sea $x_k := 2/((2k+1)\pi)$. Como $\pi > 2$ (C2-014.C3), $x_1 = 2/(3\pi) < 1$, y $x_1 > x_2 > \cdots > 0$. Por C2-014.C1, $\mathrm{sen}((2k+1)\pi/2) = \mathrm{sen}(k\pi + \pi/2) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, así que $f(x_k) = (-1)^k x_k$.
3. *Una poligonal.* Sea $P_N := \{0, x_N, x_{N-1}, \ldots, x_1, 1\}$. Cada segmento mide al menos su diferen-

cia vertical ($\sqrt{A^2+B^2} \geq |B|$; C2-014.T1, C1-003.T9, C1-004.T6). Como los signos alternan, $|f(x_k) - f(x_{k+1})| = x_k + x_{k+1}$, y el primer segmento (de 0 a $x_N$) sube $x_N$. Así

$$\ell(\gamma, P_N) \geq \sum_{k=1}^{N-1} (x_k + x_{k+1}) + x_N \geq \sum_{k=1}^{N} x_k.$$

4. $x_k = \frac{2}{(2k+1)\pi} \geq \frac{2}{(2k+2)\pi} = \frac{1}{\pi(k+1)}$, así que $\ell(\gamma, P_N) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}$.
5. *La armónica crece.* En $[k, k+1]$, $1/x \leq 1/k$, así que $\int_k^{k+1} dx/x \leq 1/k$ (C2-006.T1); sumando (C2-004.C1, C2-011.D1), $\sum_{k=1}^{M} 1/k \geq \log(M+1)$.
6. Con $M = N + 1$: $\ell(\gamma, P_N) \geq \frac{1}{\pi}(\log(N+2) - 1)$, que no está acotado porque $\log \to \infty$ (C2-011.T3). La gráfica no es rectificable (C2-020.D1).

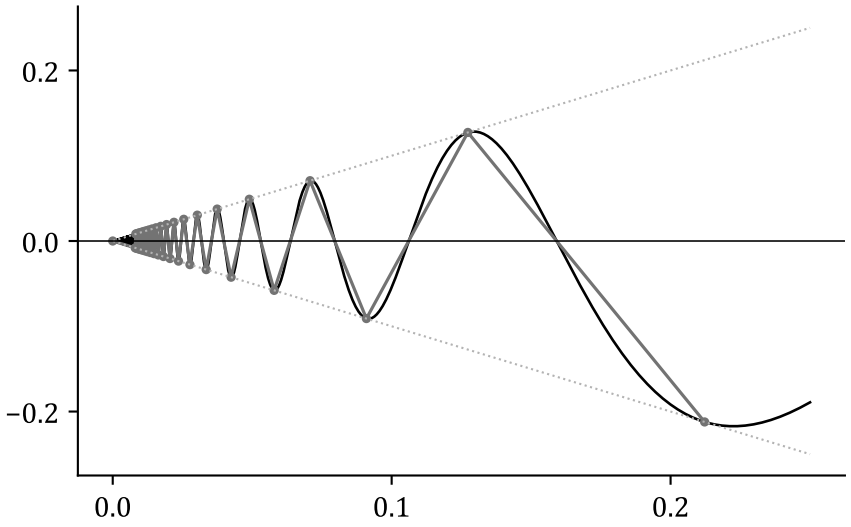



Figura 20: La gráfica de $x \operatorname{sen}(1/x)$ en $(0, 0.25]$ y la poligonal por sus picos $x_k = 2/((2k+1)\pi)$: su longitud crece sin cota.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Clase $C^1$, no solo continuidad**

$x\,\text{sen}(1/x)$ es continua en $[0,1]$ y no rectificable (C2-020.E3). La continuidad no basta para que haya longitud finita.

**⚠ La fórmula cuenta lo recorrido**

$(\cos t, \text{sen}\, t)$ en $[0, 4\pi]$ da $\int_0^{4\pi} 1 = 4\pi$: la curva recorre dos veces el mismo círculo. La longitud de C2-020.D1 es de la curva parametrizada (la distancia recorrida), no del trazo.

**⚠ $C^1$ en un abierto que contenga a $[a,b]$**

La semicircunferencia $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, no cumple la hipótesis: $f'$ no es acotada cerca de $\pm 1$. Se puede parametrizar como $(\cos t, \text{sen}\, t)$, $t \in [0,\pi]$, que sí es $C^1$, y mide $\pi$.

## Ejercicios

1. Calcula la longitud de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ en $[1,3]$.
2. Calcula la longitud de la cicloide $(t - \text{sen}\, t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Demuestra que el segmento de $(x_0, y_0)$ a $(x_1, y_1)$, parametrizado linealmente en $[0,1]$, mide $\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$, con C2-020.T3 y también directo con C2-020.D1 y C2-020.T1.
4. Un móvil en la recta tiene posición $x(t) = t^2 - 2t$ en $[0,3]$. Calcula su desplazamiento y la distancia recorrida.

### Respuestas

1. $f' = \sqrt{x}$ en $(0,\infty)$ (C2-012.T6), que contiene a $[1,3]$; por C2-020.C1 y Barrow, $\int_1^3 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{16-4\sqrt{2}}{3}$.
2. $x'^2 + y'^2 = 2 - 2\cos t = 4\,\text{sen}^2(t/2)$; longitud $\int_0^{2\pi} 2\,\text{sen}(t/2)\,dt = 8$.
3. $x' = x_1 - x_0$, $y' = y_1 - y_0$ constantes. Directo: por C2-020.T1, ninguna poligonal es más larga que el segmento (desigualdad del triángulo repetida), y la de $P = \{0,1\}$ mide exactamente eso.
4. Desplazamiento $x(3) - x(0) = 3$; distancia $\int_0^3 |2t-2|\,dt = 1 + 4 = 5$.

# C2-021 · Volúmenes y superficies de revolución

## Motivación

> **Dos pilas de monedas**
> Tienes dos pilas de 30 monedas iguales, de radio 1.4 cm y grosor 0.2 cm. Una está derecha. La otra, empujada, quedó inclinada y torcida, como una torre de Pisa. ¿Cuál ocupa más volumen? Corta las dos pilas con un plano horizontal a la misma altura. En las dos encuentras una moneda: un disco del mismo radio. Las rebanadas son iguales a cada altura, así que los volúmenes también deberían serlo:
>
> $$\pi \cdot 1.4^2 \cdot 6 = 11.76\,\pi \approx 36.95 \text{ cm}^3$$
>
> para cada pila. Esta idea («mismas secciones, mismo volumen») es el principio de Cavalieri. Dónde falla la analogía: las monedas tienen grosor; la definición pide la sección en *cada* altura. Además, en este curso el principio de Cavalieri es una **definición**: se vuelve teorema en Cálculo IV.

Hasta ahora la integral midió áreas (C2-019) y longitudes (C2-020). Ahora mide volúmenes: se rebana el sólido y se integra el área de las rebanadas.

## Definiciones

**Definición C2-021.D1 ⚠ def (volumen por secciones, Cavalieri)**

Sean $a < b$ y $S$ un sólido cuya sección por el plano perpendicular a un eje coordenado (aquí el eje $x$; con el eje $y$ es igual) en cada $x \in [a, b]$ tiene área $A(x)$, con $A$ continua en $[a, b]$; si la sección se reduce a un punto o a una curva, su área es 0. Se define

$$\operatorname{vol}(S) := \int_a^b A.$$

En particular, al girar alrededor del eje $x$ la región bajo $f \geq 0$ continua en $[a, b]$, las secciones son discos de radio $f(x)$ y

$$\operatorname{vol} = \pi \int_a^b f^2.$$

**⚠ def: por qué es definición**

«Sólido» y «volumen» generales se formalizan en Cálculo IV (integral triple, teorema de Fubini), donde el principio de Cavalieri es un teorema. Aquí es la definición. La integral existe porque $A$ es continua (C2-003.T1), y el área del disco, $\pi r^2$, es C2-019.E1. La convención «área 0» para una sección que se reduce a un punto (en el borde de una esfera o de un cono) o a una curva (la circunferencia en el borde de las coronas del toro) es coherente con la fórmula: un disco de radio 0 tiene área $\pi \cdot 0^2 = 0$.

**Definición C2-021.D2 ⚠ def (área de superficie de revolución)**

Sean $a < b$ y $f \geq 0$ de clase $C^1$ en un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$. El área de la superficie obtenida al girar la gráfica de $f$ alrededor del eje $x$ se define como

$$2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + f'^2}.$$

Si $f \geq 0$ es continua en $[a, b]$ pero de clase $C^1$ solo en $(a, b)$, el área es la integral impropia $2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + f'^2}$ (C2-010.D1 c) cuando converge.

**De dónde sale**
Un tramo corto de la gráfica, al girar, barre un tronco de cono. Su área lateral es $\pi(r_1 + r_2)$ por la generatriz, que aquí se toma como dato. Con $r_1, r_2 \approx f(x)$ y generatriz $\approx \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\Delta x$ (la longitud de arco de C2-020.C1), la suma de las áreas es una suma de Riemann de $2\pi f\sqrt{1 + f'^2}$. La integral de superficie general es de Cálculo IV.

# Resultados

## Discos y coronas

**Ejemplo C2-021.E1 (esfera, cono y toro)**
La esfera de radio $r$ tiene volumen $4\pi r^3/3$; el cono de radio $r$ y altura $h$, $\pi r^2 h/3$; el toro que se obtiene al girar un disco de radio $r$ cuyo centro está a distancia $R > r$ del eje, $2\pi^2 R r^2$ (secciones: coronas).

*Demostración.*

1. Esfera. Gira la región bajo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$; $f$ es continua y $\geq 0$ (C2-014.T1, C1-022.T3). Por C2-021.D1, con $f^2 = r^2 - x^2$ (C2-014.D1):

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \\ &= \pi\Big(r^2 \cdot 2r - \frac{r^3 - (-r)^3}{3}\Big) \\ &= \pi\Big(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\Big) = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

   (C2-009.E1, C2-004.T2).
2. Cono. Gira la región bajo $f(x) = rx/h$, $x \in [0, h]$. Por C2-021.D1 y C2-009.E1,

$$\text{vol} = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2}\,dx = \pi\,\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Toro. Sea el disco de centro $(0, R)$ y radio $r$, que gira alrededor del eje $x$. Para $x \in [-r, r]$ sea $s(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Los puntos del disco con abscisa $x$ tienen ordenada entre $R - s(x)$ y $R + s(x)$, y $R - s(x) \geq R - r > 0$.
4. Al girar, la sección en $x$ es la corona de radios $R - s(x)$ y $R + s(x)$ (en $x = \pm r$, una circunferencia

de área 0). Por C2-019.E1 su área es

$$A(x) = \pi\big[(R+s)^2 - (R-s)^2\big] = 4\pi R\, s(x),$$

desarrollando con K1-K9. $A$ es continua (C1-022.T2, C2-014.T1).

5. Por C2-021.D1 y C2-015.E1,

$$\text{vol} = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2. \qquad \blacksquare$$

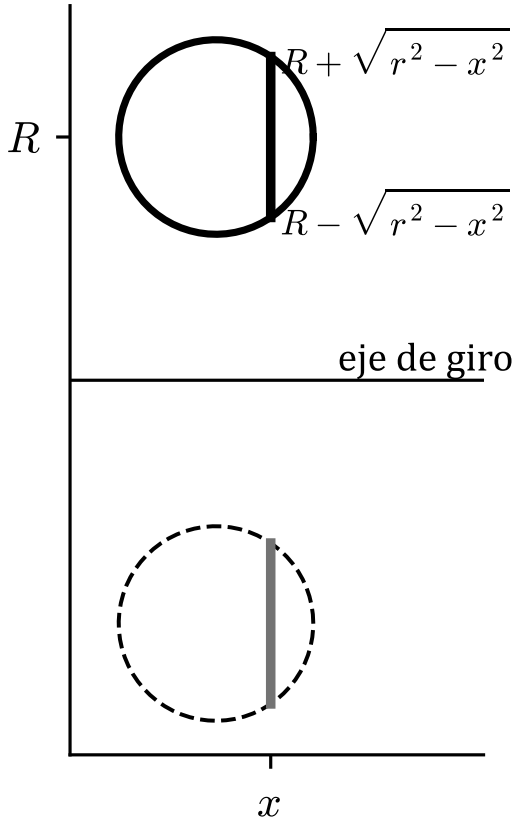



Figura 21: Toro: los puntos del disco con abscisa $x$ forman un segmento vertical; al girar alrededor del eje $x$ describen una corona de radios $R \mp \sqrt{r^2 - x^2}$.

## Capas cilíndricas

**Teorema C2-021.T1 (capas cilíndricas)**

Sean $b > 0$ y $f$ de clase $C^1$ en un intervalo abierto $J \supset [0, b]$, estrictamente decreciente en $J$, con $f(b) = 0$. Al girar alrededor del eje $y$ la región $\{0 \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, la sección a la altura $y \in [0, f(0)]$ es un disco de radio $f^{-1}(y)$, y

$$\text{vol} = \pi \int_0^{f(0)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 \, dy = 2\pi \int_0^b x f(x) \, dx.$$

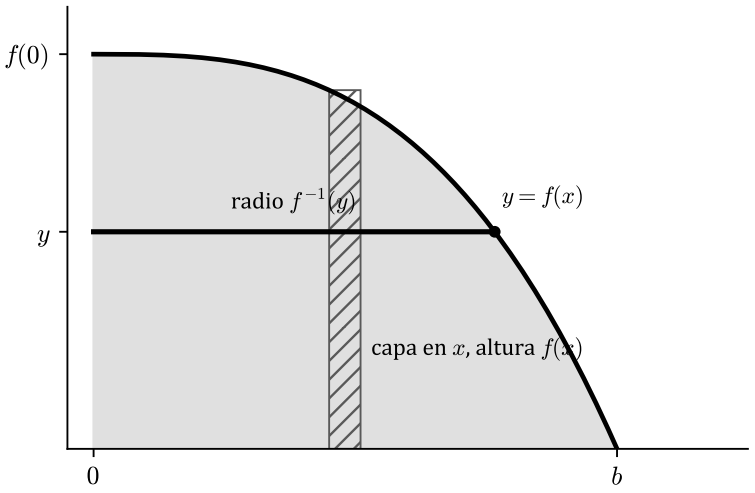



Figura 22: Para $f(x) = 1 - x^3$: el disco horizontal a la altura $y$ tiene radio $f^{-1}(y)$; la capa vertical en $x$ tiene radio $x$ y altura $f(x)$.

**Idea de la demostración**

Se parte de los discos horizontales. El cambio de variable $y = f(x)$ lleva la integral al eje $x$, y la integración por partes convierte $x^2 f'(x)$ en $2xf(x)$.

*Demostración.*

*Paso 1: la inversa.*

1. Como $0 < b$ y $f$ es estrictamente decreciente, $f(0) > f(b) = 0$, y para $x \in [0, b]$, $0 = f(b) \le f(x) \le f(0)$ (C1-010.D2).

2. $f$ es continua en $J$ (C2-015.D1, C1-028.T1), así que $I := f(J)$ es un intervalo (C1-026.T1).
3. $I$ es abierto: si tuviera un máximo $f(x_0)$, con $x_0 \in J$, como $J$ es abierto hay $x_0' \in J$ con $x_0' < x_0$, y $f(x_0') > f(x_0)$ (C1-010.D2), contradicción; igual con un mínimo.
4. $f : J \to I$ es biyectiva (C1-010.T1), y $f^{-1} : I \to J$ es continua (C1-026.T3) y estrictamente decreciente.

*Paso 2: las secciones.*

1. Sean $x \in [0, b]$ y $y \in [0, f(0)] \subset I$. Como $f^{-1}$ es estrictamente decreciente, $y \leq f(x)$ si y solo si $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(f(x)) = x$.
2. Así, los puntos de la región a la altura $y$ son los de $0 \leq x \leq f^{-1}(y)$, y al girar alrededor del eje $y$ forman el disco de radio $f^{-1}(y)$, de área $\pi\big(f^{-1}(y)\big)^2$ (C2-019.E1; en $y = f(0)$, el radio es $f^{-1}(f(0)) = 0$ y la sección es un punto, de área 0).
3. $y \mapsto \pi(f^{-1}(y))^2$ es continua en $I$ (C1-022.T2), y por C2-021.D1

$$\text{vol} = \pi \int_0^{f(0)} \big(f^{-1}(y)\big)^2 \, dy.$$

*Paso 3: cambio de variable.*

1. Aplica el cambio de variable (C2-015.T1) con $g = f$, de clase $C^1$ en $J$ con $g(J) = I$, al integrando $h(y) = (f^{-1}(y))^2$, continuo en $I$, y a los extremos $0, b \in J$:

$$\int_{f(0)}^{f(b)} h = \int_0^b h(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_0^b x^2 f'(x)\, dx.$$

2. Como $f(b) = 0$, por la convención C2-004.D1,

$$\int_0^{f(0)} h = -\int_{f(0)}^0 h = -\int_0^b x^2 f'(x)\, dx.$$

*Paso 4: partes.*

1. $x \mapsto x^2$ y $f$ son de clase $C^1$ en $J$ (C1-029.C1, C1-022.T2). Por C2-016.T1,

$$\begin{aligned}\int_0^b x^2 f'(x)\, dx &= b^2 f(b) - 0^2 \cdot f(0) - \int_0^b 2xf(x)\, dx \\ &= -2\int_0^b xf(x)\, dx,\end{aligned}$$

porque $f(b) = 0$ (C1-002.T3).

2. Juntando los pasos 2 y 3 (C2-004.T2):

$$\text{vol} = \pi \cdot 2\int_0^b xf(x)\,dx = 2\pi\int_0^b xf(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

**Capas para f(x) = 1 – x³**

$f(x) = 1-x^3$ es un polinomio, de clase $C^1$ en $J = \mathbb{R}$, con $f(1) = 0$. Es estrictamente decreciente: si $x < y, y^3-x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2)$ (C1-005.T8) y $y^2+xy+x^2 = (y+x/2)^2+3x^2/4 > 0$ (no se anulan los dos sumandos a la vez, porque $x = 0$ y $y = 0$ contradiría $x < y$). Por C2-021.T1,

$$\text{vol} = 2\pi\int_0^1 (x-x^4)\,dx = 2\pi\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\Big) = \frac{3\pi}{5}.$$

Por discos sale lo mismo: $f^{-1}(y) = (1-y)^{1/3}$ y $\pi\int_0^1 (1-y)^{2/3}\,dy = 3\pi/5$.

## Área de superficie

**Ejemplo C2-021.E2 (área de la esfera)**

La esfera de radio $r$ tiene área $4\pi r^2$: $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ es continua en $[-r,r]$ y de clase $C^1$ solo en $(-r,r)$, donde $f\sqrt{1+f'^2} = r$; con el punto intermedio 0 (C2-010.D1 c), $\int_0^c r\,dx = rc \to r^2$ cuando $c \to r^-$ y $\int_{-c}^0 r\,dx = rc \to r^2$ cuando $-c \to -r^+$, así que la integral impropia converge y el área es $2\pi(r^2+r^2)$.

*Demostración.*

1. $f$ es continua en $[-r,r]$ y $\geq 0$ (C2-014.T1, C1-022.T3).
2. En $(-r,r)$, $r^2-x^2 > 0$ y, por la regla de la cadena (C1-030.T1) y C2-014.T1,

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

que es continua en $(-r,r)$ (C1-022.T2, C1-022.T3): $f$ es de clase $C^1$ en $(-r,r)$.

3. En $(-r, r)$:

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2},$$
$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r,$$

porque $\sqrt{r^2/(r^2 - x^2)} = r/\sqrt{r^2 - x^2}$ (es $\geq 0$ y su cuadrado es $r^2/(r^2 - x^2)$; unicidad en C2-014.D1).

4. Con el punto intermedio 0 (C2-010.D1 c): para $0 < c < r$, $\int_0^c r\,dx = rc$ (C2-002.E1), y $rc \to r^2$ cuando $c \to r^-$ (C1-022.T2, C1-022.T0).
5. Del mismo modo, para $0 < c < r$, $\int_{-c}^0 r\,dx = rc \to r^2$ cuando $-c \to -r^+$.
6. La integral impropia converge y vale $r^2 + r^2$; por C2-021.D2, el área es $2\pi \cdot 2r^2 = 4\pi r^2$. ■

## Por qué cada hipótesis

**⚠ T1 sin monotonía**

Si $f$ no es monótona, por ejemplo $f(x) = x(1 - x)$ en $[0, 1]$, a una altura $y \in (0, 1/4)$ la región ocupa un intervalo $[x_1, x_2]$ con $x_1 > 0$: al girar alrededor del eje $y$ la sección es una **corona**, no un disco, y $f^{-1}$ no existe. La fórmula $2\pi \int xf$ sigue dando el volumen correcto (se demuestra en Cálculo IV), pero la demostración de arriba no aplica.

**⚠ T1 sin f(b) = 0**

Con $f(x) = 2 - x$ en $[0, 1]$ (así $f(1) = 1 \neq 0$), la región tiene una «pared» vertical en $x = 1$: para $y \in [0, 1]$ la sección es el disco de radio 1, no de radio $f^{-1}(y) = 2 - y$. La fórmula con $f^{-1}$ da $\pi \int_0^2 (2 - y)^2\,dy = 8\pi/3$, mientras que el volumen (cilindro más cono) es $\pi + \pi/3 = 4\pi/3$, que sí coincide con $2\pi \int_0^1 x(2 - x)\,dx = 4\pi/3$.

**⚠ T1 sin clase $C^1$**

El cambio de variable C2-015.T1 y las partes C2-016.T1 piden $f$ de clase $C^1$ en un intervalo abierto. Sin derivada continua, la demostración no arranca (la fórmula puede seguir siendo cierta, pero hace falta otra prueba).

**⚠ El área no es $2\pi\int f\,dx$**

Para la esfera, $2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \pi^2 r^2 \approx 9.87\,r^2$, y el área es $4\pi r^2 \approx 12.57\,r^2$. Las bandas que barre la gráfica están inclinadas: su ancho es la longitud de arco $\sqrt{1+f'^2}\,dx$, no $dx$. Con los volúmenes no pasa esto: un disco delgado tiene volumen $\pi f^2\,dx$ aunque la gráfica esté inclinada.

## Ejercicios

1. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje $x$ la región bajo $y = x^2$ en $[0, 1]$.
2. Con capas, calcula el volumen al girar alrededor del eje $y$ la región bajo $f(x) = 1 - x$ en $[0, 1]$ y comprueba que es el de un cono (C2-021.E1).
3. Un sólido tiene base en $[0, 2]$ y su sección en $x$ es un cuadrado de lado $x$. Calcula su volumen con C2-021.D1.
4. Demuestra que el área del cono de radio $r$ y altura $h$ (sin la base), definida por C2-021.D2 con $f(x) = rx/h$ en $[0, h]$, es $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.
5. Explica por qué en el toro las secciones son coronas y por qué $R > r$ es necesario para que $R - s(x) > 0$.

### Respuestas

1. $\pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi/5$.
2. $2\pi\int_0^1 x(1-x)\,dx = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3$, el cono de radio 1 y altura 1.
3. $\int_0^2 x^2\,dx = 8/3$ (C2-009.E1).
4. $f' = r/h$, $\sqrt{1+r^2/h^2} = \sqrt{r^2+h^2}/h$; $2\pi\int_0^h (rx/h)\sqrt{r^2+h^2}/h\,dx = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.
5. A la abscisa $x$ el disco va de $R-s$ a $R+s$; al girar cada punto describe una circunferencia de radio igual a su ordenada. Si $R \le r$, para $x = 0$ el radio interior $R - r \le 0$: el disco toca o cruza el eje, la sección es un disco y no una corona.

# C2-022 · Trabajo, masa y momentos

## Motivación

> **El resorte de la báscula**
> El resorte de una báscula de cocina tiene constante $k = 200$ N/m: para estirarlo $x$ metros hay que jalar con una fuerza de $200x$ newtons (ley de Hooke). Estirarlo de 0 a 10 cm cuesta cierto trabajo. Estirarlo otros 10 cm, de 10 a 20 cm, ¿cuesta lo mismo, el doble o el triple?
> Con una fuerza constante, el trabajo es fuerza por distancia: el área de un rectángulo en la gráfica fuerza–posición. Si la fuerza cambia, se parte el camino en tramos cortos donde casi no cambia, y se suman rectángulos: una suma de Riemann. El límite es el área bajo la gráfica:
>
> - de 0 a 0.1 m, el triángulo de área $\frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 20 = 1$ J;
> - de 0.1 a 0.2 m, el trapecio de área 3 J: el triple.
>
> Dónde falla la analogía: un resorte real obedece a Hooke solo mientras no se deforma. Y aquí el trabajo es una **definición**, motivada por «fuerza por distancia».

La misma idea (cortar en pedazos donde una cantidad casi no cambia y sumar) da la masa de una varilla de densidad variable, su centro de masa y el centroide de una región plana.

## Definiciones

**Definición C2-022.D1 ⚠ def (trabajo)**

Si una fuerza $F(x)$, continua en $[a, b]$ ($a < b$), actúa a lo largo de la recta mientras un objeto va de $a$ a $b$, el trabajo es

$$W := \int_a^b F.$$

**⚠ def: por qué es definición**

Con fuerza constante, $W = F \cdot (b - a)$ (C2-002.E1); las sumas de Riemann (C2-002.T6) motivan el caso general. El trabajo a lo largo de una curva (integral de línea) es de Cálculo IV. La integral existe porque $F$ es continua (C2-003.T1).

**Definición C2-022.D2 (masa y centro de masa de una varilla)**

Sea $\rho$ continua en $[a, b]$ con $\rho \geq 0$ y $\rho(c) > 0$ para algún $c$ (densidad lineal). Masa $M := \int_a^b \rho > 0$, momento $M_0 := \int_a^b x\rho(x)\,dx$ y centro de masa $\bar{x} := M_0/M$.

Las integrales existen por C2-003.T1 ($x\rho(x)$ es continua por C1-022.T2), y $M > 0$ por la positividad (C2-006.T3).

**Definición C2-022.D3 (centroide de una región)**

Sean $f$ continua en $[a, b]$ con $f \geq 0$ y $A := \int_a^b f > 0$ (el área de la región $R$ bajo $f$, C2-019.D1). Centroide de $R$:

$$\bar{x} := \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx, \qquad \bar{y} := \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2}\int_a^b f^2.$$

**De dónde sale $\bar{y}$**

Una franja vertical delgada en $x$ es casi un rectángulo de altura $f(x)$: su masa (con densidad 1) es $f(x)\,\Delta x$ y su centro está a la altura $f(x)/2$. El momento respecto al eje $x$ es $\frac{f(x)}{2}\cdot f(x)\,\Delta x$; al sumar, $\frac{1}{2}\int f^2$.

## Resultados

**Ejemplo C2-022.E1 (resorte de Hooke)**

Con $F(x) = kx$ ($k > 0$), estirar de $a$ a $b$ cuesta $W = k(b^2 - a^2)/2$.

*Demostración.*

1. $F(x) = kx$ es continua (C1-022.T2), y por C2-022.D1, $W = \int_a^b kx\,dx$.
2. Por C2-009.E1 y C2-004.T2, $\int_a^b kx\,dx = k\,\dfrac{b^2 - a^2}{2}$. ■

Con $k = 200$: de 0 a 0.1, $W = 100 \cdot 0.01 = 1$ J; de 0.1 a 0.2, $W = 100(0.04 - 0.01) = 3$ J.

**Teorema C2-022.T1**

El centro de masa $\bar{x}$ está en $[a, b]$.

**Idea de la demostración**

El momento es la integral de $x$ «pesada» con $\rho \geq 0$; el TVM ponderado la escribe como $c$ por la masa.

*Demostración.*

1. $x \mapsto x$ es continua en $[a, b]$ (C1-022.T2) y $\rho$ es integrable (C2-003.T1) con $\rho \geq 0$.
2. Por el TVM ponderado (C2-006.T4) existe $c \in [a, b]$ con

$$\int_a^b x\rho(x)\,dx = c\int_a^b \rho, \quad \text{es decir,} \quad M_0 = cM.$$

3. Como $M > 0$ (C2-022.D2), se puede dividir (K8): $\bar{x} = M_0/M = c \in [a, b]$. ■

**Una varilla más pesada a la derecha**

En $[0, 2]$ con $\rho(x) = 1{+}x$: $M = \int_0^2 (1{+}x)\,dx = 2{+}2 = 4$ y $M_0 = \int_0^2 (x{+}x^2)\,dx = 2{+}8/3 = 14/3$ (C2-009.E1). Así $\bar{x} = 7/6 \approx 1.17$: a la derecha del punto medio, del lado más pesado.

**Teorema C2-022.T2 (Pappus)**

Con $R$ como en C2-022.D3, el sólido obtenido al girar $R$ alrededor del eje $x$ tiene volumen $2\pi\,\bar{y}A$.

*Demostración.*

1. Como $A > 0$, de la definición C2-022.D3 se obtiene, multiplicando por $A$ (K5-K8),

$$\bar{y}A = \frac{1}{2}\int_a^b f^2.$$

2. Por la definición de volumen por discos (C2-021.D1, con $f \geq 0$ continua en $[a, b]$), el sólido tiene volumen

$$\pi \int_a^b f^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int_a^b f^2 = 2\pi\, \bar{y}A \qquad \text{(C2-004.T2).} \qquad \blacksquare$$

En palabras: el volumen es el área de la región por la distancia que recorre su centroide al dar una vuelta.

> **Ejemplo C2-022.E2 (centroide del semidisco)**
> El semidisco de radio $r$ tiene $\bar{y} = 4r/(3\pi)$.

*Demostración.*

1. El semidisco es la región bajo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, continua y $\geq 0$ en $[-r, r]$ (C2-014.T1, C1-022.T3).
2. Su área es $A = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2/2 > 0$ (C2-015.E1, C2-014.T3).
3. Al girar alrededor del eje $x$ da la esfera de radio $r$, de volumen $4\pi r^3/3$ (C2-021.E1).
4. Por Pappus (C2-022.T2),

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 2\pi\, \bar{y} \cdot \frac{\pi r^2}{2}, \qquad \text{así que} \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

(K5-K8). $\blacksquare$

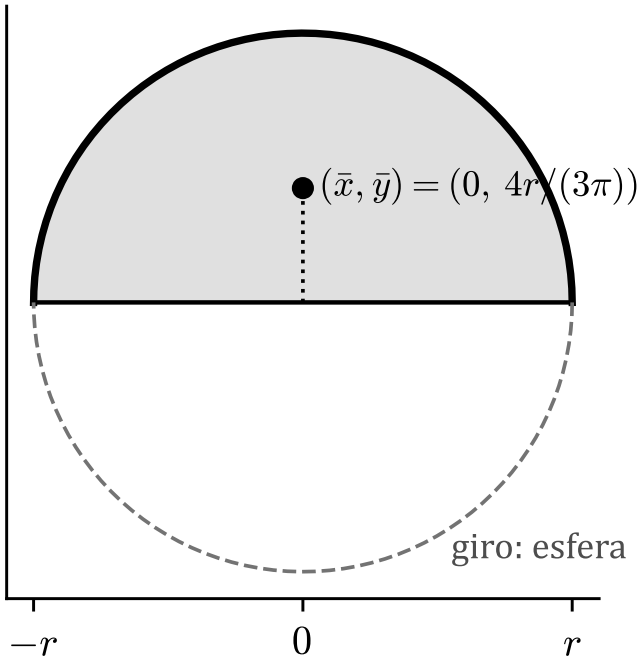



Figura 23: El centroide del semidisco está a la altura $4r/(3\pi) \approx 0.42\,r$; al girar la región alrededor del eje $x$ se obtiene la esfera.

Comprobación directa con la definición: $\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4r^3}{3} = \frac{2r^3}{3}$, y $\frac{2r^3/3}{\pi r^2/2} = \frac{4r}{3\pi}$.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ ρ ≥ 0 en T1**

Con $\rho(x) = x - 0.4$ en $[0,1]$ (que toma valores negativos), $\int_0^1 \rho = 0.1$ y $\int_0^1 x\rho(x)\,dx = 1/3 - 0.2 = 2/15$, así que el «centro de masa» sería $(2/15)/0.1 = 4/3 \notin [0,1]$. El TVM ponderado pide $g \geq 0$.

**⚠ M > 0**

Si $\rho = 0$ en todo $[a,b]$, $M = 0$ y $\bar{x} = M_0/M$ no está definido. Por eso C2-022.D2 pide $\rho(c) > 0$ para algún $c$.

**⚠ El centroide no siempre está en la región**

C2-022.T1 habla de una varilla. Para una región plana el centroide puede caer fuera: en una corona, por simetría, está en el centro, que no pertenece a la corona.

## Ejercicios

1. Una fuerza $F(x) = 3x^2$ newtons mueve un objeto de $x = 1$ a $x = 2$ metros. Calcula el trabajo.
2. Una cadena de 10 m y 2 kg/m cuelga de un balcón. Si al subir los primeros $x$ metros la fuerza necesaria es el peso de lo que aún cuelga, $F(x) = 2 \cdot 9.8\,(10 - x)$ N, calcula el trabajo para subirla toda (con C2-022.D1).
3. Calcula el centro de masa de una varilla en $[0, 1]$ con densidad $\rho(x) = x^2$.
4. Con Pappus, calcula $\bar{y}$ para el triángulo bajo $f(x) = r(1 - x/h)$ en $[0, h]$.
5. Demuestra que si $\rho$ es constante en $[a, b]$, $\bar{x} = (a + b)/2$.

### Respuestas

1. $\int_1^2 3x^2\,dx = 8 - 1 = 7$ J.
2. $\int_0^{10} 19.6(10 - x)\,dx = 19.6 \cdot 50 = 980$ J.
3. $M = 1/3$, $M_0 = 1/4$, $\bar{x} = 3/4$.
4. $A = rh/2$ y el cono tiene volumen $\pi r^2 h/3$ (C2-021.E1): $\bar{y} = (\pi r^2 h/3)/(2\pi \cdot rh/2) = r/3$.
5. $M = \rho(b - a)$ y $M_0 = \rho(b^2 - a^2)/2$ (C2-009.E1), así que $\bar{x} = (b + a)/2$.

# C2-023 · Ecuaciones diferenciales que resuelve la integral

## Motivación

> **El café que se enfría**
> Sirves un café a 90 °C en una cocina a 20 °C. El termómetro de la cocina, metido en la taza, marca 60 °C a los 10 minutos. Lo quieres tomar a 40 °C. ¿A qué hora?
> Una respuesta apresurada: si bajó 30 °C en 10 minutos, bajará los 20 °C que faltan en 6.7 minutos más, a los 16.7 min. Pero el café no se enfría a ritmo constante: se enfría más rápido cuanto más caliente está respecto a la cocina. La **ley de enfriamiento de Newton** lo dice así: la rapidez de cambio de la temperatura $y$ es proporcional a la diferencia $y - 20$,
>
> $$y' = k(y - 20), \qquad k < 0.$$
>
> Con el teorema de esta clase la respuesta sale exacta: unos 22.4 minutos.
> Dónde falla la analogía: la ley de Newton es un modelo (la taza no tiene una sola temperatura, la cocina se calienta un poco). El teorema es exacto para el modelo.

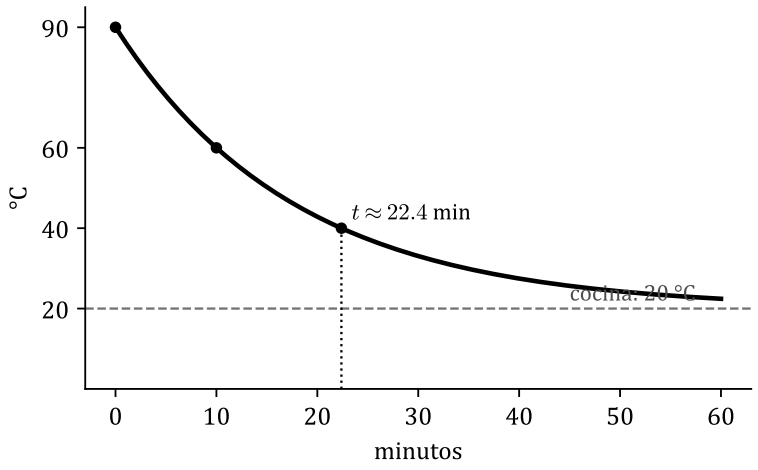



Figura 24: Temperatura del café: la diferencia con la cocina se multiplica por 4/7 cada 10 minutos.

Una **ecuación diferencial** pide una función a partir de una relación entre ella y sus derivadas. En esta clase no hay teoría general (el teorema de existencia y unicidad de Picard es de otra materia): solo cuatro ecuaciones que se resuelven con lo que ya tenemos, y para cada una se demuestra que la solución es **única**. El truco es siempre el mismo: armar una cantidad con derivada cero, que por C1-034.T1 es constante en un intervalo.

## Resultados

### Crecimiento y decaimiento: y′ = ky

**Teorema C2-023.T1 (y′ = ky)**

Sean $I$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $k, y_0 \in \mathbb{R}$. La única $y : I \to \mathbb{R}$ derivable con $y' = ky$ en $I$ y $y(t_0) = y_0$ es

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}.$$

**Idea de la demostración**
Se divide $y$ entre la exponencial candidata: el cociente tiene derivada cero, así que es constante.

*Demostración.*

*Existencia.*

1. $t \mapsto k(t - t_0) = kt + (-kt_0)$ es derivable con derivada $k$ (C1-028.T2).
2. Por la regla de la cadena (C1-030.T1) y $\exp' = \exp$ (C2-012.T1), $t \mapsto \exp(k(t - t_0))$ es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $k \exp(k(t - t_0))$.
3. Por C1-029.T1, $y(t) := y_0 \exp(k(t - t_0))$ es derivable con $y'(t) = k\, y(t)$.
4. $y(t_0) = y_0 \exp 0 = y_0$ (C2-012.T1).

*Unicidad.*

1. Sea $y$ derivable en $I$ con $y' = ky$ en $I$ y $y(t_0) = y_0$. Para $t \in I$ sea

$$u(t) := y(t) \exp\big(-k(t - t_0)\big).$$

2. Por la regla del producto y la de la cadena (C1-029.T2, C1-030.T1, C2-012.T1, C1-028.T2), $u$ es derivable en $I$ y

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(t) \exp(-k(t - t_0)) + y(t) \cdot (-k) \exp(-k(t - t_0)) \\ &= \big(k\, y(t) - k\, y(t)\big) \exp(-k(t - t_0)) = 0. \end{aligned}$$

3. $u$ es continua en $I$ (C1-028.T1), $I$ es un intervalo y $u' = 0$ en $I$: por C1-034.T1, $u$ es constante.
4. Así $u(t) = u(t_0) = y_0 \exp 0 = y_0$ para todo $t \in I$ (C2-012.T1).
5. Como $\exp(-x) = 1/\exp x$ (C2-012.T2),

$$y(t) = \frac{y_0}{\exp(-k(t - t_0))} = y_0 \exp\big(k(t - t_0)\big) = y_0 e^{k(t - t_0)}$$

(K8, C2-012.T4). ■

> **Ejemplo C2-023.E1 (decaimiento y Malthus)**
> Si $k < 0$, $y(t_0 + T) = y_0/2$ con $T = (\log 2)/|k|$ (vida media); si $k > 0$, la población se duplica cada $(\log 2)/k$.

*Demostración.*

1. Si $k < 0$, $|k| = -k$ (C1-004.D1) y $kT = -\log 2$. Por C2-023.T1,

$$y(t_0 + T) = y_0 e^{-\log 2} = \frac{y_0}{e^{\log 2}} = \frac{y_0}{2},$$

   porque $e^{\log 2} = \exp(\log 2) = 2$ (C2-012.T4, C2-012.D1) y $e^{-x} = 1/e^x$ (C2-012.T2).
2. Si $k > 0$, para todo $t$, $y(t + (\log 2)/k) = y_0 e^{k(t-t_0)} e^{\log 2} = 2y(t)$ (C2-012.T5). ■

La vida media no depende de cuánto material hay al principio: con vida media de 5 años, tras 15 años queda $(1/2)^3 = 1/8$.

## Enfriamiento de Newton

**Corolario C2-023.C1 (enfriamiento de Newton)**

Para $A \in \mathbb{R}$, la única $y$ derivable en $I$ con $y' = k(y - A)$ y $y(t_0) = y_0$ es

$$y = A + (y_0 - A)e^{k(t-t_0)}.$$

*Demostración.*

1. Si $y$ cumple las hipótesis, $z := y - A$ es derivable con $z' = y' = k(y - A) = kz$ (C1-029.T1, C1-028.T2) y $z(t_0) = y_0 - A$.
2. Por C2-023.T1, $z(t) = (y_0 - A)e^{k(t-t_0)}$, y $y = A + z$.
3. Recíprocamente, esa $y$ es derivable con $y' = k(y_0 - A)e^{k(t-t_0)} = k(y - A)$ y $y(t_0) = y_0$ (C2-023.T1, C1-029.T1). ■

> **El café**
> Con $A = 20$ y $y_0 = 90$: $y(t) = 20 + 70e^{kt}$. De $y(10) = 60$ sale $e^{10k} = 40/70 = 4/7$, así que $k = \frac{1}{10}\log(4/7) < 0$. Y $y(t) = 40$ si y solo si $e^{kt} = 2/7$, es decir,
>
> $$t = \frac{\log(2/7)}{k} = 10\,\frac{\log(2/7)}{\log(4/7)} \approx 22.4 \text{ min}.$$

## El resorte: $y'' = -\omega^2 y$

**Teorema C2-023.T2 (resorte)**

Sean $I$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $\omega > 0$. La única $y$ dos veces derivable en $I$ con $y'' = -\omega^2 y$, $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = v_0$ es

$$y(t) = y_0 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega(t - t_0)).$$

**Idea de la demostración**
Para la diferencia $w$ de dos soluciones, la «energía» $\omega^2 w^2 + w'^2$ tiene derivada cero; como vale 0 en $t_0$, es 0 siempre, y entonces $w = 0$.

*Demostración.*

*Existencia.*

1. Sea $\theta(t) = \omega(t - t_0)$, con $\theta' = \omega$ (C1-028.T2). Por $\operatorname{sen}' = \cos$, $\cos' = -\operatorname{sen}$ (C2-014.T6) y la regla de la cadena (C1-030.T1, C1-029.T1):

$$y'(t) = -y_0\, \omega \operatorname{sen}\theta + v_0 \cos\theta,$$
$$y''(t) = -y_0\, \omega^2 \cos\theta - v_0\, \omega \operatorname{sen}\theta = -\omega^2 y(t).$$

2. En $t_0$, $\theta = 0$, $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$ (C2-014.T4): $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = v_0$.

*Unicidad.*

1. Sean $y_1, y_2$ dos soluciones y $w := y_1 - y_2$. Entonces $w$ es dos veces derivable (C1-029.T1, C1-031.D1), $w'' = -\omega^2 w$ y $w(t_0) = w'(t_0) = 0$.
2. Sea $E := \omega^2 w^2 + w'^2$. Por la regla del producto (C1-029.T2, C1-029.T1),

$$E' = 2\omega^2 w w' + 2w'w'' = 2w'\left(\omega^2 w + w''\right) = 0.$$

3. $E$ es continua (C1-028.T1) y $I$ es un intervalo: $E$ es constante (C1-034.T1), igual a $E(t_0) = 0$.
4. Para cada $t$, $\omega^2 w(t)^2 \geq 0$ y $w'(t)^2 \geq 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9), y su suma es 0; así $\omega^2 w(t)^2 = 0$.
5. Como $\omega^2 \neq 0$, $w(t)^2 = 0$ y $w(t) = 0$ (C1-002.T5). Por lo tanto $y_1 = y_2$. ■

## La logística

**Teorema C2-023.T3 (logística)**

Sean $r, K > 0$, $I$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $0 < y_0 < K$. La función

$$y(t) := \frac{K}{1 + \frac{K-y_0}{y_0}\, e^{-r(t-t_0)}}$$

es derivable en $I$, toma valores en $(0, K)$, cumple $y' = ry(1 - y/K)$ y $y(t_0) = y_0$, y si $I \supset (t_0, \infty)$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$. Es la única solución positiva: si $z : I \to (0, \infty)$ es derivable con $z' = rz(1-z/K)$ y $z(t_0) = y_0$, entonces $z = y$.

**Idea de la demostración**

Para la unicidad, $w = 1/z$ cumple una ecuación de Newton, $w' = -r(w - 1/K)$, que ya sabemos resolver.

*Demostración.*

*Propiedades de y.*

1. Sea $C := (K - y_0)/y_0 > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4) y $D(t) := 1 + Ce^{-r(t-t_0)}$. Como $e^x > 0$ (C2-012.T1), $D(t) > 1 > 0$, así que $0 < y(t) = K/D(t) < K$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
2. $D$ es derivable con $D'(t) = -rCe^{-r(t-t_0)}$ (C2-023.T1 con $k = -r$), y por la regla del cociente (C1-029.T3) $y$ es derivable con
$$y'(t) = \frac{K\, rCe^{-r(t-t_0)}}{D(t)^2}.$$
3. Por otro lado, $1 - y/K = 1 - 1/D = Ce^{-r(t-t_0)}/D$, así que
$$r\, y\, (1 - y/K) = r \cdot \frac{K}{D} \cdot \frac{Ce^{-r(t-t_0)}}{D} = y'(t)$$
(K1-K9).
4. $y(t_0) = K/(1 + C) = K/(K/y_0) = y_0$.
5. Límite: sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ (C2-012.T8), hay $M$ con $e^x < \varepsilon$ para $x < M$; si $t > t_0 - M/r$, entonces $-r(t-t_0) < M$ y $0 < e^{-r(t-t_0)} < \varepsilon$ (C1-003.T4). Así $\lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} = 0$ (C1-020.D1), $D(t) \to 1$ y $y(t) \to K$ (C1-020.T2, C1-018.T1).

*Unicidad.*

1. Sea $z : I \to (0,\infty)$ derivable con $z' = rz(1 - z/K)$ y $z(t_0) = y_0$. Como $z > 0$, $w := 1/z$ es derivable (C1-029.T3, C1-029.C1) y

$$w' = -\frac{z'}{z^2} = -\frac{rz(1 - z/K)}{z^2} = -r\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{K}\Big) = -r\Big(w - \frac{1}{K}\Big).$$

2. Por C2-023.C1, con $k = -r$, $A = 1/K$ y $w(t_0) = 1/y_0$:

$$w(t) = \frac{1}{K} + \Big(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}\Big)e^{-r(t-t_0)} = \frac{1}{K}\Big(1 + \frac{K - y_0}{y_0}e^{-r(t-t_0)}\Big).$$

3. Por lo tanto $z = 1/w = y$. ■

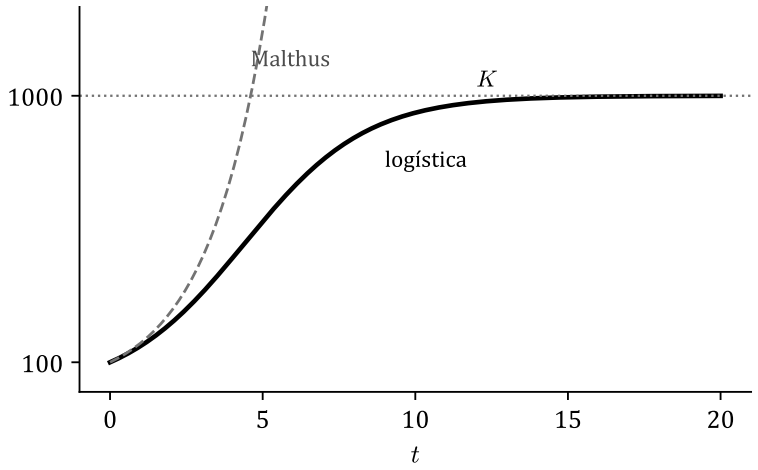



Figura 25: Logística con $K = 1000, y_0 = 100, r = 0.5$ (continua) frente a Malthus $100e^{0.5t}$ (punteada).

## Por qué cada hipótesis

**⚠ $I$ debe ser un intervalo**

En $I = (-1,0) \cup (0,1)$, con $t_0 = 1/2$, la función $y = e^{kt}$ en $(0,1)$ y $y = 2e^{kt}$ en $(-1,0)$ cumple $y' = ky$ en todo $I$ y $y(1/2) = e^{k/2}$, pero no es $e^{k/2}e^{k(t-1/2)}$ en $(-1,0)$. Lo que falla es C1-034.T1: «derivada cero ⇒ constante» solo vale en un intervalo.

**⚠ Sin condición inicial no hay unicidad**

$y = 0$ y $y = e^{kt}$ cumplen $y' = ky$. La ecuación sola tiene una solución para cada $y_0$; el dato $y(t_0) = y_0$ la fija. En el resorte hacen falta dos datos, $y(t_0)$ y $y'(t_0)$: $\cos(\omega t)$ y $\cos(\omega t) + \operatorname{sen}(\omega t)$ cumplen $y(0) = 1$ pero tienen distinta velocidad inicial.

**⚠ La unicidad de la logística es entre soluciones positivas**

El teorema solo compara con soluciones positivas porque el método divide entre $z$. La unicidad sin esa restricción es cierta, pero se demuestra con el teorema de Picard (otra materia).

## Ejercicios

1. Una bacteria se duplica cada 20 minutos. Si hay 1,000 a las 8:00, ¿cuántas hay a las 9:00?
2. Un isótopo tiene vida media de 5 años. ¿Qué fracción queda a los 15 años? ¿Y a los 7 años?
3. Demuestra que la única $y$ derivable en $\mathbb{R}$ con $y' = 2ty$ y $y(0) = 1$ es $e^{t^2}$. (Sugerencia: deriva $y(t)e^{-t^2}$.)
4. Para el resorte con $\omega = 2$, $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, ¿cuándo pasa $y$ por primera vez por 0?
5. En la logística con $K = 1000$, $y_0 = 100$ y $r = 0.5$, calcula $y(10)$.

### Respuestas

1. $k = (\log 2)/20$; en 60 min se duplica 3 veces: 8,000.
2. $1/8$; $(1/2)^{7/5} \approx 0.379$.
3. $u = ye^{-t^2}$ tiene $u' = (y' - 2ty)e^{-t^2} = 0$, así que $u = u(0) = 1$ (C1-034.T1).
4. $y = \cos 2t$ (C2-023.T2); se anula por primera vez en $2t = \pi/2$, $t = \pi/4$ (C2-014.C1).
5. $1000/(1 + 9e^{-5}) \approx 942.8$.

# C2-024 · Series convergentes

## Motivación

**Libros en el borde de la mesa**

Apilas libros iguales, de largo 1, en el borde de una mesa, cada uno un poco más afuera que el de abajo. La física del equilibrio (que aquí tomamos como dato) dice que, con la mejor acomodación, $n$ libros sobresalen en total

$$\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$

¿Puede el libro de arriba quedar completamente fuera de la mesa? Con 3 libros sobresalen $11/12 < 1$; con 4, $25/24 > 1$: sí. ¿Y hay un tope? Las sumas crecen cada vez más despacio: para sobresalir dos libros completos hacen falta 31 libros, y para tres, 227. Aun así, veremos que **no hay tope**.

Dónde falla la analogía: la fórmula del voladizo es física, no la demostramos; y una pila real de 227 libros no se sostiene.

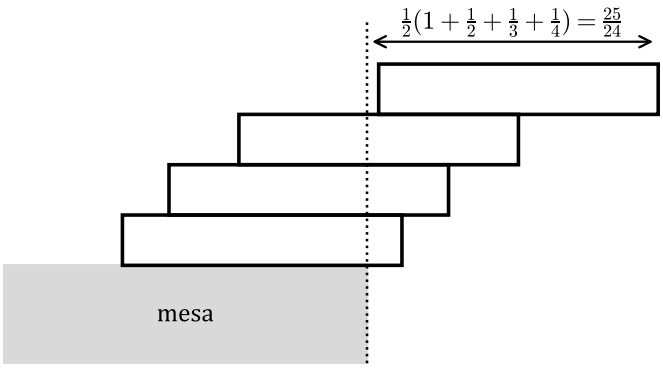



Figura 26: Cuatro libros: el de arriba sobresale 1/2 respecto al segundo, el segundo 1/4 respecto al tercero, y así; en total 25/24.

Una suma infinita no se puede «hacer» sumando: no se termina nunca. Lo que sí se puede hacer es

sumar los primeros $n$ términos y preguntar si esos totales se acercan a un número. Así, una serie es una sucesión disfrazada: la de sus sumas parciales, y todo lo que sabemos de sucesiones (Cálculo I, capítulo 4) se aplica.

## Definiciones

**Definición C2-024.D1 (serie)**

Para una sucesión $(a_n)$, sus **sumas parciales** son $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. La serie $\sum a_n$ **converge** a $S$ si $s_n \to S$, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$; si $(s_n)$ no converge, **diverge**. Igual con índices desde 0 o desde $N_0$.

**⚠ El símbolo tiene dos usos**

$\sum a_n$ nombra a la serie (converja o no); $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ afirma que converge y que su suma es $S$.

## Resultados

### Linealidad y término general

**Teorema C2-024.T1 (linealidad)**

Si $\sum a_n = S$, $\sum b_n = T$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\sum(a_n + b_n) = S + T$ y $\sum ca_n = cS$.

*Demostración.*

1. Por C1-005.T12, las sumas parciales de $\sum(a_n + b_n)$ y de $\sum ca_n$ son $s_n + t_n$ y $cs_n$, donde $s_n$ y $t_n$ son las de $\sum a_n$ y $\sum b_n$.
2. Por C1-013.T2, $s_n + t_n \to S + T$ y $cs_n \to cS$ (la constante $c$ converge a $c$, C1-012.T2). ■

**Teorema C2-024.T2 (término general)**

Si $\sum a_n$ converge, $a_n \to 0$.

*Demostración.*

1. Sea $S$ la suma. Para $n \geq 2$, $a_n = s_n - s_{n-1}$ (C1-005.D2).
2. $(s_{n-1})_{n\geq 2}$ es $(s_n)$ recorrida un lugar, y también converge a $S$ (C1-012.T3 b).
3. Por C1-013.T2, $a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0$, y cambiar el primer término no afecta (C1-012.T3 a). ■

**⚠ El recíproco es falso**

$1/n \to 0$ y, como veremos en C2-024.E1, $\sum 1/n$ diverge. Que el término general tienda a 0 es necesario, no suficiente.

## La serie geométrica

**Teorema C2-024.T3 (geométrica)**

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge $\Leftrightarrow |r| < 1$, y entonces vale $1/(1-r)$.

*Demostración.*

1. Si $|r| < 1$, entonces $r \neq 1$ y por la suma geométrica finita (C1-005.T8)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

2. Por C1-014.T3, $r^n \to 0$, y por C1-012.T3 (b), $r^{n+1} \to 0$.
3. Por C1-013.T2, $s_n \to \dfrac{1-0}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$.
4. Si $|r| \geq 1$, entonces $|r^n| = |r|^n \geq 1$ para todo $n$ (C1-005.T9; con $|r| = 1$ es igualdad).
5. Así $(r^n)$ no tiende a 0: con $\varepsilon = 1$ ningún $N$ cumple $|r^n - 0| < 1$ para $n \geq N$ (C1-012.D1).
6. Por C2-024.T2, la serie diverge. ■

> **Zenón y el 0.999…**
> Para cruzar un cuarto caminas la mitad, luego la mitad de lo que falta, y así: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (C2-024.T1, C2-024.T3). Del mismo modo, $0.999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9/10^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = 1$, como en C1-009.T2.

## Criterio de Cauchy

**Teorema C2-024.T4 (criterio de Cauchy)**

$\sum a_n$ converge ⇔ para todo $\varepsilon > 0$ existe $N$ tal que $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ para todos $m > n \geq N$.

> **Idea de la demostración**
> El bloque $\sum_{k=n+1}^{m} a_k$ es $s_m - s_n$: el criterio es la definición de sucesión de Cauchy para $(s_n)$, y en $\mathbb{R}$ Cauchy equivale a convergente.

*Demostración.*

1. Para $m > n$, partiendo la suma (C2-001.T1 b),

$$s_m = s_n + \sum_{k=n+1}^{m} a_k, \qquad \text{es decir,} \qquad \sum_{k=n+1}^{m} a_k = s_m - s_n.$$

2. La condición del enunciado dice entonces: para todo $\varepsilon > 0$ hay $N$ con $|s_m - s_n| < \varepsilon$ si $m > n \geq N$.
3. Si $m = n$, $|s_m - s_n| = 0 < \varepsilon$; si $m < n$, $|s_m - s_n| = |s_n - s_m|$ (C1-004.T1) y se aplica el caso anterior con los papeles cambiados.
4. Por lo tanto la condición equivale a que $(s_n)$ sea de Cauchy (C1-016.D1).
5. Por C1-016.T1 y C1-016.T3, $(s_n)$ es de Cauchy si y solo si converge, es decir (C2-024.D1), si y solo si $\sum a_n$ converge. ■

## Colas y términos no negativos

**Teorema C2-024.T5 (colas)**

Para $N_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ⇔ $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n$ converge, y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N_0} a_n + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n;$$

la cola $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ tiende a 0 cuando $N \to \infty$. Cambiar un número finito de términos no altera la convergencia.

*Demostración.*

1. Las sumas parciales de la cola son $t_m := \sum_{k=N_0+1}^{N_0+m} a_k$ ($m \geq 1$). Partiendo la suma (C2-001.T1 b), $s_{N_0+m} = s_{N_0} + t_m$.
2. $(s_n)$ converge si y solo si $(s_{N_0+m})_m$ converge (C1-012.T3 b), si y solo si $(t_m)$ converge (C1-013.T2, sumando o restando la constante $s_{N_0}$). En ese caso, $S = s_{N_0} + \lim t_m$.
3. Si $S = \sum a_n$, la cola desde $N+1$ vale $S - s_N$ (paso 2 con $N_0 = N$), y $S - s_N \to S - S = 0$ (C1-013.T2).
4. Si $a_n = b_n$ para $n > N_0$, las colas desde $N_0 + 1$ son la misma serie; por el paso 2, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen ambas o divergen ambas. ■

**Teorema C2-024.T6 (términos no negativos)**

Si $a_n \geq 0$ para todo $n$, $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(s_n)$ está acotada; si no, $s_n \to \infty$.

*Demostración.*

1. $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ (C1-005.D2, C1-003.T9): $(s_n)$ es creciente (C1-014.T0).
2. Si $(s_n)$ está acotada, converge (C1-014.T2). Si converge, está acotada (C1-013.T1).
3. Si no está acotada, dado $K$ hay $N$ con $s_N > K$, y para $n \geq N$, $s_n \geq s_N > K$: $s_n \to \infty$ (C1-020.D1). ■

## Dos ejemplos decisivos

**Ejemplo C2-024.E1 (telescópica y armónica)**
$\sum 1/(n(n+1)) = 1$. La armónica $\sum 1/n$ diverge: $s_{2n} - s_n \geq 1/2$.

*Demostración (telescópica).*

1. Para $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ (K1-K9).
2. Con $c_k := -1/(k+1)$, el sumando es $c_k - c_{k-1}$, y por la telescópica (C2-001.T1 a)

$$s_n = c_n - c_0 = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. $1/(n+1) \to 0$ (C1-012.T2, C1-012.T3 b), así que $s_n \to 1$ (C1-013.T2).

*Demostración (armónica).*

1. Por C2-001.T1 (b), $s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k$.
2. Cada uno de esos $n$ sumandos cumple $k \leq 2n$, así que $1/k \geq 1/(2n)$ (C1-003.T7, C1-003.T9).
3. Por C1-005.T12 (b) y (d), $s_{2n} - s_n \geq n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.
4. Con $\varepsilon = 1/2$: para cualquier $N$, los índices $m = 2N > n = N \geq N$ dan $\left|\sum_{k=n+1}^{m} 1/k\right| \geq 1/2$, así que falla la condición de C2-024.T4 y la armónica diverge.
5. Como sus términos son positivos, $s_n \to \infty$ (C2-024.T6). ■

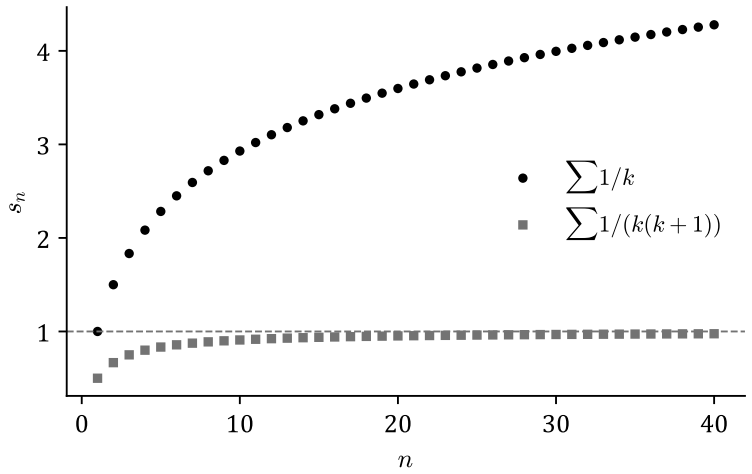



Figura 27: Sumas parciales: la armónica crece sin cota, aunque despacio; la telescópica se pega a 1.

Regreso a los libros: el voladizo de $n$ libros es $\frac{1}{2}s_n$ con $s_n$ la suma parcial de la armónica, que tiende a $\infty$. Con suficientes libros sobresalen tanto como quieras.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ En el criterio de Cauchy hacen falta bloques largos**

Si solo se pide $|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$, la condición es $a_n \to 0$, que no basta: en la armónica cada término es pequeño, pero los bloques de $n$ términos entre $n+1$ y $2n$ siempre suman al menos $1/2$.

**⚠ El criterio de Cauchy necesita la completitud**

En $\mathbb{Q}$ el criterio falla: la serie de los dígitos decimales de $\sqrt{2}$, $1 + 4/10 + 1/100 + 4/1000 + \cdots$, tiene sumas parciales racionales que cumplen la condición de Cauchy, pero su límite $\sqrt{2}$ no es racional (C1-008.T1). En la demostración, la completitud entra a través de C1-016.T3.

## Ejercicios

1. Calcula $\sum_{n=0}^{\infty}(-1/3)^n$ y $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n}$.
2. Demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}$.
3. Demuestra que $\sum n/(n+1)$ diverge.
4. Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, demuestra que $\sum(a_n + b_n)$ diverge.
5. Da un ejemplo de dos series divergentes cuya suma término a término converja.

### Respuestas

1. $1/(1 + 1/3) = 3/4$; $\frac{1}{4} \cdot 2 = 1/2$ (C2-024.T1, C2-024.T3).
2. Telescópica con $c_k = -1/(k+2)$: $s_n = 1/2 - 1/(n+2) \to 1/2$.
3. $n/(n+1) \to 1 \neq 0$; por C2-024.T2 diverge.
4. Si $\sum(a_n + b_n)$ convergiera, $\sum b_n = \sum((a_n + b_n) - a_n)$ convergería (C2-024.T1).
5. $\sum 1$ y $\sum(-1)$: la suma es $\sum 0 = 0$.

# C2-025 · Criterios para términos positivos

## Motivación

> **El tinaco que gotea**
> Un tinaco de 2 litros, vacío, está bajo una llave que gotea cada vez menos: en el minuto 1 cae 1 litro, en el minuto 2, $1/4$ de litro; en el minuto $n$, $1/n^2$ litros. Si la dejas para siempre, ¿se desborda?
> Tras 10 minutos hay 1.5498 L; tras 100, 1.6350 L. Crece, pero cada vez menos. Dibuja la curva $y = 1/x^2$: el agua del minuto $k$ es un rectángulo de base 1 y altura $1/k^2$ que cabe bajo la curva en $[k-1, k]$. El área bajo la curva de 1 a $n$ es $1 - 1/n < 1$. Con el primer litro, el total nunca pasa de 2: el tinaco no se desborda.
> Si en el minuto $n$ cayera $1/n$ litros, se desbordaría en el minuto 4, porque $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} > 2$ (y la armónica crece sin cota, C2-024.E1).
> Dónde falla la analogía: el agua llega en gotas que no se pueden dividir sin fin, y nadie espera una infinidad de minutos.

Para series de términos no negativos la pregunta es una sola: ¿están acotadas las sumas parciales? (C2-024.T6). Los criterios de esta clase la responden comparando con algo conocido: otra serie, una geométrica o una integral.

# Resultados

## Comparación

**Teorema C2-025.T1 (comparación)**

Si $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \ge N_0$: $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge; $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

*Demostración.*

1. Supón que $\sum b_n$ converge. Por las colas (C2-024.T5), $\sum_{n \ge N_0} b_n$ converge; sus sumas parciales están acotadas por un $B$ (C2-024.T6).
2. Para $m \ge N_0$, $\sum_{k=N_0}^{m} a_k \le \sum_{k=N_0}^{m} b_k \le B$ (C1-005.T12 d).
3. Por C2-024.T6, $\sum_{n \ge N_0} a_n$ converge, y por C2-024.T5 también $\sum a_n$.
4. La segunda afirmación es la contrapositiva de la primera. ■

**Teorema C2-025.T2 (comparación al límite)**

Si $a_n, b_n > 0$ y $a_n / b_n \to L$ con $0 < L < \infty$, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen ambas o divergen ambas.

*Demostración.*

1. Con $\varepsilon = L/2 > 0$ (C1-003.T8) hay $N$ tal que, para $n \ge N$, $|a_n/b_n - L| < L/2$ (C1-012.D1), es decir,
$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$
2. Multiplicando por $b_n > 0$ (C1-003.T4): $\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n$ para $n \ge N$.
3. Si $\sum b_n$ converge, $\sum \frac{3L}{2} b_n$ converge (C2-024.T1) y por C2-025.T1 $\sum a_n$ converge.
4. Si $\sum a_n$ converge, $\sum \frac{2}{L} a_n$ converge y, como $b_n < \frac{2}{L} a_n$, $\sum b_n$ converge. ■

## Cociente y raíz

**Teorema C2-025.T3 (cociente)**

Si $a_n > 0$ y $a_{n+1}/a_n \to L$: si $L < 1$, $\sum a_n$ converge; si $L > 1$ (o $a_{n+1}/a_n \to \infty$), $a_n$ no tiende a 0 y $\sum a_n$ diverge.

**Idea de la demostración**
A partir de cierto lugar, cada término es a lo más $q$ veces el anterior, con $q < 1$: la serie queda debajo de una geométrica.

*Demostración.*

1. Si $L < 1$, sea $q := (L+1)/2$, con $L < q < 1$ (C1-003.T8). Con $\varepsilon = q - L$ hay $N$ tal que $a_{n+1}/a_n < q$, es decir, $a_{n+1} < q\, a_n$, para $n \geq N$ (C1-012.D1, C1-003.T4).
2. Por inducción (C1-005.T1), $a_n \leq a_N\, q^{n-N}$ para $n \geq N$ (C1-005.T9).
3. $\sum_n a_N q^{-N} q^n$ converge (C2-024.T3, C2-024.T1), así que $\sum a_n$ converge (C2-025.T1).
4. Si $L > 1$ (o el cociente tiende a ∞), hay $N$ con $a_{n+1}/a_n > 1$, es decir, $a_{n+1} > a_n$, para $n \geq N$ (C1-012.D1, C1-020.D1).
5. Por inducción, $a_n \geq a_N > 0$ para $n \geq N$. Si $a_n \to 0$, con $\varepsilon = a_N$ habría $n \geq N$ con $a_n < a_N$: contradicción. Así $a_n \not\to 0$ y la serie diverge (C2-024.T2). ■

**Teorema C2-025.T4 (raíz)**

Si $a_n \geq 0$ y $\sqrt[n]{a_n} \to L$ (con $\sqrt[n]{0} := 0$): si $L < 1$, $\sum a_n$ converge; si $L > 1$, $a_n$ no tiende a 0 y $\sum a_n$ diverge.

*Demostración.*

1. Si $L < 1$, sea $q$ con $L < q < 1$ (C1-003.T8). Hay $N$ con $\sqrt[n]{a_n} < q$ para $n \geq N$ (C1-012.D1).
2. Para esos $n$, $a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n < q^n$ (C1-023.C2, C1-005.T9; si $a_n = 0$, es inmediato).
3. Por C2-024.T3 y C2-025.T1, $\sum a_n$ converge.
4. Si $L > 1$, hay $N$ con $\sqrt[n]{a_n} > 1$ para $n \geq N$, y entonces $a_n > 1^n = 1$ (C1-005.T9): $a_n \not\to 0$ y la serie diverge (C2-024.T2). ■

## Criterio de la integral

**Teorema C2-025.T5 (criterio de la integral)**

Sean $N_0 \in \mathbb{N}$ y $f : [N_0, \infty) \to \mathbb{R}$ decreciente con $f \geq 0$. Para $n \geq N_0 + 1$:

$$\sum_{k=N_0+1}^{n} f(k) \;\leq\; \int_{N_0}^{n} f \;\leq\; \sum_{k=N_0}^{n-1} f(k).$$

En consecuencia $\sum_{n=N_0}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_{N_0}^{\infty} f$ converge.

**Idea de la demostración**

En cada $[k-1, k]$ la integral queda entre el valor de la derecha, $f(k)$, y el de la izquierda, $f(k-1)$; al sumar, la serie y la integral se acotan una a la otra.

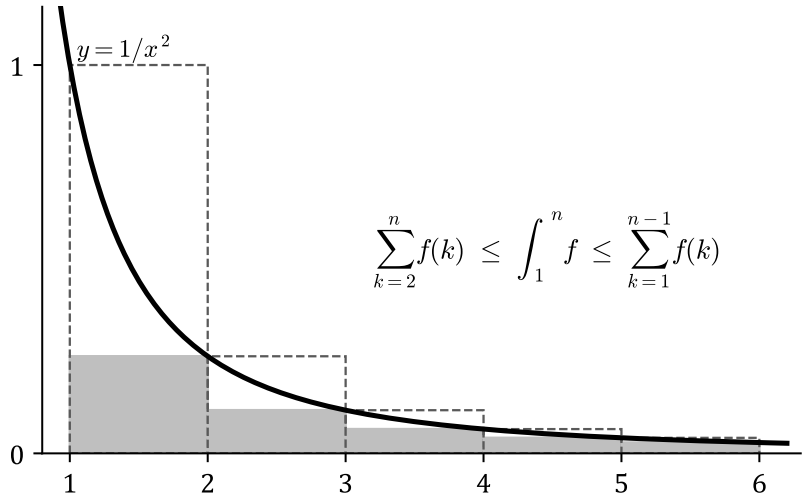



Figura 28: Rectángulos grises de altura $f(k)$ bajo la curva y punteados de altura $f(k-1)$ sobre ella, para $f(x) = 1/x^2$.

*Demostración.*

*Paso 1: un tramo.*

1. Sea $k \geq N_0 + 1$. $f$ es monótona en $[k-1, k]$, así que es integrable ahí (C2-003.T2).

2. Como $f$ es decreciente, para $x \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$.
3. Por C2-006.T1 con $b - a = 1$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f \leq f(k-1).$$

*Paso 2: sumar.*

1. Sumando de $k = N_0 + 1$ a $n$ (C1-005.T12 d):

$$\sum_{k=N_0+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=N_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f \leq \sum_{k=N_0+1}^{n} f(k-1).$$

2. Por la aditividad (C2-004.C1) y una inducción en $n$ (C1-005.T1), la suma de integrales es $\int_{N_0}^{n} f$.
3. Recorriendo el índice (C1-005.T12 c), la suma de la derecha es $\sum_{k=N_0}^{n-1} f(k)$. Esto prueba la desigualdad del enunciado.

*Paso 3: la equivalencia.*

1. Sea $F(b) := \int_{N_0}^{b} f$ para $b > N_0$. Si $b < b'$, $F(b') - F(b) = \int_{b}^{b'} f \geq 0$ (C2-004.C1, C2-004.T3, $f \geq 0$): $F$ es creciente.
2. Para cada $b$ hay un entero $n \geq b$ (C1-007.C1), y $F(b) \leq F(n)$. Así, $\{F(b) : b > N_0\}$ está acotado si y solo si $\{F(n) : n \geq N_0 + 1\}$ lo está.
3. Si $\int_{N_0}^{\infty} f$ converge a $I$, entonces $F(n) \leq I$ (C2-010.T3, el límite de una creciente es su supremo), y por el paso 2, $\sum_{k=N_0+1}^{n} f(k) \leq I$: las sumas parciales están acotadas y $\sum_{n \geq N_0+1} f(n)$ converge (C2-024.T6); con el término $f(N_0)$ también $\sum_{n \geq N_0} f(n)$ (C2-024.T5).
4. Si $\sum_{n \geq N_0} f(n)$ converge a $S$, por el paso 2, $F(n) \leq \sum_{k=N_0}^{n-1} f(k) \leq S$ (C2-024.T6). Por el punto 2, $F$ está acotada, y la integral converge (C2-010.T3). ■

| **Corolario C2-025.C1 (series p)** |
| --- |
| Para $p \in \mathbb{R}$, $\sum 1/n^p$ converge $\Leftrightarrow p > 1$. |

*Demostración.*

1. Si $p \leq 0$, $1/n^p = n^{-p} \geq n^0 = 1$ (C2-012.T5, C2-012.T6), así que $1/n^p \not\to 0$ y la serie diverge (C2-024.T2).

2. Si $p > 0$, $f(x) = x^{-p}$ es $> 0$ en $[1, \infty)$ (C2-012.T5) y $f'(x) = -p\,x^{-p-1} < 0$ (C2-012.T6), así que $f$ es decreciente (C1-034.T2).
3. Por C2-025.T5, $\sum 1/n^p$ converge si y solo si $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ converge, es decir (C2-012.C1), si y solo si $p > 1$. ■

## Ejemplos

> **Ejemplo C2-025.E1**
> $\sum 1/n!$ y $\sum n/2^n$ convergen (cociente); $\sum_{n\geq 2} 1/(n\log n)$ diverge (integral: $\int_2^b dx/(x\log x) = \log(\log b) - \log(\log 2)$); $L = 1$ no decide en el cociente ni en la raíz: $\sum 1/n$ diverge y $\sum 1/n^2$ converge.

*Demostración.*

1. $\dfrac{1/(n+1)!}{1/n!} = \dfrac{1}{n+1} \to 0 < 1$ (C1-012.T2, C1-012.T3), y $\sum 1/n!$ converge (C2-025.T3).
2. $\dfrac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to \dfrac{1}{2} < 1$ (C1-013.T2), y $\sum n/2^n$ converge.
3. En $[2, \infty)$, $g(x) = x\log x$ es derivable con $g' = \log x + 1 > 0$ (C1-029.T2, C2-011.T1), así que $g$ es estrictamente creciente y positiva ($g(2) = 2\log 2 > 0$); por C1-003.T7, $f = 1/g$ es decreciente y $> 0$.
4. $\log(\log x)$ es derivable en $(1, \infty)$ con derivada $\dfrac{1}{\log x} \cdot \dfrac{1}{x}$ (C1-030.T1, C2-011.T1), así que por la regla de Barrow (C2-009.C1)

$$\int_2^b \frac{dx}{x\log x} = \log(\log b) - \log(\log 2) \to \infty$$

   cuando $b \to \infty$ (C2-011.T3 dos veces). Por C2-025.T5, $\sum_{n\geq 2} 1/(n\log n)$ diverge.
5. Para $1/n$ y para $1/n^2$, el cociente es $n/(n+1) \to 1$ y $(n/(n+1))^2 \to 1$; la raíz es $1/\sqrt[n]{n} \to 1$ y $1/(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$ (C2-012.T8, C1-013.T2). En ambos casos $L = 1$, y una serie diverge (C2-024.E1) y la otra converge (C2-025.C1). ■

## Por qué cada hipótesis

**⚠ El criterio de la integral necesita f decreciente**

Sea $f$ continua, $\geq 0$, igual a 0 salvo en «picos» triangulares de altura 1 y base $1/n^2$ centrados en cada entero $n$. Entonces $f(n) = 1$ y $\sum f(n)$ diverge, mientras que $\int_1^\infty f \leq \sum 1/(2n^2)$ converge. Sin monotonía, los valores en los enteros no dicen nada del área.

**⚠ L = 1 no decide**

En el cociente y en la raíz, $L = 1$ es compatible con convergencia y con divergencia (C2-025.E1). Y si $a_{n+1}/a_n$ no tiene límite, el teorema no dice nada.

**⚠ Comparar en la dirección correcta**

Ser *menor* que una divergente no dice nada: $1/n^2 \leq 1/n$ y $\sum 1/n^2$ converge. Ser *mayor* que una convergente tampoco: $1/n \geq 1/n^2$ y $\sum 1/n$ diverge.

## Ejercicios

1. Decide si convergen: $\sum \frac{1}{n^2+n}, \sum \frac{n}{n^2+1}, \sum \frac{2^n}{n!}, \sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
2. Demuestra que $\sum n^2/3^n$ converge.
3. Para $p > 1$, usa C2-025.T5 para probar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p \leq 1 + 1/(p-1)$.
4. Demuestra que $\sum_{n\geq 2} 1/(n(\log n)^2)$ converge.
5. Si $a_n \geq 0$ y $\sum a_n$ converge, demuestra que $\sum a_n^2$ converge.

### Respuestas

1. Converge (comparación al límite con $1/n^2$, cociente $\to 1$); diverge (al límite con $1/n$); converge (cociente $2/(n+1) \to 0$); converge (raíz $n/(2n+1) \to 1/2$).
2. Cociente $(1+1/n)^2/3 \to 1/3 < 1$.
3. $\sum_{k=2}^{n} k^{-p} \leq \int_1^n x^{-p}\,dx \leq 1/(p-1)$ (C2-012.C1); se suma el primer término.
4. $\int_2^b dx/(x(\log x)^2) = 1/\log 2 - 1/\log b \leq 1/\log 2$; con C2-025.T5.
5. $a_n \to 0$, así que $a_n \leq 1$ para $n$ grande y $a_n^2 \leq a_n$ (C2-025.T1).

# C2-026 · Series alternantes y convergencia absoluta

## Motivación

> **El caminante indeciso**
> Un caminante sale de la puerta: avanza 1 m, se arrepiente y retrocede $1/2$ m, avanza $1/3$ m, retrocede $1/4$ m, y así para siempre. ¿Se aleja sin fin, oscila entre dos puntos o se detiene en un lugar?
> Sus posiciones son $1,\ 0.5,\ 0.8333,\ 0.5833,\ \ldots$; tras 10 pasos está en 0.6456 y tras 11 en 0.7365. Las posiciones tras pasos pares suben, las de pasos impares bajan, y la distancia entre ellas es el largo de un paso, que tiende a cero. Se detiene en un punto: veremos que es $\log 2 \approx 0.6931$.
> Dónde falla la analogía: un caminante real no puede dar pasos de una milésima de milímetro, y el modelo supone que nunca se equivoca de dirección.

Si se suman los pasos *sin* signo, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$, la suma diverge (C2-024.E1). Con signos alternos converge. Esta diferencia tiene nombre: convergencia condicional.

## Definiciones

**Definición C2-026.D1**

$\sum a_n$ **converge absolutamente** si $\sum |a_n|$ converge, y **converge condicionalmente** si converge y $\sum |a_n|$ diverge.

**Definición C2-026.D2 (partes positiva y negativa)**

$$p_n := \frac{|a_n| + a_n}{2} = \max(a_n, 0), \qquad q_n := \frac{|a_n| - a_n}{2} = \max(-a_n, 0);$$

así $a_n = p_n - q_n$ y $|a_n| = p_n + q_n$.

Las igualdades con el máximo salen de C1-004.D1: si $a_n \geq 0$, $p_n = a_n$ y $q_n = 0$; si $a_n < 0$, $p_n = 0$ y $q_n = -a_n$. En ambos casos $p_n, q_n \geq 0$.

# Resultados

## Criterio de Leibniz

**Teorema C2-026.T1 (Leibniz)**

Sea $(a_n)$ decreciente con $a_n \to 0$ (en particular $a_n \geq 0$). Entonces $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge; su suma $S$ cumple $s_{2n} \leq S \leq s_{2n-1}$ y $|S - s_n| \leq a_{n+1}$ para todo $n$.

**Idea de la demostración**

Las sumas pares suben, las impares bajan, y la distancia entre ellas es un término que tiende a cero: las dos convergen al mismo número.

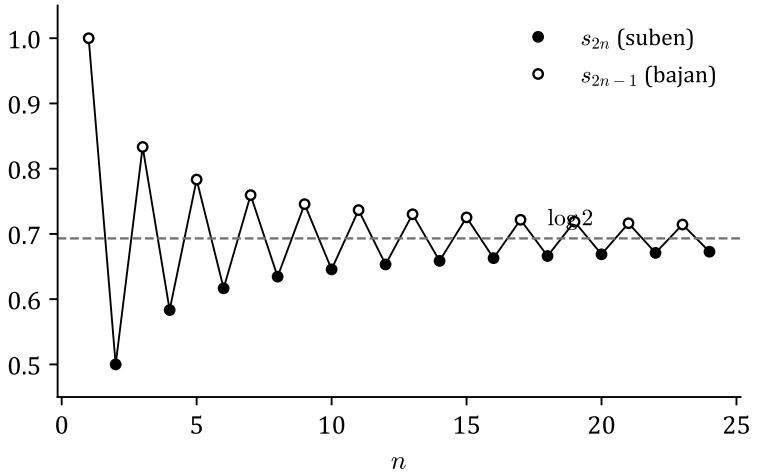



Figura 29: Sumas parciales de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$: las pares (llenas) suben, las impares (huecas) bajan, y encierran a log 2.

*Demostración.*

*Paso 1: signo de los términos.*

1. Para $m \geq n$, $a_m \leq a_n$ (decreciente). Haciendo $m \to \infty$ (C1-013.T3), $0 \leq a_n$.

*Paso 2: pares e impares.*

1. Por la definición recursiva de las sumas (C1-005.D2),

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n},$$

   porque $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$. Así $(s_{2n})$ es creciente (C1-014.T0).
2. Del mismo modo,

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq s_{2n-1},$$

   y $(s_{2n-1})$ es decreciente.
3. Además $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1}$ (paso 1). Juntando,

$$s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1.$$

*Paso 3: el límite común.*

1. Por C1-014.T2, $(s_{2n})$ converge a su supremo $P$ y $(s_{2n-1})$ a su ínfimo $I$.
2. $a_{2n} \to 0$: dado $\varepsilon$, el $N$ de $a_n \to 0$ sirve, porque $2n \geq n \geq N$ (C1-012.D1).
3. Por C1-013.T2, $I - P = \lim(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim a_{2n} = 0$. Sea $S := P = I$.
4. Dado $\varepsilon > 0$, hay $N_1$ con $|s_{2n} - S| < \varepsilon$ si $n \geq N_1$, y $N_2$ con $|s_{2n-1} - S| < \varepsilon$ si $n \geq N_2$. Todo $k \geq 2N_1 + 2N_2$ es de la forma $2n$ o $2n - 1$ (C1-005.T7), con $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$; en ambos casos $|s_k - S| < \varepsilon$.
5. Por C1-012.D1, $s_k \to S$: la serie converge a $S$.

*Paso 4: las cotas.*

1. $S$ es el supremo de los pares y el ínfimo de los impares, así que $s_{2m} \leq S \leq s_{2m-1}$ para todo $m$ (C1-006.D1).
2. Si $n = 2m$: $0 \leq S - s_{2m} \leq s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} = a_{n+1}$.
3. Si $n = 2m - 1$: $0 \leq s_{2m-1} - S \leq s_{2m-1} - s_{2m} = a_{2m} = a_{n+1}$.
4. En ambos casos (C1-005.T7), $|S - s_n| \leq a_{n+1}$ (C1-004.T3). ■

## Convergencia absoluta

| **Teorema C2-026.T2** |
| --- |
| Si $\sum a_n$ converge absolutamente, converge, y $\left\lvert \sum a_n \right\rvert \leq \sum \lvert a_n \rvert$. |

*Demostración.*

1. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum |a_n|$ converge, por el criterio de Cauchy (C2-024.T4) hay $N$ con $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ si $m > n \geq N$.
2. Por la desigualdad del triángulo para sumas (C2-001.T1 c),

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

   y por C2-024.T4, $\sum a_n$ converge.
3. Sean $s_n$ y $t_n$ las sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum |a_n|$, con límites $S$ y $T$. Por C2-001.T1 (c), $|s_n| \leq t_n$.
4. $|s_n| \to |S|$, porque $\big||s_n| - |S|\big| \leq |s_n - S|$ (C1-004.T5, C1-012.D1). Por C1-013.T3, $|S| \leq T$. ■

**Teorema C2-026.T3**

$\sum a_n$ converge absolutamente $\Leftrightarrow \sum p_n$ y $\sum q_n$ convergen. Si $\sum a_n$ converge condicionalmente, las sumas parciales de $\sum p_n$ y de $\sum q_n$ tienden a $\infty$.

*Demostración.*

1. $0 \le p_n \le |a_n|$ y $0 \le q_n \le |a_n|$ (C2-026.D2, C1-004.T1). Si $\sum |a_n|$ converge, $\sum p_n$ y $\sum q_n$ convergen por comparación (C2-025.T1).
2. Si $\sum p_n$ y $\sum q_n$ convergen, $\sum |a_n| = \sum (p_n + q_n)$ converge (C2-024.T1).
3. Supón que $\sum a_n$ converge condicionalmente. Si $\sum p_n$ convergiera, como $q_n = p_n - a_n$, también $\sum q_n$ convergería (C2-024.T1), y por el punto 2 $\sum |a_n|$ convergería: contradicción.
4. Así $\sum p_n$ diverge; como $p_n \ge 0$, sus sumas parciales tienden a $\infty$ (C2-024.T6). Lo mismo para $\sum q_n$, con $p_n = q_n + a_n$. ■

## La armónica alternante

> **Ejemplo C2-026.E1 (armónica alternante)**
> $\sum (-1)^{n+1}/n$ converge condicionalmente y su suma es $\log 2$.

*Demostración.*

*Converge condicionalmente.*

1. $(1/n)$ es decreciente y tiende a 0 (C1-003.T7, C1-012.T2); por Leibniz (C2-026.T1) la serie converge.
2. $\sum |(-1)^{n+1}/n| = \sum 1/n$ diverge (C2-024.E1): la convergencia es condicional (C2-026.D1).

*Su suma es log 2.*

1. $\log 2 = \int_1^2 dx/x$ (C2-011.D1), y por el cambio lineal (C2-015.T2 con $r = 1, s = 1$),

$$\log 2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}.$$

2. Por la suma geométrica finita (C1-005.T8 con razón $-t \neq 1$), para $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t}.$$

3. Los sumandos son continuos en $[0,1]$ (C1-022.T2), así que integrables (C2-003.T1). Por linealidad (C2-004.T2) y $\int_0^1 t^k\,dt = 1/(k+1)$ (C2-009.E1):

$$\log 2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + R_n = s_n + R_n, \qquad R_n := (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

4. En $[0,1]$, $0 \le t^n/(1+t) \le t^n$ (C1-003.T7). Por C2-004.T4 y C2-004.T3,

$$|R_n| \le \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

5. Así $|\log 2 - s_n| \le 1/(n+1) \to 0$, y por el sándwich (C1-014.T1) $s_n \to \log 2$. ■

Con $n = 10$: $s_{10} = 0.6456$ y $|\log 2 - s_{10}| \le 1/11 \approx 0.0909$ (de hecho es 0.0475).

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Leibniz sin monotonía**

$a_n = 1/n$ si $n$ es impar y $a_n = 1/n^2$ si $n$ es par: $a_n \to 0$ pero no es decreciente. Entonces

$$s_{2m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k)^2},$$

el primer sumando es $\ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} 1/k \to \infty$ y el segundo está acotado: la serie diverge.

**⚠ Leibniz sin a_n → 0**

$a_n = 1 + 1/n$ es decreciente pero tiende a 1: $(-1)^{n+1}a_n$ no tiende a 0 y la serie diverge (C2-024.T2).

**⚠ Convergente no implica absolutamente convergente**

La armónica alternante converge y la armónica diverge. Solo vale «absoluta ⇒ convergente» (C2-026.T2).

## Ejercicios

1. Decide si convergen absoluta o condicionalmente: $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$, $\sum(-1)^n/n^2$, $\sum(-1)^n n/(n+1)$.
2. ¿Cuántos términos de $\sum(-1)^{n+1}/n^2$ garantizan, por Leibniz, un error menor que 0.01?
3. Demuestra que $\sum(-1)^{n+1}/(2n-1)$ converge.
4. Si $\sum a_n$ converge absolutamente, demuestra que $\sum a_n^2$ converge.
5. Demuestra que si $\sum a_n$ converge condicionalmente, entonces $a_n$ toma infinitos valores positivos e infinitos negativos.

### Respuestas

1. Condicional (Leibniz; $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge, C2-025.C1); absoluta; diverge (el término no tiende a 0).
2. $1/(n+1)^2 < 0.01$ si $n+1 > 10$: $n = 10$.
3. $1/(2n-1)$ es decreciente y tiende a 0; C2-026.T1.
4. $|a_n| \to 0$ (C2-024.T2), así que $a_n^2 \leq |a_n|$ para $n$ grande; comparación.
5. Si solo hubiera finitos positivos, $p_n = 0$ desde algún $n$ y $\sum p_n$ convergería, contra C2-026.T3; igual con los negativos.

# C2-027 · Reordenamientos

## Motivación

> **La libreta de la tienda**
> En la libreta de una tienda se anotan movimientos en miles de pesos: $+1,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}$, ..., una infinidad de movimientos cada vez más chicos. En ese orden, el saldo se acerca a $\log 2 \approx 0.693$: unos 693 pesos (C2-026.E1).
> El contador propone anotar exactamente los mismos movimientos en otro orden: un ingreso y dos egresos,
>
> $$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$
>
> ¿Cambia el saldo? Con un número finito de movimientos, nunca: la suma es conmutativa. Con una infinidad, sí: el nuevo saldo tiende a $(\log 2)/2 \approx 0.347$, unos 347 pesos. Y con otro orden se llega a 1,500 pesos, o a lo que quieras.
> Dónde falla la analogía: una libreta real tiene finitos movimientos, y entonces el orden no importa (lo demuestra C2-027.T0). El fenómeno es puramente infinito.

## Definiciones

**Definición C2-027.D1**

Un **reordenamiento** de $\sum a_n$ es una serie $\sum a_{\sigma(n)}$ con $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva.

## Sumas finitas sin orden

Las sumas finitas de Cálculo I (C1-005.D2) se definen en un orden, y C1-005.T12 y C2-001.T1 nunca lo cambian. Para comparar una serie con su reordenamiento hace falta saber que una suma finita no depende del orden.

**Proposición C2-027.T0 (sumas finitas sin orden)**

Sean $(a_k)$ reales y $F \subset \mathbb{N}$ finito con $r \geq 1$ elementos.

(a) Si $j_1, \dots, j_r$ y $l_1, \dots, l_r$ son dos listas sin repetición de los elementos de $F$, $\sum_{i=1}^{r} a_{j_i} = \sum_{i=1}^{r} a_{l_i}$; ese número se escribe $\sum_{k\in F} a_k$ (y $\sum_{k\in\emptyset} a_k := 0$); en particular $\sum_{k\in\{1,\dots,K\}} a_k = \sum_{k=1}^{K} a_k$.

(b) Si $F = G \cup H$ con $G \cap H = \emptyset$, $\sum_{k\in F} a_k = \sum_{k\in G} a_k + \sum_{k\in H} a_k$.

(c) $\left|\sum_{k\in F} a_k\right| \leq \sum_{k\in F} |a_k|$; si $a_k \geq 0$ para todo $k \in F$ y $G \subset F$, $\sum_{k\in G} a_k \leq \sum_{k\in F} a_k$.

**Idea de la demostración**

Se localiza en la segunda lista el último sumando de la primera, se le pasa al final (asociatividad y conmutatividad de dos sumandos) y se aplica la inducción a lo que queda, que tiene un elemento menos.

*Demostración.*

En lo que sigue, una suma con cero sumandos vale 0, y para una lista $c_1, \dots, c_p$ seguida de otra $d_1, \dots, d_q$, la suma de la lista unida es $\sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{i=1}^{q} d_i$ (C2-001.T1 b, con la convención de C2-001.T1 b para la segunda parte; si una de las dos listas es vacía, es inmediato).

*(a), por inducción en $r$ (C1-005.T1).* Sea $A$ el conjunto de los $r \in \mathbb{N}$ tales que (a) vale para todo $F$ con $r$ elementos y todo par de listas.

1. $1 \in A$: si $F$ tiene un elemento, las dos listas son ese mismo elemento.
2. Sea $r - 1 \in A$ con $r \geq 2$, y sean $j$, $l$ dos listas sin repetición de $F$, con $r$ elementos.
3. Sea $x := j_r$. Como $l$ recorre $F$ sin repetir, hay un único $s \in \{1, \dots, r\}$ con $l_s = x$.
4. Partiendo la lista $l$ en $l_1, \dots, l_{s-1}$, luego $l_s$ y luego $l_{s+1}, \dots, l_r$ (C2-001.T1 b), y reacomodando con la asociatividad y la conmutatividad (K1, K2):

$$\sum_{i=1}^{r} a_{l_i} = \sum_{i=1}^{s-1} a_{l_i} + a_x + \sum_{i=s+1}^{r} a_{l_i}$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{s-1} a_{l_i} + \sum_{i=s+1}^{r} a_{l_i}\Big) + a_x.$$

5. El paréntesis es la suma de la lista $l_1, \dots, l_{s-1}, l_{s+1}, \dots, l_r$ (C2-001.T1 b, C1-005.T12 c), que recorre

$F \setminus \{x\}$ sin repetir. También $j_1, \dots, j_{r-1}$ recorre $F \setminus \{x\}$ sin repetir.

6. $F \setminus \{x\}$ tiene $r-1$ elementos; como $r-1 \in A$, el paréntesis es igual a $\sum_{i=1}^{r-1} a_{j_i}$.
7. Así

$$\sum_{i=1}^{r} a_{l_i} = \sum_{i=1}^{r-1} a_{j_i} + a_{j_r} = \sum_{i=1}^{r} a_{j_i}$$

(C1-005.D2). Luego $r \in A$, y $A = \mathbb{N}$ (C1-005.T1).

8. La lista $1, 2, \dots, K$ recorre $\{1, \dots, K\}$ sin repetir, así que $\sum_{k\in\{1,\dots,K\}} a_k = \sum_{k=1}^{K} a_k$.

*(b).*

1. Si $G$ o $H$ es vacío, es inmediato. Si no, una lista sin repetición de $G$ seguida de una de $H$ es una lista de $F$, sin repetición porque $G \cap H = \emptyset$.
2. Por (a) y la suma de una lista unida (C2-001.T1 b), $\sum_{k\in F} a_k = \sum_{k\in G} a_k + \sum_{k\in H} a_k$.

*(c).*

1. La primera desigualdad es C2-001.T1 (c) aplicada a una lista de $F$.
2. Si $a_k \geq 0$ en $F$ y $G \subset F$, por (b) con $H := F \setminus G$, $\sum_{k\in F} a_k = \sum_{k\in G} a_k + \sum_{k\in H} a_k$.
3. $\sum_{k\in H} a_k \geq 0$: es una suma de términos $\geq 0$ (C1-005.T12 b y d, con $\sum 0 = 0$).
4. Por lo tanto $\sum_{k\in G} a_k \leq \sum_{k\in F} a_k$. ■

# Resultados

### Dirichlet: con convergencia absoluta el orden no importa

| **Teorema C2-027.T1 (Dirichlet)** |
| --- |
| Si $\sum a_n$ converge absolutamente con suma $S$, todo reordenamiento converge absolutamente y su suma es $S$. |

> **Idea de la demostración**
> Pasado cierto lugar, el reordenamiento ya incluyó los primeros $N$ términos; lo que sobra son términos lejanos, cuyo valor absoluto total es la cola de $\sum |a_n|$, que es pequeña.

*Demostración.*

Sea $\sigma$ biyectiva, $t_m := \sum_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)}$ y $F_m := \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$, que tiene $m$ elementos; por C2-027.T0 (a), $t_m = \sum_{k \in F_m} a_k$.

*Paso 1: converge absolutamente.*

1. Sea $K$ el máximo de $F_m$ (C1-005.T13). Por C2-027.T0 (a) y (c), con $|a_k| \geq 0$ y $F_m \subset \{1, \dots, K\}$:

$$\sum_{n=1}^{m} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{k \in F_m} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{K} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

   la última porque las sumas parciales de una serie de términos $\geq 0$ son crecientes y convergen a su supremo (C2-024.T6, C1-014.T2).
2. Las sumas parciales de $\sum |a_{\sigma(n)}|$ están acotadas: converge (C2-024.T6).

*Paso 2: la suma es S.*

1. Sea $\varepsilon > 0$. Por las colas (C2-024.T5) aplicadas a $\sum |a_n|$, hay $N$ con $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2$.
2. Con $s_N := \sum_{k=1}^{N} a_k$, por C2-024.T5 y C2-026.T2 aplicado a la cola,

$$|S - s_N| = \Big| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \Big| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. Sea $M$ el máximo de $\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(N)$ (C1-005.T13). Para $m \geq M$, $\{1, \dots, N\} \subset F_m$.
4. Con $G := F_m \setminus \{1, \dots, N\}$, por C2-027.T0 (a) y (b), $t_m = s_N + \sum_{k \in G} a_k$. Todo $k \in G$ cumple $k > N$; si $K$ es el máximo de $F_m$, $G \subset \{N+1, \dots, K\}$.
5. Por C2-027.T0 (c), con $G \subset \{N+1, \dots, K\}$, y el punto 1:

$$|t_m - s_N| \leq \sum_{k \in G} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{K} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

6. Para $m \geq M$, $|t_m - S| \leq |t_m - s_N| + |s_N - S| < \varepsilon$ (C1-004.T4). Por C1-012.D1, $t_m \to S$. ■

## Riemann: con convergencia condicional el orden lo decide todo

**Teorema C2-027.T2 (Riemann)**

Si $\sum a_n$ converge condicionalmente y $L \in \mathbb{R}$, existe un reordenamiento $\sum a_{\sigma(n)}$ que converge a $L$. También existen reordenamientos cuyas sumas parciales tienden a $\infty$ y a $-\infty$.

**Idea de la demostración**

Algoritmo voraz: si vas abajo de $L$, toma el siguiente término $\geq 0$; si vas arriba, el siguiente negativo. Como los términos $\geq 0$ y los negativos, por separado, suman $\pm\infty$, cruzas $L$ una infinidad de veces; como los términos tienden a 0, cada cruce te deja más cerca.

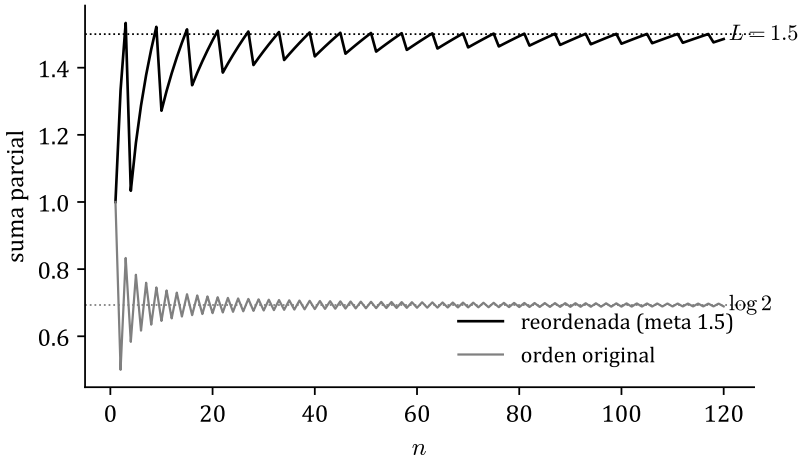



Figura 30: Sumas parciales del reordenamiento voraz de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ con meta $L = 1.5$, frente al orden original.

*Demostración.*

*Paso 1: los ingredientes.*

1. Como $\sum a_n$ converge, $a_n \to 0$ (C2-024.T2). Como converge condicionalmente, las sumas parciales de $\sum p_n$ y de $\sum q_n$ tienden a $\infty$ (C2-026.T3).
2. Hay una infinidad de índices con $a_n \geq 0$: si no, $p_n = 0$ desde algún lugar y $\sum p_n$ convergería (C2-024.T5). Por el buen orden (C1-005.T3) se listan en orden creciente: $i_1 < i_2 < \cdots$. Del mismo

modo, los índices con $a_n < 0$: $j_1 < j_2 < \cdots$. Cada natural es exactamente uno de ellos (C1-003.T1).

3. Como $p_n = a_n$ si $n$ es algún $i_k$ y $p_n = 0$ si es algún $j_k$ (C2-026.D2), al partir $\{1, \dots, i_K\}$ en los $i$ y los $j$ que contiene (C2-027.T0 a y b), los $j$ aportan 0 (C1-005.T12 b):

$$\sum_{k=1}^{K} a_{i_k} = \sum_{n=1}^{i_K} p_n \to \infty \quad (K \to \infty);$$

y del mismo modo $\sum_{k=1}^{K} a_{j_k} = -\sum_{n=1}^{j_K} q_n \to -\infty$.

*Paso 2: la construcción.*

1. Por recursión (C1-005.T11) con estado en el conjunto $X$ de las ternas $(u, v, t)$, $u, v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$: $u$ y $v$ cuentan los $i$ y los $j$ ya usados y $t$ es la suma de los términos ya elegidos. Se empieza en $(0, 0, 0)$ y la regla es

$$(u, v, t) \mapsto \begin{cases} (u+1,\ v,\ t + a_{i_{u+1}}) & \text{si } t \le L, \\ (u,\ v+1,\ t + a_{j_{v+1}}) & \text{si } t > L. \end{cases}$$

   Si $(u_n, v_n, t_n)$ es la terna del paso $n$, se define $\sigma(n) := i_{u_{n-1}+1}$ si $t_{n-1} \le L$ y $\sigma(n) := j_{v_{n-1}+1}$ si $t_{n-1} > L$; así $t_n = t_{n-1} + a_{\sigma(n)}$: si la suma va abajo de $L$ (o en $L$), $\sigma(n)$ es el primer $i$ aún no usado; si va arriba, el primer $j$ aún no usado.
2. $\sigma$ es inyectiva: cada $i$ y cada $j$ se usa a lo más una vez, y nunca un $i$ es un $j$.
3. Se usan infinitos $i$: si desde algún paso solo se eligieran $j$, las sumas $t_n$ serían una constante más sumas parciales de los $a_{j_k}$, que tienden a $-\infty$ (paso 1); alguna quedaría $\le L$ (C1-020.D1) y forzaría a elegir un $i$. Del mismo modo se usan infinitos $j$.
4. Como los $i$ se toman en orden, cada $i_k$ se usa en algún paso; igual cada $j_k$. Así $\sigma$ es suprayectiva, y $\sum a_{\sigma(n)}$ es un reordenamiento (C2-027.D1).

*Paso 3: converge a L.*

1. Sea $\varepsilon > 0$. Hay $N_1$ con $|a_n| < \varepsilon$ para $n \ge N_1$ (C1-012.D1). Como $\sigma$ es suprayectiva, cada índice $1, \dots, N_1 - 1$ se usa en algún paso; sea $N_2$ el mayor de esos pasos (C1-005.T13). Para $n > N_2$, $\sigma(n) \ge N_1$ y $|a_{\sigma(n)}| < \varepsilon$.
2. Como se usan infinitos $j$, hay un paso $n > N_2 + 1$ en que se eligió un $j$, es decir, con $t_{n-1} > L$; y como se usan infinitos $i$, hay un paso posterior $m$ con $t_{m-1} \le L$. Sea $k$ el menor índice $\ge n$ con $t_k \le L$ (C1-005.T3; existe porque $m - 1$ cumple).

3. Entonces $t_{k-1} > L$ (si $k = n$, por la elección de $n$; si $k > n$, por ser $k$ el menor), así que en el paso $k$ se restó un $|a_{\sigma(k)}| < \varepsilon$: $L - \varepsilon < t_k \leq L$.
4. Supón $L - \varepsilon < t_{n-1} < L + \varepsilon$ con $n > N_2$. Si $t_{n-1} \leq L$, se suma algo en $[0, \varepsilon)$ y $t_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$; si $t_{n-1} > L$, se resta algo en $(0, \varepsilon)$ y también $t_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
5. Por inducción (C1-005.T1) desde $k$, $|t_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq k$ (C1-004.T3). Por C1-012.D1, $t_n \to L$.

*Paso 4: reordenamientos que tienden a $\pm\infty$.*

1. Se cambia la meta fija $L$ por una meta móvil: $\sigma(n)$ es el primer $j$ no usado si $t_{n-1} > v_{n-1}$, donde $v_{n-1}$ es el número de $j$ ya usados; si no, el primer $i$ no usado.
2. Como en el paso 2, se usan infinitos $j$ (si solo se eligieran $i$, $t_n \to \infty$ con $v$ fijo) e infinitos $i$ (si solo se eligieran $j$, $t_n \to -\infty$ mientras $v_n$ crece): $\sigma$ es biyectiva.
3. Dado $K$, sea $n > N_2$ (con $\varepsilon = 1$ en el paso 3.1) un paso en que se elige un $j$ con $v_{n-1} \geq K + 1$ (existe porque $v_n \to \infty$). Entonces $t_n > v_{n-1} - 1 \geq K$.
4. Después, mientras se eligen $i$, la suma no baja; cuando se elige un $j$ en un paso $m$, $t_{m-1} > v_{m-1} \geq K + 1$ y $t_m > K$. Por inducción, $t_m > K$ para todo $m \geq n$: $t_m \to \infty$ (C1-020.D1).
5. Para $-\infty$ se aplica lo anterior a $\sum(-a_n)$, que también converge condicionalmente. ■

**⚠ Nota sobre la recursión**

La regla del paso 2 no depende solo de la suma anterior, sino de cuántos $i$ y $j$ se han usado. Por eso el estado es una terna y no un número: C1-005.T11 vale con $X$ un conjunto cualquiera, y aquí $X$ es el conjunto de ternas. La meta móvil del paso 4 cabe en la misma terna, porque $v_{n-1}$ ya es una de sus coordenadas.

## Un reordenamiento explícito

> **Ejemplo C2-027.E1**
> El reordenamiento $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$ (un impar y dos pares) de la armónica alternante suma $(\log 2)/2$.

*Demostración.*

1. El término $3k - 2$ es $1/(2k - 1)$, el $3k - 1$ es $-1/(4k - 2)$ y el $3k$ es $-1/(4k)$. Todo natural es

impar, $2k-1$, o par, $2j$; y $j$ es impar o par, así que todo par es $4k-2$ o $4k$ (C1-005.T7). Cada término de la armónica alternante aparece exactamente una vez: es un reordenamiento.

2. Agrupando de tres en tres (C2-001.T1 b),

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\Big),$$

así que $t_{3k}=\frac{1}{2}s_{2k}$ (C1-005.T12 a), donde $s_n$ es la suma parcial de la armónica alternante.

3. $s_{2k}\to\log 2$ (C2-026.E1, C1-015.T1), así que $t_{3k}\to(\log 2)/2$ (C1-013.T2).
4. $t_{3k+1}=t_{3k}+\frac{1}{2k+1}$ y $t_{3k+2}=t_{3k+1}-\frac{1}{4k+2}$ también tienden a $(\log 2)/2$ (C1-012.T2, C1-013.T2).
5. Dado $\varepsilon$, hay un $N$ común para las tres subsucesiones; como todo $n$ es $3k$, $3k+1$ o $3k+2$ (C1-007.T2 con $\lfloor n/3\rfloor$), $|t_n-(\log 2)/2|<\varepsilon$ para $n$ grande (C1-012.D1). ■

## Por qué cada hipótesis

**⚠ Sin convergencia condicional**

$\sum(-1)^{n+1}/n^2$ converge absolutamente (C2-025.C1). Por Dirichlet, todo reordenamiento suma lo mismo ($\approx 0.8225$; su valor exacto, $\pi^2/12$, no se demuestra en este curso): ningún otro $L$ se alcanza.

**⚠ Sin convergencia**

$\sum(-1)^{n+1}$ no converge ($a_n\not\to 0$). El algoritmo voraz con $L=1/2$ da $1,0,1,0,\ldots$: los cruces no se afinan, porque falla $a_n\to 0$.

## Ejercicios

1. Demuestra que todo reordenamiento de una serie de términos $\geq 0$ convergente converge a la misma suma.
2. Describe un reordenamiento de $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ cuyas sumas parciales tiendan a $\infty$.
3. Calcula la suma de $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$ (dos impares y un par), sabiendo que la suma parcial número $3k$ es $s_{4k}+\frac{1}{2}s_{2k}$, con $s_n$ la de la armónica alternante.
4. ¿Por qué el algoritmo voraz necesita que haya infinitos términos negativos?

## Respuestas

1. Es absolutamente convergente; C2-027.T1.
2. El del paso 4: tomar términos positivos hasta pasar 1, uno negativo, positivos hasta pasar 2, uno negativo, etc.
3. $\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{3}{2}\log 2$.
4. Si hubiera finitos negativos, $\sum q_n$ convergería y, por C2-026.T3, la serie no sería condicionalmente convergente; el algoritmo quedaría atorado arriba de $L$.

# C2-028 · Series de potencias

## Motivación

> **La calculadora que solo suma y multiplica**
> Una calculadora que solo sabe sumar y multiplicar quiere mostrar $e$ y $\pi$. Usa dos series:
>
> $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$
>
> Con 10 términos de la primera obtiene 2.7182815, a $3 \times 10^{-7}$ de $e$. Con 1,000 términos de la segunda, cuatro veces la suma todavía se equivoca en $10^{-3}$; para cinco decimales de $\pi$ hacen falta unos 200,000 términos.
> ¿Por qué tanta diferencia? Las dos son valores de **series de potencias**: $e^x$ en $x = 1$ y $\arctan x$ en $x = 1$. La primera converge en todo $\mathbb{R}$, y $x = 1$ está «cerca del centro». La segunda converge solo en $[-1, 1]$, y $x = 1$ está justo en el borde.
> Dónde falla la analogía: las calculadoras reales no usan $1 - 1/3 + 1/5 - \cdots$; usan series evaluadas en $|x|$ pequeño, lejos del borde, y reducción de argumento.

## Definiciones

**Definición C2-028.D1 (serie de potencias)**

Para $c \in \mathbb{R}$ y una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, con $(x-c)^0 := 1$.

**Definición C2-028.D2 (radio de convergencia)**

$B := \{r \geq 0 : (|a_n| r^n) \text{ está acotada}\}$ $(0 \in B)$. $R := \sup B$ si $B$ está acotado y $R := \infty$ si no.

**⚠ Sin límite superior**

Muchos libros definen $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. El límite superior no está en Cálculo I, así que aquí $R$ se define como un supremo (existe por el axioma S). El cociente y la raíz son solo formas de *calcularlo* cuando existen sus límites (C2-028.T3).

# Resultados

## El radio de convergencia

**Teorema C2-028.T1 (lema de Abel)**

Si $r_0 > 0$ y $(|a_n| r_0^n)$ está acotada, $\sum a_n (x-c)^n$ converge absolutamente para todo $x$ con $|x-c| < r_0$.

*Demostración.*

1. Sea $M \geq 0$ con $|a_n| r_0^n \leq M$ para todo $n$, y $q := |x-c|/r_0$. Como $0 \leq |x-c| < r_0$, se tiene $0 \leq q < 1$ (C1-003.T4, C1-003.T7).
2. Por C1-004.T2 y C1-005.T9,

$$|a_n (x-c)^n| = |a_n|\, r_0^n\, q^n \leq M q^n.$$

3. $\sum M q^n$ converge (C2-024.T3, C2-024.T1), y por comparación (C2-025.T1) $\sum |a_n (x-c)^n|$ converge. ■

**Teorema C2-028.T2**

Si $|x-c| < R$, la serie converge absolutamente; si $|x-c| > R$, $(a_n (x-c)^n)$ no está acotada y la serie diverge.

> **Idea de la demostración**
> Dentro del radio cabe un $r \in B$ más lejos que $x$, y Abel compara con una geométrica. Fuera, si los términos estuvieran acotados, $|x-c|$ estaría en $B$.

*Demostración.*

*Dentro.*

1. Sea $|x-c| < R$. Si $B$ está acotado, por la caracterización $\varepsilon$ del supremo (C1-006.T2, con $\varepsilon = R - |x-c|$) hay $r \in B$ con $r > |x-c|$. Si $B$ no está acotado, $|x-c|$ no es cota superior de $B$, y también hay $r \in B$ con $r > |x-c|$.
2. $r > |x-c| \geq 0$, así que $r > 0$, y $(|a_n| r^n)$ está acotada (C2-028.D2).
3. Por el lema de Abel (C2-028.T1) con $r_0 = r$, la serie converge absolutamente en $x$.

*Fuera.*

1. Sea $|x-c| > R$ (en particular $R < \infty$). Si $(a_n(x-c)^n)$ estuviera acotada, también lo estaría $(|a_n|\,|x-c|^n)$ (C1-004.T2, C1-005.T9), y $|x-c| \in B$.
2. Entonces $|x-c| \leq \sup B = R$ (C1-006.D1): contradicción.
3. Una sucesión no acotada no converge (C1-013.T1); así $a_n(x-c)^n \not\to 0$ y la serie diverge (C2-024.T2). ■

**⚠ En el borde, cualquier cosa**

Si $|x-c| = R$, el teorema no dice nada: ver C2-028.E1 y C2-028.E2.

**Teorema C2-028.T3 (cálculo del radio)**

Si $a_n \neq 0$ para $n \geq N_0$ y $|a_{n+1}/a_n| \to L \in [0,\infty)$, entonces $R = 1/L$ ($R = \infty$ si $L = 0$); si $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, $R = 0$. Lo mismo si $\sqrt[n]{|a_n|} \to L \in [0,\infty)$ o $\to \infty$.

*Demostración (cociente).*

1. Para $x \neq c$ y $n \geq N_0$, los términos $b_n := |a_n(x-c)^n|$ son $> 0$ y

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-c| \to L|x-c|$$

   (C1-013.T2, C1-005.T9).
2. Si $L|x-c| < 1$, $\sum b_n$ converge (C2-025.T3, con las colas C2-024.T5), así que $b_n \to 0$ (C2-024.T2), $(b_n)$ está acotada (C1-013.T1) y $|x-c| \in B$. Así, todo $r$ con $rL < 1$ está en $B$.

3. Si $L = 0$, todo $r \geq 0$ está en $B$: $B$ no está acotado y $R = \infty$.
4. Si $L > 0$: por el punto 2, $R \geq r$ para todo $r < 1/L$, así que $R \geq 1/L$ (C1-003.T8: si $R < 1/L$, el punto medio daría una contradicción). Si fuera $R > 1/L$, sea $x$ con $1/L < |x - c| < R$; por C2-028.T2 la serie converge absolutamente en $x$ y $b_n \to 0$, pero $L|x - c| > 1$ y C2-025.T3 dice que $b_n \not\to 0$: contradicción. Así $R = 1/L$.
5. Si el cociente tiende a ∞: para todo $x \neq c$, $b_{n+1}/b_n \to \infty$ y $b_n \not\to 0$ (C2-025.T3). Si fuera $R > 0$, un $x$ con $0 < |x - c| < R$ contradiría C2-028.T2. Así $R = 0$.
6. Con la raíz, el mismo argumento usa C2-025.T4 y $\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - c|$ (C1-023.T2). ■

**Teorema C2-028.T4**

$\sum n a_n (x - c)^{n-1}$ y $\sum a_n (x - c)^{n+1}/(n + 1)$ tienen el mismo radio $R$ que $\sum a_n (x - c)^n$.

*Demostración.*

Sean $B'$ y $R'$ el conjunto y el radio de la serie derivada, cuyos coeficientes son $(n + 1)a_{n+1}$ en el lugar $n$.

1. $R' \leq R$: si $r \in B'$ con $r > 0$, hay $M$ con $n|a_n|r^{n-1} \leq M$ para $n \geq 1$; entonces $|a_n|r^n \leq n|a_n|r^{n-1} \cdot r \leq Mr$ (porque $n \geq 1$), y $r \in B$. Así $B' \subset B$.
2. $R' \geq R$: sea $0 < r < R$. Hay $\rho \in B$ con $r < \rho$ (C1-006.T2 o $B$ no acotado), y $M$ con $|a_n|\rho^n \leq M$. Con $q := r/\rho \in (0, 1)$,

$$n|a_n|r^{n-1} = |a_n|\rho^n \cdot \frac{n\,q^{n-1}}{\rho} \leq \frac{M}{\rho}\, n\, q^{n-1}.$$

3. $\sum n q^{n-1}$ converge por el cociente: $\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = (1 + \frac{1}{n})q \to q < 1$ (C2-025.T3); así $nq^{n-1} \to 0$ (C2-024.T2) y está acotada (C1-013.T1). Por lo tanto $r \in B'$, y $R' \geq r$ para todo $r < R$: $R' \geq R$.
4. Para la serie integrada, la serie derivada de $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ es, recorriendo el índice (C1-005.T12 c), $\sum a_n (x - c)^n$. Por los puntos 1-3 aplicados a la serie integrada, su radio es el de la original. ■

**Corolario C2-028.C1 (series con potencias salteadas)**

Sean $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\rho$ el radio de $\sum b_n y^n$. La serie $\sum_n b_n (x - c)^{2n+k}$ (la serie de potencias con coeficiente $b_n$ en el lugar $2n + k$ y 0 en los demás) tiene radio $\sqrt{\rho}$ (∞ si $\rho = \infty$).

*Demostración.*

1. Para $r > 0$, $|b_n|r^{2n+k} = r^k \cdot |b_n|(r^2)^n$ (C1-005.T9), y $r^k > 0$ es fijo: $(|b_n|r^{2n+k})$ está acotada si

y solo si $(|b_n|(r^2)^n)$ lo está. Así $r$ está en el $B$ de la serie salteada si y solo si $r^2$ está en el $B_b$ de $\sum b_n y^n$ (los coeficientes nulos no afectan la acotación).

2. Si $\rho = \infty$, $B_b$ no está acotado, y para cada $s \in B_b$, $\sqrt{s} \in B$: $B$ no está acotado.
3. Si $\rho < \infty$: para $r \in B$, $r^2 \le \rho$ y $r \le \sqrt{\rho}$ (C2-014.T1, $\sqrt{}$ creciente). Y para $0 \le t < \sqrt{\rho}$, $t^2 < \rho$ (C1-003.T9), hay $s \in B_b$ con $s > t^2$ (C1-006.T2) y $\sqrt{s} \in B$ con $\sqrt{s} > t$. Así $\sup B = \sqrt{\rho}$ (C1-006.T2). ■

## Derivar término a término (solo enunciado)

**Teorema C2-028.T5 ⚠ C4 (derivación e integración término a término, enunciado)**

Si $R > 0$, $f(x) := \sum a_n(x-c)^n$ es continua y derivable en $(c-R, c+R)$, con $f'(x) = \sum n a_n(x-c)^{n-1}$ y $\int_c^x f = \sum a_n(x-c)^{n+1}/(n+1)$.

**⚠ No se usa en ninguna demostración**

Su demostración necesita convergencia uniforme (criterio M de Weierstrass) y se hace en Cálculo IV (tema 5). En Cálculo II **no se usa en ninguna demostración**: los desarrollos que siguen se prueban con el residuo de Taylor o integrando la suma geométrica *finita*. Lo que sí se demostró es que el radio no cambia (C2-028.T4).

## Los desarrollos clásicos

**Teorema C2-028.T6 (exp, sen, cos)**

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};$$

las tres series tienen radio ∞. En particular $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$.

**Idea de la demostración**

Las sumas parciales son los polinomios de Taylor en 0, y el residuo de Lagrange tiende a 0 porque $|x|^n/n! \to 0$.

*Demostración.*

*Paso 1:* $|x|^n/n! \to 0$.

1. Si $x = 0$ es inmediato. Si $x \neq 0$, el cociente de $\sum |x|^n/n!$ es $|x|/(n+1) \to 0 < 1$ (C1-012.T2, C1-013.T2), así que la serie converge (C2-025.T3) y su término tiende a 0 (C2-024.T2).

*Paso 2: exp.*

1. exp tiene derivadas de todos los órdenes, todas iguales a exp (C2-012.T1, C1-031.D1), y $\exp 0 = 1$. Su polinomio de Taylor en 0 es $P_{N,0}(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n/n!$ (C1-038.D1).
2. Por Lagrange (C1-038.T2), para algún $t$ entre 0 y $x$, $R_{N,0}(x) = e^t x^{N+1}/(N+1)!$. Como $t \leq |x|$ y exp es creciente, $|R_{N,0}(x)| \leq e^{|x|}|x|^{N+1}/(N+1)!$ (C1-004.T2, C1-005.T9).
3. Por el paso 1 y C1-012.T3 (b), $R_{N,0}(x) \to 0$ (C1-014.T1), así que las sumas parciales $P_{N,0}(x)$ tienden a $e^x$ (C2-012.T4).

*Paso 3: sen y cos.*

1. Por $\text{sen}' = \cos$, $\cos' = -\text{sen}$ (C2-014.T6) y una inducción (C1-005.T1), las derivadas de sen en 0 son, en orden, $0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ ($\text{sen}\, 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, C2-014.T4), y todas sus derivadas están acotadas por 1 en valor absoluto (C2-014.T5).
2. Como serie de potencias con coeficiente 0 en los lugares pares, las sumas parciales de la serie de sen son los $P_{N,0}(x)$, y $|R_{N,0}(x)| \leq |x|^{N+1}/(N+1)! \to 0$ (C1-038.T2, paso 1).
3. Así $P_{N,0}(x) \to \text{sen}\, x$; la serie escrita como $\sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ tiene por sumas parciales la subsucesión $P_{2n+1,0}(x)$, que también converge a $\text{sen}\, x$ (C1-015.T1). Igual para cos.

*Paso 4: los radios.*

1. Las tres series convergen en todo $x$. Si alguna tuviera $R < \infty$, en $x = c + R + 1$ divergería (C2-028.T2): contradicción. Así $R = \infty$.
2. Con $x = 1$, $e = e^1 = \sum 1/n!$ (C2-012.T3). ■

**Teorema C2-028.T7 (log y arctan)**

Para $-1 < x \leq 1$: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$. Para $-1 \leq x \leq 1$: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$; en particular $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - \cdots$ (Gregory–Leibniz). Ambas series tienen radio 1.

**Idea de la demostración**

Se integra la suma geométrica *finita* con su resto exacto, y el resto se acota a mano. No se usa derivar ni integrar término a término.

*Demostración.*

*log(1 + x) con* $0 \leq x \leq 1$.

1. Para $x > 0$, $\log(1+x) = \int_1^{1+x} dt/t = \int_0^x \frac{ds}{1+s}$ (C2-011.D1, C2-015.T2 con $r = 1$, $s = 1$); para $x = 0$ ambos lados son 0.
2. Por C1-005.T8 con razón $-s$:
$$\frac{1}{1+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-s)^k + \frac{(-s)^n}{1+s}.$$
3. Integrando en $[0, x]$ (C2-003.T1, C2-004.T2, C2-009.E1):
$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + R_n, \qquad |R_n| \leq \int_0^x s^n \, ds = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$
(C2-004.T4, C2-004.T3, C1-003.T7).
4. $R_n \to 0$ (C1-014.T1), y la suma, con $m = k+1$, es la suma parcial $\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} x^m/m$.

*log(1 + x) con* $-1 < x < 0$. Es C2-016.E2 (residuo de Cauchy).

*arctan con* $-1 \leq x \leq 1$.

1. $\arctan 0 = 0$ y $\arctan' t = 1/(1+t^2)$ (C2-014.T11), así que por la regla de Barrow (C2-009.C1) $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ (con C2-004.D1 si $x < 0$).
2. Por C1-005.T8 con razón $-t^2$: $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$.

3. Integrando (C2-004.T2, C2-009.E1, C2-004.D1):

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_n, \qquad |R_n| \le \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1},$$

   donde, si $x < 0$, la cota se obtiene en $[x, 0]$ con C2-004.T4 y C2-004.T3.
4. $R_n \to 0$, y las sumas parciales convergen a $\arctan x$. Con $x = 1$ y $\arctan 1 = \pi/4$ (C2-014.T12) sale Gregory–Leibniz.

*Radios.*

1. log: los coeficientes $(-1)^{n+1}/n$ no se anulan y $\frac{1/(n+1)}{1/n} \to 1$; por C2-028.T3, $R = 1$.
2. arctan: los coeficientes pares son 0 y C2-028.T3 no se aplica. $R \ge 1$: la serie converge en todo $|x| \le 1$, y si fuera $R < 1$, un $x$ con $R < |x| < 1$ contradiría C2-028.T2. $R \le 1$: si $1 < s < R$, $\sum s^{2n+1}/(2n+1)$ convergería (C2-028.T2) y su término tendería a 0 (C2-024.T2), pero el cociente $s^2(2n+1)/(2n+3) \to s^2 > 1$ dice que no (C2-025.T3). ■

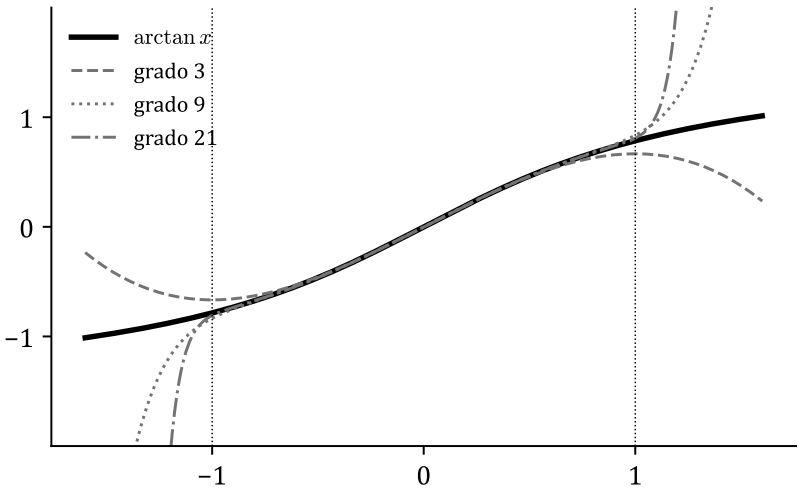



Figura 31: Polinomios de Taylor de arctan de grados 3, 9 y 21: buenos en $[-1, 1]$, se disparan fuera; el radio es 1.

## Ejemplos

**Ejemplo C2-028.E1 (geométrica)**
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ si $|x| < 1$; el radio es 1.

*Demostración.* La suma es C2-024.T3; el cociente de los coeficientes es $1 \to 1$ y C2-028.T3 da $R = 1$. En $x = \pm 1$ diverge (C2-024.T3). ■

**Ejemplo C2-028.E2 (los extremos)**
$\sum n! x^n$ tiene $R = 0$. $\sum x^n/n$ tiene $R = 1$, converge en $x = -1$ (Leibniz) y diverge en $x = 1$. $\sum x^n/n^2$ tiene $R = 1$ y converge absolutamente en $x = \pm 1$.

*Demostración.*

1. $(n+1)!/n! = n+1 \to \infty$: $R = 0$ (C2-028.T3).
2. $\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1$: $R = 1$. En $x = -1$, $\sum (-1)^n/n$ converge por Leibniz (C2-026.T1, con el signo cambiado, C2-024.T1); en $x = 1$ es la armónica, que diverge (C2-024.E1).
3. $\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$: $R = 1$. En $x = \pm 1$, $\sum |\pm 1|^n/n^2 = \sum 1/n^2$ converge (C2-025.C1). ■

**Ejemplo C2-028.E3 (Taylor no siempre representa a f)**
$f(x) := e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) := 0$ tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$ con $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n$; su serie de Taylor en 0 es 0 y converge en todo $\mathbb{R}$, pero a $f$ solo en $x = 0$.

*Demostración.*

*Paso 1: fuera de 0.*

1. Para $x \neq 0$, $f$ tiene derivadas de todos los órdenes y $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$ con $P_n$ un polinomio: $P_0 = 1$, y si vale para $n$, por las reglas del producto y de la cadena (C1-029.T2, C1-030.T1, C1-029.C1, C2-012.T1),

$$f^{(n+1)}(x) = \Big( -\frac{1}{x^2} P_n'(1/x) + \frac{2}{x^3} P_n(1/x) \Big) e^{-1/x^2} = P_{n+1}(1/x) e^{-1/x^2},$$

con $P_{n+1}(u) := -u^2 P_n'(u) + 2u^3 P_n(u)$ (inducción, C1-005.T1).

*Paso 2: un límite.*

1. Para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lim_{u\to\infty} u^{m/2}e^{-u} = 0$: para $u \geq 1$, $0 < u^{m/2} \leq u^m$ (C2-012.T5, C2-012.T6), y $u^m/e^u \to 0$ (C2-012.T8; para $m = 0$, $e^{-u} \to 0$).
2. Por lo tanto $\lim_{x\to 0} |x|^{-m}e^{-1/x^2} = 0$: dado $\varepsilon$, hay $U$ con $u^{m/2}e^{-u} < \varepsilon$ si $u > U$, y si $0 < |x| < 1/\sqrt{U}$, entonces $u = 1/x^2 > U$ y $|x|^{-m} = u^{m/2}$ (C1-017.D1).
3. Sumando términos (C1-018.T1), $\lim_{x\to 0} P(1/x)e^{-1/x^2} = 0$ para todo polinomio $P$.

*Paso 3: en 0, por inducción.*

1. $f$ es continua en 0: $f(x) \to 0 = f(0)$ (paso 2 con $m = 0$, C1-022.T0).
2. Supón que $f^{(n)}$ existe en $\mathbb{R}$, es continua en 0 y $f^{(n)}(0) = 0$. En $x \neq 0$, $(f^{(n)})'(x) = P_{n+1}(1/x)e^{-1/x^2} \to 0$ cuando $x \to 0$ (paso 2).
3. Por el lema del límite de la derivada (C2-014.T2), $f^{(n)}$ es derivable en 0 con $f^{(n+1)}(0) = 0$, y $f^{(n+1)}$ es continua en 0 (su límite es su valor).

*Paso 4: conclusión.* Todos los coeficientes de Taylor $f^{(n)}(0)/n!$ son 0 (C1-038.D1): la serie de Taylor es la serie 0, que converge a 0 en todo $\mathbb{R}$; pero $f(x) = e^{-1/x^2} > 0$ si $x \neq 0$ (C2-012.T1). ■

Por ejemplo, $f(0.5) = e^{-4} \approx 0.0183$, mientras la serie de Taylor en 0.5 vale 0.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ En el borde puede pasar cualquier cosa**

Con $R = 1$: $\sum x^n$ diverge en $\pm 1$; $\sum x^n/n$ converge en $-1$ y diverge en 1; $\sum x^n/n^2$ converge en los dos (C2-028.E1, C2-028.E2). C2-028.T2 no dice nada en $|x - c| = R$.

**⚠ Que la serie de Taylor converja no basta**

C2-028.E3: la serie de Taylor puede converger en todo $\mathbb{R}$ a algo que no es $f$. Para identificar la suma hay que probar que el residuo tiende a 0 (como en C2-028.T6) o usar otra representación (como en C2-028.T7).

## Ejercicios

1. Calcula el radio de $\sum x^n/2^n$, $\sum n^2 x^n$ y $\sum x^n/n!$.
2. Calcula el radio de $\sum(-1)^n x^{2n}/4^n$ con C2-028.C1.
3. Usa C2-028.T6 para calcular $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n)!$.
4. Demuestra que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\,2^n)$, usando C2-028.T7 con $x = -1/2$.
5. ¿Por qué no se puede usar C2-028.T5 para probar C2-028.T7 en este curso?

### Respuestas

1. 2; 1; ∞ (C2-028.T3).
2. Con $b_n = (-1)^n/4^n$, $\rho = 4$ (cociente 1/4), así que el radio es $\sqrt{4} = 2$.
3. cos 1.
4. $\log(1/2) = \sum(-1)^{n+1}(-1/2)^n/n = -\sum 1/(n2^n)$, y $\log(1/2) = -\log 2$ (C2-011.C1).
5. Porque C2-028.T5 solo se enuncia (⚠ C4): su demostración necesita convergencia uniforme, de Cálculo IV.

# C2-029 · Series de Fourier: ejemplos

## Motivación

> **El sintetizador**
> El sonido «de videojuego de 8 bits» es una **onda cuadrada**: vale $+1$ medio ciclo y $-1$ el otro medio. Un sintetizador solo sabe producir tonos puros, $\operatorname{sen}(nx)$, y mezclarlos con distintos volúmenes. ¿Qué tonos, y con qué volúmenes, fabrican la onda cuadrada?
> La respuesta de esta clase: solo los tonos impares, con volúmenes $4/(n\pi)$:
>
> $$\frac{4}{\pi}\Big(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\Big).$$
>
> Con pocos tonos la mezcla ya se parece a la onda; cerca de los saltos queda un «cuerno» que no desaparece.
> Dónde falla la analogía: un sintetizador real mezcla finitos tonos y el oído no distingue fases. Que la mezcla infinita reproduzca la onda en *cada* punto es un teorema (Dirichlet) que aquí solo se enuncia.

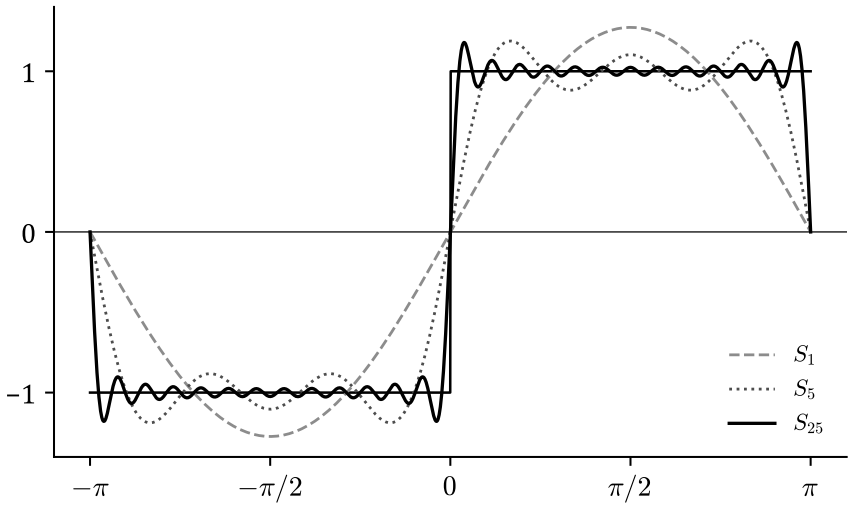



Figura 32: Onda cuadrada y sus sumas parciales $S_1$, $S_5$ y $S_{25}$. El «cuerno» cerca de los saltos es el fenómeno de Gibbs, que aquí solo se muestra como imagen.

## Resultados previos: senos y cosenos

**Teorema C2-029.T1 (productos a sumas)**

Para $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \tfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big],$$
$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) + \cos(a+b)\big],$$
$$\operatorname{sen} a \cos b = \tfrac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\big].$$

*Demostración.*

1. Por las fórmulas de suma (C2-014.T8) y la paridad (C2-014.T5):

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

2. Restando y sumando estas dos igualdades y dividiendo entre 2 (K1-K9) salen las dos primeras fórmulas.
3. Del mismo modo, $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$, y sumando sale la tercera. ■

**Teorema C2-029.T2 (ortogonalidad)**

Para $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ vale 0 si $m \neq n$, $\pi$ si $m = n \geq 1$ y $2\pi$ si $m = n = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx$ vale 0 si $m \neq n$ y $\pi$ si $m = n \geq 1$; $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx = 0$.

*Demostración.*

*Paso 1: integrales básicas.* Sea $k \in \mathbb{Z}$.

1. Si $k \neq 0$, $\operatorname{sen}(kx)/k$ es primitiva de $\cos(kx)$ y $-\cos(kx)/k$ lo es de $\operatorname{sen}(kx)$ (C2-014.T6, C1-030.T1). Por la regla de Barrow (C2-009.C1) y C2-014.C1 ($\operatorname{sen}(k\pi) = 0$) con la paridad (C2-014.T5):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(-k\pi)}{k} = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)}{k} = 0.$$

2. Si $k = 0$, $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, así que las integrales valen $2\pi$ y 0 (C2-002.E1).

*Paso 2: los productos.*

1. Por C2-029.T1 y la linealidad (C2-004.T2),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)\,dx.$$

2. Si $m \neq n$, $m - n \neq 0$ y $m + n \geq 1$: las dos integrales son 0. Si $m = n \geq 1$: $\frac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$. Si $m = n = 0$: $\frac{1}{2}(2\pi) + \frac{1}{2}(2\pi) = 2\pi$.
3. Igual, $\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\int \cos((m-n)x) - \frac{1}{2}\int \cos((m+n)x)$, que vale 0 si $m \neq n$ y $\frac{1}{2}(2\pi) - 0 = \pi$ si $m = n \geq 1$.
4. Y $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}((m+n)x) + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}((m-n)x) = 0$. ■

## Definiciones

**Definición C2-029.D1 (coeficientes de Fourier)**

Sea $f$ integrable en $[-\pi, \pi]$.

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \ (n \geq 0), \qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \ (n \geq 1).$$

Para cada $x$, la **serie de Fourier** de $f$ es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ (C2-024.D1, índices desde 0) con $u_0(x) := a_0/2$ y $u_n(x) := a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ para $n \geq 1$; se escribe $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$. Sus sumas parciales son

$$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Las integrales existen porque $\cos(nx)$ y $\operatorname{sen}(nx)$ son continuas (C2-014.T5, C1-022.T3), luego integrables (C2-003.T1), y el producto de integrables es integrable (C2-004.T5).

**Teorema C2-029.T3**

Si $f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx)$ (polinomio trigonométrico), sus coeficientes de Fourier son $a_n = \alpha_n$ y $b_n = \beta_n$ si $n \leq N$, y 0 si $n > N$.

*Demostración.*

1. Sea $k \geq 0$. Por linealidad (C2-004.T2),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\cos(kx) = \frac{\alpha_0}{2}\int \cos(kx) + \sum_{n=1}^{N}\Big(\alpha_n \int \cos(nx)\cos(kx) + \beta_n \int \operatorname{sen}(nx)\cos(kx)\Big).$$

2. Por la ortogonalidad (C2-029.T2): si $k = 0$, solo sobrevive $\frac{\alpha_0}{2}\cdot 2\pi = \pi\alpha_0$; si $1 \leq k \leq N$, solo sobrevive $\alpha_k \pi$; si $k > N$, todo es 0.
3. Dividiendo entre $\pi$: $a_k = \alpha_k$ $(k \leq N)$ y $a_k = 0$ $(k > N)$. Igual con $\operatorname{sen}(kx)$ para los $b_k$. ■

Este teorema justifica la definición: la fórmula de los coeficientes recupera los volúmenes de cualquier mezcla *finita* de tonos.

## Bessel y Riemann–Lebesgue

**Teorema C2-029.T4 (desigualdad de Bessel)**

Si $f$ es integrable en $[-\pi,\pi]$, para todo $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

**Idea de la demostración**
$0 \le \int (f - S_N)^2$. Al desarrollar el cuadrado, la ortogonalidad deja solo $\int f^2$ menos la «energía» de los coeficientes.

*Demostración.* Todas las integrales son en $[-\pi,\pi]$, y $E_N := \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$.

1. $S_N$ es continua, luego integrable (C2-003.T1), y $f - S_N$, $(f - S_N)^2$, $fS_N$ y $S_N^2$ son integrables (C2-004.T2, C2-004.T5).
2. Por la definición C2-029.D1, $\int f = \pi a_0$, $\int f\cos(nx) = \pi a_n$ e $\int f \operatorname{sen}(nx) = \pi b_n$. Por linealidad (C2-004.T2),
$$\int f S_N = \frac{a_0}{2}\,\pi a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n\,\pi a_n + b_n\,\pi b_n) = \pi E_N.$$
3. $S_N$ es un polinomio trigonométrico; por C2-029.T3 sus coeficientes de Fourier son los mismos $a_n, b_n$ ($n \le N$). El cálculo del punto 2 con $S_N$ en lugar de $f$ da $\int S_N^2 = \pi E_N$.
4. Por monotonía (C2-004.T3), y desarrollando el cuadrado con linealidad,
$$\begin{aligned} 0 \le \int (f - S_N)^2 &= \int f^2 - 2\int f S_N + \int S_N^2 \\ &= \int f^2 - 2\pi E_N + \pi E_N = \int f^2 - \pi E_N. \end{aligned}$$
5. Dividiendo entre $\pi > 0$ (C2-014.T3, C1-003.T4): $E_N \le \frac{1}{\pi}\int f^2$. ■

**Corolario C2-029.C1 (Riemann–Lebesgue)**

$\sum(a_n^2 + b_n^2)$ converge; en particular $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$.

*Demostración.*

1. Los términos $a_n^2 + b_n^2$ son $\geq 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9), y por Bessel sus sumas parciales están acotadas por $\frac{1}{\pi}\int f^2$: la serie converge (C2-024.T6).
2. Por C2-024.T2, $a_n^2 + b_n^2 \to 0$; como $0 \leq a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$, por el sándwich (C1-014.T1) $a_n^2 \to 0$.
3. Dado $\varepsilon > 0$, para $n$ grande $a_n^2 < \varepsilon^2$, y entonces $|a_n| < \varepsilon$ (C1-003.T9, con $|a_n|^2 = a_n^2$, C1-004.T6): $a_n \to 0$. Igual $b_n \to 0$. ■

## Ejemplos

> **Ejemplo C2-029.E1 (onda cuadrada)**
> $f := -1$ en $(-\pi, 0)$, $f := 1$ en $(0, \pi)$ y $f(0) = f(\pm\pi) := 0$: $a_n = 0$ para todo $n$, y $b_n = 4/(n\pi)$ si $n$ es impar y $b_n = 0$ si $n$ es par.

*Demostración.*

1. $f$ es acotada y continua salvo en $-\pi, 0, \pi$: es integrable (C2-005.C1). Además $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$ (también en 0 y $\pm\pi$): $f$ es impar.
2. $f(x)\cos(nx)$ es impar (C2-014.T5), así que $a_n = 0$ (C2-015.C1).
3. $f(x)\,\mathrm{sen}(nx)$ es par, así que $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$ (C2-015.C1).
4. En $[0, \pi]$, $f$ coincide con 1 salvo en 0 y $\pi$; por C2-005.T2,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_0^\pi = \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}$$

   (C2-009.C1, C2-014.C1).
5. Si $n$ es impar, $1 - (-1)^n = 2$ y $b_n = 4/(n\pi)$; si es par, $b_n = 0$. ■

> **Ejemplo C2-029.E2 (diente de sierra)**
> Para $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$: $a_n = 0$ para todo $n$ y $b_n = 2(-1)^{n+1}/n$.

*Demostración.*

1. $f$ es impar, así que $a_n = 0$ y $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$ (C2-015.C1).

2. Por partes (C2-016.T1, con $x$ y $-\cos(nx)/n$ de clase $C^1$ en $\mathbb{R}$):

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \Big[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0$$

   (C2-014.C1; la última integral es $[\mathrm{sen}(nx)/n]_0^{\pi} = 0$).
3. Así $b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$. ■

> **Ejemplo C2-029.E3 (convergencia en un punto)**
> En $x = \pi/2$, la serie de la onda cuadrada es $(4/\pi)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k+1) = 1 = f(\pi/2)$, y la del diente de sierra es $2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k+1) = \pi/2 = f(\pi/2)$.

*Demostración.*

1. Para $k \geq 0$, $\mathrm{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, y para $n = 2m$, $\mathrm{sen}(n\pi/2) = \mathrm{sen}(m\pi) = 0$ (C2-014.C1).
2. Onda cuadrada: los términos pares son 0, así que (C1-005.T7)

$$S_{2K+2}(\pi/2) = S_{2K+1}(\pi/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{K}\frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 1$$

   por Gregory–Leibniz (C2-028.T7, C2-024.T1). Como las sumas de índice par e impar tienden a 1, $S_N(\pi/2) \to 1$ (C1-012.D1).
3. Diente de sierra: $b_n\,\mathrm{sen}(n\pi/2) = 0$ si $n$ es par, y si $n = 2k+1$ vale $\frac{2(-1)^{2k+2}}{2k+1}(-1)^k = \frac{2(-1)^k}{2k+1}$. Igual que antes, $S_N(\pi/2) \to 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. ■

Numéricamente: $S_1(\pi/2) = 4/\pi \approx 1.2732$, $S_3(\pi/2) \approx 0.8488$, y las sumas oscilan alrededor de 1.

## Lo que se enuncia sin demostrar

**Teorema C2-029.T5 ⚠ C4 (teorema de Dirichlet, enunciado)**

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$. Si en $x$ existen los límites laterales $f(x^+)$, $f(x^-)$ y los límites $\lim_{h\to 0^+}(f(x+h) - f(x^+))/h$ y $\lim_{h\to 0^+}(f(x-h) - f(x^-))/h$, entonces $S_N(x) \to (f(x^+) + f(x^-))/2$.

**⚠ No se usa en ninguna demostración**

Se demuestra con el núcleo de Dirichlet en el optativo de Fourier de Cálculo IV. Aquí solo se enuncia y se ilustra: C2-029.E3 es un caso demostrado. El fenómeno de Gibbs (el «cuerno» de la figura, de altura cercana a 1.18 cerca de cada salto) se muestra solo como imagen: no se afirma ningún resultado formal sobre él.

## Por qué cada hipótesis

**⚠ La serie no ve los valores aislados**

Cambiar $f$ en un número finito de puntos no cambia ninguna integral (C2-005.T2), así que no cambia ningún coeficiente. En $x = 0$ la serie de la onda cuadrada vale 0 (todos los $\operatorname{sen}(n\cdot 0)$ son 0), sea cual sea $f(0)$. Por eso Dirichlet habla del promedio de los límites laterales, $(1 + (-1))/2 = 0$, y no de $f(0)$.

**⚠ Bessel no dice que haya igualdad**

Bessel es una desigualdad. La igualdad $\frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int f^2$ (Parseval) es cierta para funciones integrables, pero se demuestra en Cálculo IV.

## Ejercicios

1. Calcula los coeficientes de Fourier de $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$.
2. Calcula los coeficientes de $f(x) = 3 + 2\cos x - \operatorname{sen} 4x$ sin integrar.
3. Usa Bessel con el diente de sierra para probar $\sum_{n=1}^{N} 1/n^2 \le \pi^2/6$ para todo $N$.

4. Demuestra que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$ para $n \geq 1$ con C2-029.T2.
5. ¿Qué vale la serie de Fourier del diente de sierra en $x = \pi$? ¿Coincide con $f(\pi)$?

## Respuestas

1. $|x|$ es par: $b_n = 0$; $a_0 = \pi$; para $n \geq 1$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$.
2. $a_0 = 6$, $a_1 = 2$, $b_4 = -1$, los demás 0 (C2-029.T3).
3. $\sum_{n=1}^{N} 4/n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$, así que $\sum_{n=1}^{N} 1/n^2 \leq \pi^2/6$.
4. Es el caso $m = n \geq 1$.
5. Todos los $\text{sen}(n\pi)$ son 0: la serie vale 0, pero $f(\pi) = \pi$. Es el promedio de los límites laterales de la extensión periódica, $(\pi + (-\pi))/2 = 0$.

# C2-030 · Cierre de Cálculo II

## Motivación

> **Una hoja de axiomas**
> En la primera clase de Cálculo I escribimos 13 axiomas en una hoja: los de campo (K1-K9), los de orden (O1-O3) y el del supremo (S). Dos semestres después tenemos la integral, el logaritmo, el número $\pi$, las series y la serie de Fourier de una onda cuadrada, todo demostrado sobre esa hoja.
> ¿Cuántas piezas construimos? Contando definiciones, teoremas, corolarios y ejemplos de los inventarios del curso, 167 en Cálculo I y 231 en Cálculo II: 398 en total.
> Dónde falla la analogía del «edificio»: en un edificio se puede quitar un piso de arriba sin tocar los de abajo, y algunas columnas se ponen por estética. Aquí cada pieza solo usa piezas anteriores, y casi todas se usan después.

Este capítulo no tiene resultados nuevos. Es un mapa: qué se demostró, en qué orden, qué quedó solo enunciado y a dónde lleva todo esto.

## El mapa de Cálculo I

| Capítulo | Lo central |
|---|---|
| 1 Introducción | los tres problemas: tangente, área, velocidad |
| 2 Los números reales | axiomas K1-K9, O1-O3, S; inducción; supremo; propiedad arquimediana; $\sqrt{2}$ existe y es irracional |
| 3 Funciones | operaciones, composición, inversas |
| 4 Límite | sucesiones: álgebra, sándwich, monótonas, Bolzano–Weierstrass, Cauchy; funciones: ε-δ, laterales, al infinito |

| Capítulo | Lo central |
|---|---|
| 5 Continuidad | Bolzano, Weierstrass, Heine (continuidad uniforme), inversa continua |
| 6 La derivada | reglas, cadena, inversa, Fermat y Rolle, TVM, L'Hôpital, Taylor con residuo de Lagrange |

## El mapa de Cálculo II

| Capítulo | Lo central |
|---|---|
| 1 La integral definida | sumas de Darboux, criterio de Riemann, continua ⇒ integrable, propiedades, Dirichlet y Thomae, TVM para integrales |
| 2 Teorema Fundamental | la integral como función, primer y segundo TFC, integrales impropias |
| 3 Logaritmo y exponencial | log como integral, exp como su inversa, potencias reales, funciones elípticas |
| 4 Trigonometría | $\pi$, sen y cos desde la integral; fin de la trigonometría provisional |
| 5 Métodos | cambio de variable, partes y residuo integral, fracciones parciales, trapecio y Simpson |
| 6 Aplicaciones | áreas, longitud, volúmenes y superficies, trabajo y masa, ecuaciones diferenciales |
| 7 Series | Cauchy, criterios, Leibniz, reordenamientos, series de potencias, Fourier |

## Una ruta por el mapa

Una sola cadena atraviesa los dos cursos, de la hoja de axiomas a la serie de Fourier:

1. El axioma del supremo (S) da que toda sucesión de Cauchy converge (C1-016.T3).
2. Con Bolzano–Weierstrass sale el teorema de Heine: continua en $[a, b]$ ⇒ uniformemente continua (C1-025.T1).

3. Heine da que toda función continua en $[a, b]$ es integrable (C2-003.T1).
4. El TVM (C1-033.T1) da el segundo TFC (C2-009.T1); el primer TFC (C2-008.T1) da primitivas.
5. Con la integral se define $\log x = \int_1^x dt/t$ (C2-011.D1), y exp es su inversa (C2-012.D1), continua y derivable por C1-026.T3 y C1-031.T1.
6. Con la integral se define $\pi$ y cos como inversa de un área (C2-014.D2, C2-014.D3), y $\text{sen}' = \cos$ es un teorema (C2-014.T6).
7. Taylor con Lagrange (C1-038.T2) da las series de $e^x$, sen y cos (C2-028.T6); la suma geométrica finita integrada da arctan y $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - \cdots$ (C2-028.T7).
8. Las fórmulas de suma (C2-014.T8) dan la ortogonalidad (C2-029.T2), y Gregory–Leibniz da la convergencia de la serie de Fourier de la onda cuadrada en $\pi/2$ (C2-029.E3).

## Lo que quedó con ⚠ y dónde se cierra

**⚠ La regla**

Una pieza con ⚠ que no se demuestra en el curso se enuncia o se toma como definición, pero **no se usa en ninguna demostración** (C2-017.T6 solo sostiene a C2-017.C2, que también lleva ⚠). La única excepción es el axioma EN (elección numerable), que se declaró como axioma en C1-012 y sí se usa. C1-005.T11 y C1-037.T3 llevan ⚠ por su formalidad, pero se demuestran en los apéndices de sus capítulos; C1-005.T11 sí se usa.

| Pieza | Qué es | Dónde se cierra |
|---|---|---|
| C1-021.G1 | hechos geométricos de sen y cos (Cálculo I) | **cerrada**: C2-014.T10 los demuestra y C2-014.C2 libera C1-021.T0-T2, C1-028.T3 y C1-038.E1 |
| C1-012.Ax1 (EN) | elección numerable | es un axioma declarado; no se demuestra |
| C1-005.T11 | recursión, con $X$ un conjunto cualquiera (en C2-027.T2, ternas) | demostrada en el apéndice del capítulo C1-005; sí se usa |
| C1-037.T3 | L'Hôpital $\infty/\infty$ | demostrada en el apéndice del capítulo C1-037; no se usa |
| C2-005.T6 | criterio de Lebesgue | Cálculo IV, tema 1 (medida cero) |

| Pieza | Qué es | Dónde se cierra |
|---|---|---|
| C2-013.T4 | Liouville: $\Phi$, $F(k;\cdot)$, $E(k;\cdot)$ no elementales | fuera del programa (álgebra diferencial) |
| C2-017.T6, C2-017.C2 | factorización real en grados 1 y 2; primitivas de racionales | Variable Compleja (teorema fundamental del álgebra) |
| C2-019.D1, C2-019.D2 | área (cartesiana y polar) como definición | Cálculo IV (contenido de Jordan, cambio de variables) |
| C2-021.D1, C2-021.D2 | volumen por secciones y área de superficie como definición | Cálculo IV (Fubini, integral de superficie) |
| C2-022.D1 | trabajo como definición física | Cálculo IV (integral de línea) |
| C2-028.T5 | derivar e integrar series de potencias término a término | Cálculo IV, tema 5 (convergencia uniforme, M de Weierstrass) |
| C2-029.T5 | teorema de Dirichlet de convergencia puntual | Cálculo IV, optativo de Fourier |

## Cuatro ideas que atraviesan el curso

1. **Completitud.** Casi todo lo profundo (Bolzano, Weierstrass, Heine, que las integrales y las series existan) sale del axioma del supremo. En $\mathbb{Q}$ todo eso falla.
2. **Monotonía y acotación.** Una cantidad creciente y acotada converge: sumas de Darboux, integrales impropias de funciones $\geq 0$, series de términos $\geq 0$, Leibniz.
3. **Derivada cero implica constante.** Unicidad de primitivas, $\log(xy) = \log x + \log y$, las fórmulas de suma de sen y cos, la unicidad de las soluciones de $y' = ky$, del resorte y de la logística.
4. **Definir con una integral.** log, $\pi$, cos, las funciones elípticas; y también área, longitud, volumen y trabajo, con su ⚠ def cuando el concepto geométrico general es de Cálculo IV.

## Puente a Cálculo III

Cálculo III lleva todo esto a $\mathbb{R}^n$:

- **Curvas en $\mathbb{R}^n$.** La longitud de C2-020 (supremo de poligonales) se define igual; la desigualdad de Minkowski en el plano (C2-020.T1) se vuelve la desigualdad del triángulo para la norma euclidiana, con Cauchy–Schwarz.

- **Topología de $\mathbb{R}^n$.** Bolzano–Weierstrass y Heine se generalizan con el teorema de Heine–Borel; la continuidad en compactos da otra vez máximos y continuidad uniforme.
- **Derivadas parciales y diferencial.** La derivada de C1-027 se vuelve una transformación lineal; la regla de la cadena y el TVM tienen sus versiones en varias variables, y llegan la función inversa y la implícita.

Y Cálculo IV cierra las cuentas pendientes: integrales múltiples y Fubini (que justifican áreas y volúmenes), convergencia uniforme (que demuestra C2-028.T5) y el núcleo de Dirichlet (que demuestra C2-029.T5).

## Ejercicios

1. Escribe la cadena de ids que lleva de S a C2-003.T1 (continua ⇒ integrable).
2. Explica por qué la definición de cos como inversa de un área (C2-014.D3) no es circular, aunque en Cálculo I se usaron hechos geométricos de cos.
3. ¿Qué pieza ⚠ habría que demostrar para justificar el cálculo $\int_0^x \sum a_n t^n \, dt = \sum a_n x^{n+1}/(n+1)$?
4. Da un resultado de Cálculo II que dependa del criterio de Cauchy para sucesiones (C1-016.T3).

### Respuestas

1. S → C1-014.T2 (monótona y acotada converge) → C1-015.T3 (Bolzano–Weierstrass) → C1-024.T1 y C1-025.T1 (Heine) → C2-002.T5 (criterio de Riemann) → C2-003.T1.
2. Porque C2-014 no cita C1-021.G1 ni nada que dependa de él antes de C2-014.C2: cos se construye solo con la integral, y después se demuestran los hechos de G1 (C2-014.T10).
3. C2-028.T5 (⚠ C4), que necesita convergencia uniforme (Cálculo IV).
4. El criterio de Cauchy para series (C2-024.T4), y con él la convergencia absoluta (C2-026.T2).