Cálculo en varias variables I

Todas las demostraciones, explicadas paso a paso

Cálculo III · según el programa de la Facultad de Ciencias, UNAM

Guillermo Izquierdo

con revisión de Claude Opus 5.5 (Anthropic)

PyPro · pypro.mx · 2026

Prólogo

Este libro continúa *Cálculo diferencial* y *Cálculo integral* con el mismo objetivo: **demostrar todo**. Cada teorema del cálculo en varias variables que aparece aquí se demuestra completo, paso a paso, sin «es fácil ver», sin «se deja al lector» y sin usar nada que no se haya demostrado antes, aquí o en los dos primeros libros.

El recorrido sigue el programa de **Cálculo Diferencial e Integral III** de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en sus siete temas y en su orden: las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ (curvas, longitud de arco, curvatura, torsión y las fórmulas de Frenet–Serret); los espacios normados; la topología de $\mathbb{R}^n$ (abiertos, cerrados, compactos con el teorema de Heine–Borel, conexos) y la continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$; las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (derivadas parciales, diferenciabilidad, gradiente, el teorema del valor medio, el teorema de Schwarz y la fórmula de Taylor); las transformaciones lineales (norma de operador y formas cuadráticas); las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (la diferencial, la regla de la cadena, el punto fijo de Banach y los teoremas de la **función inversa** y de la **función implícita**, con divergencia, rotacional y laplaciano); y los máximos y mínimos (el criterio del hessiano y los multiplicadores de Lagrange). Los dos temas opcionales que sostienen a los demás (espacios normados y transformaciones lineales) sí se incluyen; el teorema del rango y el lema de Morse, también opcionales, no.

Cómo está hecho

- **Todo parte de los mismos axiomas.** Los axiomas de los números reales (K1–K9, O1–O3 y S), el principio de elección numerable (EN) y lo demostrado en *Cálculo diferencial* y *Cálculo integral* son el punto de partida. Los resultados de los libros anteriores se citan con su número, por ejemplo «(C1-033.T1)» o «(C2-014.T11)»; los de este libro empiezan con C3.
- **Cada paso dice qué usa.** Las justificaciones aparecen entre paréntesis con el número del resultado que se aplica, por ejemplo «(C3-014.C1)». El número indica la clase (C3-014) y la pieza dentro de ella (C1 = primer corolario). Detrás del libro hay un inventario de 205 piezas en el que cada una declara de qué depende, y un programa comprueba que ninguna use algo posterior.
- **Nada se redefine.** La longitud de una curva es la de *Cálculo integral* con la norma de $\mathbb{R}^n$; la continuidad y la derivada en una variable son las de *Cálculo diferencial*; seno, coseno, π y las funciones

trigonométricas inversas son las que se construyeron desde la integral, ya sin ⚠.

- **La elección se dice cuando se usa.** EN habla de subconjuntos de $\mathbb{R}$; su versión en $\mathbb{R}^n$ se demuestra (C3-009.T0) y se cita en cada prueba que elige un punto por cada número natural. Cuando una prueba puede evitar la elección, la evita: Weierstrass en $\mathbb{R}^n$ (C3-014.C1), el teorema de Schwarz (C3-018.T1) y la bisección de Heine–Borel (C3-010.T2) se demuestran sin elegir sucesiones.
- **Intuición primero, formalidad siempre.** Cada capítulo abre con una situación cotidiana (un dron que mide distancias, el GPS de un excursionista, una placa que se calienta, un mapa que se deforma) y dice dónde falla la analogía. Después vienen la definición o el teorema formal, su demostración y un contraejemplo por cada hipótesis, para que se vea por qué está ahí.

Álgebra lineal: qué se demuestra y qué se cita

Cálculo III se cursa en la Facultad en paralelo con *Álgebra Lineal I*. El libro demuestra lo que el cálculo usa y es corto de probar:

- las reglas de $\mathbb{R}^n$, el producto punto, la **desigualdad de Cauchy–Schwarz** y la del triángulo (C3-001); el producto cruz y el marco ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (C3-006);
- las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ y la **equivalencia de todas las normas** de $\mathbb{R}^n$ (C3-007, C3-014); que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una matriz y es lipschitziana (C3-007, C3-012); qué es una matriz invertible y las reglas de A^{-1} (C3-007);
- la **norma de operador**, la **serie de Neumann**, que las matrices invertibles forman un abierto y que la inversión es continua (C3-020) y de clase C^∞ (C3-022.T4);
- las formas cuadráticas definidas, su cota $m|h|^2$ y el criterio 2×2 (C3-021); la inversa de una matriz por bloques (C3-026.T0); y que toda matriz simétrica tiene un valor propio real, demostrado con multiplicadores de Lagrange (C3-030.T2).

Cinco hechos de la teoría general se **citan sin demostración**, cada uno con número propio y marcado «⚠ Álgebra Lineal» (capítulo C3-007): el álgebra de matrices y la transpuesta (AL.1), el rango (AL.3), el determinante (AL.4), el teorema espectral (AL.5) y el criterio de Sylvester (AL.6). Ninguno sostiene la cadena principal del curso: la función inversa, la implícita y Lagrange no usan determinantes, y el criterio del hessiano no diagonaliza. El determinante solo sirve para leer el jacobiano y en ejemplos; el teorema espectral y Sylvester, en los criterios generales de positividad. Fuera del bloque AL no hay piezas con ⚠: nada se enuncia aquí para demostrarse después.

Lo que pertenece a **Cálculo IV** no se enuncia en este libro: las integrales múltiples (Fubini y el cambio

de variables, que usará el jacobiano de C3-022), las integrales de línea y de superficie, y los teoremas de Green, Stokes y Gauss, que darán su sentido físico a la divergencia y al rotacional de C3-027.

Cómo leerlo

Cada capítulo corresponde a una clase en video (algunos, a dos partes) del curso *Cálculo en varias variables I: todas las demostraciones, explicadas paso a paso* de PyPro (pypro.mx). Se puede leer solo, pero funciona mejor junto con el video: el video da la idea y la imagen; el libro da cada detalle por escrito.

Los recuadros ayudan a orientarse:

- **Teorema, definición, ejemplo:** el enunciado exacto, tal como se usa después.
- **Idea:** la estrategia de la demostración en una o dos frases.
- **En la vida diaria:** la situación cotidiana y el límite de la analogía.
- **Cuidado:** errores frecuentes, lo que pasa si se quita una hipótesis y por qué una pieza lleva ⚠.

Al final de cada capítulo hay ejercicios con sus respuestas. El último capítulo (C3-031) es un mapa de lo demostrado, del bloque de Álgebra Lineal y de dónde se usó cada pieza citada.

Agradecimientos

A la **Facultad de Ciencias de la UNAM**, por un plan de estudios extraordinario y por haber formado a tantas generaciones de matemáticas y matemáticos. Este libro sigue su programa de Cálculo Diferencial e Integral III y no existiría sin él.

A los creadores de **Claude**, en Anthropic, por su esfuerzo de condensar el conocimiento del mundo en un modelo capaz de revisar, cuestionar y verificar cada línea de una demostración. Claude Opus 5.5 revisó la estructura lógica de este libro: que cada enunciado esté completo, que ningún paso use algo no demostrado y que no haya contradicciones entre capítulos ni con los dos libros anteriores.

A quienes estudian este material: las demostraciones son la parte del cálculo que más se salta y la que más enseña.

Guillermo Izquierdo

Índice general

Prólogo I

Agradecimientos IV

C3-001 · $\mathbb{R}^n$: vectores, producto punto y norma 1

C3-002 · Curvas: límites y derivadas por componentes 8

C3-003 · Integral de una curva y longitud de arco 15

C3-004 · Reparametrización y longitud de arco como parámetro 23

C3-005 · Curvatura, normal principal y plano osculador 29

C3-006 · Torsión y fórmulas de Frenet–Serret 35

C3-007 · Espacios vectoriales, normas y transformaciones lineales 42

C3-008 · Abiertos, cerrados y frontera 49

C3-009 · Sucesiones en $\mathbb{R}^n$ y teorema de Bolzano–Weierstrass 56

C3-010 · Compactos y teorema de Heine–Borel 62

C3-011 · Conexidad 69

C3-012 · Límites y continuidad de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ 76

C3-013 · Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas 84

C3-014 · Funciones continuas en compactos y en conexos 89

C3-015 · Gráficas, niveles y derivadas parciales 97

C3-016 · Diferenciabilidad y gradiente 102

C3-017 · TVM y criterio de las parciales continuas 110

C3-018 · Derivadas de orden superior y teorema de Schwarz 117

C3-019 · Fórmula de Taylor en varias variables 123

C3-020 · Norma de operador e inversas 129

C3-021 · Formas cuadráticas 135

C3-022 · La diferencial y la matriz jacobiana 142

C3-023 · Regla de la cadena 151

C3-024 · Contracciones: punto fijo de Banach 157

C3-025 · Teorema de la función inversa 162

C3-026 · Teorema de la función implícita 168

C3-027 · Divergencia, rotacional y laplaciano 176

C3-028 · Extremos locales y criterio del hessiano 181

C3-029 · Multiplicadores de Lagrange 188

C3-030 · Extremos absolutos y aplicaciones 194

C3-031 · Cierre de Cálculo III 200

C3-001 · $\mathbb{R}^n$: vectores, producto punto y norma

Motivación

> **Los dos tramos del dron**
> Un dron de reparto sale de la base y vuela dos tramos rectos. Su GPS los reporta en kilómetros (este, norte, arriba): primero $u = (2, 1, 2)$ y luego $v = (3, 4, 0)$. El primer tramo mide 3 km y el segundo 5 km. ¿Puede el dron terminar a más de 8 km de la base?
> Termina en $u + v = (5, 5, 2)$, a $\sqrt{54} \approx 7.35$ km. La respuesta general es la desigualdad del triángulo, y su corazón es la de Cauchy–Schwarz: $|u \cdot v| \leq |u||v|$. Aquí $u \cdot v = 10 \leq 15$. Solo se llega a los 8 km si el segundo tramo sigue la dirección del primero.
> Dónde falla la analogía: la Tierra es curva y el GPS mide sobre un elipsoide; aquí el espacio es plano y las coordenadas son exactas.

En Cálculo I y II todo ocurrió en la recta. Este capítulo da las reglas de $\mathbb{R}^n$: suma, producto por escalar, producto punto y norma. Todo se demuestra desde los axiomas de campo y orden y la raíz cuadrada de C2-014.

El espacio $\mathbb{R}^n$

Definición C3-001.D1 ($\mathbb{R}^n$)

Para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las n-adas $x = (x_1, \dots, x_n)$ de reales (funciones $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto x_i$); $x = y \iff x_i = y_i$ para $i = 1, \dots, n$. **Suma** $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, **producto por escalar** $cx := (cx_1, \dots, cx_n)$ $(c \in \mathbb{R})$, $0 := (0, \dots, 0)$, $-x := (-x_1, \dots, -x_n)$, $x - y := x + (-y)$. **Base canónica**: e_i tiene un 1 en el lugar i y 0 en los demás. $\mathbb{R}^1$ se identifica con $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^{n+m}$, $(x, y) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Teorema C3-001.T1 (reglas de $\mathbb{R}^n$)

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $c, d \in \mathbb{R}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$; $x+y = y+x$; $x+0 = x$; $x+(-x) = 0$; $c(dx) = (cd)x$; $1x = x$; $c(x+y) = cx+cy$; $(c+d)x = cx+dx$. Además $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

> **Idea de la demostración**
> Dos n-adas son iguales si coinciden en cada lugar. Cada regla, leída en el lugar i, es un axioma de campo.

Demostración.

1. En el lugar i, $((x+y)+z)_i = (x_i+y_i)+z_i = x_i+(y_i+z_i) = (x+(y+z))_i$ (C3-001.D1, K1).
2. Igual: $(x+y)_i = x_i+y_i = y_i+x_i$ (K2); $(x+0)_i = x_i+0 = x_i$ (K3); $(x+(-x))_i = x_i+(-x_i) = 0$ (K4).
3. $(c(dx))_i = c(dx_i) = (cd)x_i$ (K5); $(1x)_i = 1 \cdot x_i = x_i$ (K6).
4. $(c(x+y))_i = c(x_i+y_i) = cx_i+cy_i$ y $((c+d)x)_i = (c+d)x_i = cx_i+dx_i$ (K9, K2).
5. Cada igualdad vale en todos los lugares, luego vale en $\mathbb{R}^n$ (C3-001.D1).
6. El lugar i de $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ es $\sum_{j=1}^{n} x_j (e_j)_i$ (C1-005.T12, la suma se hace lugar a lugar). Como $(e_j)_i = 0$ si $j \neq i$ y $(e_i)_i = 1$, la suma vale x_i (K3, K6). ■

Producto punto y norma

Definición C3-001.D2 (producto punto y norma)

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$: $x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ y $|x| := \sqrt{x \cdot x}$ (C2-014.D1; $x \cdot x \geq 0$ por ser suma de cuadrados). La **distancia** entre x e y es $|x-y|$. Para $n = 1$, $|x| = \sqrt{x^2}$ es el valor absoluto (C1-004.D1); para $n = 2$, $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ es la de C2-019.E1.

Para $n = 1$: $|x|$ (valor absoluto) es ≥ 0 y su cuadrado es x^2 (C1-004.T6); por la unicidad de C2-014.D1, $\sqrt{x^2} = |x|$. Así la notación no choca.

Teorema C3-001.T2 (propiedades del producto punto)

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$: $x \cdot y = y \cdot x$; $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$; $(cx) \cdot y = c(x \cdot y)$; $x \cdot x \geq 0$, y $x \cdot x = 0 \iff x = 0$; $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \iff x = 0$; $|cx| = |c||x|$; $|x|^2 = x \cdot x$; $|x \pm y|^2 = |x|^2 \pm 2x \cdot y + |y|^2$; $|x_i| \leq |x|$ para cada i; $e_i \cdot x = x_i$.

Demostración.

1. $x \cdot y = \sum x_i y_i = \sum y_i x_i = y \cdot x$ (K6 en cada sumando).
2. $(x + y) \cdot z = \sum (x_i + y_i) z_i = \sum x_i z_i + \sum y_i z_i$ (K9, C1-005.T12 a).
3. $(cx) \cdot y = \sum c\, x_i y_i = c \sum x_i y_i$ (K5, C1-005.T12 a).
4. Cada $x_i^2 \geq 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9), así que $x \cdot x \geq 0$ (C1-005.T12 d).
5. Si $x \cdot x = 0$: para cada i, $0 \leq x_i^2 \leq \sum_j x_j^2 = 0$ (C1-005.T12 d, los demás sumandos son ≥ 0), luego $x_i^2 = 0$ y $x_i = 0$ (C1-003.T5). El recíproco es directo: $0 \cdot 0 = 0$.
6. $|x| = \sqrt{x \cdot x} \geq 0$ y $|x|^2 = x \cdot x$ (C2-014.D1). $|x| = 0 \iff x \cdot x = 0 \iff x = 0$ (C2-014.T1: $\sqrt{u} = 0 \iff u = 0$; paso 5).
7. $|cx|^2 = (cx) \cdot (cx) = c^2 (x \cdot x) = |c|^2 |x|^2$ (pasos 1, 3, C1-004.T6). $|c||x| \geq 0$ (C1-004.T1, paso 6) tiene el mismo cuadrado que $|cx| \geq 0$, así que son iguales (C2-014.D1).
8. Por los pasos 1-3, $|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y$; con $-y$ en lugar de y sale el signo $-$.
9. Por el paso 5, $x_i^2 \leq |x|^2$; como ambos lados son ≥ 0 y $x_i^2 = |x_i|^2$ (C1-004.T6), $|x_i| \leq |x|$ (C1-003.T9).
10. $e_i \cdot x = \sum_j (e_i)_j x_j = x_i$ (como en C3-001.T1). ■

Teorema C3-001.T3 (Cauchy–Schwarz)

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$: $|x \cdot y| \leq |x||y|$, con igualdad si y solo si uno de los dos es múltiplo escalar del otro.

> **Idea de la demostración**
> La distancia al cuadrado de x al punto ty de la recta de y no es negativa. En el mejor t (el pie de la sombra de x) vale $|x|^2 - (x \cdot y)^2 / |y|^2$.

Demostración.

1. Si $y = 0$: $x \cdot y = 0$ y $|y| = 0$ (C3-001.T2), se cumple la igualdad $0 = 0$, y $y = 0 \cdot x$ es múltiplo de x.
2. Supongamos $y \neq 0$. Entonces $|y|^2 > 0$ (C3-001.T2) y $t_0 := (x \cdot y)/|y|^2$ está definido (C1-003.T7).
3. Por C3-001.T2,

$$0 \leq |x - t_0 y|^2 = |x|^2 - 2t_0(x \cdot y) + t_0^2 |y|^2.$$

4. Al sustituir t_0 (K1-K9):

$$|x - t_0 y|^2 = |x|^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{|y|^2}.$$

5. Multiplicando por $|y|^2 > 0$ (C1-003.T4, C1-003.T9): $(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$.
6. Ambos lados son cuadrados de números ≥ 0: $(x \cdot y)^2 = |x \cdot y|^2$ (C1-004.T6) y $|x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$. Por C1-003.T9, $|x \cdot y| \leq |x||y|$.
7. *Igualdad.* Con $y \neq 0$, hay igualdad $\Leftrightarrow$ $(x \cdot y)^2 = |x|^2|y|^2$ $\Leftrightarrow$ $|x - t_0 y|^2 = 0$ (paso 4) $\Leftrightarrow$ $x = t_0 y$ (C3-001.T2). En particular, la igualdad implica que x es múltiplo de y.
8. Recíprocamente, si $x = cy$: $|x \cdot y| = |c|\,|y|^2 = |cy||y| = |x||y|$ (C3-001.T2, C1-004.T2). Si $y = cx$, la misma cuenta con los papeles cambiados. ■

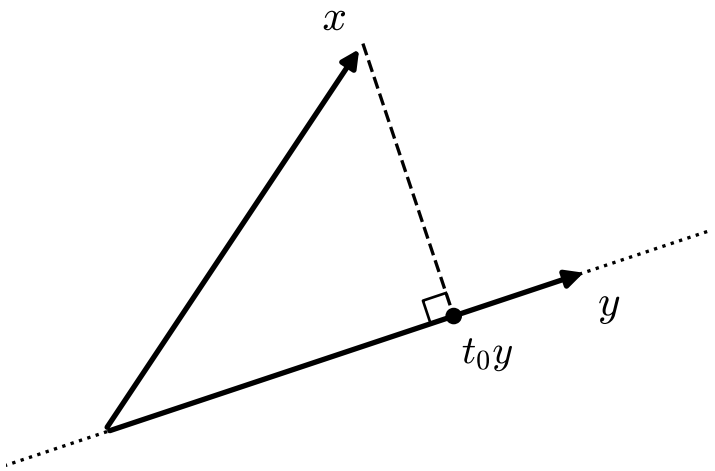


Figura 1: La sombra de x sobre la recta de y: el punto $t_0 y$ es el más cercano a x y el segmento de x a $t_0 y$ es perpendicular a y. Cauchy–Schwarz dice que la sombra no es más larga que x.

Teorema C3-001.T4 (desigualdad del triángulo)

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$: $|x+y| \le |x| + |y|$; $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$; $|x-z| \le |x-y| + |y-z|$. Para $n = 2$ es C2-020.T1.

Demostración.

1. Por C3-001.T2, C1-004.T1 y C3-001.T3:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= |x|^2 + 2\,x \cdot y + |y|^2 \\ &\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

2. Ambos lados son ≥ 0; por C1-003.T9, $|x+y| \le |x| + |y|$.
3. $x = (x-y) + y$ (C3-001.T1), así que $|x| \le |x-y| + |y|$, es decir $|x| - |y| \le |x-y|$. Cambiando los papeles, $|y| - |x| \le |y-x| = |x-y|$ (C3-001.T2 con $c = -1$).
4. Por C1-004.T3, $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$.
5. $x - z = (x-y) + (y-z)$ (C3-001.T1); el paso 2 da $|x-z| \le |x-y| + |y-z|$.
6. Para $n = 2$ y $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, el paso 2 dice $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$, que es C2-020.T1. ■

Teorema C3-001.T5 (norma y componentes)

Para $x \in \mathbb{R}^n$: $\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \le |x| \le |x_1| + \cdots + |x_n| \le n \cdot \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Demostración.

1. El máximo existe y es uno de los $|x_i|$ (C1-005.T13); por C3-001.T2, $|x_i| \le |x|$.
2. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (C3-001.T1). Por inducción en el número de sumandos (C1-005.T1) con C3-001.T4,

$$|x| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i e_i|.$$

3. $|x_i e_i| = |x_i||e_i| = |x_i|$, porque $|e_i| = \sqrt{1} = 1$ (C3-001.T2, C2-014.D1).
4. Cada $|x_i| \le \max_j |x_j|$; sumando n veces, $\sum |x_i| \le n \max_j |x_j|$ (C1-005.T12 b, d). ■

Ortogonalidad y ángulo

Definición C3-001.D3 (ortogonalidad y ángulo)

$x \perp y :\Leftrightarrow\ x \cdot y = 0$. u es **unitario** si $|u| = 1$; si $x \neq 0$, $x/|x|$ es unitario. Para $x, y \neq 0$, el **ángulo** entre ellos es $\theta := \arccos\big(x \cdot y/(|x||y|)\big) \in [0, \pi]$ (el cociente está en $[-1, 1]$ por C3-001.T3).

Que $x/|x|$ es unitario: $|x/|x|| = (1/|x|)|x| = 1$ (C3-001.T2). Que el cociente está en $[-1, 1]$: por C3-001.T3, $|x \cdot y|/(|x||y|) \leq 1$, y se usa C1-004.T3. Así el arc cos de C2-014.D6 se aplica.

Teorema C3-001.T6 (Pitágoras)

Si $x \perp y$, $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Demostración. Por C3-001.T2, $|x + y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2$, y $x \cdot y = 0$. ■

Ejemplo C3-001.E1

$|(1, 2, 2)| = 3$; $(1, 0)$ y $(1, 1)$ forman un ángulo de $\pi/4$; $(1, 1, 0) \perp (1, -1, 5)$.

1. $|(1, 2, 2)| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$, porque $3 \geq 0$ y $3^2 = 9$ (C3-001.D2, C2-014.D1).
2. $(1, 0) \cdot (1, 1) = 1$, $|(1, 0)| = 1$, $|(1, 1)| = \sqrt{2}$; el cociente es $1/\sqrt{2}$.
3. Por C2-014.C1, $s := \operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) > 0$, y por C2-014.T5, $2\cos^2(\pi/4) = 1$; así $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ (C2-014.D1). Como $\pi/4 \in [0, \pi]$, $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ (C2-014.D6).
4. $(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 5) = 1 - 1 + 0 = 0$.

⚠ La norma es la del producto punto

Cauchy–Schwarz liga **una** norma con **un** producto. Con el mismo $x \cdot y$ pero la norma $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ (C3-007.T1), $x = y = (1, 1)$ da $x \cdot y = 2 > \|x\|_\infty \|y\|_\infty = 1$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Mismo número de componentes

$(1,2)\cdot(1,2,3)$ no está definido: C3-001.D2 suma $x_i y_i$ para $i = 1, \dots, n$ con el mismo n.

⚠ «Múltiplo» no basta para el triángulo con igualdad

En Cauchy–Schwarz, $y = -x$ da igualdad: $|x \cdot (-x)| = |x|^2$. Pero en el triángulo, $x = (1,0)$, $y = -x$ dan $|x+y| = 0 < 2 = |x| + |y|$. La igualdad del triángulo pide $x \cdot y = |x||y|$ (paso 1 de C3-001.T4), es decir, un múltiplo con coeficiente ≥ 0 (ejercicio 3).

Ejercicios

1. Calcula el ángulo entre $u = (2,1,2)$ y $v = (3,4,0)$, y verifica $|u+v| \leq |u| + |v|$.
2. Demuestra la ley del paralelogramo: $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$.
3. Demuestra: si $y \neq 0$, $|x+y| = |x| + |y| \iff x = cy$ con $c \geq 0$.
4. Demuestra que $|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$, donde $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ y $\|y\|_\infty = \max |y_i|$.
5. Encuentra todos los t con $(1,t,2) \perp (t,3,-1)$.

Respuestas

1. $u \cdot v = 10$, $|u| = 3$, $|v| = 5$: $\theta = \arccos(2/3) \approx 0.8411$ rad. $|u+v| = \sqrt{54} \approx 7.348 \leq 8$.
2. Suma las dos fórmulas $|x \pm y|^2 = |x|^2 \pm 2x \cdot y + |y|^2$ de C3-001.T2.
3. Por el paso 1 de C3-001.T4 y C1-003.T9, la igualdad equivale a $x \cdot y = |x||y|$. Entonces hay igualdad en Cauchy–Schwarz y $x = t_0 y$ con $t_0 = (x \cdot y)/|y|^2 \geq 0$. Recíproco: si $x = cy$ con $c \geq 0$, $|x+y| = (c+1)|y| = |x| + |y|$.
4. $|x \cdot y| \leq \sum |x_i||y_i| \leq \sum |x_i| \, \|y\|_\infty$ (C1-004.T4 repetido, C1-004.T2, C1-005.T12 d).
5. $t + 3t - 2 = 0$: $t = 1/2$.

C3-002 · Curvas: límites y derivadas por componentes

Motivación

> **El dron que rodea un poste**
> Un dron inspecciona un poste dando vueltas a 20 m de él, a altura fija. Da una vuelta en 2 minutos: $\gamma(t) = (20\cos(\pi t), 20\,\mathrm{sen}(\pi t))$, con t en minutos. Al final está donde empezó: su velocidad media es cero. En una variable, el TVM prometería un instante con velocidad igual a la media. ¿Hubo un instante con velocidad cero?
> No: la rapidez es siempre $20\pi \approx 62.83$ m/min. Cada coordenada del GPS sí tiene su TVM, pero cada una en su propio instante. Las curvas se derivan componente a componente, y aun así el TVM no pasa de una variable a varias.
> Dónde falla la analogía: un dron real acelera y oscila; aquí el giro es perfecto y la rapidez exactamente constante.

Funciones vectoriales, límites y continuidad

Definición C3-002.D1 (función vectorial)

Una función $\gamma : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \subset \mathbb{R}$ tiene **componentes** $\gamma_i : A \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Si A es un intervalo con más de un punto, γ es un **camino** y su imagen $\gamma(A)$ es la **traza**.

Definición C3-002.D2 (límite y continuidad)

Sea γ definida al menos en $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ para algún $r > 0$. $\lim_{t\to a} \gamma(t) = L$ $(L \in \mathbb{R}^n)$ $:\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in \mathrm{dom}\,\gamma : 0 < |t-a| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - L| < \varepsilon$. Límites laterales como en C1-020.D1. $\gamma : A \to \mathbb{R}^n$ es **continua** en $a \in A :\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in A : |t-a| < \delta \Rightarrow$

$|\gamma(t) - \gamma(a)| < \varepsilon$; una **curva** es un camino continuo. Con $n = 1$ son C1-017.D1, C1-020.D1 y C1-022.D1.

Teorema C3-002.T1 (por componentes)

El límite, si existe, es único. $\lim_{t\to a} \gamma(t) = L \iff \lim_{t\to a} \gamma_i(t) = L_i$ para cada i; γ es continua en $a \iff$ cada γ_i lo es. Lo mismo para límites laterales.

Idea de la demostración

$|\gamma_i(t) - L_i| \le |\gamma(t) - L| \le \sum_j |\gamma_j(t) - L_j|$ (C3-001.T5): cerca en $\mathbb{R}^n$ equivale a cerca en cada componente.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y δ el de C3-002.D2. Si $0 < |t - a| < \delta$, $|\gamma_i(t) - L_i| \le |\gamma(t) - L| < \varepsilon$ (C3-001.T2). Así $\gamma_i \to L_i$ (C1-017.D1).
2. ($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Para cada i hay $\delta_i > 0$ con $0 < |t - a| < \delta_i \Rightarrow |\gamma_i(t) - L_i| < \varepsilon/n$ (C1-017.D1, con $\varepsilon/n > 0$ por C1-003.T7).
3. Sea $\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ (C1-005.T13). Si $0 < |t - a| < \delta$, por C3-001.T5 y C1-005.T12,

$$|\gamma(t) - L| \le \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(t) - L_i| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

4. *Unicidad.* Si L y M son límites, por el paso 1 $\gamma_i \to L_i$ y $\gamma_i \to M_i$, luego $L_i = M_i$ (C1-017.T1) para cada i, y $L = M$ (C3-001.D1).
5. La continuidad (con $|t - a| < \delta$ y $L = \gamma(a)$) y los límites laterales (con t de un solo lado) se prueban con los mismos pasos. ■

Teorema C3-002.T2 (álgebra de límites)

Si $\lim_{t\to a} \gamma = L$, $\lim_{t\to a} \eta = M$ (en $\mathbb{R}^n$) y $\lim_{t\to a} f = c$ (f real, mismo dominio): $\lim(\gamma + \eta) = L + M$, $\lim f\gamma = cL$, $\lim \gamma \cdot \eta = L \cdot M$ y $\lim |\gamma| = |L|$. En particular sumas, productos por funciones reales continuas, productos punto y normas de funciones vectoriales continuas son continuos.

Demostración.

1. Por C3-002.T1, $\gamma_i \to L_i$ y $\eta_i \to M_i$. Por C1-018.T1, $\gamma_i + \eta_i \to L_i + M_i$ y $f\gamma_i \to cL_i$; por C3-002.T1 otra vez, $\gamma + \eta \to L + M$ y $f\gamma \to cL$.
2. $\gamma \cdot \eta = \sum_i \gamma_i\eta_i$; cada producto tiende a L_iM_i y la suma finita a $\sum L_iM_i = L \cdot M$ (C1-018.T1 e inducción en el número de sumandos, C1-005.T12).
3. Por C3-001.T4, $\big||\gamma(t)| - |L|\big| \le |\gamma(t) - L|$, así que el δ que sirve para γ sirve para $|\gamma|$.
4. *Continuidad.* Si γ, η y f son continuas en a, cada γ_i, η_i lo es (C3-002.T1); por C1-022.T2, $\gamma_i+\eta_i$, $f\gamma_i$ y $\sum_i \gamma_i\eta_i$ son continuas en a, y por C3-002.T1 también $\gamma+\eta$ y $f\gamma$. Para $|\gamma|$, el paso 3 con $L = \gamma(a)$ convierte el δ de γ en uno para $|\gamma|$. ■

Derivadas

Definición C3-002.D3 (derivada, velocidad, tangente)

Sea γ definida en un intervalo abierto que contiene a a. γ es **derivable** en $a :\Leftrightarrow$ existe $\gamma'(a) := \lim_{h\to 0}(\gamma(a+h)-\gamma(a))/h \in \mathbb{R}^n$. $\gamma'(a)$ es la **velocidad**, $|\gamma'(a)|$ la **rapidez**; si $\gamma'(a) \neq 0$, $T(a) := \gamma'(a)/|\gamma'(a)|$ es el **vector tangente unitario** y $\{\gamma(a) + s\gamma'(a) : s \in \mathbb{R}\}$ la **recta tangente**. Derivadas superiores γ'', $\gamma^{(k)}$ y clase C^k en un intervalo abierto J como en C1-031.D1 y C2-015.D1 (componente a componente); C^∞ en $J := C^k$ en J para todo k (también para funciones reales de una variable). γ es **regular** en J si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$.

Teorema C3-002.T3 (derivada por componentes)

γ es derivable en $a \Leftrightarrow$ cada γ_i lo es, y $\gamma'(a) = (\gamma_1'(a), \dots, \gamma_n'(a))$. Derivable en $a \Rightarrow$ continua en a. γ es de clase C^k en $J \Leftrightarrow$ cada γ_i lo es.

> **Idea de la demostración**
> El cociente incremental de γ es la n-ada de los cocientes de sus componentes; su límite es asunto de C3-002.T1.

Demostración.

1. Para $h \neq 0$ con $a + h$ en el dominio, la componente i de $q(h) := (\gamma(a + h) - \gamma(a))/h$ es $(\gamma_i(a +$

$h) - \gamma_i(a))/h$ (C3-001.D1).

2. q está definida en un $(-r, 0) \cup (0, r)$ porque el dominio de γ es un intervalo abierto que contiene a a. Por C3-002.T1, $\lim_{h\to 0} q(h)$ existe si y solo si existen los n límites de las componentes, y entonces $\gamma'(a) = (\gamma_1'(a), \dots, \gamma_n'(a))$ (C1-027.D1).
3. Si γ es derivable en a, cada γ_i lo es (paso 2), luego es continua en a (C1-028.T1), y γ es continua en a (C3-002.T1).
4. *Clase C^k.* Por inducción en k (C1-005.T1): si $\gamma^{(k)}$ existe en J y $\gamma^{(k)} = (\gamma_1^{(k)}, \dots, \gamma_n^{(k)})$, el paso 2 aplicado a $\gamma^{(k)}$ da que $\gamma^{(k+1)}$ existe en $J \iff$ existe cada $\gamma_i^{(k+1)}$, con $\gamma^{(k+1)} = (\gamma_i^{(k+1)})_i$.
5. $\gamma^{(k)}$ es continua en $J \iff$ cada $\gamma_i^{(k)}$ lo es (C3-002.T1). Por C2-015.D1, γ es $C^k \iff$ cada γ_i lo es. ■

Teorema C3-002.T4 (reglas de derivación)

Sean J un intervalo abierto, $\gamma, \eta : J \to \mathbb{R}^n$ y $f : J \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in J$, y $\varphi : J' \to J$ derivable en $s \in J'$ (J' intervalo abierto) con $\varphi(s) = a$. Entonces $\gamma+\eta$, $f\gamma$, $\gamma\cdot\eta$ y $\gamma\circ\varphi$ son derivables (en a, a, a y s) con $(\gamma+\eta)' = \gamma'+\eta'$, $(f\gamma)' = f'\gamma+f\gamma'$, $(\gamma\cdot\eta)' = \gamma'\cdot\eta+\gamma\cdot\eta'$ y $(\gamma\circ\varphi)'(s) = \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s))$.

Demostración. Todo se hace en cada componente y se reúne con C3-002.T3.

1. $(\gamma + \eta)_i = \gamma_i + \eta_i$ es derivable en a con derivada $\gamma_i'(a) + \eta_i'(a)$ (C1-029.T1).
2. $(f\gamma)_i = f\gamma_i$ es derivable con derivada $f'(a)\gamma_i(a) + f(a)\gamma_i'(a)$ (C1-029.T2).
3. $\gamma \cdot \eta = \sum_i \gamma_i\eta_i$ (C3-001.D2). Cada sumando es derivable con derivada $\gamma_i'\eta_i + \gamma_i\eta_i'$ (C1-029.T2) y la suma también (C1-029.T1 e inducción, C1-005.T12):

$$(\gamma \cdot \eta)'(a) = \sum_i \big(\gamma_i'(a)\eta_i(a) + \gamma_i(a)\eta_i'(a)\big) = \gamma'(a) \cdot \eta(a) + \gamma(a) \cdot \eta'(a).$$

4. $(\gamma \circ \varphi)_i = \gamma_i \circ \varphi$ es derivable en s con derivada $\gamma_i'(\varphi(s))\varphi'(s)$ (C1-030.T1).
5. Por C3-002.T3, las n-adas de derivadas son las derivadas vectoriales. ■

Corolario C3-002.C1

Si γ es derivable en un intervalo abierto J y $|\gamma|$ es constante en J, entonces $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ para todo $t \in J$. En particular, si γ es dos veces derivable y su rapidez es constante, $\gamma' \perp \gamma''$.

Demostración.

1. Si $|\gamma| = c$ en J, entonces $\gamma \cdot \gamma = c^2$ es constante (C3-001.T2).

2. Por C3-002.T4, $(\gamma \cdot \gamma)' = \gamma' \cdot \gamma + \gamma \cdot \gamma' = 2\,\gamma \cdot \gamma'$ (C3-001.T2).
3. La derivada de una constante es 0 (C1-028.T2): $\gamma \cdot \gamma' = 0$.
4. Si la rapidez $|\gamma'|$ es constante y γ' es derivable, los pasos 1-3 aplicados a γ' dan $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$. ■

Teorema C3-002.T5 (derivada cero)

Si γ es continua en un intervalo I, derivable en su interior y $\gamma' = 0$ ahí, γ es constante en I.

Demostración. Cada γ_i es continua en I (C3-002.T1), derivable en el interior con $\gamma_i' = 0$ (C3-002.T3), luego constante (C1-034.T1). Entonces γ es constante (C3-001.D1). ■

Teorema C3-002.T6 (clase C^k en una variable)

Sean J, J' intervalos abiertos y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (o $k = \infty$). Sumas, productos y cocientes (con denominador sin ceros en J) de funciones reales de clase C^k en J son de clase C^k en J; si $\varphi : J' \to J$ y $f : J \to \mathbb{R}$ son de clase C^k, $f \circ \varphi$ lo es en J'. En particular $\sqrt{\ }$ es de clase C^∞ en $(0, \infty)$, y si $\gamma, \eta : J \to \mathbb{R}^n$ y $f : J \to \mathbb{R}$ son de clase C^k, también lo son $\gamma + \eta$, $f\gamma$, $\gamma \cdot \eta$ y $|\gamma|$ (donde $\gamma \neq 0$).

> **Idea de la demostración**
> Inducción en k: la derivada de una suma, producto, cociente o composición es otra expresión del mismo tipo con factores de una clase menos.

Demostración. Dos hechos de la definición (C1-031.D1, C2-015.D1): $g \in C^{k+1} \iff g$ es derivable en J y $g' \in C^k$; y $C^{k+1} \subset C^k$, porque las derivadas hasta el orden k son derivables, luego continuas (C1-028.T1).

1. Sea $P(k)$: «para f, g, φ de clase C^k, $f + g$, fg, $1/g$ (si g no se anula) y $f \circ \varphi$ son C^k». $P(0)$ es C1-022.T2 y C1-022.T3.
2. Supongamos $P(k)$ y sean f, g, φ de clase C^{k+1} (luego C^k). Por C1-029.T1-T3 y C1-030.T1:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (1/g)' = -g' \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g}, \quad (f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\,\varphi'.$$

3. Los factores $f', g', \varphi', f, g, 1/g$ (por $P(k)$) y $f' \circ \varphi$ (por $P(k)$, con $f' \in C^k$) son C^k; por $P(k)$ las sumas y productos de la derecha son C^k. Así las cuatro funciones son C^{k+1}: vale $P(k+1)$.
4. Por inducción (C1-005.T1), $P(k)$ vale para todo k; para $k = \infty$, se aplica a cada k.

5. *Raíz.* En $(0,\infty)$, $\sqrt{}$ es continua y $(\sqrt{})' = \frac{1}{2}\cdot(1/\sqrt{})$ (C2-014.T1). Si $\sqrt{} \in C^j$, entonces $1/\sqrt{} \in C^j$ (paso 3, sin ceros) y $(\sqrt{})' \in C^j$: $\sqrt{} \in C^{j+1}$. Por inducción es C^∞.
6. *Vectoriales.* Por C3-002.T3, $\gamma+\eta$ y $f\gamma$ son C^k porque sus componentes $\gamma_i+\eta_i$ y $f\gamma_i$ lo son; $\gamma\cdot\eta = \sum\gamma_i\eta_i$ también. Donde $\gamma \neq 0$, $\gamma\cdot\gamma > 0$ (C3-001.T2) y $|\gamma| = \sqrt{}\circ(\gamma\cdot\gamma)$ es C^k (pasos 4 y 5). ■

Ejemplos

Ejemplo C3-002.E1 (hélice y cúspide)

Para $r > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, la hélice $\gamma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, ct)$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ con $\gamma'(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t, c)$ y rapidez constante $\sqrt{r^2+c^2}$; con $c=0$ es la circunferencia. $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ es de clase C^∞ y no es regular en 0 ($\gamma'(0)=0$): su traza tiene un pico.

1. sen y cos son derivables con $\operatorname{sen}' = \cos$, $\cos' = -\operatorname{sen}$ (C2-014.T6); por inducción, son C^∞. $t \mapsto ct$ tiene derivada c (C1-028.T2). Por C3-002.T3 y C1-029.T2, $\gamma'(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t, c)$ y γ es C^∞.
2. $|\gamma'(t)|^2 = r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + c^2 = r^2 + c^2$ (C2-014.T5, C3-001.D2).
3. Para (t^2, t^3): $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ (C1-028.T2), los polinomios son C^∞, y $\gamma'(0) = (0,0)$. Que la traza «tiene un pico» se ve en la gráfica de $y = |x|^{3/2}$; no se usa.

Ejemplo C3-002.E2 (el TVM no vale para curvas)

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi]$: $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0$, pero $|\gamma'(t)| = 1$ para todo t, así que no existe c con $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 2\pi\gamma'(c)$. Lo que sí vale es una desigualdad (C3-003.C1).

1. $\cos(2\pi) = \cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} 0 = 0$ (C2-014.T5, C2-014.C1): la diferencia es $(0,0)$.
2. $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ (C3-002.T3, C2-014.T6) y $|\gamma'(t)| = 1$ (C2-014.T5).
3. Si $2\pi\gamma'(c) = 0$, entonces $|\gamma'(c)| = 0$ (C3-001.T2), contradicción.

⚠ Cada componente tiene su TVM, pero no el mismo

Para $\gamma_1 = \cos$ en $[0, 2\pi]$, el TVM da $c = \pi$ ($\operatorname{sen}\pi = 0$); para $\gamma_2 = \operatorname{sen}$, da $c = \pi/2$ o $3\pi/2$. No hay un instante común. Aplicar el TVM «a cada componente y juntar» es un error frecuente.

Por qué cada hipótesis

⚠ Intervalo abierto alrededor de a

$\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$ en $[0, 1]$: en $a = 0$ el cociente no está definido para $h < 0$. En este curso no hay derivadas laterales; por eso C3-002.D3 pide un intervalo abierto.

⚠ Hacen falta todas las componentes

$\gamma(t) = (t, 1/t)$ para $t \neq 0$: $\gamma_1 \to 0$ cuando $t \to 0$, pero γ_2 no tiene límite, y por C3-002.T1 tampoco γ.

Ejercicios

1. Para el dron del poste, $\gamma(t) = (20\cos(\pi t), 20\,\mathrm{sen}(\pi t))$, calcula γ', la rapidez y la recta tangente en $t = 1/2$.
2. Demuestra que si γ es derivable en a, $\lim_{h\to 0} \gamma(a + h) = \gamma(a)$ sin pasar por componentes.
3. Sea γ dos veces derivable con $\gamma'' = 0$ en $\mathbb{R}$. Demuestra que $\gamma(t) = p + tv$.
4. Calcula $(\gamma \cdot \gamma)'$ para $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ de dos formas (regla del producto y directamente).
5. ¿Es regular en $\mathbb{R}$ la curva $\gamma(t) = (t^3, t^2 - 1)$? ¿Y $\eta(t) = (t^3 + t, t^2)$?

Respuestas

1. $\gamma'(t) = 20\pi(-\mathrm{sen}(\pi t), \cos(\pi t))$, rapidez $20\pi \approx 62.83$ m/min; en $t = 1/2$: $\gamma = (0, 20)$, $\gamma' = (-20\pi, 0)$, recta $\{(-20\pi s, 20) : s \in \mathbb{R}\}$.
2. $|\gamma(a + h) - \gamma(a)| = |h|\,|q(h)|$ y $q(h) \to \gamma'(a)$ es acotado cerca de 0 (C3-002.T2: $|q| \to |\gamma'(a)|$).
3. γ' es constante $= v$ (C3-002.T5); $\gamma(t) - tv$ tiene derivada 0 y es constante $= p$.
4. $2\gamma \cdot \gamma' = 2(t + 2t^3 + 3t^5)$; directamente, $(t^2 + t^4 + t^6)' = 2t + 4t^3 + 6t^5$.
5. $\gamma'(0) = (0, 0)$: no es regular. $\eta'(t) = (3t^2 + 1, 2t) \neq 0$ siempre: sí es regular.

C3-003 · Integral de una curva y longitud de arco

Motivación

> **El odómetro y el desplazamiento**
> Un dron con rapidez máxima de 15 m/s vuela 60 s girando como quiera. ¿A qué distancia máxima del punto de partida puede terminar? Intuición: a lo más 900 m, porque el desplazamiento nunca supera lo que marca el odómetro. Una cota «por ejes» (900 m en cada una de las tres coordenadas) daría $900\sqrt{3} \approx 1{,}558.8$ m, que es demasiado.
> Después, la rampa helicoidal de un estacionamiento: radio 15 m, sube 3 m por vuelta. En 4 vueltas, ¿cuánto recorre un auto? El odómetro marca $\int |\gamma'|$; hay que probar que eso es la longitud de la ruta.
> Dónde falla la analogía: la rapidez que cuenta es respecto al suelo, no respecto al aire; y la ruta de un auto no es una curva sin grosor.

Parte 1 · Integrar curvas

Definición C3-003.D1 (integral de una función vectorial)

Sean $a < b$ y $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con cada componente integrable en $[a,b]$. $\int_a^b F := \left(\int_a^b F_1, \dots, \int_a^b F_n\right)$; con las convenciones de C2-004.D1 para $a \geq b$.

Teorema C3-003.T1 (propiedades)

Toda F continua en $[a,b]$ es integrable (componente a componente). La integral es lineal; para $c \in \mathbb{R}^n$, $c \cdot \int_a^b F = \int_a^b c \cdot F$; es aditiva en intervalos (C2-004.C1). (Barrow) Si F es continua en $[a,b]$ y $G : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es continua con $G' = F$ en (a,b), $\int_a^b F = G(b) - G(a)$.

Demostración.

1. Si F es continua, cada F_i lo es (C3-002.T1) y es integrable (C2-003.T1).
2. *Linealidad.* $\int(F+G)$ y $\int cF$ ($c \in \mathbb{R}$) se calculan en cada componente con C2-004.T2.
3. Para $c \in \mathbb{R}^n$: $c \cdot F = \sum_i c_i F_i$ es integrable y, por C2-004.T2 y C1-005.T12,

$$\int_a^b c \cdot F = \sum_i c_i \int_a^b F_i = c \cdot \int_a^b F.$$

4. *Aditividad.* Para $a < m < b$, $\int_a^b F_i = \int_a^m F_i + \int_m^b F_i$ en cada componente (C2-004.C1).
5. *Barrow.* Cada G_i es continua en $[a,b]$ (C3-002.T1) con $G_i' = F_i$ en (a,b) (C3-002.T3), y F_i es continua. Por C2-009.C1, $\int_a^b F_i = G_i(b) - G_i(a)$ para cada i. ■

Teorema C3-003.T2

Sean $a < b$ y $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces $\left|\int_a^b F\right| \leq \int_a^b |F|$.

> **Idea de la demostración**
> Se proyecta la integral sobre su propia dirección, $v = \int F$, y se acota punto a punto con Cauchy–Schwarz.

Demostración.

1. F es integrable (C3-003.T1) y $|F|$ es continua (C3-002.T2), luego integrable (C2-003.T1).
2. Sea $v := \int_a^b F$. Por C3-001.T2 y C3-003.T1 (con $c = v$):

$$|v|^2 = v \cdot v = v \cdot \int_a^b F = \int_a^b v \cdot F.$$

3. Para cada t, $v \cdot F(t) \leq |v \cdot F(t)| \leq |v||F(t)|$ (C1-004.T1, C3-001.T3).
4. Por la monotonía y la linealidad (C2-004.T3, C2-004.T2): $|v|^2 \leq |v| \int_a^b |F|$.
5. Si $v = 0$, la conclusión es $0 \leq \int_a^b |F|$, cierta por C2-004.T3.
6. Si $v \neq 0$, $|v| > 0$; al dividir (C1-003.T7, C1-003.T4), $|v| \leq \int_a^b |F|$. ■

Corolario C3-003.C1 (desigualdad del valor medio para curvas)

Sean $a < b$ y γ de clase C^1 en un intervalo abierto $J \supset [a,b]$. Entonces $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\gamma'|$; si $|\gamma'| \leq M$ en $[a,b]$, $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq M(b-a)$.

Demostración.

1. γ' es continua en J (C2-015.D1), en particular en $[a,b]$; γ es continua en $[a,b]$ (C1-028.T1, en cada componente, y C3-002.T1).
2. Por Barrow (C3-003.T1 con $G = \gamma, F = \gamma'$): $\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'$.
3. Por C3-003.T2: $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\gamma'|$.
4. Si $|\gamma'| \leq M$ en $[a,b]$, C2-006.T1 da $\int_a^b |\gamma'| \leq M(b-a)$. ■

⚠ **Desigualdad, no igualdad**

Para la circunferencia de C3-002.E2 en $[0, 2\pi]$: $|\gamma(2\pi) - \gamma(0)| = 0 < 2\pi = \int_0^{2\pi} |\gamma'|$. Lo que se pierde respecto al TVM es el punto intermedio c, no la cota.

Parte 2 · Longitud de arco

La longitud **no se redefine**: es la de C2-020.D1 con la norma de $\mathbb{R}^n$ en lugar de $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Definición C3-003.D2 (longitud; extensión de C2-020.D1)

Sean $a < b$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Para una partición $P = \{t_0, \dots, t_k\}$ de $[a,b]$: $\ell(\gamma, P) := \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ (la poligonal inscrita). γ es **rectificable** si $\{\ell(\gamma, P) : P \text{ partición de } [a,b]\}$ está acotado superiormente, y su **longitud** es $\ell(\gamma) := \sup_P \ell(\gamma, P)$.

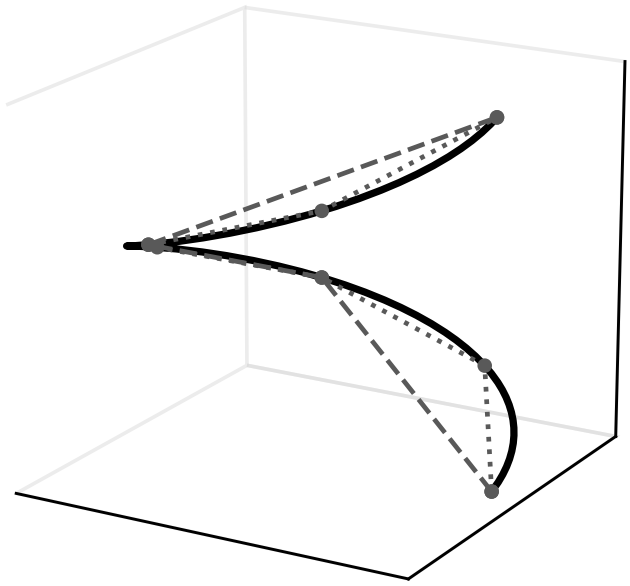


Figura 2: Poligonales inscritas en una vuelta de hélice, con 3 y 6 tramos (proyección). Al agregar vértices la poligonal se alarga (C3-003.T3) y su longitud tiende a $\int |\gamma'|$ (C3-003.T4).

Teorema C3-003.T3 (refinar alarga; aditividad)

Sean $a < b$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. (a) Si Q refina a P, $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q)$. (b) $\ell(\gamma, P) \ge |\gamma(b) - \gamma(a)|$ para toda P. (c) Si $a < c < b$, γ es rectificable en $[a,b] \iff$ lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$, y entonces $\ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]})$.

Demostración.

1. *(a), un punto.* Si $Q = P \cup \{s\}$ con $t_{i-1} < s < t_i$, el único cambio en la suma es que el término $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ se reemplaza por dos (C2-001.T3), y

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le |\gamma(t_i) - \gamma(s)| + |\gamma(s) - \gamma(t_{i-1})|$$

   (C3-001.T4). Así $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q)$ (C1-005.T12).
2. *(a), general.* Un refinamiento agrega un número finito de puntos (C2-002.D1); por inducción en ese número (C1-005.T1), con el paso 1 en cada uno.

3. *(b).* Toda P refina a $\{a,b\}$, y $\ell(\gamma,\{a,b\}) = |\gamma(b)-\gamma(a)|$; se aplica (a).
4. *(c), una desigualdad.* Para una partición P de $[a,b]$, $P' := P \cup \{c\}$ la refina y se parte en $P_1 := P' \cap [a,c]$ y $P_2 := P' \cap [c,b]$, particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ (C2-001.T3). Por (a) y la partición de la suma (C1-005.T12),

$$\ell(\gamma,P) \le \ell(\gamma,P') = \ell(\gamma|_{[a,c]},P_1) + \ell(\gamma|_{[c,b]},P_2).$$

5. *(c), ⇐.* Si ambas restricciones son rectificables, el paso 4 da $\ell(\gamma,P) \le \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]})$ para toda P: γ es rectificable y $\ell(\gamma)$ es a lo más esa suma (C1-006.D1).
6. *(c), ⇒.* Si P_1, P_2 son particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$, $P_1 \cup P_2$ es partición de $[a,b]$ con $\ell(\gamma,P_1\cup P_2) = \ell(\gamma|_{[a,c]},P_1) + \ell(\gamma|_{[c,b]},P_2) \le \ell(\gamma)$. Cada sumando es ≥ 0 (C3-001.T2, C1-005.T12 d), así que cada uno es $\le \ell(\gamma)$: ambas restricciones son rectificables.
7. *Igualdad.* Sea $\varepsilon > 0$. Por C1-006.T2 hay P_1, P_2 con $\ell(\gamma|_{[a,c]},P_1) > \ell(\gamma|_{[a,c]}) - \varepsilon/2$ y lo mismo para P_2. Por el paso 6, $\ell(\gamma) > \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]}) - \varepsilon$. Como ε es arbitrario, $\ell(\gamma) \ge$ la suma (C1-003.T9); con el paso 5, son iguales. ■

Teorema C3-003.T4 (fórmula de la longitud)

Sean $a < b$ y γ de clase C^1 en un intervalo abierto $J \supset [a,b]$. Entonces γ es rectificable en $[a,b]$ y $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Idea de la demostración

Arriba: cada cuerda es a lo más el odómetro de su tramo (C3-003.C1). Abajo: en tramos tan cortos que γ' casi no cambia (Heine), la cuerda casi iguala a $|\gamma'(t_i)|\Delta t_i$. Es la prueba de Rudin; no usa el truco de dos puntos de C2-020.T3, que no se generaliza bien a n componentes.

Demostración.

1. *«≤».* Sea $P = \{t_0, \dots, t_k\}$ partición de $[a,b]$. Cada $[t_{i-1},t_i] \subset J$, y por C3-003.C1, $|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})| \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'|$.
2. Sumando (C1-005.T12, C2-004.C1): $\ell(\gamma,P) \le \int_a^b |\gamma'|$. Así γ es rectificable y $\ell(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'|$ (C1-006.D1).
3. *«≥».* Sea $\varepsilon > 0$. Cada γ_j' es continua en $[a,b]$, luego uniformemente continua (C1-025.T1, C1-025.D1): hay $\delta_j > 0$ con $|s-t| < \delta_j \Rightarrow |\gamma_j'(s)-\gamma_j'(t)| < \varepsilon/n$. Con $\delta := \min_j \delta_j$ (C1-005.T13) y

C3-001.T5:

$$|s-t| < \delta \;\Rightarrow\; |\gamma'(s)-\gamma'(t)| < \varepsilon.$$

4. Sea P la partición en N partes iguales con $(b-a)/N < \delta$ (C1-007.C1). Fijemos i y escribamos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.
5. Para $t \in [t_{i-1}, t_i]$: $|\gamma'(t)| \le |\gamma'(t_i)| + |\gamma'(t)-\gamma'(t_i)| < |\gamma'(t_i)| + \varepsilon$ (C3-001.T4). Por C2-004.T3 y C2-002.E1:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'| \le |\gamma'(t_i)|\,\Delta t_i + \varepsilon\,\Delta t_i.$$

6. La integral del vector constante $\gamma'(t_i)$ es $\gamma'(t_i)\Delta t_i$ (C2-002.E1 en cada componente). Por C3-003.T1 (linealidad y Barrow), C3-001.T4 y C3-003.T2:

$$\begin{aligned} |\gamma'(t_i)|\,\Delta t_i &= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\gamma'(t) + (\gamma'(t_i) - \gamma'(t))\big)\,dt \right| \\ &\le \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma' \right| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t_i) - \gamma'(t)|\,dt \\ &\le |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon\,\Delta t_i. \end{aligned}$$

7. De los pasos 5 y 6: $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'| \le |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + 2\varepsilon\,\Delta t_i$. Sumando sobre i (C2-004.C1, C1-005.T12):

$$\int_a^b |\gamma'| \le \ell(\gamma, P) + 2\varepsilon(b-a) \le \ell(\gamma) + 2\varepsilon(b-a).$$

8. Si fuera $\int_a^b |\gamma'| > \ell(\gamma)$, con ε tal que $2\varepsilon(b-a)$ es menor que la diferencia (C1-007.C1) el paso 7 fallaría. Por lo tanto $\int_a^b |\gamma'| \le \ell(\gamma)$ (C1-003.T9) y, con el paso 2, son iguales. ■

Corolario C3-003.C2 (coherencia con Cálculo II)

Para $n = 2$, $\ell(\gamma, P)$, «rectificable» y $\ell(\gamma)$ de C3-003.D2 son exactamente los de C2-020.D1, y C3-003.T4 da la fórmula de C2-020.T3. Para $n = 1$, ℓ es la distancia recorrida de C2-020.C1.

Demostración.

1. Para $n = 2$ y $\gamma = (x, y)$, $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$ (C3-001.D2): es el término de C2-020.D1. Las sumas, el conjunto y su supremo son los mismos.
2. $|\gamma'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ (C3-002.T3, C3-001.D2), así que C3-003.T4 es C2-020.T3.
3. Para $n = 1$, $|\cdot|$ es el valor absoluto (C3-001.D2) y $\int_a^b |\gamma'|$ es la distancia recorrida de C2-020.C1.

■

Ejemplo C3-003.E1
La hélice de C3-002.E1 en $[0, 2\pi]$ mide $2\pi\sqrt{r^2 + c^2}$.
Cálculo. Es C^∞ y su rapidez es la constante $\sqrt{r^2 + c^2}$ (C3-002.E1); por C3-003.T4 y C2-002.E1, $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\, dt = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}$.
La rampa. Con $r = 15$ y $c = 3/(2\pi)$ (sube 3 m por vuelta), 4 vueltas son $t \in [0, 8\pi]$ y miden $8\pi\sqrt{225 + c^2} = 4\sqrt{(30\pi)^2 + 9} \approx 377.18$ m, frente a $4 \cdot 30\pi \approx 376.99$ m de cuatro circunferencias.

Por qué cada hipótesis

⚠ γ' continua en el cerrado

$g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$, $g(0) = 0$, es derivable con g' no acotada en $[-1, 1]$ (C2-014.E2). Para $\gamma(t) = (t, g(t))$, $|\gamma'|$ no es integrable en $[-1, 1]$: la fórmula de C3-003.T4 ni se puede escribir.

⚠ Continuidad

$\gamma(t) = (0, 0)$ si $t < 1/2$ y $(1, 0)$ si $t \geq 1/2$, en $[0, 1]$: donde existe, $\gamma' = 0$, pero toda poligonal con un vértice a cada lado de $1/2$ mide al menos 1, y $\ell(\gamma) = 1$. El salto cuenta.

⚠ Continua no basta

$(t, t \operatorname{sen}(1/t))$ con valor $(0, 0)$ en 0 es continua en $[0, 1]$ y no rectificable (C2-020.E3, con C3-003.C2).

Ejercicios

1. Calcula $\int_0^1 F$ para $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$ y verifica $|\int_0^1 F| \leq \int_0^1 |F|$.
2. Un dron con $|\gamma'| \leq 15$ m/s vuela de $t = 0$ a $t = 60$ s. Demuestra que no sale de la bola cerrada de radio 900 m centrada en su punto de partida.
3. Calcula la longitud de $\gamma(t) = (2t, t^2, \log t)$ en $[1, e]$.
4. Demuestra que si $|\gamma(b) - \gamma(a)| = \ell(\gamma)$ y γ es inyectiva y C^1, entonces la traza está en el segmento

de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ (esquema).

5. ¿Cuánto mide una vuelta de una hélice de radio 1 que sube 2π por vuelta?

Respuestas

1. $\int_0^1 F = (\operatorname{sen} 1, 1 - \cos 1, 1)$, de norma ≈ 1.3854; $\int_0^1 |F| = \sqrt{2} \approx 1.4142$.
2. Para cada $t \in [0, 60]$, C3-003.C1 en $[0, t]$ da $|\gamma(t) - \gamma(0)| \leq 15t \leq 900$.
3. En $J = (0, \infty)$ es C^∞ con $|\gamma'(t)|^2 = 4 + 4t^2 + 1/t^2 = (2t + 1/t)^2$; por C3-003.T4, $\ell = \int_1^e (2t + 1/t)\, dt = (e^2 - 1) + 1 = e^2 \approx 7.389$.
4. Para cada t, $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq |\gamma(t) - \gamma(a)| + |\gamma(b) - \gamma(t)| \leq \ell$ por (b) y (c) de C3-003.T3; la igualdad fuerza igualdad en el triángulo, y por el ejercicio 3 de C3-001 $\gamma(t)$ está en el segmento.
5. $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = 2\sqrt{2}\,\pi \approx 8.886$.

C3-004 · Reparametrización y longitud de arco como parámetro

Motivación

> **Dos choferes en la rampa**
> Ana y Beto suben las mismas 4 vueltas de la rampa helicoidal de C3-003 (radio 15 m, 3 m por vuelta). Beto va al doble de rapidez y tarda la mitad. ¿Sus odómetros marcan lo mismo? Sí: los dos pasan por las mismas posiciones, en el mismo orden; solo cambia la hora. Ambos marcan 377.18 m.
> La rampa tiene una marca de pintura cada metro. Si nadie se detiene, la marca sirve de reloj: la posición se puede describir por los metros recorridos. Recorrida así, la rampa va «a un metro por unidad»: rapidez 1.
> Dónde falla la analogía: un auto real se puede detener. En un instante con velocidad cero, el reloj de marcas deja de ser derivable (C3-004.E2).

Reparametrización e invariancia de la longitud

Definición C3-004.D1 (reparametrización)

Sean I e I' intervalos, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi : I' \to I$ continua y biyectiva (por lo tanto estrictamente monótona, C1-026.T2). $\gamma \circ \varphi$ es una **reparametrización** de γ; **conserva la orientación** si φ es creciente.

Teorema C3-004.T1 (la longitud no depende de la parametrización)

Sean $a < b$, $c < d$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ continua y biyectiva. Entonces $\gamma \circ \varphi$ es rectificable $\iff$ γ lo es, y $\ell(\gamma \circ \varphi) = \ell(\gamma)$.

> **Idea de la demostración**
> φ manda las particiones de $[c,d]$ biyectivamente en las de $[a,b]$, con la misma poligonal. Los dos conjuntos de C3-003.D2 son el mismo. No hacen falta derivadas.

Demostración.

1. φ es estrictamente monótona (C1-026.T2). Si es creciente, $\varphi(c)=a$ y $\varphi(d)=b$: como es biyectiva, $a=\varphi(u)$ para algún u, y $\varphi(c)\le\varphi(u)=a\le\varphi(c)$ (C1-003.T1); igual con b. Si es decreciente, $\varphi(c)=b$ y $\varphi(d)=a$.
2. *Caso creciente.* Si $Q=\{u_0<\cdots<u_k\}$ es partición de $[c,d]$ (C2-001.D1), $\varphi(Q)=\{\varphi(u_0)<\cdots<\varphi(u_k)\}$ es partición de $[a,b]$ (paso 1). Recíprocamente, si $P=\{t_0<\cdots<t_k\}$ es partición de $[a,b]$, los $u_i:=\varphi^{-1}(t_i)$ (C1-011.D1) son crecientes (φ^{-1} es estrictamente creciente: si $t<t'$ y $\varphi^{-1}(t)\ge\varphi^{-1}(t')$, aplicar φ daría $t\ge t'$) y forman una partición Q con $\varphi(Q)=P$ (C1-011.T1).
3. Para esas particiones,

$$\ell(\gamma\circ\varphi,Q)=\sum_{i=1}^{k}|\gamma(\varphi(u_i))-\gamma(\varphi(u_{i-1}))|=\ell(\gamma,\varphi(Q)).$$

4. *Caso decreciente.* $\varphi(Q)$, escrita en orden creciente, es $\{\varphi(u_k)<\cdots<\varphi(u_0)\}$. Su poligonal tiene los mismos sumandos en orden inverso, y $|x-y|=|y-x|$ (C3-001.T2); reordenar una suma finita no la cambia (C1-005.T12, inducción). Así $\ell(\gamma\circ\varphi,Q)=\ell(\gamma,\varphi(Q))$ y, como en el paso 2, toda partición de $[a,b]$ es un $\varphi(Q)$.
5. Por los pasos 2-4, $\{\ell(\gamma\circ\varphi,Q)\}=\{\ell(\gamma,P)\}$: el mismo conjunto. Uno está acotado si y solo si el otro lo está, y sus supremos coinciden (C1-006.T1). ■

La longitud de arco como parámetro

Definición C3-004.D2 (función longitud de arco)
Sean J un intervalo abierto, γ de clase C^1 en J y $t_0\in J$. $s(t):=\int_{t_0}^{t}\lvert\gamma'\rvert$ para $t\in J$ (C2-004.D1).

La integral existe: γ' es continua (C2-015.D1), $|\gamma'|$ también (C3-002.T2), y es integrable en cada intervalo cerrado de extremos t_0 y t (C2-003.T1).

Teorema C3-004.T2 (parámetro de longitud de arco)

Sean J un intervalo abierto, γ de clase C^1 y regular en J, y $t_0 \in J$. Entonces s es de clase C^1 en J con $s' = |\gamma'| > 0$, estrictamente creciente, $\tilde{J} := s(J)$ es un intervalo abierto, $\sigma := s^{-1} : \tilde{J} \to J$ es de clase C^1 con $\sigma' = 1/(|\gamma'| \circ \sigma)$, y $\beta := \gamma \circ \sigma$ cumple $|\beta'| = 1$ en $\tilde{J}$. Para $[c, d] \subset \tilde{J}$, la longitud de β en $[c, d]$ es $d - c$.

Idea de la demostración

s es la primitiva de $|\gamma'| > 0$: es C^1 y estrictamente creciente, así que tiene inversa derivable. La regla de la cadena da $|\beta'| = |\gamma'(\sigma)| \cdot \sigma' = 1$.

Demostración.

1. $|\gamma'|$ es continua en J (C3-002.T2). Por C2-008.C2, s es derivable en J con $s' = |\gamma'|$, que es continua: s es C^1 (C2-015.D1).
2. Como $\gamma'(t) \neq 0$, $|\gamma'(t)| > 0$ (C3-001.T2). Por C1-034.T2, s es estrictamente creciente.
3. $\tilde{J} = s(J)$ es un intervalo (C1-026.T1). No tiene máximo: si $y = s(t)$, hay $t' > t$ en J (J es abierto) y $s(t') > y$. Igual, no tiene mínimo. Sean $\alpha := \inf \tilde{J}$ y $\beta_0 := \sup \tilde{J}$ (o $\mp\infty$). Para $\alpha < y < \beta_0$ hay $y_1, y_2 \in \tilde{J}$ con $y_1 < y < y_2$ (C1-006.T2), luego $y \in \tilde{J}$ (intervalo, C1-004.D2); y ni α ni β_0 están en $\tilde{J}$. Así $\tilde{J} = (\alpha, \beta_0)$, abierto.
4. $\sigma = s^{-1} : \tilde{J} \to J$ es continua (C1-026.T3). Para $u \in \tilde{J}$, $\sigma(u)$ es interior a J y $s'(\sigma(u)) > 0$; por C1-031.T1, σ es derivable en u con
$$\sigma'(u) = \frac{1}{s'(\sigma(u))} = \frac{1}{|\gamma'(\sigma(u))|}.$$
5. σ' es continua: $|\gamma'| \circ \sigma$ es continua y no se anula (C1-022.T3, C1-022.T2). Así σ es C^1.
6. Por C3-002.T4 (cadena), $\beta'(u) = \sigma'(u)\,\gamma'(\sigma(u)) = \gamma'(\sigma(u))/|\gamma'(\sigma(u))|$, y por C3-001.T2, $|\beta'(u)| = 1$.
7. β' es continua (pasos 5-6, C3-002.T2): β es C^1 en el intervalo abierto $\tilde{J}$. Por C3-003.T4 y C2-002.E1, la longitud de β en $[c, d] \subset \tilde{J}$ es $\int_c^d 1 = d - c$. ■

Teorema C3-004.T3 (regularidad del cambio de parámetro)

Si además γ es de clase C^k en J ($k \geq 1$), s, σ y β son de clase C^k.

Demostración.

1. $\gamma' \in C^{k-1}$ (C2-015.D1, C3-002.T3), así que $\gamma' \cdot \gamma' \in C^{k-1}$ con valores > 0 (C3-002.T6, C3-001.T2). $\sqrt{}$ es C^∞ en $(0,\infty)$ (C3-002.T6), luego $s' = \sqrt{\gamma' \cdot \gamma'} \in C^{k-1}$ (C3-002.T6, composición) y $s \in C^k$.
2. *Inducción para σ.* $\sigma \in C^1$ (C3-004.T2). Supongamos $\sigma \in C^j$ con $1 \le j < k$. Como $s' \in C^{k-1} \subset C^j$, la composición $s' \circ \sigma$ es C^j y no se anula; su recíproco $\sigma' = 1/(s' \circ \sigma)$ es C^j (C3-002.T6). Así $\sigma \in C^{j+1}$. Por inducción (C1-005.T1), $\sigma \in C^k$.
3. Cada componente $\beta_i = \gamma_i \circ \sigma$ es composición de funciones C^k (C3-002.T6); por C3-002.T3, $\beta \in C^k$.

■

Ejemplos

Ejemplo C3-004.E1 (la hélice por longitud de arco)
Con $c_0 := \sqrt{r^2 + c^2}$ y $t_0 = 0$: $s(t) = c_0 t$ y $\beta(u) = (r\cos(u/c_0), r\,\mathrm{sen}(u/c_0), cu/c_0)$ tiene rapidez 1.

1. La rapidez de la hélice es la constante c_0 (C3-002.E1), así que $s(t) = \int_0^t c_0 = c_0 t$ (C2-002.E1, con la convención de C2-004.D1 si $t < 0$).
2. $\sigma(u) = u/c_0$ y $\beta = \gamma \circ \sigma$ es la fórmula del enunciado. Por C3-002.T4, $\beta'(u) = \gamma'(u/c_0)/c_0$, de norma 1.

La rampa. Con $r = 15$, $c = 3/(2\pi)$: $c_0 \approx 15.0076$; la marca del metro 100 está en el segundo $100/c_0 \approx 6.663$ de Ana.

Ejemplo C3-004.E2 (sin regularidad falla)
$\gamma(t) = (t^3, t^3)$ es C^∞ con $\gamma'(0) = 0$; $s(t) = \sqrt{2}\,t^3$ y $s'(0) = 0$, así que s^{-1} no es derivable en 0: si lo fuera, $1 = (s \circ s^{-1})'(0) = s'(0)(s^{-1})'(0) = 0$.

1. $\gamma'(t) = (3t^2, 3t^2)$ (C1-028.T2, C3-002.T3) y $|\gamma'(t)| = \sqrt{18t^4} = 3\sqrt{2}\,t^2$ (C2-014.D1).
2. $s(t) = \int_0^t 3\sqrt{2}\,x^2\,dx = \sqrt{2}\,t^3$ (C2-009.E1, C2-004.D1), y $s'(0) = 0$ (C2-008.C2).
3. s es estrictamente creciente y biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con $s^{-1}(0) = 0$. Si s^{-1} fuera derivable en 0, la cadena (C1-030.T1) aplicada a $s \circ s^{-1} = \mathrm{id}$ daría $1 = s'(0)\,(s^{-1})'(0) = 0$ (C1-028.T2). Contradicción.

⚠ Qué se rompe y qué no

En C3-004.E2 la longitud sigue bien definida y la traza es un segmento. Lo que se rompe es la conclusión «σ es C^1» de C3-004.T2. Con la cúspide (t^2, t^3) de C3-002.E1 se rompe más: el tangente unitario $T(t) = (2t, 3t^2)/|(2t, 3t^2)|$ tiende a $(-1, 0)$ por la izquierda de 0 y a $(1, 0)$ por la derecha, así que la curva por arco no puede ser C^1.

Por qué cada hipótesis

⚠ φ biyectiva

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 4\pi]$ tiene la misma traza que en $[0, 2\pi]$, pero longitud 4π: da dos vueltas. $t \mapsto t$ de $[0, 4\pi]$ en $[0, 2\pi]$ no existe como biyección; la longitud mide el recorrido, no la traza.

⚠ Regularidad

Es la hipótesis que rompe C3-004.E2: con $\gamma'(t_0) = 0$, $s'(t_0) = 0$ y la inversa no es derivable ahí.

Ejercicios

1. Reparametriza por longitud de arco la circunferencia $\gamma(t) = (2\cos 3t, 2\operatorname{sen} 3t)$ con $t_0 = 0$.
2. Demuestra que si φ es decreciente, $\gamma \circ \varphi$ recorre la traza en sentido opuesto: $(\gamma \circ \varphi)(c) = \gamma(b)$.
3. Sea $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ con $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$. Calcula $s(t)$ con $t_0 = 0$.
4. ¿En qué segundo pasa Ana por la marca del metro 200 de la rampa?
5. Demuestra que para una curva regular por longitud de arco, cualquier otra reparametrización por longitud de arco que conserve la orientación es $\beta(u + k)$ para una constante k (esquema).

Respuestas

1. $|\gamma'| = 6$, $s = 6t$, $\beta(u) = (2\cos(u/2), 2\operatorname{sen}(u/2))$.
2. Paso 1 de C3-004.T1: si φ decrece, $\varphi(c) = b$.
3. $|\gamma'|^2 = 1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$, así que $s(t) = \int_0^t \cosh = \operatorname{senh} t = (e^t - e^{-t})/2$.
4. $200/c_0 \approx 13.327$ s.
5. Si $\tilde{\beta} = \beta \circ \psi$ con $|\tilde{\beta}'| = 1$ y ψ creciente C^1, $1 = |\psi'| \cdot |\beta' \circ \psi| = \psi'$; por C1-034.T1, $\psi(u) = u + k$.

(Que ψ sea C^1 se obtiene de C3-004.T2 aplicado a cada una.)

C3-005 · Curvatura, normal principal y plano osculador

Motivación

> **El radio de una carretera**
> Un tramo de carretera tiene forma de parábola, $y = x^2/400$ (metros). Para fijar el límite de velocidad, las normas de diseño piden el radio de la curva en cada punto: el de la rotonda que mejor se ajusta a la carretera ahí. En el vértice ese radio es 200 m; a 100 m del vértice ya es de unos 279.5 m.
> Recorrida a rapidez 1, lo único que cambia la velocidad es la geometría: qué tan rápido gira la tangente. Eso es la curvatura, y su recíproco es el radio de la rotonda.
> Dónde falla la analogía: una carretera real tiene ancho, peralte y tramos de transición; aquí es una curva ideal.

Curvatura y normal principal

Definición C3-005.D1 (curvatura y normal)

Sea β de clase C^2 en un intervalo abierto $\tilde{J}$ con $|\beta'| = 1$. $T := \beta'$ y $\kappa(u) := |T'(u)| = |\beta''(u)|$ (la **curvatura**). Si $\kappa(u) > 0$: **normal principal** $N(u) := T'(u)/\kappa(u)$, **plano osculador** $\{\beta(u) + aT(u) + bN(u) : a, b \in \mathbb{R}\}$, **círculo osculador**: el de centro $\beta(u) + N(u)/\kappa(u)$ y radio $1/\kappa(u)$ contenido en el plano osculador.
Para γ de clase C^2 y regular en J, con $\beta = \gamma \circ \sigma$ como en C3-004.T2 (C^2 por C3-004.T3), $\kappa_\gamma(t) := \kappa(s(t))$, $T_\gamma(t) := T(s(t))$ y $N_\gamma(t) := N(s(t))$.

Teorema C3-005.T1

En las condiciones de C3-005.D1: $T \cdot T' = 0$; si $\kappa > 0$, N es unitario, $N \perp T$ y $T' = \kappa N$.

Demostración.

1. $|T| = |\beta'| = 1$ es constante y T es derivable (β es C^2). Por C3-002.C1, $T \cdot T' = 0$.
2. Si $\kappa > 0$: $|N| = |T'|/\kappa = 1$ (C3-001.T2).
3. $N \cdot T = (T' \cdot T)/\kappa = 0$ (C3-001.T2, paso 1).
4. $\kappa N = T'$ por la definición de N. ■

Así T y N son unitarios y perpendiculares: el plano osculador está generado por dos direcciones ortonormales, y el círculo osculador es el círculo de ese plano que pasa por $\beta(u)$ con centro del lado hacia el que gira T.

Teorema C3-005.T2 (curvatura cero)

Con β como en C3-005.D1: $\kappa = 0$ en todo $\tilde{J} \iff$ existen $p \in \mathbb{R}^n$ y v unitario con $\beta(u) = p + uv$ para todo $u \in \tilde{J}$.

Demostración.

1. ($\Leftarrow$) Si $\beta(u) = p + uv$: $\beta' = v$ y $\beta'' = 0$ (C3-002.T3, C1-028.T2), así que $\kappa = 0$.
2. ($\Rightarrow$) Si $\kappa = |\beta''| = 0$ en $\tilde{J}$, entonces $\beta'' = 0$ (C3-001.T2). Por C3-002.T5, $\beta' = v$ es constante, con $|v| = 1$.
3. $\eta(u) := \beta(u) - uv$ tiene $\eta' = v - v = 0$ (C3-002.T4, C1-028.T2), así que es constante, $= p$ (C3-002.T5). Por lo tanto $\beta(u) = p + uv$. ■

La curvatura en cualquier parámetro

Teorema C3-005.T3 (curvatura en cualquier parámetro)

Sea γ de clase C^2 y regular en un intervalo abierto J. Entonces

$$\kappa_\gamma = \frac{\sqrt{|\gamma'|^2|\gamma''|^2 - (\gamma' \cdot \gamma'')^2}}{|\gamma'|^3}.$$

Para $\gamma = (x, y)$ en $\mathbb{R}^2$: $\kappa_\gamma = |x'y'' - x''y'|/(x'^2 + y'^2)^{3/2}$. Además $T_\gamma = \gamma'/|\gamma'|$ y, donde $\kappa_\gamma > 0$, $N_\gamma = T_\gamma'/(|\gamma'|\kappa_\gamma)$; en particular κ_γ, T_γ y N_γ no dependen del t_0 elegido en C3-004.T2.

> **Idea de la demostración**
> Con $v := |\gamma'|$, $\gamma' = vT$ y $\gamma'' = v'T + v^2T'$: una parte de la aceleración cambia la rapidez y otra, perpendicular, gira. Al combinar normas y productos punto, v' se cancela.

Demostración. Sea $v := |\gamma'| = s'$ (C^1, porque s es C^2 por C3-004.T3).

1. $\sigma \circ s = \mathrm{id}_J$, así que $\gamma = \beta \circ s$. Por C3-002.T4, $\gamma' = s'\,(\beta' \circ s) = v\,(T \circ s)$.
2. Derivando otra vez (C3-002.T4, producto y cadena):

$$\gamma'' = v'\,(T \circ s) + v\,(T' \circ s)\,s' = v'\,(T \circ s) + v^2\,(T' \circ s).$$

3. Por C3-005.T1, $T \perp T'$, $|T| = 1$ y $|T' \circ s| = \kappa_\gamma$. Por Pitágoras (C3-001.T6) y C3-001.T2:

$$|\gamma''|^2 = v'^2 + v^4\kappa_\gamma^2, \qquad \gamma' \cdot \gamma'' = v\,v'.$$

4. Entonces, con $|\gamma'|^2 = v^2$:

$$\begin{aligned} |\gamma'|^2|\gamma''|^2 - (\gamma' \cdot \gamma'')^2 &= v^2v'^2 + v^6\kappa_\gamma^2 - v^2v'^2 \\ &= v^6\kappa_\gamma^2. \end{aligned}$$

5. Como $v^3\kappa_\gamma \geq 0$, su raíz es $v^3\kappa_\gamma$ (C2-014.D1), y al dividir entre $v^3 > 0$ queda la fórmula. No hace falta $\kappa > 0$.
6. *Plano.* Con $\gamma = (x, y)$, una cuenta directa (K1-K9) da

$$(x'^2 + y'^2)(x''^2 + y''^2) - (x'x'' + y'y'')^2 = (x'y'' - x''y')^2,$$

cuya raíz es $|x'y'' - x''y'|$ (C1-004.T6, C2-014.D1).

7. T_γ *y* N_γ. Por el paso 1, $T_\gamma = T \circ s = \gamma'/v$. Por la cadena, $T_\gamma' = (T' \circ s)\, s' = v\,\kappa_\gamma\,(N \circ s) = v\,\kappa_\gamma\,N_\gamma$ (C3-005.T1), y donde $\kappa_\gamma > 0$ se despeja N_γ.
8. Los lados derechos de las fórmulas solo dependen de γ, no de t_0. ■

Ejemplo C3-005.E1

La circunferencia de radio r tiene $\kappa = 1/r$; la hélice, $\kappa = r/(r^2 + c^2)$; la parábola $y = x^2$ tiene $\kappa = 2$ en el origen.

1. *Circunferencia* $(r\cos t, r\operatorname{sen} t)$: $x' = -r\operatorname{sen} t$, $y' = r\cos t$, $x'' = -r\cos t$, $y'' = -r\operatorname{sen} t$ (C2-014.T6). Así $x'y'' - x''y' = r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = r^2$ y $x'^2 + y'^2 = r^2$ (C2-014.T5): $\kappa = r^2/r^3 = 1/r$.
2. *Hélice.* $|\gamma'|^2 = r^2 + c^2$ (C3-002.E1), $\gamma'' = (-r\cos t, -r\operatorname{sen} t, 0)$, $|\gamma''|^2 = r^2$ y $\gamma' \cdot \gamma'' = r^2 \operatorname{sen} t \cos t - r^2 \cos t \operatorname{sen} t = 0$. Por C3-005.T3,

$$\kappa = \frac{\sqrt{(r^2 + c^2)r^2}}{(r^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{r}{r^2 + c^2}.$$

3. *Parábola* (t, t^2): $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = 2t$, $y'' = 2$ (C1-028.T2): $\kappa = 2/(1 + 4t^2)^{3/2}$, que vale 2 en $t = 0$.

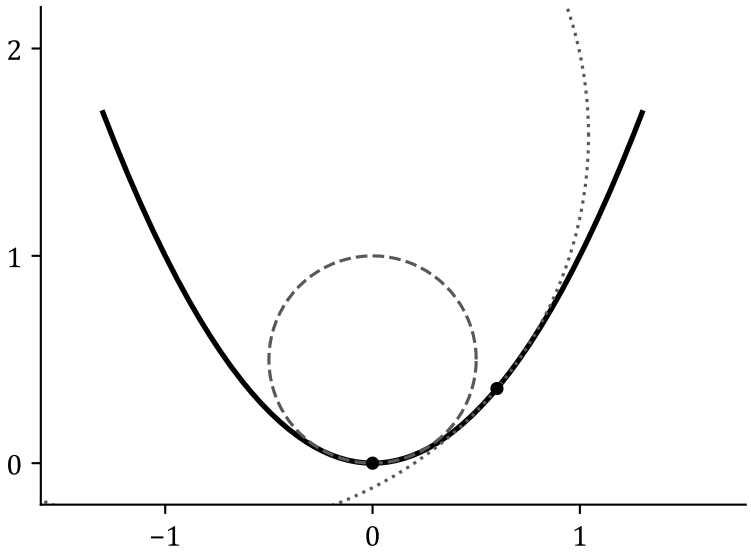


Figura 3: La parábola $y = x^2$ con sus círculos osculadores en $x = 0$ (radio $1/2$) y en $x = 0.6$: lejos del vértice la curva se abre y el radio crece.

⚠ $\kappa = |f''|$ **solo donde** $f' = 0$

Para una gráfica $y = f(x)$, C3-005.T3 con $(x, f(x))$ da $\kappa = |f''|/(1 + f'^2)^{3/2}$. En la carretera $f(x) = x^2/400$, en el vértice $\kappa = 1/200$ (radio 200 m), pero en $x = 100$ m, $\kappa = (1/200)/1.25^{3/2} \approx 0.003578$ (radio ≈ 279.5 m).

Curvatura con signo en el plano

Definición C3-005.D2 (curvatura con signo en el plano)

Para $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, $Jw := (-w_2, w_1)$. Si β es de clase C^2 en $\tilde{J}$ con $|\beta'| = 1$ en $\mathbb{R}^2$, la **curvatura con signo** es $\kappa_s := T' \cdot JT$.

Teorema C3-005.T4

Con C3-005.D2: $T' = \kappa_s JT$ y $|\kappa_s| = \kappa$; $\kappa_s > 0$ donde la curva gira a la izquierda (en sentido contrario a las manecillas).

Demostración.

1. Sea $T = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$ y sea $w \in \mathbb{R}^2$ con $w \cdot T = 0$, es decir, $aw_1 = -bw_2$.
2. $w \cdot JT = -bw_1 + aw_2$ y

$$(w \cdot JT)\, JT = \big(b^2 w_1 - abw_2,\ -abw_1 + a^2 w_2\big).$$

3. Con $abw_2 = -a^2 w_1$ y $abw_1 = -b^2 w_2$ (paso 1), las componentes son $(a^2 + b^2)w_1 = w_1$ y $(a^2 + b^2)w_2 = w_2$: $w = (w \cdot JT)JT$.
4. Por C3-005.T1, $T' \cdot T = 0$; con $w = T'$, $T' = (T' \cdot JT)JT = \kappa_s JT$.
5. $|JT| = \sqrt{b^2 + a^2} = 1$, así que $\kappa = |T'| = |\kappa_s|$ (C3-001.T2). ■

La lectura «gira a la izquierda» (el ángulo de T crece) se ilustra y no se usa en ninguna prueba: en la circunferencia $(r\cos(u/r), r\,\mathrm{sen}(u/r))$, recorrida en sentido contrario a las manecillas, $\kappa_s = 1/r > 0$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Regularidad

La cúspide (t^2, t^3) tiene $\gamma'(0) = 0$: en $t = 0$ la fórmula de C3-005.T3 divide entre 0 y la curva no se puede recorrer por arco con un cambio C^1 (C3-004.E2 y su comentario).

⚠ $\kappa \equiv 0$ en todo el intervalo

$y = x^3$ tiene $\kappa(0) = 0$ ($f''(0) = 0$) y no es una recta. C3-005.T2 pide $\kappa = 0$ en todo $\tilde{J}$.

Ejercicios

1. Calcula la curvatura de la elipse $(2\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $t = 0$ y en $t = \pi/2$.
2. Demuestra que si κ_γ es constante $= 1/r$ y la curva es plana con $\kappa_s = 1/r$, el centro $\beta + N/\kappa$ es constante (esquema: deriva $\beta + rJT$).
3. Encuentra el radio de la carretera $y = x^2/400$ en $x = 200$ m.
4. Calcula la curvatura de la hélice de la rampa (radio 15 m, 3 m por vuelta) y compárala con la de su sombra.
5. Demuestra que para una gráfica $y = f(x)$ con f de clase C^2, $\kappa = |f''|/(1 + f'^2)^{3/2}$.

Respuestas

1. $x'y'' - x''y' = 2$, $x'^2 + y'^2 = 4\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$: $\kappa(0) = 2$, $\kappa(\pi/2) = 2/8 = 1/4$.
2. $(\beta + rJT)' = T + rJ(T') = T + r\kappa_s J(JT) = T - T = 0$, porque $J(Jw) = -w$.
3. $f' = 1$, $f'' = 1/200$: $\kappa = (1/200)/2^{3/2} \approx 0.001768$, radio ≈ 565.7 m.
4. $\kappa = 15/(225 + c^2)$ con $c = 3/(2\pi)$: ≈ 0.066600 (radio ≈ 15.015 m), apenas menor que $1/15 \approx 0.066667$.
5. C3-005.T3 con $\gamma(x) = (x, f(x))$: $x' = 1$, $x'' = 0$.

C3-006 · Torsión y fórmulas de Frenet–Serret

Motivación

> **Los tres ejes del dron y el tobogán**
> Un dron sabe hacia dónde apunta (T) y hacia dónde gira (N). Para leer un viento cualquiera en sus propios ejes le falta un tercero, perpendicular a los dos: $B = T \times N$. Con los tres, todo vector es la suma de sus tres sombras.
> Después, un tobogán helicoidal de radio 3 m que sube 2 m por vuelta. La curvatura dice cuánto gira; la torsión, cuánto se sale del plano en que está girando. Aquí $\kappa \approx 0.3296$ y $\tau \approx 0.03497$ por metro: casi un círculo, pero no plano.
> Dónde falla la analogía: los sensores reales tienen error y un tobogán tiene ancho; aquí los ejes son exactos y la curva no tiene grosor.

Parte 1 · Producto cruz y marco ortonormal

Definición C3-006.D1 (producto cruz)

Para $a, b \in \mathbb{R}^3$: $a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$.

Las tres componentes se obtienen una de otra con la permutación cíclica de índices $1 \to 2 \to 3 \to 1$; por eso una cuenta hecha en la primera componente vale en las otras con los índices permutados.

Teorema C3-006.T1 (propiedades)

Para $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$: $\times$ es bilineal; $b \times a = -(a \times b)$ y $a \times a = 0$; $(a \times b) \cdot a = (a \times b) \cdot b = 0$; (identidad de Lagrange) $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$; $(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$; $e_1 \times e_2 = e_3$. Si γ, η son derivables en t, $(\gamma \times \eta)' = \gamma' \times \eta + \gamma \times \eta'$.

Demostración. Todo es cuenta con las componentes (K1, K2, K4, K5, K6, K9).

1. *Bilineal.* Cada componente, p. ej. $a_2b_3 - a_3b_2$, es una suma de productos de una componente de a por una de b; es lineal en a con b fijo y en b con a fijo (K9, K5).
2. *Antisimetría.* Al cambiar a por b, cada componente cambia de signo: $b_2a_3 - b_3a_2 = -(a_2b_3 - a_3b_2)$ (K6). Con $b = a$: $a \times a = -(a \times a)$, luego $a \times a = 0$.
3. *Perpendicular.*

$$(a \times b) \cdot a = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

   porque los seis términos se cancelan en parejas. Por el paso 2, $(a \times b) \cdot b = -(b \times a) \cdot b = 0$.
4. *Lagrange.* $|a \times b|^2 = \sum_{i<j}(a_ib_j - a_jb_i)^2$ (las tres parejas $\{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2\}$). Por otro lado,

$$|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 = \sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i,j} a_ib_ia_jb_j = \sum_{i<j} \left(a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 - 2a_ib_ia_jb_j\right)$$

   (los términos con $i = j$ se cancelan), y cada sumando es $(a_ib_j - a_jb_i)^2$.
5. *Doble producto.* La primera componente de $(a \times b) \times c$ es

$$\begin{aligned}(a \times b)_2c_3 - (a \times b)_3c_2 &= (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - a_1(b_2c_2 + b_3c_3) \\ &= b_1(a \cdot c) - a_1(b \cdot c),\end{aligned}$$

   sumando y restando $a_1b_1c_1$ en la última igualdad. Las otras dos componentes salen igual, con los índices permutados cíclicamente.
6. $e_1 \times e_2 = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0,\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 1)$.
7. *Derivada.* Cada componente de $\gamma \times \eta$ es una diferencia de productos $\gamma_i\eta_j$; por C1-029.T1 y C1-029.T2 su derivada es $\gamma_i'\eta_j + \gamma_i\eta_j'$, y al reagrupar sale $\gamma' \times \eta + \gamma \times \eta'$ (C3-002.T3). ■

Teorema C3-006.T2 (marco ortonormal)

Sean $T, N \in \mathbb{R}^3$ unitarios con $T \perp N$, y $B := T \times N$. Entonces B es unitario, $B \perp T$, $B \perp N$, y para todo $v \in \mathbb{R}^3$: $v = (v \cdot T)T + (v \cdot N)N + (v \cdot B)B$.

Idea de la demostración

Se quitan a v sus tres sombras. Lo que queda, w, es perpendicular a T, N y B; el doble producto

da $B \times w = 0$ y Lagrange da $|w|^2 = |B \times w|^2 = 0$. No hace falta la teoría de dimensión de Álgebra Lineal.

Demostración.

1. Por Lagrange (C3-006.T1), $|B|^2 = |T|^2|N|^2 - (T \cdot N)^2 = 1 - 0 = 1$.
2. Por C3-006.T1, $B \cdot T = (T \times N) \cdot T = 0$ y $B \cdot N = (T \times N) \cdot N = 0$.
3. Sea $w := v - (v \cdot T)T - (v \cdot N)N - (v \cdot B)B$. Por C3-001.T2 y los pasos 1-2, $w \cdot T = v \cdot T - (v \cdot T) = 0$, y del mismo modo $w \cdot N = 0$ y $w \cdot B = 0$.
4. Por el doble producto (C3-006.T1): $B \times w = (T \times N) \times w = (T \cdot w)N - (N \cdot w)T = 0$.
5. Por Lagrange: $0 = |B \times w|^2 = |B|^2|w|^2 - (B \cdot w)^2 = |w|^2$.
6. Así $w = 0$ (C3-001.T2), que es la igualdad buscada. ■

Parte 2 · Torsión y Frenet–Serret

Definición C3-006.D2 (binormal y torsión)

Sea β de clase C^3 en un intervalo abierto $\tilde{J} \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^3$, $|\beta'| = 1$ y $\kappa > 0$ en $\tilde{J}$. Binormal $B := T \times N$ y **torsión** $\tau := -B' \cdot N$ (T, N de C3-005.D1, de clase C^1 porque $\kappa = |T'|$ es C^1 donde $T' \neq 0$).

La regularidad: $T = \beta'$ es C^2, T' es C^1 y $T' \cdot T' > 0$; por C3-002.T6, $\kappa = \sqrt{T' \cdot T'}$ es C^1 y $N = (1/\kappa)T'$ también. B es C^1 por C3-006.T1 (regla de la derivada) y C3-002.T3.

Teorema C3-006.T3 (Frenet–Serret)

Con C3-006.D2: $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T + \tau B$ y $B' = -\tau N$.

Idea de la demostración
Se lee cada derivada en el marco T, N, B (C3-006.T2). Cada lectura sale de derivar una relación del marco: $T \cdot N = 0$, $N \cdot N = 1$, $N \cdot B = 0$, $B \cdot B = 1$.

Demostración.

1. $T' = \kappa N$ (C3-005.T1).
2. Por C3-006.T1: $B' = T' \times N + T \times N' = \kappa(N \times N) + T \times N' = T \times N'$.
3. Entonces $B' \cdot T = (T \times N') \cdot T = 0$ (C3-006.T1), y $B' \cdot B = 0$ porque $|B| = 1$ (C3-002.C1).
4. Por C3-006.T2 y C3-006.D2: $B' = (B' \cdot T)T + (B' \cdot N)N + (B' \cdot B)B = (B' \cdot N)N = -\tau N$.
5. $|N| = 1$ da $N' \cdot N = 0$ (C3-002.C1).
6. Derivando $N \cdot T = 0$ (C3-002.T4): $N' \cdot T = -N \cdot T' = -\kappa$ (paso 1, $|N| = 1$).
7. Derivando $N \cdot B = 0$: $N' \cdot B = -N \cdot B' = \tau$ (paso 4).
8. Por C3-006.T2: $N' = -\kappa T + \tau B$. ■

Teorema C3-006.T4 (curvas planas)

Con C3-006.D2: $\tau = 0$ en $\tilde{J} \iff$ existen $p \in \mathbb{R}^3$ y u unitario con $(\beta(s) - p) \cdot u = 0$ para todo $s \in \tilde{J}$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Si $\tau = 0$, $B' = 0$ (C3-006.T3) y B es constante, $= u$, unitario (C3-002.T5).
2. Fijemos $s_0 \in \tilde{J}$ y $p := \beta(s_0)$. $f(s) := (\beta(s) - p) \cdot u$ tiene $f' = T \cdot B = 0$ (C3-002.T4, C3-006.T2), así que es constante (C3-002.T5 con $n = 1$), y $f(s_0) = 0$.
3. ($\Leftarrow$) Si $f(s) := (\beta(s) - p) \cdot u = 0$ en $\tilde{J}$, derivando (C3-002.T4): $T \cdot u = 0$ y $T' \cdot u = \kappa N \cdot u = 0$; como $\kappa > 0$, $N \cdot u = 0$ (C3-005.T1).
4. Por C3-006.T2, $u = (u \cdot B)B$, y $1 = |u|^2 = (u \cdot B)^2$: $u \cdot B \in \{1, -1\}$ en cada punto.
5. $u \cdot B$ es continua en el intervalo $\tilde{J}$ (C3-002.T2). Si tomara los dos valores, por el valor intermedio (C1-023.C1) tomaría el 0. Luego es constante, $= \varepsilon$, y $B = \varepsilon u$ es constante.
6. Entonces $B' = 0$ y $\tau = -B' \cdot N = 0$. ■

Las fórmulas en cualquier parámetro

Teorema C3-006.T5 (fórmulas en cualquier parámetro)

Sea γ de clase C^3 en un intervalo abierto J con valores en $\mathbb{R}^3$ y $\gamma' \times \gamma'' \neq 0$ en J (entonces γ es regular y $\kappa_\gamma > 0$). Entonces

$$\kappa_\gamma = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}, \qquad \tau_\gamma = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

$(\tau_\gamma(t) := \tau(s(t)))$; en particular no dependen de t_0.

Demostración.

1. Si $\gamma'(t) = 0$, entonces $\gamma' \times \gamma'' = 0$ (bilinealidad, C3-006.T1). Así γ es regular, y $\beta = \gamma \circ \sigma$ es C^3 (C3-004.T3). Sea $v := |\gamma'| = s'$, de clase C^2.
2. Como en C3-005.T3 (con C3-002.T4 y C1-030.T1), $\gamma' = v\,(T \circ s)$ y $\gamma'' = v'\,(T \circ s) + v^2\,(T' \circ s)$. Por C3-006.T1 ($T \times T = 0$):

$$\gamma' \times \gamma'' = v^3\,(T \times T') \circ s.$$

3. Como $\gamma' \times \gamma'' \neq 0$, $T' \circ s \neq 0$: $\kappa_\gamma > 0$. Entonces $T' = \kappa N$ y $\gamma' \times \gamma'' = v^3\kappa_\gamma\,(B \circ s)$, de norma $v^3\kappa_\gamma$. Esto da la fórmula de κ_γ.
4. Derivando γ'' (C3-002.T4):

$$\gamma''' = v''\,(T \circ s) + 3vv'\,(T' \circ s) + v^3\,(T'' \circ s).$$

5. $B \cdot T = 0$ y $B \cdot T' = \kappa B \cdot N = 0$, así que $(B \circ s) \cdot \gamma''' = v^3\,(B \cdot T'') \circ s$.
6. Derivando $B \cdot T' = 0$: $B \cdot T'' = -B' \cdot T' = \tau N \cdot \kappa N = \kappa\tau$ (C3-006.T3).
7. Por los pasos 3, 5 y 6: $(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = v^3\kappa_\gamma \cdot v^3\kappa_\gamma\tau_\gamma$ y $|\gamma' \times \gamma''|^2 = v^6\kappa_\gamma^2$; su cociente es τ_γ.
8. Los lados derechos solo dependen de γ, no de t_0. ■

Ejemplo C3-006.E1

La hélice tiene $\kappa = r/(r^2 + c^2)$ y $\tau = c/(r^2 + c^2)$: curvatura y torsión constantes.

1. $\gamma' = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t, c)$, $\gamma'' = (-r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\,t, 0)$, $\gamma''' = (r\,\mathrm{sen}\,t, -r\cos t, 0)$ (C2-014.T6).
2. Por C3-006.D1 y C2-014.T5:

$$\gamma' \times \gamma'' = (cr\,\mathrm{sen}\,t,\ -cr\cos t,\ r^2), \qquad |\gamma' \times \gamma''|^2 = r^2(r^2 + c^2).$$

   Como $r > 0$, el producto cruz no se anula y se aplica C3-006.T5.
3. $\kappa = r\sqrt{r^2 + c^2}/(r^2 + c^2)^{3/2} = r/(r^2 + c^2)$, como en C3-005.E1.
4. $(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = cr^2\,\mathrm{sen}^2\,t + cr^2\cos^2 t = cr^2$, y $\tau = cr^2/(r^2(r^2 + c^2)) = c/(r^2 + c^2)$.

El tobogán. $r = 3$, $c = 1/\pi$: $\kappa \approx 0.3296$, $\tau \approx 0.03497$ por metro.

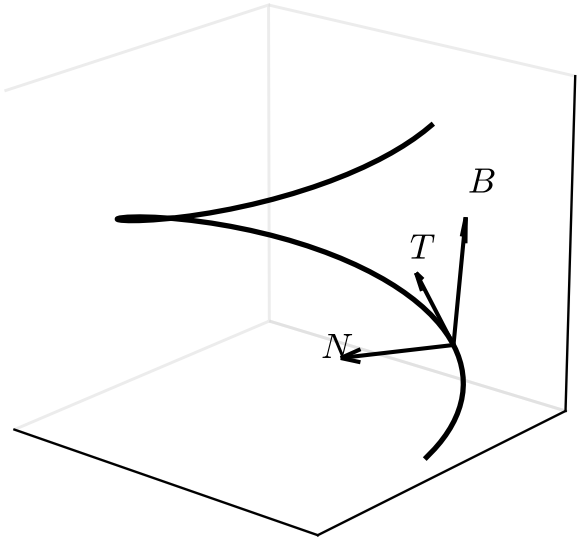


Figura 4: Una vuelta de hélice con el marco de Frenet en un punto: T (tangente), N (apunta al eje) y $B = T \times N$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $T \perp N$ y unitarios en C3-006.T2

Con $T = e_1$ y $N = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$ (no perpendiculares), $B = e_3/\sqrt{2}$ no es unitario y para $v = e_2$ la suma de sombras es $(e_1 + e_2)/2 \neq v$.

⚠ $\kappa > 0$

En una recta $T' = 0$ y no hay N. En $y = x^3$ (plano $z = 0$) $\kappa(0) = 0$ y la normal pasa de un lado al otro: no se extiende con continuidad. Frenet–Serret pide $\kappa > 0$ en todo el intervalo.

⚠ κ constante no da una circunferencia

En $\mathbb{R}^3$, la hélice tiene κ constante y $\tau = c/(r^2 + c^2) \neq 0$ si $c \neq 0$: por C3-006.T4 no es plana.

Ejercicios

1. Calcula $(1,2,3) \times (4,5,6)$ y verifica que es perpendicular a ambos.
2. Escribe $v = (3,0,4)$ en el marco $T = (2,1,2)/3$, $N = (1,-2,0)/\sqrt{5}$, $B = T \times N$.
3. Demuestra la identidad de Jacobi a partir del doble producto: $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$.
4. Calcula κ y τ de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 0$.
5. Demuestra que si τ y κ son constantes con $\tau = 0$, la curva está en un círculo (esquema: usa C3-006.T4 y el ejercicio 2 de C3-005).

Respuestas

1. $(-3,6,-3)$; su producto punto con $(1,2,3)$ es $-3+12-9=0$ y con $(4,5,6)$, $-12+30-18=0$.
2. $B = (4,2,-5)/(3\sqrt{5})$; $v = \frac{14}{3}T + \frac{3}{\sqrt{5}}N - \frac{8}{3\sqrt{5}}B$.
3. Por el doble producto, la suma es $(a \cdot c)b - (b \cdot c)a + (b \cdot a)c - (c \cdot a)b + (c \cdot b)a - (a \cdot b)c = 0$.
4. $\gamma' = (1,0,0)$, $\gamma'' = (0,2,0)$, $\gamma''' = (0,0,6)$ en $t=0$: $\gamma' \times \gamma'' = (0,0,2)$, $\kappa = 2$, $\tau = 12/4 = 3$.
5. La curva está en un plano (C3-006.T4); en él, κ_s es constante $\pm 1/r$ y el centro $\beta + N/\kappa$ es fijo.

C3-007 · Espacios vectoriales, normas y transformaciones lineales

Motivación

> **Tres repartidores y un mapa deformado**
> Desde la base hay dos clientes, $A = (3, 4)$ y $B = (5, 0)$ (km). Una bicicleta en calles cuadriculadas recorre $|x_1| + |x_2|$; un dron en línea recta, $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; una grúa de almacén, que mueve sus dos motores a la vez, tarda $\max(|x_1|, |x_2|)$. Para la bicicleta gana B (5 contra 7); para la grúa gana A (4 contra 5). El orden cambia, pero «muy cerca de la base» significa lo mismo para los tres: ninguno mide más del doble que otro.
> Después, un mapa tomado por dron que el software deforma respetando sumas y escalas. Basta saber a dónde van los pasos «1 km al este» y «1 km al norte» para saber a dónde va todo: eso es una matriz.
> Dónde falla la analogía: ni las calles ni los motores son ideales, y el software real corrige deformaciones no lineales.

Parte 1 · Espacios vectoriales y normas

Definición C3-007.D1 (espacio vectorial)

Un **espacio vectorial real** es un conjunto V con una suma y un producto por escalares que cumplen las ocho reglas de C3-001.T1. **Combinación lineal**, **subespacio**, conjunto **linealmente independiente** ($\sum c_i v_i = 0 \Rightarrow$ todos los $c_i = 0$) y **base** con su sentido usual. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial (C3-001.T1), y también el de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

En las funciones continuas, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ y $(cf)(x) := cf(x)$ son continuas (C1-022.T2), y las ocho reglas se verifican punto a punto, como en C3-001.T1.

Definición C3-007.D2 (norma)

Una **norma** en V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ con $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$, $\|cx\| = |c|\|x\|$ y $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $(V, \|\cdot\|)$ es un **espacio normado**.

Teorema C3-007.T1 (tres normas de $\mathbb{R}^n$)

$|x|$, $\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$ y $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ son normas en $\mathbb{R}^n$, y $\|x\|_\infty \leq |x| \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

Demostración.

1. $|\cdot|$ cumple las cuatro reglas por C3-001.T2 y C3-001.T4.
2. $\|\cdot\|_1$. Es suma de números ≥ 0 (C1-004.T1), luego ≥ 0 (C1-005.T12 d). Si $\|x\|_1 = 0$, cada $|x_i| \leq \|x\|_1 = 0$, así que $x_i = 0$ (C1-004.T1). $\|cx\|_1 = \sum |c||x_i| = |c|\|x\|_1$ (C1-004.T2, C1-005.T12 a). $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ (C1-004.T4); sumando (C1-005.T12), $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.
3. $\|\cdot\|_\infty$. El máximo existe y es uno de los $|x_i|$ (C1-005.T13), luego es ≥ 0; es 0 solo si todos los $|x_i|$ lo son. Como $|cx_i| = |c||x_i|$ y multiplicar por $|c| \geq 0$ conserva el orden (C1-003.T4, C1-003.T9), $\|cx\|_\infty = |c|\|x\|_\infty$.
4. Para cada i, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$; el máximo de la izquierda también lo cumple: $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
5. Las desigualdades son C3-001.T5. ■

Definición C3-007.D3 (normas equivalentes)

Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en V son **equivalentes** si existen $c, C > 0$ con $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ para todo $x \in V$.

Teorema C3-007.T2

La equivalencia de normas es una relación de equivalencia; $|\cdot|$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes entre sí.

Demostración.

1. *Reflexiva:* $c = C = 1$.

2. *Simétrica:* si $c\|x\| \le \|x\|' \le C\|x\|$, entonces $(1/C)\|x\|' \le \|x\| \le (1/c)\|x\|'$, con $1/C, 1/c > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
3. *Transitiva:* si $c\|x\| \le \|x\|' \le C\|x\|$ y $d\|x\|' \le \|x\|'' \le D\|x\|'$, entonces $cd\|x\| \le \|x\|'' \le CD\|x\|$ (C1-003.T4), con $cd, CD > 0$.
4. Por C3-007.T1: $\|x\|_\infty \le |x| \le n\|x\|_\infty$ y $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$; así ambas son equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$, y por los pasos 2-3, entre sí. ■

Ejemplo C3-007.E1 (no toda norma viene de un producto punto; en un espacio de funciones dos normas pueden no ser equivalentes)
La norma euclidiana cumple la ley del paralelogramo $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$, y $\|\cdot\|_\infty$ no (con e_1, e_2: $2 \neq 4$). En el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$, $\|f\|_\infty := \max|f|$ y $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$ son normas no equivalentes: con $f_k(x) = x^k$, $\|f_k\|_\infty = 1$ y $\|f_k\|_1 = 1/(k+1)$. (Que pase en *todo* espacio vectorial sin base finita no se enuncia: la prueba usual usa bases de Hamel, es decir, el axioma de elección.)

Demostración.

1. *Paralelogramo.* Se suman $|x \pm y|^2 = |x|^2 \pm 2x \cdot y + |y|^2$ (C3-001.T2).
2. $\|e_1 + e_2\|_\infty = \|e_1 - e_2\|_\infty = 1$: el lado izquierdo vale 2, el derecho $2 + 2 = 4$.
3. La cuenta del paso 1 solo usa que $|x|^2 = x \cdot x$ con un producto simétrico y bilineal. Cualquier norma de la forma $\sqrt{\langle x, x\rangle}$, con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simétrico y bilineal, cumple el paralelogramo; por el paso 2, $\|\cdot\|_\infty$ no es de esa forma.
4. $\|\cdot\|_\infty$ *en funciones.* Si f es continua en $[0,1]$, $|f|$ también y tiene máximo (C1-024.T2). Las cuatro reglas: el máximo de $|f|$ es ≥ 0 y es 0 solo si $f = 0$; $\max|cf| = |c|\max|f|$; y $|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ punto a punto (C1-004.T4).
5. $\|\cdot\|_1$. $|f|$ es continua, luego integrable (C2-003.T1), y $\int_0^1 |f| \ge 0$ (C2-004.T3). Si $f(c) \neq 0$ para algún c, $\int_0^1 |f| > 0$ (C2-006.T3); así $\|f\|_1 = 0$ solo si $f = 0$. Homogeneidad: C2-004.T2. Triángulo: $|f+g| \le |f| + |g|$ y monotonía (C2-004.T3, C2-004.T2).
6. $f_k(x) = x^k$: $0 \le x^k \le 1$ en $[0,1]$ con $f_k(1) = 1$, así que $\|f_k\|_\infty = 1$; y $\|f_k\|_1 = \int_0^1 x^k\,dx = 1/(k+1)$ (C2-009.E1).
7. Si hubiera $C > 0$ con $\|f\|_\infty \le C\|f\|_1$ para toda f, sería $1 \le C/(k+1)$ para todo k, es decir, $k + 1 \le C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, contra C1-007.C1. ■

⚠ La equivalencia no conserva el orden

Con los clientes $A = (3, 4)$ y $B = (5, 0)$: $\|A\|_1 = 7 > \|B\|_1 = 5$, pero $\|A\|_\infty = 4 < \|B\|_\infty = 5$. Las normas son equivalentes y aun así ordenan distinto. Lo que conservan es «tender a 0» (se usará en C3-012).

Parte 2 · Transformaciones lineales y matrices

Definición C3-007.D4 (transformación lineal y matriz)

$T : V \to W$ (espacios vectoriales) es **lineal** si $T(x + y) = T(x) + T(y)$ y $T(cx) = cT(x)$. Una **matriz** $m \times n$ es $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i \le m$, $j \le n$); para $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \in \mathbb{R}^m$ con $(Ax)_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Las matrices $m \times n$ forman un espacio vectorial ($= \mathbb{R}^{mn}$); I_n es la identidad.

Teorema C3-007.T3 (toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una matriz)

$x \mapsto Ax$ es lineal. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal, existe una única matriz A ($m \times n$) con $T(x) = Ax$ para todo x: su columna j es $T(e_j)$. En particular, toda lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es $L(x) = v \cdot x$ para un único $v \in \mathbb{R}^n$ ($v_i = L(e_i)$).

Demostración.

1. $(A(x + y))_i = \sum_j a_{ij}(x_j + y_j) = (Ax)_i + (Ay)_i$ y $(A(cx))_i = c(Ax)_i$ (C1-005.T12 a): $x \mapsto Ax$ es lineal.
2. Sea T lineal y $x = \sum_j x_j e_j$ (C3-001.T1). Por la linealidad y la inducción en el número de sumandos (C1-005.T1), $T(x) = \sum_j x_j T(e_j)$.
3. Sea $a_{ij} := (T(e_j))_i$. La componente i de $T(x)$ es $\sum_j x_j a_{ij} = (Ax)_i$ (C1-005.T12): $T(x) = Ax$.
4. *Unicidad.* Si $Ax = Bx$ para todo x, con $x = e_j$: $(Ae_j)_i = a_{ij}$ y $(Be_j)_i = b_{ij}$, así que $A = B$.
5. Con $m = 1$, A es una fila $(v_1, \dots, v_n)$ con $v_j = L(e_j)$, y $L(x) = \sum v_j x_j = v \cdot x$ (C3-001.D2). ■

El mapa deformado

$T(e_1) = (2, 1)$ y $T(e_2) = (-1, 1)$ dan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y $T(3, 4) = 3(2, 1) + 4(-1, 1) = (2, 7)$.

El bloque AL (lo que se cita de Álgebra Lineal I)

Álgebra Lineal I se cursa en paralelo con Cálculo III. Lo que el cálculo usa y es corto se demuestra en este curso; la teoría general se cita con su id y su ⚠.

AL.1 ⚠ Álgebra Lineal (álgebra de matrices)

Para A $m \times n$ y B $n \times p$, el producto AB $(m \times p)$ tiene entradas $(AB)_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$ y cumple $(AB)x = A(Bx)$; el producto es asociativo, distributivo, $AI_n = A = I_m A$; la matriz de una composición de lineales es el producto de sus matrices; el producto de matrices partidas en bloques compatibles se calcula por bloques. La transpuesta A^T cumple $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$ y $Ax \cdot y = x \cdot A^\mathsf{T} y$. Una matriz cuadrada es **simétrica** si $A^\mathsf{T} = A$.
Son cuentas con Σ que se hacen en Álgebra Lineal I; aquí se usan como hechos conocidos.

Definición C3-007.D5 (matriz invertible)

Una matriz A $n \times n$ es **invertible** si existe B $n \times n$ con $AB = BA = I_n$.

Teorema C3-007.T4 (reglas de la inversa)

Si A es invertible, la B de C3-007.D5 es única; se escribe A^{-1}, y A^{-1} es invertible con $(A^{-1})^{-1} = A$. I_n es invertible con $I_n^{-1} = I_n$. Si A y B son invertibles, AB lo es y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Si A es invertible, $x \mapsto Ax$ es biyectiva de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y su función inversa es $x \mapsto A^{-1}x$.

Demostración. Todo con AL.1 (asociatividad y $AI = IA = A$).

1. *Unicidad.* Si B y B' sirven: $B' = B'I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_n B = B$.
2. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ dice también que A sirve como inversa de A^{-1}: $(A^{-1})^{-1} = A$ (paso 1).
3. $I_n I_n = I_n$: $I_n^{-1} = I_n$.
4. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$, y $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I_n$.
5. $A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = x$ y $A(A^{-1}y) = y$ (AL.1: $(AB)x = A(Bx)$): $x \mapsto A^{-1}x$ es inversa por los dos lados de $x \mapsto Ax$ (C1-011.D1). ■

No se afirma que «inyectiva implica invertible»: eso es rango más nulidad, y el curso no lo necesita (AL.2 eliminado).

Deshacer el mapa

Con $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = BA = I_2$ (AL.1, cuenta directa). Así $A^{-1} = B$ y $A^{-1}(2,7) = \frac{1}{3}(9,12) = (3,4)$.

AL.3 ⚠ Álgebra Lineal (rango)

Para A $m \times n$, el máximo número de filas linealmente independientes es igual al máximo número de columnas linealmente independientes (el **rango**). Si $m \leq n$ y las m filas de A son linealmente independientes, existen columnas $j_1 < \cdots < j_m$ tales que la submatriz $m \times m$ formada por ellas es invertible.

AL.4 ⚠ Álgebra Lineal (determinante)

Existe una única función det de las matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$, multilineal y alternante en las columnas, con $\det I_n = 1$. Es un polinomio en las entradas ($\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$; para 3×3, desarrollo por cofactores); $\det(AB) = \det A \cdot \det B$; $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$; A es invertible $\iff \det A \neq 0$.

Solo se usa para leer el jacobiano (C3-022.D3) y en ejemplos.

AL.5 ⚠ Álgebra Lineal (teorema espectral)

Si A es simétrica $n \times n$, existen vectores $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ unitarios y ortogonales dos a dos y reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $Au_i = \lambda_i u_i$; todo $x \in \mathbb{R}^n$ es $x = \sum_i (x \cdot u_i)u_i$, y $x \cdot Ax = \sum_i \lambda_i (x \cdot u_i)^2$. Los λ_i son los **valores propios** de A (los λ con $Av = \lambda v$ para algún $v \neq 0$).

La existencia de un valor propio real sí se demuestra en este curso (C3-030.T2).

AL.6 ⚠ Álgebra Lineal (criterio de Sylvester)

Sea A simétrica $n \times n$ y A_k la submatriz de sus primeras k filas y columnas. $x \cdot Ax > 0$ para todo $x \neq 0 \iff \det A_k > 0$ para $k = 1, \ldots, n$; $x \cdot Ax < 0$ para todo $x \neq 0 \iff (-1)^k \det A_k > 0$ para $k = 1, \ldots, n$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Las cuatro reglas de norma

En $\mathbb{R}^2$: $|x_1|$ vale 0 en $e_2 \neq 0$; $x_1^2 + x_2^2$ no es homogénea ($\|2x\| = 4\|x\|$); $(|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2})^2$ falla el triángulo en $e_1 + e_2$ ($4 > 1 + 1$).

⚠ Linealidad

La traslación $x \mapsto x + (1, 0)$ no es lineal: manda 0 a $(1, 0)$, y toda lineal manda 0 a 0 ($T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0)$). No tiene matriz.

Ejercicios

1. Calcula $\|x\|_1$, $|x|$ y $\|x\|_\infty$ para $x = (3, -4, 12)$ y verifica C3-007.T1.
2. Demuestra que $\|x\| := 2|x_1| + 5|x_2|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$ y encuentra constantes que la hagan equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.
3. Encuentra la matriz de la lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $T(e_1) = (1, 0, 2)$, $T(e_2) = (0, 1, -1)$ y calcula $T(2, 3)$.
4. Demuestra que si $T : V \to W$ es lineal, $T(0) = 0$ y $T(-x) = -T(x)$.
5. Demuestra que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ para toda f continua en $[0, 1]$. ¿Por qué no contradice C3-007.E1?

Respuestas

1. $\|x\|_1 = 19$, $|x| = 13$, $\|x\|_\infty = 12$: $12 \leq 13 \leq 19 \leq 36$.
2. Las reglas se heredan del valor absoluto como en C3-007.T1. $2\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq 7\|x\|_\infty$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $T(2, 3) = (2, 3, 1)$.
4. $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0\,T(0) = 0$; $T(-x) = T((-1)x) = -T(x)$.
5. $|f| \leq \|f\|_\infty$ en $[0, 1]$ y C2-006.T1. E1 dice que la otra desigualdad, $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$, falla.

C3-008 · Abiertos, cerrados y frontera

Motivación

> **La geocerca del aeropuerto**
> Alrededor de un aeropuerto se prohíbe volar drones «a menos de 5 km». Un dron en $(3, 2)$ km está a $\sqrt{13} \approx 3.606$ km: tiene un margen de unos 1.394 km para moverse en cualquier dirección sin salir de la zona. Todo dron de la zona tiene algún margen, aunque sea muy pequeño: la zona es **abierta**.
> Si la regla fuera «a 5 km o menos», un dron en $(3, 4)$, justo en la cerca, estaría dentro y sin margen: cualquier movimiento hacia afuera lo saca. Esa cerca es la **frontera**.
> Dónde falla la analogía: una geocerca real se dibuja con precisión finita y la Tierra no es plana; aquí la cerca es una esfera exacta sin grosor.

Bolas, abiertos y cerrados

Definición C3-008.D1 (bolas, abiertos, cerrados)

Para $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$: **bola abierta** $B(a,r) := \{x : |x-a| < r\}$, **bola cerrada** $\bar{B}(a,r) := \{x : |x-a| \le r\}$, **esfera** $\{x : |x-a| = r\}$. $U \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para cada $a \in U$ existe $r > 0$ con $B(a,r) \subset U$. F es **cerrado** si $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto. a es **interior** a A si alguna $B(a,r) \subset A$ (int $A :=$ los puntos interiores); a está en la **frontera** ∂A si toda $B(a,r)$ corta a A y a $\mathbb{R}^n \setminus A$; **cerradura** $\bar{A} := A \cup \partial A$. A es **acotado** si $A \subset B(0,R)$ para algún $R > 0$.

Teorema C3-008.T1

Las bolas abiertas son abiertas; las bolas cerradas y las esferas son cerradas.

> **Idea de la demostración**
> Un punto a distancia $d < r$ del centro tiene un margen $r - d$; un punto a distancia $d > r$ tiene un margen $d - r$ hacia afuera. El triángulo hace el resto.

Demostración.

1. $B(a,r)$ *es abierta.* Sea $x \in B(a,r)$ y $\rho := r - |x-a| > 0$. Si $y \in B(x,\rho)$, por C3-001.T4,

$$|y-a| \leq |y-x| + |x-a| < \rho + |x-a| = r.$$

   Así $B(x,\rho) \subset B(a,r)$.
2. *Fuera de* $\bar{B}(a,r)$. Sea $|x-a| > r$ y $\rho := |x-a| - r > 0$. Si $y \in B(x,\rho)$, por C3-001.T4,

$$|y-a| \geq |x-a| - |x-y| > |x-a| - \rho = r.$$

   Así $B(x,\rho)$ no toca $\bar{B}(a,r)$: el complemento de $\bar{B}(a,r)$ es abierto, y $\bar{B}(a,r)$ es cerrada.
3. *Esfera.* Un punto x fuera de la esfera cumple $|x-a| < r$ o $|x-a| > r$ (C1-003.T1). En el primer caso la bola del paso 1 está en $B(a,r)$; en el segundo, la del paso 2 está en $\{|y-a| > r\}$. En ambos casos no toca la esfera: su complemento es abierto. ■

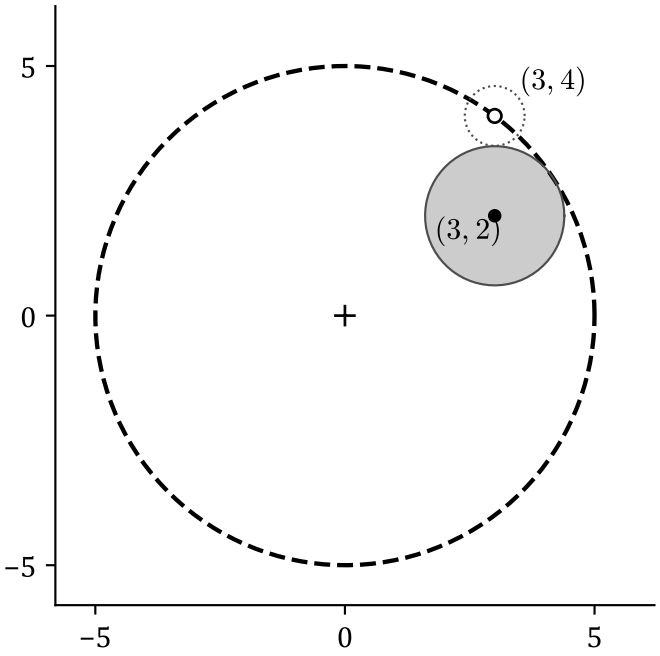


Figura 5: La geocerca $B(0,5)$. El dron en $(3,2)$ tiene una burbuja de radio $5-\sqrt{13}$ dentro de la zona; el punto $(3,4)$ de la esfera es de frontera: toda burbuja suya sale de la zona.

Teorema C3-008.T2 (uniones e intersecciones)

$\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados. Toda unión de abiertos es abierta y toda intersección finita de abiertos es abierta; toda intersección de cerrados es cerrada y toda unión finita de cerrados es cerrada. Una intersección infinita de abiertos puede no serlo: $\bigcap_k B(0,1/k)=\{0\}$.

Demostración.

1. $\emptyset$ es abierto (no hay puntos que revisar) y $\mathbb{R}^n$ también (cualquier r). Sus complementos son $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$: ambos son cerrados.
2. *Unión.* Si $a \in \bigcup U_\alpha$, $a \in U_\alpha$ para algún α y hay $B(a,r) \subset U_\alpha \subset \bigcup U_\alpha$.
3. *Intersección finita.* Si $a \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$, hay r_i con $B(a,r_i) \subset U_i$. Con $r := \min r_i > 0$ (C1-005.T13), $B(a,r) \subset B(a,r_i) \subset U_i$ para cada i.
4. *Cerrados.* $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap F_\alpha = \bigcup(\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha)$ y $\mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k) = \bigcap_i (\mathbb{R}^n \setminus F_i)$ (leyes de De Morgan, que se verifican punto por punto); se aplican los pasos 2 y 3.
5. *El ejemplo.* 0 está en todas las $B(0,1/k)$. Si $x \neq 0$, $|x| > 0$ (C3-001.T2) y hay k con $1/k < |x|$ (C1-007.C1): $x \notin B(0,1/k)$. Así la intersección es $\{0\}$.

6. $\{0\}$ no es abierto: para todo $r > 0$, $(r/2)e_1 \in B(0,r)$ y $(r/2)e_1 \neq 0$ (C3-001.T2). ■

Interior, frontera y cerradura

Teorema C3-008.T3 (interior, frontera, cerradura)

$\operatorname{int} A$ es abierto y es el mayor abierto contenido en A; A es abierto $\iff A = \operatorname{int} A$. ∂A y $\bar{A}$ son cerrados; A es cerrado $\iff \partial A \subset A \iff A = \bar{A}$. $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de $\operatorname{int} A$, ∂A e $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

Demostración.

1. $\operatorname{int} A$ *es abierto.* Si $a \in \operatorname{int} A$, hay $B(a,r) \subset A$. Cada $x \in B(a,r)$ tiene una bola $B(x,\rho) \subset B(a,r) \subset A$ (C3-008.T1), así que $x \in \operatorname{int} A$. Luego $B(a,r) \subset \operatorname{int} A$.
2. $\operatorname{int} A \subset A$ porque $a \in B(a,r)$. Si $U \subset A$ es abierto, cada punto de U tiene una bola en $U \subset A$: $U \subset \operatorname{int} A$. Por eso $\operatorname{int} A$ es el mayor abierto en A, y A es abierto $\iff A = \operatorname{int} A$.
3. *Partición.* Para $a \in \mathbb{R}^n$, o alguna bola de a está en A ($a \in \operatorname{int} A$), o alguna está en $\mathbb{R}^n \setminus A$ ($a \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$), o toda bola corta a los dos ($a \in \partial A$). Las dos primeras no pueden pasar a la vez: darían $a \in A$ y $a \notin A$ (C1-003.T1); y la tercera excluye a las otras dos por definición.
4. ∂A *es cerrado.* Por el paso 3, $\mathbb{R}^n \setminus \partial A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$, unión de abiertos (paso 1, C3-008.T2).
5. $\bar{A}$ *es cerrado.* $\operatorname{int} A \subset A$, así que $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup \partial A) = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ (paso 3), abierto.
6. A *cerrado* $\Rightarrow \partial A \subset A$. Si $\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto, es igual a su interior (paso 2), que no corta a ∂A (paso 3). Así $\partial A \subset A$.
7. $\partial A \subset A \Rightarrow A$ *cerrado.* Entonces $\mathbb{R}^n \setminus A$ no corta a ∂A ni a $\operatorname{int} A$, y por el paso 3 está contenido en $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$; la otra contención siempre vale. Es abierto.
8. $\partial A \subset A \iff A \cup \partial A = A$. ■

Ejemplo C3-008.E1

En $\mathbb{R}$, (a,b) es abierto, $[a,b]$ cerrado y $[a,b)$ ninguno de los dos; $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. En $\mathbb{R}^n$, $\partial B(a,r) = \partial\bar{B}(a,r)$ = la esfera de centro a y radio r; $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es abierto.

1. (a,b). En $\mathbb{R}$, $B(x,\rho) = (x-\rho, x+\rho)$ (C1-004.T3). $(a,b) = B((a+b)/2, (b-a)/2)$ es una bola abierta (C1-003.T8), luego abierta (C3-008.T1). $[a,b]$ es la bola cerrada con ese centro y radio.
2. $[a,b)$. No es abierto: para todo $\rho > 0$, $a - \rho/2 \in B(a,\rho)$ no está en $[a,b)$. No es cerrado:

$b \notin [a,b)$, pero toda $B(b,\rho)$ contiene b (fuera) y $\max(a, b-\rho/2)$ (dentro), así que $b \in \partial[a,b) \not\subset [a,b)$ (C3-008.T3).

3. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Todo intervalo $(x-\rho, x+\rho)$ contiene un racional (C1-007.T3) y un irracional (C1-008.T3).
4. *La esfera es la frontera de ambas bolas.* Si $|x-a| < r$, x es interior a $B(a,r) \subset \bar{B}(a,r)$ (C3-008.T1). Si $|x-a| > r$, x es interior al complemento de ambas (paso 2 de C3-008.T1). Sea $|x-a| = r$ y $\rho > 0$; con $t := \min(\rho/(2r), 1/2)$ (C1-005.T13) y $x_\pm := a + (1 \pm t)(x-a)$:

$$|x_\pm - a| = (1 \pm t)r, \qquad |x_\pm - x| = tr < \rho$$

(C3-001.T2). x_- está en $B(a,r)$ y x_+ fuera de $\bar{B}(a,r)$: toda bola de x corta a ambas bolas y a sus complementos.

5. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si $x \neq 0$, $B(x,|x|)$ no contiene a 0, porque $|0-x| = |x|$ no es $< |x|$.

⚠ Abierto y cerrado no son opuestos

$[a,b)$ no es ninguno de los dos; $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son las dos cosas. «No abierto» no significa «cerrado».

Topología relativa y puntos de acumulación

Definición C3-008.D2 (topología relativa)

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. $A \subset S$ es **abierto en** S si $A = U \cap S$ para algún abierto U, y **cerrado en** S si $S \setminus A$ es abierto en S.

Teorema C3-008.T4

$A \subset S$ es abierto en $S \iff$ para cada $a \in A$ existe $r > 0$ con $B(a,r) \cap S \subset A$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Si $A = U \cap S$ y $a \in A$, $a \in U$ y hay $B(a,r) \subset U$; entonces $B(a,r) \cap S \subset U \cap S = A$.
2. ($\Leftarrow$) Sea U la unión de **todas** las bolas $B(a,r)$ con $a \in A$, $r > 0$ y $B(a,r) \cap S \subset A$. Es abierto (C3-008.T1, C3-008.T2). No hace falta elegir un radio por cada punto.
3. Cada $a \in A$ está en alguna de esas bolas (hipótesis), así que $A \subset U \cap S$.

4. Cada punto de $U \cap S$ está en una bola $B(a,r)$ de la familia y en S, luego en A. Así $U \cap S = A$. ■

> **Relativo, no absoluto**
> $[0,1)$ no es abierto en $\mathbb{R}$, pero sí es abierto en $S = [0,2]$: $[0,1) = (-1,1) \cap S$.

Definición C3-008.D3 (punto de acumulación)

$a \in \mathbb{R}^n$ es **punto de acumulación** de A si toda $B(a,r)$ contiene un punto de A distinto de a; un punto de A que no lo es es **aislado**.

Teorema C3-008.T5

A es cerrado $\iff$ contiene a todos sus puntos de acumulación. Todo punto de un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación de U.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Si A es cerrado y $a \notin A$, hay $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$: ninguna bola así contiene puntos de A, y a no es de acumulación.
2. ($\Leftarrow$) Sea $a \in \partial A$ y supongamos $a \notin A$. Toda $B(a,r)$ corta a A en un punto, que es distinto de a porque $a \notin A$: a es de acumulación, luego $a \in A$. Contradicción. Así $\partial A \subset A$ y A es cerrado (C3-008.T3).
3. *Abiertos.* Sean $a \in U$, $B(a,r) \subset U$ y $\rho > 0$. Con $m := \min(r,\rho)$ (C1-005.T13), el punto $a + (m/2)e_1$ dista $m/2$ de a (C3-001.T2): está en $B(a,\rho) \cap B(a,r) \subset U$ y es distinto de a. ■

Por qué cada hipótesis

> **⚠ Intersecciones finitas**
> $\bigcap_k B(0,1/k) = \{0\}$ no es abierto (C3-008.T2): con infinitos abiertos, los radios $1/k$ no tienen un mínimo positivo, y el paso 3 de la prueba falla.

⚠ Relativo a qué

«Abierto» depende del espacio ambiente: $[0, 1)$ es abierto en $[0, 2]$ y no en $\mathbb{R}$. Por eso C3-008.D2 nombra siempre el conjunto S.

Ejercicios

1. Calcula el margen del dron en $(1, -4)$ respecto a la geocerca $B(0, 5)$.
2. Demuestra que $\{(x, y) : x > 0\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
3. Calcula $\operatorname{int} A$, ∂A y $\bar{A}$ para $A = \{1/k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
4. Demuestra que todo conjunto finito de $\mathbb{R}^n$ es cerrado.
5. Da un ejemplo de una unión infinita de cerrados que no sea cerrada.

Respuestas

1. $|(1, -4)| = \sqrt{17} \approx 4.123$; margen $5 - \sqrt{17} \approx 0.877$ km.
2. Si $x > 0$, $B((x, y), x)$ está en el conjunto: $|x' - x| \leq |(x', y') - (x, y)| < x$ da $x' > 0$ (C3-001.T2).
3. $\operatorname{int} A = \emptyset$; $\partial A = A \cup \{0\}$; $\bar{A} = A \cup \{0\}$.
4. $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es abierto (como en E1, paso 5, con centro p), así que $\{p\}$ es cerrado, y una unión finita de cerrados es cerrada (C3-008.T2).
5. $\bigcup_k [1/k, 1] = (0, 1]$, que no es cerrado ($0 \in \partial(0, 1]$).

C3-009 · Sucesiones en $\mathbb{R}^n$ y teorema de Bolzano–Weierstrass

Motivación

> **El dron que patrulla el almacén**
> Un dron de inventario patrulla para siempre dentro de un almacén. Cada minuto el GPS anota su posición. Nunca sale de la caja, pero su ruta puede ser caprichosa. ¿Hay algún punto al que regrese a acercarse una y otra vez, tanto como se quiera? Sí: es el teorema de Bolzano–Weierstrass en $\mathbb{R}^n$. Se prueba filtrando el registro una coordenada a la vez.
> Dónde falla la analogía: un registro real es finito; el teorema habla de uno infinito, y dice que el punto existe, no cómo encontrarlo.

Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición C3-009.D1 (sucesiones en $\mathbb{R}^n$)

Una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ es una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. $x_k \to x :\Leftrightarrow\ |x_k - x| \to 0$ (C1-012.D1); **de Cauchy** $:\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, l \geq N : |x_k - x_l| < \varepsilon$; **acotada** si $\{x_k\}$ lo es; subsucesiones como en C1-015.D1.

Teorema C3-009.T0 (elección numerable en $\mathbb{R}^n$)

Si para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_k \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, existe una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ con $x_k \in A_k$ para todo k.

Idea de la demostración
EN (C1-012.Ax1) habla de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se sube de dimensión de una en una: primero se eligen las primeras n coordenadas y luego, con EN, la última.

Demostración. Por inducción en n (C1-005.T1).

1. Para $n = 1$ es EN (C1-012.Ax1).
2. Supongamos el enunciado en $\mathbb{R}^n$ y sean $A_k \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ no vacíos (C3-001.D1). Sea $P_k := \{y \in \mathbb{R}^n : (y, s) \in A_k \text{ para algún } s\}$, no vacío.
3. Por la hipótesis de inducción hay (y_k) con $y_k \in P_k$.
4. Para cada k, $S_k := \{s \in \mathbb{R} : (y_k, s) \in A_k\}$ es no vacío (paso 3). Por EN hay (s_k) con $s_k \in S_k$.
5. $x_k := (y_k, s_k) \in A_k$. ■

Este resultado se cita en cada prueba que elige un punto de $\mathbb{R}^n$ por cada k (también en $\mathbb{R}^{2n}$, para pares de puntos, o en las matrices, $= \mathbb{R}^{mn}$).

Teorema C3-009.T1 (por componentes)

$x_k \to x \iff$ cada componente converge: $(x_k)_i \to x_i$. El límite es único; toda convergente es acotada; toda subsucesión de una convergente converge al mismo límite; si $x_k \to x$, $y_k \to y$ y $c_k \to c$ (reales): $x_k + y_k \to x + y$, $c_k x_k \to cx$, $x_k \cdot y_k \to x \cdot y$ y $|x_k| \to |x|$. Una subsucesión de una subsucesión es una subsucesión.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) $|(x_k)_i - x_i| \le |x_k - x|$ (C3-001.T2): el N que sirve para $|x_k - x| < \varepsilon$ sirve para cada componente (C1-012.D1).
2. ($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, para cada i hay N_i con $|(x_k)_i - x_i| < \varepsilon/n$ si $k \ge N_i$. Con $N := \max N_i$ (C1-005.T13) y C3-001.T5: $|x_k - x| \le \sum_i |(x_k)_i - x_i| < \varepsilon$ para $k \ge N$.
3. *Unicidad.* Las componentes de dos límites coinciden (C1-012.T1).
4. *Acotada.* Cada componente converge, luego es acotada: $|(x_k)_i| \le M_i$ (C1-013.T1). Por C3-001.T5, $|x_k| \le M_1 + \cdots + M_n$.
5. *Subsucesiones.* Cada componente de (x_{k_m}) es subsucesión de la componente correspondiente y converge al mismo límite (C1-015.T1); se aplica el paso 2.
6. *Álgebra.* Por componentes, con C1-013.T2: $(x_k + y_k)_i \to x_i + y_i$, $c_k(x_k)_i \to cx_i$, y $x_k \cdot y_k =$

$\sum_i (x_k)_i (y_k)_i \to x \cdot y$. Además $\big||x_k| - |x|\big| \le |x_k - x| \to 0$ (C3-001.T4).

7. *Subsucesión de subsucesión.* Si $k_1 < k_2 < \cdots$ y $m_1 < m_2 < \cdots$ son naturales, $l \mapsto k_{m_l}$ es estrictamente creciente, y $(x_{k_{m_l}})$ es subsucesión de (x_k) (C1-015.D1). ■

Teorema C3-009.T2 (completitud de $\mathbb{R}^n$)

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ converge $\iff$ es de Cauchy.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Cada componente converge (C3-009.T1), luego es de Cauchy (C1-016.T1): para ε/n hay N_i. Con $N := \max N_i$ y C3-001.T5, $|x_k - x_l| \le \sum_i |(x_k)_i - (x_l)_i| < \varepsilon$ si $k, l \ge N$.
2. ($\Leftarrow$) $|(x_k)_i - (x_l)_i| \le |x_k - x_l|$ (C3-001.T2): cada componente es de Cauchy (C1-016.D1), luego converge (C1-016.T3), y (x_k) converge (C3-009.T1). ■

Bolzano–Weierstrass

Teorema C3-009.T3 (Bolzano–Weierstrass en $\mathbb{R}^n$)

Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.

> **Idea de la demostración**
> Se extrae una subsucesión en que converge la primera componente (C1-015.T3), de ella otra en que converge la segunda, y así n veces; la última sirve para todas (C1-015.T1).

Demostración.

1. Sea $|x_k| \le R$ para todo k. Entonces $|(x_k)_i| \le |x_k| \le R$ para cada i (C3-001.T2).
2. Para $j = 1, \dots, n$, sea $P(j)$: «existe una subsucesión de (x_k) cuyas j primeras componentes convergen».
3. $P(1)$: la sucesión real $((x_k)_1)$ es acotada y tiene una subsucesión convergente (C1-015.T3).
4. Supongamos $P(j)$ con $j < n$ y sea (y_m) esa subsucesión. Su componente $j+1$ es acotada (paso 1) y tiene una subsucesión convergente (y_{m_l}) (C1-015.T3).
5. En (y_{m_l}), las j primeras componentes siguen convergiendo (C1-015.T1), y la componente $j+1$

también. Por C3-009.T1, (y_{m_l}) es subsucesión de (x_k). Vale $P(j+1)$.

6. Por inducción (C1-005.T1) vale $P(n)$, y esa subsucesión converge en $\mathbb{R}^n$ (C3-009.T1). ■

Corolario C3-009.C1 (versión con puntos de acumulación)

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y contiene una sucesión de puntos distintos dos a dos, A tiene un punto de acumulación.

Demostración.

1. Sea (a_k) en A con $a_k \neq a_l$ si $k \neq l$. Es acotada; por C3-009.T3 hay $a_{k_m} \to p$.
2. Sea $r > 0$. Hay M con $|a_{k_m} - p| < r$ para $m \geq M$ (C3-009.D1).
3. a_{k_M} y $a_{k_{M+1}}$ son distintos ($k_M < k_{M+1}$, C1-015.D1), así que al menos uno es distinto de p. Ese punto está en $B(p,r) \cap A$ y es distinto de p (C3-008.D3). ■

⚠ Por qué «una sucesión de puntos distintos» y no «infinito»

«A infinito ⇒ A contiene una sucesión inyectiva» pide elección dependiente, más que EN. Ninguna demostración del curso usa la versión con «infinito», así que se enuncia con la sucesión dada.

Cerrados y sucesiones

Teorema C3-009.T4 (cerrados y sucesiones)

$x \in \bar{A} \iff$ existe una sucesión en A que converge a x. F es cerrado $\iff$ para toda sucesión (x_k) en F con $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$, $x \in F$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Si $x \in \bar{A} = A \cup \partial A$, cada $B(x, 1/k)$ corta a A: si $x \in A$, en x; si $x \in \partial A$, por C3-008.D1. Por C3-009.T0 hay $x_k \in A \cap B(x, 1/k)$, y $|x_k - x| < 1/k \to 0$ (C1-007.C1): $x_k \to x$.
2. ($\Leftarrow$) Sean $x_k \in A$ con $x_k \to x$. Si $x \in A$, $x \in \bar{A}$. Si $x \notin A$: toda $B(x,r)$ contiene x (fuera de A) y algún x_k (en A), así que $x \in \partial A \subset \bar{A}$.
3. *Cerrados.* Si F es cerrado, $F = \bar{F}$ (C3-008.T3); el límite de una sucesión en F está en $\bar{F} = F$ (paso

2).

4. Recíprocamente, si F contiene los límites de sus sucesiones, todo $x \in \bar{F}$ es uno de esos límites (paso 1): $\bar{F} \subset F$, así que $F = \bar{F}$ es cerrado (C3-008.T3). ■

Ejemplo C3-009.E1

$x_k = (1/k, (-1)^k)$ es acotada y no converge; sus subsucesiones de índices pares e impares convergen a $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

1. $|x_k| = \sqrt{1/k^2 + 1} \leq \sqrt{2}$: acotada.
2. $x_{2m} = (1/(2m), 1)$: la primera componente es subsucesión de $1/k \to 0$ (C1-012.T2, C1-015.T1) y la segunda es constante 1. Por C3-009.T1, $x_{2m} \to (0, 1)$. Igual, $x_{2m+1} \to (0, -1)$.
3. Si (x_k) convergiera, sus dos subsucesiones tendrían el mismo límite (C3-009.T1); pero $(0, 1) \neq (0, -1)$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Acotada

$x_k = (k, 0, 0)$: $|x_k - x_l| \geq 1$ si $k \neq l$, así que ninguna subsucesión es de Cauchy ni converge (C3-009.T2).

⚠ Dimensión finita

La prueba hace n extracciones. En sucesiones con infinitas coordenadas y la norma del máximo, e_k (un 1 en el lugar k) es acotada y $\|e_k - e_l\|_\infty = 1$ si $k \neq l$: no tiene subsucesión convergente.

Ejercicios

1. Demuestra que $x_k = \left(\frac{k}{k+1}, \frac{(-1)^k}{k}, 2^{-k}\right)$ converge y calcula su límite.
2. Demuestra que si $x_k \to x$ y A es una matriz $m \times n$, $Ax_k \to Ax$.
3. Da una sucesión acotada en $\mathbb{R}^2$ con exactamente cuatro límites de subsucesiones.
4. Demuestra que $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ es cerrado usando C3-009.T4.
5. ¿Es cerrado $\{(x, 1/x) : x > 0\}$? Usa sucesiones.

Respuestas

1. Por componentes: $(1, 0, 0)$ (C1-012.T2, C1-013.T2).
2. $(Ax_k)_i = \sum_j a_{ij}(x_k)_j \to \sum_j a_{ij}x_j$ (C1-013.T2) y C3-009.T1.
3. $x_k = (\cos(k\pi/2), \operatorname{sen}(k\pi/2))$ repite el ciclo $(0,1), (-1,0), (0,-1), (1,0)$ (C2-014.C1); las cuatro subsucesiones por residuo módulo 4 son constantes, y toda subsucesión convergente tiene infinitos términos en alguna de ellas.
4. Si $|x_k| \leq 1$ y $x_k \to x$, $|x_k| \to |x|$ (C3-009.T1) y $|x| \leq 1$ (C1-013.T3).
5. Sí: si $(x_k, 1/x_k) \to (a, b)$, $1/x_k \to b$ obliga a que x_k no tienda a 0 con b finito; si $a = 0$, $1/x_k$ no sería acotada. Así $a > 0$ y $b = 1/a$ (C1-013.T2).

C3-010 · Compactos y teorema de Heine–Borel

Motivación

> **Antenas y zonas de búsqueda**
> Un terreno cuadrado de 1 km por lado, con su borde, está cubierto por infinitas antenas, cada una con un disco abierto de señal. ¿Se pueden apagar todas menos un número finito sin dejar puntos sin señal? Sí, siempre. En cambio, el pasillo $(0, 1]$, sin su extremo 0, cubierto por las antenas $(1/k, 2)$, no lo permite: con las primeras m queda sin señal el punto $1/m$.
> Un dron de búsqueda que reduce cada hora una zona cerrada y acotada, siempre dentro de la anterior, termina con al menos un punto común a todas. Con zonas $(0, 1/k]$ no: su intersección es vacía.
> Dónde falla la analogía: una antena real tiene bordes difusos y una búsqueda real dura un número finito de horas.

Parte 1 · Cubiertas y cajas

Definición C3-010.D1 (compacto)

Una **cubierta abierta** de $K \subset \mathbb{R}^n$ es una familia de abiertos cuya unión contiene a K; una **subcubierta finita** es una subfamilia finita que también lo cubre. K es **compacto** si toda cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita. K es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto de K.

> ⚠ **«Toda» cubierta**
> Siempre hay alguna cubierta finita ($\{\mathbb{R}^n\}$). La definición pide que **toda** cubierta abierta se pueda reducir a finitas piezas.

Teorema C3-010.T1

Todo compacto es cerrado y acotado.

Demostración. Sea K compacto.

1. *Acotado.* Las bolas $B(0,k)$, $k \in \mathbb{N}$, son abiertas (C3-008.T1) y cubren $\mathbb{R}^n$: para cada x hay $k > |x|$ (C1-007.C1). Una subcubierta finita $B(0,k_1), \dots, B(0,k_j)$ cubre K; con $m := \max k_i$ (C1-005.T13), $B(0,k_i) \subset B(0,m)$ y $K \subset B(0,m)$.
2. *Cerrado.* Sea $p \notin K$. Los conjuntos $U_k := \{x : |x-p| > 1/k\}$ son abiertos (complementos de bolas cerradas, C3-008.T1). Cubren K: si $x \in K$, $x \neq p$, $|x-p| > 0$ (C3-001.T2) y hay k con $1/k < |x-p|$ (C1-007.C1).
3. Una subcubierta finita $U_{k_1}, \dots, U_{k_j}$ cubre K; con $m := \max k_i$, $U_{k_i} \subset U_m$, así que $K \subset U_m$ y $B(p,1/m) \cap K = \emptyset$.
4. Así $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto (C3-008.D1). (Si $K = \emptyset$ no hay nada que probar.) ■

Teorema C3-010.T2 (las cajas cerradas son compactas)

Sean $a_i < b_i$ $(i = 1, \dots, n)$. $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es compacto.

> **Idea de la demostración (bisección)**
> Si una cubierta no tiene subcubierta finita, al partir cada lado a la mitad alguna de las 2^n subcajas tampoco la tiene. Se toma la primera en un orden fijo, así que no hace falta elegir. Las cajas encajadas se cierran sobre un punto x, que está en un abierto de la cubierta, y una caja suficientemente chica cabe en ese abierto. Contradicción.

Demostración. Supongamos que una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de R no tiene subcubierta finita.

1. *El paso de bisección.* Sea $Q = \prod_i [\alpha_i, \beta_i]$ una caja sin subcubierta finita. Con los puntos medios $\mu_i := (\alpha_i + \beta_i)/2$ (C1-003.T8), Q es la unión de las 2^n subcajas $\prod_i I_i$ con $I_i \in \{[\alpha_i, \mu_i], [\mu_i, \beta_i]\}$. Si las 2^n tuvieran subcubierta finita, la unión de esas finitas subfamilias finitas cubriría Q. Así alguna no la tiene.
2. *Sin elegir.* Las subcajas se ordenan por la palabra $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$ (0 = mitad izquierda) en orden lexicográfico; se toma la primera sin subcubierta finita. Es una regla, y la recursión (C1-

005.T11) da cajas $R_0 = R \supset R_1 \supset \cdots$, $R_k = \prod_i [a_i^k, b_i^k]$, sin subcubierta finita, con

$$b_i^k - a_i^k = \frac{b_i - a_i}{2^k}.$$

3. *El punto.* Para cada i, $(a_i^k)_k$ es creciente y acotada por b_i; converge a $x_i := \sup_k a_i^k$ (C1-014.T2). Cada b_i^k es cota superior de todos los a_i^j: si $j \geq k$, $a_i^j \leq b_i^j \leq b_i^k$; si $j < k$, $a_i^j \leq a_i^k \leq b_i^k$. Por C1-006.D1, $a_i^k \leq x_i \leq b_i^k$ para todo k.
4. Así $x := (x_1, \ldots, x_n) \in R_k$ para todo k; en particular $x \in R$, y hay $U \in \mathcal{U}$ y $r > 0$ con $B(x, r) \subset U$ (C3-008.D1).
5. *La caja cabe.* Sea $D := \sum_i (b_i - a_i)$. Si $y \in R_k$, por C3-001.T5,

$$|y - x| \leq \sum_i |y_i - x_i| \leq \sum_i (b_i^k - a_i^k) = \frac{D}{2^k}.$$

6. Por Bernoulli (C1-005.T5 con $x = 1$), $2^k \geq 1 + k > k$. Con $k > D/r$ (C1-007.C1), $D/2^k < D/k < r$, así que $R_k \subset B(x, r) \subset U$.
7. Entonces $\{U\}$ es una subcubierta finita de R_k, contra el paso 2. ■

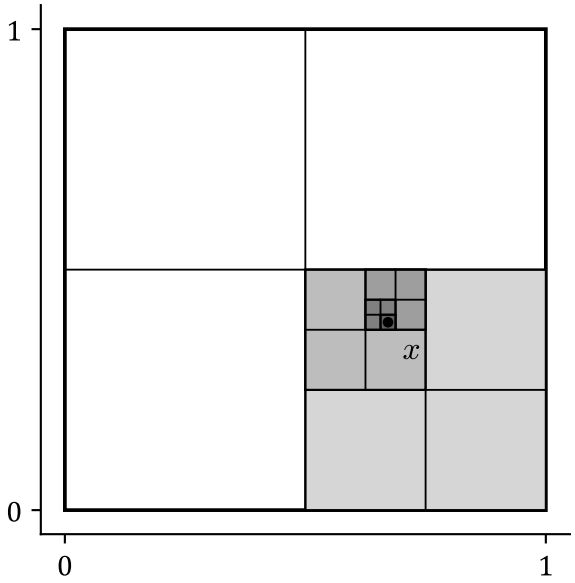


Figura 6: Bisección en el cuadrado: cada caja sin subcubierta finita se parte en cuatro y se conserva la primera que tampoco la tiene. Las cajas encajadas se cierran sobre el punto x.

Parte 2 · Heine–Borel

Teorema C3-010.T3

Todo cerrado contenido en un compacto es compacto.

Demostración. Sean $F \subset K$, F cerrado y K compacto, y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de F.

1. $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto (C3-008.D1), y $\mathcal{U} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus F\}$ cubre K.
2. Hay una subcubierta finita de K; al quitarle $\mathbb{R}^n \setminus F$ (si está) sigue cubriendo F, porque ningún punto de F está en $\mathbb{R}^n \setminus F$. Es una subfamilia finita de $\mathcal{U}$. ■

Teorema C3-010.T4 (Heine–Borel)

Para $K \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes: (i) K es compacto; (ii) K es cerrado y acotado; (iii) K es secuencialmente compacto.

> **Idea de la demostración**
>
> (II) ⇒ (i): K cabe en una caja y es cerrado en ella. (ii) ⇒ (iii): Bolzano–Weierstrass y «cerrado retiene límites». (iii) ⇒ (ii): si K no fuera acotado, una sucesión se iría al infinito.

Demostración.

1. (I) ⇒ (ii) es C3-010.T1.
2. (ii) ⇒ (i). Si $K \subset B(0,R)$, cada $x \in K$ cumple $|x_i| \leq |x| < R$ (C3-001.T5), así que $K \subset [-R,R]^n$, compacta por C3-010.T2. Como K es cerrado, es compacto (C3-010.T3).
3. (ii) ⇒ (iii). Una sucesión en K es acotada; tiene una subsucesión convergente (C3-009.T3), y su límite está en K porque K es cerrado (C3-009.T4).
4. (iii) ⇒ acotado. Si no lo fuera, para cada k el conjunto $\{x \in K : |x| > k\}$ sería no vacío; por C3-009.T0 hay x_k en él. Toda subsucesión cumple $|x_{k_m}| > k_m \geq m$ (C1-015.T0), así que no es acotada y no converge (C3-009.T1). Contradicción con (iii).
5. (iii) ⇒ cerrado. Sean $x_k \in K$ con $x_k \to x$. Por (iii), una subsucesión converge a un punto $p \in K$; también converge a x (C3-009.T1), y por la unicidad $x = p \in K$. Por C3-009.T4, K es cerrado. ■

Corolario C3-010.C1 (producto de compactos)

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^m$ son compactos, $K \times L \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es compacto.

Demostración.

1. Sea (x_k, y_k) una sucesión en $K \times L$ (C3-001.D1). Por (iii) de C3-010.T4 hay $x_{k_j} \to x \in K$.
2. (y_{k_j}) es una sucesión en L; hay una subsucesión $y_{k_{j_l}} \to y \in L$. La subsucesión correspondiente $x_{k_{j_l}}$ sigue tendiendo a x (C3-009.T1, C1-015.D1).
3. Por componentes (C3-009.T1), $(x_{k_{j_l}}, y_{k_{j_l}}) \to (x, y) \in K \times L$. Por C3-010.T4, $K \times L$ es compacto. ■

Teorema C3-010.T5 (compactos encajados)

Si $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ son compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, $\bigcap_k K_k \neq \emptyset$.

Demostración.

1. Por C3-009.T0 hay $x_k \in K_k$. Todos están en K_1, que es acotado (C3-010.T4); hay $x_{k_m} \to x$ (C3-009.T3).
2. Fijemos j. Para $m \geq j$, $k_m \geq m \geq j$ (C1-015.T0), así que $x_{k_m} \in K_{k_m} \subset K_j$.
3. La cola $(x_{k_m})_{m \geq j}$ es una sucesión en K_j que converge a x (C3-009.T1); como K_j es cerrado, $x \in K_j$ (C3-009.T4).
4. Así $x \in \bigcap_j K_j$. ■

Ejemplo C3-010.E1

$(0, 1]$ no es compacto: $(1/k, 2)$, $k \in \mathbb{N}$, lo cubren sin subcubierta finita. $\mathbb{R}^n$ no es compacto. Las bolas cerradas, las esferas, las cajas cerradas y los conjuntos finitos son compactos.

1. $(0, 1]$. Cada $(1/k, 2)$ es abierto. Si $x \in (0, 1]$, hay k con $1/k < x$ (C1-007.C1), y $x < 2$. Una subfamilia finita, con índice máximo m (C1-005.T13), tiene unión $(1/m, 2)$, que no contiene a $1/m \in (0, 1]$.
2. $\mathbb{R}^n$. No es acotado: $|ke_1| = k > R$ para $k > R$ (C1-007.C1). Por C3-010.T1 no es compacto.
3. *Bolas y esferas.* $\bar{B}(a, r)$ y la esfera son cerradas (C3-008.T1) y están en $B(0, |a| + r + 1)$ (C3-001.T4). Por C3-010.T4 son compactas. Las cajas cerradas: C3-010.T2.

4. *Finitos.* Dada una cubierta abierta de $\{p_1, \dots, p_k\}$, cada p_i está en algún abierto U_i de ella; $\{U_1, \dots, U_k\}$ es una subcubierta finita (se eligen k abiertos: una elección finita).

Por qué cada hipótesis

⚠ Cerrado

$(0, 1]$ es acotado y no es compacto: $1/k$ no tiene subsucesión que converja en $(0, 1]$, y las zonas encajadas $(0, 1/k]$ tienen intersección vacía (todo $x > 0$ queda fuera desde que $1/k < x$).

⚠ Acotado

$\mathbb{R}^n$ y la hipérbola $\{(x, y) : xy = 1\}$ son cerrados y no compactos: $(k, 1/k)$ no tiene subsucesión convergente. Y $\bigcup_k [0, k] = [0, \infty)$: una unión infinita de compactos puede no serlo.

⚠ Dimensión finita

En sucesiones con infinitas coordenadas y la norma del máximo, la bola cerrada unitaria es cerrada y acotada, pero (e_k) no tiene subsucesión convergente. Heine–Borel es un teorema de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios

1. ¿Cuántas bisecciones hacen falta para que las subcajas de $[0, 1]^2$ quepan en un disco de radio 0.01 alrededor de cualquiera de sus puntos, según la cota $D/2^k$?
2. Demuestra que la unión de dos compactos es compacta.
3. ¿Es compacto $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq x^2\}$? ¿Y $\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$?
4. Demuestra que si K es compacto y F es cerrado, $K \cap F$ es compacto.
5. Encuentra una cubierta abierta de $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ sin subcubierta finita.

Respuestas

1. $D = 2$: $2/2^k < 0.01 \iff 2^k > 200$; $k = 8$.
2. Cerrados y acotados (C3-008.T2, la unión de dos acotados es acotada) y C3-010.T4; o directamente, juntando dos subcubiertas finitas.

3. El primero sí: intersección de dos cerrados (preimágenes por funciones continuas, o directo con sucesiones y C3-009.T4), acotado. El segundo no: no es cerrado, porque $(0, 0)$ es límite de puntos $(1/(k\pi), 0)$ del conjunto y no está en él.
4. $K \cap F$ es cerrado (C3-008.T2) y está en K (C3-010.T3).
5. $B(0, 1 - 1/k)$, $k \geq 2$: una subfamilia finita está en $B(0, 1 - 1/m)$ y no cubre $(1 - 1/m)e_1$.

C3-011 · Conexidad

Motivación

> **El poste en la plaza y el río en el parque**
> En el mapa de un parque hay una plaza circular con un poste en el centro y, del otro lado, un río recto que cruza todo el parque, sin puentes. El río parte el parque en dos pedazos. ¿El poste parte la plaza?
> No: de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ se puede ir por la quebrada que pasa por $(0, 1)$, y esa vereda nunca se acerca al poste a menos de $\sqrt{2}/2 \approx 0.7071$. Pero «se puede caminar» no es todavía una definición de «estar de una pieza». La definición que usaremos no habla de caminos: un conjunto está de una pieza si no se puede repartir en dos abiertos disjuntos y no vacíos.
> Dónde falla la analogía: un poste real tiene grosor y un río tiene orillas; aquí el poste es un solo punto y la «orilla» no pertenece a ninguno de los dos pedazos.

Definiciones

Definición C3-011.D1 (conexo, por trayectorias, convexo)

$S \subset \mathbb{R}^n$ es **disconexo** si existen $A, B \subset S$ abiertos en S, disjuntos y no vacíos con $A \cup B = S$; **conexo** si no es disconexo. El **segmento** $[p, q] := \{p + t(q - p) : t \in [0, 1]\}$. S es **convexo** si $[p, q] \subset S$ para todos $p, q \in S$, y **conexo por trayectorias** si para todos $p, q \in S$ hay una curva $\gamma : [0, 1] \to S$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Una **región** es un abierto conexo.

«Abierto en S» es el de C3-008.D2. Para $n = 1$ y $p < q$, el segmento $[p, q]$ es el intervalo cerrado de siempre.

Resultados

Teorema C3-011.T1 (los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos)

$S \subset \mathbb{R}$ es conexo $\iff$ es un intervalo (si $x < z < y$ con $x, y \in S$, entonces $z \in S$).

> **Idea de la demostración**
> Si un intervalo se partiera en dos «colores» A y B, el último punto s hasta el que llega el primer color (un supremo) no podría ser de ningún color: por ser A y B abiertos en S, alrededor de s hay un pedazo entero de un solo color.

Demostración. Para ($\Leftarrow$), sea S un intervalo y supón que $S = A \cup B$ con A, B abiertos en S, disjuntos y no vacíos.

1. Toma $a \in A$ y $b \in B$. Como $A \cap B = \emptyset$, $a \neq b$; cambiando los nombres de A y B (la situación es simétrica) podemos suponer $a < b$ (C1-003.T1).
2. $a, b \in S$ y todo z con $a < z < b$ está en S (hipótesis), así que $[a, b] \subset S$ (C1-004.D2).
3. Sea $C := \{x \in [a, b] : [a, x] \subset A\}$. $a \in C$ porque $[a, a] = \{a\} \subset A$, y b es cota superior de C. Sea $s := \sup C$ (axioma S); $a \leq s \leq b$ (C1-006.D1).
4. $[a, s) \subset A$: si $a \leq x < s$, hay $c \in C$ con $c > x$ (C1-006.T2 con $\varepsilon = s - x$), y $x \in [a, c] \subset A$.
5. $s \in [a, b] \subset S = A \cup B$ (paso 2). Supón $s \in B$. Como B es abierto en S, hay $r > 0$ con $(s - r, s + r) \cap S \subset B$ (C3-008.T4; en $\mathbb{R}$, $B(s, r) = (s - r, s + r)$).
6. En ese caso $s \neq a$ (porque $a \in A$, $s \in B$ y $A \cap B = \emptyset$), así que $a < s$. El punto $x := \max(a, s - r/2)$ cumple $a \leq x < s$ y $s - r < x$; por el paso 4, $x \in A$, y por el paso 5, $x \in (s - r, s + r) \cap S \subset B$. Esto contradice $A \cap B = \emptyset$.
7. Supón $s \in A$. Entonces $s \neq b$ (porque $b \in B$), así que $s < b$. Como A es abierto en S, hay $r > 0$ con $(s - r, s + r) \cap S \subset A$ (C3-008.T4).
8. Sea $t := \min(s + r/2, b)$, de modo que $s < t \leq b$ (C1-003.T8). Por los pasos 4 y 7, $[a, s] \subset A$, y $[s, t] \subset (s - r, s + r) \cap [a, b] \subset (s - r, s + r) \cap S \subset A$. Así $[a, t] \subset A$, es decir, $t \in C$ con $t > s = \sup C$: contradicción (C1-006.D1).
9. Los pasos 5-8 descartan $s \in B$ y $s \in A$, y $s \in A \cup B$. La separación no existe: S es conexo.

Para ($\Rightarrow$), demostramos el contrarrecíproco.

10. Si S no es un intervalo, hay $x < z < y$ con $x, y \in S$ y $z \notin S$.
11. $(-\infty, z)$ y (z, ∞) son abiertos de $\mathbb{R}$: si $w < z$, $B(w, z - w) \subset (-\infty, z)$, y análogo para el otro (C3-008.D1). Por lo tanto $A := S \cap (-\infty, z)$ y $B := S \cap (z, \infty)$ son abiertos en S (C3-008.D2).
12. A y B son disjuntos, $x \in A$, $y \in B$, y como $z \notin S$, todo punto de S es $< z$ o $> z$ (C1-003.T1): $A \cup B = S$. Así S es disconexo. ■

⚠ Por qué «abiertos en S»

$[0, 1] = [0, 1/2] \cup (1/2, 1]$ es una unión de dos conjuntos disjuntos y no vacíos, y sin embargo $[0, 1]$ es conexo: $[0, 1/2]$ no es abierto en $[0, 1]$, porque toda bola alrededor de $1/2$ contiene puntos de $(1/2, 1]$ (C3-008.T4). Una separación exige que los dos pedazos sean abiertos.

Teorema C3-011.T2 (por trayectorias ⇒ conexo)

Todo conjunto conexo por trayectorias es conexo; en particular los convexos (bolas, cajas, $\mathbb{R}^n$) son conexos.

Idea de la demostración

Una separación de S se «jala» a $[0, 1]$ a lo largo de una curva que une un punto de cada pedazo, y eso contradice que $[0, 1]$ es conexo.

Demostración.

1. Sea S conexo por trayectorias y supón $S = A \cup B$ con A, B abiertos en S, disjuntos y no vacíos. Toma $a \in A$, $b \in B$ y una curva $\gamma : [0, 1] \to S$ con $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ (C3-011.D1).
2. Sean $A' := \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A\}$ y $B' := \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in B\}$. Son disjuntos, su unión es $[0, 1]$ (porque $\gamma(t) \in S = A \cup B$) y $0 \in A'$, $1 \in B'$.
3. A' es abierto en $[0, 1]$: si $t \in A'$, hay $r > 0$ con $B(\gamma(t), r) \cap S \subset A$ (C3-008.T4). Por la continuidad de γ en t (C3-002.D2) hay $\delta > 0$ tal que $s \in [0, 1]$ y $|s - t| < \delta$ implican $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r$, luego $\gamma(s) \in B(\gamma(t), r) \cap S \subset A$, es decir, $s \in A'$. Así $(t - \delta, t + \delta) \cap [0, 1] \subset A'$, y A' es abierto en $[0, 1]$ (C3-008.T4).
4. Lo mismo vale para B'. Entonces A', B' separan $[0, 1]$, que es un intervalo y por lo tanto conexo (C3-011.T1): contradicción. S es conexo.
5. *Convexos.* Si S es convexo y $p, q \in S$, $\gamma(t) := p + t(q - p)$ toma valores en $[p, q] \subset S$ y es continua: sus componentes $p_i + t(q_i - p_i)$ son polinomios en t (C3-002.T1, C1-022.T2). Así S es conexo por

trayectorias.

6. *Bolas.* Si $p, q \in B(a,r)$ y $t \in [0,1]$, por la desigualdad del triángulo (C3-001.T4) y $|cx| = |c||x|$ (C3-001.T2),

$$|p + t(q-p) - a| = |(1-t)(p-a) + t(q-a)| \leq (1-t)|p-a| + t|q-a| < (1-t)r + tr = r,$$

donde la desigualdad estricta vale porque $1-t$ y t no son ambos cero. Las bolas son convexas.

7. *Cajas y $\mathbb{R}^n$.* En una caja $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, cada componente de $p + t(q-p)$ está entre p_i y q_i, luego en $[a_i, b_i]$; $\mathbb{R}^n$ es convexo porque todo segmento está contenido en $\mathbb{R}^n$. ■

Teorema C3-011.T3 (abiertos conexos)

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, dos puntos cualesquiera de U se unen con una poligonal (unión finita de segmentos consecutivos) contenida en U.

Una poligonal de p a q en U es una lista $p = x_0, x_1, \ldots, x_k = q$ con $[x_{j-1}, x_j] \subset U$ para cada j.

Demostración.

1. Si $U = \emptyset$ no hay nada que probar. Fija $p \in U$ y sea P el conjunto de los $x \in U$ que se unen con p por una poligonal en U. $p \in P$ (la lista p, p, con $[p,p] = \{p\}$).
2. P es abierto: si $x \in P$, hay $r > 0$ con $B(x,r) \subset U$ (U abierto, C3-008.D1). Para $y \in B(x,r)$, $[x,y] \subset B(x,r) \subset U$ (las bolas son convexas, C3-011.T2), y agregando y al final de la poligonal de p a x se obtiene una de p a y: $B(x,r) \subset P$.
3. $U \setminus P$ es abierto: si $x \in U \setminus P$ y $B(x,r) \subset U$, ningún $y \in B(x,r)$ está en P, porque si lo estuviera, agregando $[y,x] \subset B(x,r)$ se uniría p con x. Así $B(x,r) \subset U \setminus P$.
4. P y $U \setminus P$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ contenidos en U, luego abiertos en U ($P = P \cap U$, C3-008.D2); son disjuntos y su unión es U. Como U es conexo y $P \neq \emptyset$, $U \setminus P = \emptyset$ (C3-011.D1): $P = U$. ■

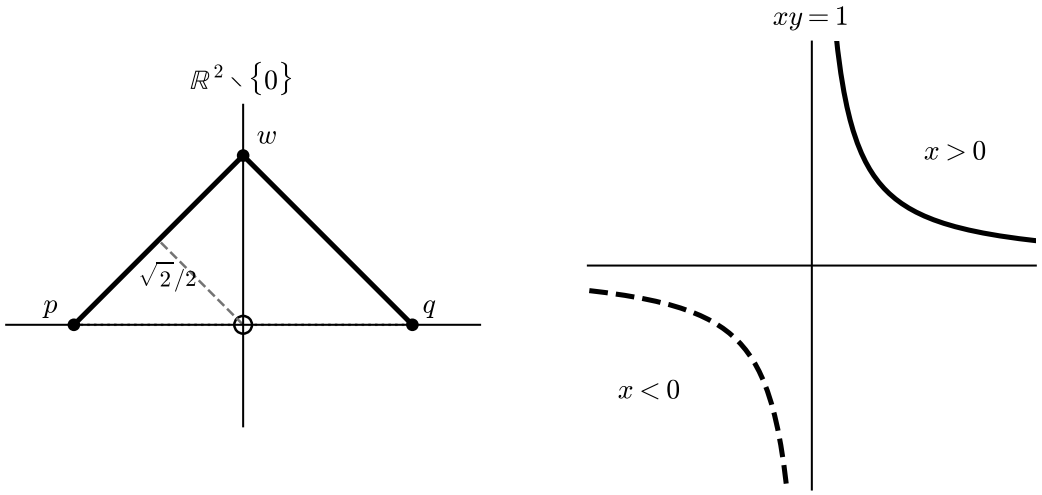


Figura 7: A la izquierda, la quebrada $p \to w \to q$ que rodea el origen en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. A la derecha, las dos ramas de la hipérbola $xy = 1$, cada una en un semiplano abierto.

Ejemplo C3-011.E1

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es disconexo; $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es conexo (dos puntos se unen por una poligonal que esquiva el origen); la hipérbola $\{(x, y) : xy = 1\}$ es disconexa (ramas $x > 0$ y $x < 0$).

1. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. No es un intervalo ($-1 < 0 < 1$ y 0 no está), así que es disconexo (C3-011.T1).
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sean $p, q \neq 0$. Si $0 \notin [p, q]$, el segmento sirve. Si $0 \in [p, q]$, sea $w := (-p_2, p_1)$: $w \neq 0$ y $w \cdot p = 0$. Para $t \in [0, 1]$, por Pitágoras (C3-001.T6, C3-001.T2),

$$|(1-t)p + tw|^2 = (1-t)^2|p|^2 + t^2|w|^2 > 0.$$

   Como $0 \in [p, q]$ y $p, q \neq 0$, $q = -\lambda p$ con $\lambda > 0$, así que también $w \perp q$ y $|(1-t)w + tq|^2 = (1-t)^2|w|^2 + t^2|q|^2 > 0$. La quebrada $p \to w \to q$ esquiva el origen: el conjunto es conexo por trayectorias, luego conexo (C3-011.T2). Con $p = (-1, 0)$, $w = (0, -1)$ o, por simetría, $w = (0, 1)$, la distancia mínima al origen es $\sqrt{2}/2$, en $t = 1/2$.
3. *La hipérbola H.* $\{x > 0\}$ es abierto: si $a_1 > 0$ y $|x - a| < a_1$, entonces $|x_1 - a_1| \leq |x - a| < a_1$ (C3-001.T2) y $x_1 > 0$; igual $\{x < 0\}$. Así $H_+ := H \cap \{x > 0\}$ y $H_- := H \cap \{x < 0\}$ son abiertos en H (C3-008.D2), disjuntos, no vacíos ($(1, 1)$ y $(-1, -1)$) y cubren H, porque $xy = 1$ impide $x = 0$.

Por qué cada hipótesis

⚠ En C3-011.T1, que S sea un intervalo

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ cumple todo salvo eso, y $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ lo separan.

⚠ En C3-011.T3, que U sea abierto

La circunferencia unitaria $\{|x| = 1\}$ es conexa (es conexa por trayectorias: $t \mapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ recorre los arcos), pero ningún segmento entre dos puntos distintos de ella queda dentro: si $|p| = |q| = 1$ y $p \neq q$, el punto medio cumple $|(p+q)/2| < 1$ (la igualdad en el triángulo exigiría $p = q$, C3-001.T3). No hay poligonales.

⚠ En C3-011.T3, que U sea conexo

$U := \{x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es abierto, pero $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ no se unen con una poligonal en U: si se pudiera, por C3-011.T2 la poligonal sería un conexo, y $\{x_1 > 0\}$, $\{x_1 < 0\}$ lo separarían.

Ejercicios

1. Demuestra que la unión de dos conexos con un punto en común es conexa.
2. ¿Es conexo $\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$? ¿Y $\{(x, y) : |x| > 1\}$?
3. Demuestra que si S es conexo y A es abierto y cerrado en S, entonces $A = \emptyset$ o $A = S$.
4. Demuestra que la caja abierta $(0, 1)^n$ es convexa.
5. ¿Cuál es la menor distancia al origen de la quebrada $(-2, 0) \to (0, 1) \to (2, 0)$?

Respuestas

1. Si $S = S_1 \cup S_2$ con $p \in S_1 \cap S_2$ y A, B separaran S con $p \in A$, entonces $A \cap S_i$, $B \cap S_i$ son abiertos en S_i (C3-008.D2) y disjuntos; como S_i es conexo y $p \in A \cap S_i$, $B \cap S_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$, luego $B = \emptyset$: absurdo.
2. Sí: es conexo por trayectorias (dos puntos se unen yendo en línea recta hacia afuera hasta radio $R := \max(|p|, |q|)$ y luego por el arco de radio R). No: $\{x > 1\}$ y $\{x < -1\}$ lo separan.
3. A y $S \setminus A$ son abiertos en S (C3-008.D2), disjuntos y cubren S; si ambos fueran no vacíos, S sería disconexo.

4. Cada componente de $p + t(q - p)$ está entre p_i y q_i, que están en $(0, 1)$.
5. El segmento de $(-2, 0)$ a $(0, 1)$ es la recta $x - 2y + 2 = 0$; su distancia al origen es $2/\sqrt{5} \approx 0.8944$, alcanzada en $(-2/5, 4/5)$, que está en el segmento. Por simetría, ese es el mínimo.

C3-012 · Límites y continuidad de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Motivación

> **El dron, el GPS y la altura del cerro**
> Un dron fotografía un cerro cuya altura es $h(x, y) = 100 + 3x - 2y$ metros (x, y en kilómetros). Su GPS tiene un error de posición. Para que el error en la altura sea menor que 1 m, ¿basta con que el error en cada coordenada sea pequeño, o hay que controlar la distancia en línea recta? Da lo mismo. Si $|\Delta x|, |\Delta y| < 0.2$, entonces $|\Delta h| \leq 3|\Delta x| + 2|\Delta y| < 1$. Si la distancia es menor que $1/\sqrt{13} \approx 0.2774$, entonces $|\Delta h| \leq \sqrt{13}\,|\Delta(x, y)| < 1$ (Cauchy–Schwarz). Controlar cada coordenada y controlar la distancia son equivalentes: es la primera parte de C3-012.T1.
> Dónde falla la analogía: un GPS real tiene un error que cambia con el tiempo y una altura que no es exactamente lineal; aquí el error es cualquier número δ y la fórmula de h es exacta.

Definiciones

Definición C3-012.D1 (funciones de varias variables)

$f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subset \mathbb{R}^n$; componentes $f_i : A \to \mathbb{R}$.

Definición C3-012.D2 (límite y continuidad)

Sea a un punto de acumulación de A. $\lim_{x \to a} f(x) = L :\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. f es **continua** en $a \in A :\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A : |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$; continua en A si lo es en cada punto. Con $n = 1$ la continuidad es la de C3-002.D2 (y, con $m = 1$, la de C1-022.D1), y el límite extiende al de C3-002.D2 y C1-017.D1: coinciden cuando A contiene a $(a - r, a) \cup (a, a + r)$.

Resultados

Teorema C3-012.T1 (unicidad, componentes, sucesiones)

El límite es único. $\lim_{x\to a} f = L \iff \lim_{x\to a} f_i = L_i$ para cada $i \iff$ para toda sucesión (x_k) en $A\setminus\{a\}$ con $x_k \to a$, $f(x_k)\to L$. f es continua en $a \iff$ cada f_i lo es $\iff f(x_k)\to f(a)$ para toda (x_k) en A con $x_k\to a$. Si $a\in A$ es de acumulación, f es continua en $a \iff \lim_{x\to a} f = f(a)$; en un punto aislado toda f es continua.

Idea de la demostración

Las componentes se controlan con $|y_i|\le|y|\le|y_1|+\cdots+|y_n|$. Para las sucesiones, una dirección es ε-δ directo; la otra, por contrarrecíproco: si el límite falla, se elige un «mal punto» a distancia menor que $1/k$ para cada k, y esa sucesión contradice la hipótesis.

Demostración.

1. *Unicidad.* Supón que $L\neq M$ son límites. Con $\varepsilon := |L-M|/2>0$ hay δ_L,δ_M como en C3-012.D2; sea $\delta := \min(\delta_L,\delta_M)$. Como a es de acumulación, hay $x\in A$ con $0<|x-a|<\delta$ (C3-008.D3). Entonces

$$|L-M|\le|L-f(x)|+|f(x)-M|<2\varepsilon=|L-M|$$

   (C3-001.T4): absurdo.
2. *Componentes, ⇒.* $|f_i(x)-L_i|\le|f(x)-L|$ (C3-001.T2), así que el δ de f para ε sirve para cada f_i.
3. *Componentes, ⇐.* Dado ε, sea δ_i el de f_i para ε/n y $\delta := \min(\delta_1,\dots,\delta_n)$ (C1-005.T13). Si $x\in A$ y $0<|x-a|<\delta$,

$$|f(x)-L|\le\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-L_i|<n\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

   (C3-001.T5, C1-005.T12).
4. *Sucesiones, ⇒.* Sea (x_k) en $A\setminus\{a\}$ con $x_k\to a$ y sea $\varepsilon>0$ con su δ. Hay K con $|x_k-a|<\delta$ para $k\ge K$ (C3-009.D1), y como $x_k\neq a$, $0<|x_k-a|<\delta$; luego $|f(x_k)-L|<\varepsilon$. Así $f(x_k)\to L$.
5. *Sucesiones, ⇐.* Supón que $\lim_{x\to a} f = L$ es falso. Entonces hay $\varepsilon_0>0$ tal que para todo $\delta>0$ existe $x\in A$ con $0<|x-a|<\delta$ y $|f(x)-L|\ge\varepsilon_0$. Con $\delta=1/k$, cada conjunto

$$A_k := \{x\in A : 0<|x-a|<1/k,\ |f(x)-L|\ge\varepsilon_0\}$$

es no vacío, y por la elección numerable en $\mathbb{R}^n$ (C3-009.T0) hay una sucesión con $x_k \in A_k$.

6. (x_k) está en $A \setminus \{a\}$ y $x_k \to a$: dado ε, si $1/N < \varepsilon$ (C1-007.C1), para $k \geq N$, $|x_k - a| < 1/k \leq 1/N < \varepsilon$. Pero $|f(x_k) - L| \geq \varepsilon_0$ para todo k, así que $f(x_k) \not\to L$: contradice la hipótesis.
7. *Continuidad.* Los pasos 2-6, con «$|x - a| < \delta$» en lugar de «$0 < |x - a| < \delta$», con $f(a)$ en lugar de L y con sucesiones en A (sin quitar a), dan las equivalencias para la continuidad.
8. *Si $a \in A$ es de acumulación.* La condición de continuidad es la del límite con $L = f(a)$ más el punto $x = a$, que la cumple siempre ($|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$). Así continua en $a \iff \lim_{x \to a} f = f(a)$.
9. *Si a es aislado.* Hay $r > 0$ con $B(a, r) \cap A = \{a\}$ (C3-008.D3). Con $\delta := r$, el único $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ es a, y $|f(a) - f(a)| < \varepsilon$: f es continua en a. ■

⚠ El axioma de elección escondido

En el paso 5 se elige un punto x_k por cada k. Es una elección numerable: por eso se cita C3-009.T0, la versión en $\mathbb{R}^n$ de EN (C1-012.Ax1). Sin un axioma así, la caracterización por sucesiones no se puede demostrar.

Teorema C3-012.T2 (álgebra y composición)

Sumas, productos por funciones reales, productos punto y normas de funciones continuas son continuos; cocientes f/g de funciones reales continuas, donde $g \neq 0$, también. Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es continua en a y $g : B \to \mathbb{R}^p$ ($f(A) \subset B$) es continua en $f(a)$, $g \circ f$ es continua en a. Las proyecciones $x \mapsto x_i$, los polinomios en n variables y $x \mapsto |x|$ son continuos en $\mathbb{R}^n$; la restricción de una continua es continua. Lo mismo para límites de sumas, productos, productos punto, normas y cocientes (con $\lim g \neq 0$); en la composición, si $\lim_{x \to a} f = L$ y g es continua en L, $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(L)$.

Demostración. Todo se reduce a sucesiones con C3-012.T1.

1. *Operaciones.* Sean f, g continuas en a (con valores en $\mathbb{R}^m$) y c real continua en a. Si $x_k \to a$ en A, entonces $f(x_k) \to f(a)$, $g(x_k) \to g(a)$, $c(x_k) \to c(a)$ (C3-012.T1), y por el álgebra de sucesiones en $\mathbb{R}^m$ (C3-009.T1) $f(x_k) + g(x_k) \to f(a) + g(a)$, $c(x_k)f(x_k) \to c(a)f(a)$, $f(x_k) \cdot g(x_k) \to f(a) \cdot g(a)$ y $|f(x_k)| \to |f(a)|$. Por C3-012.T1, las cuatro funciones son continuas en a.
2. *Cocientes.* Si f, g son reales, continuas en a y $g \neq 0$ en A, para $x_k \to a$ se tiene $g(x_k) \to g(a) \neq 0$ y $f(x_k)/g(x_k) \to f(a)/g(a)$ (C1-013.T2).
3. *Composición.* Si $x_k \to a$ en A, $f(x_k) \to f(a)$ en B (C3-012.T1) y, por la continuidad de g en $f(a)$, $g(f(x_k)) \to g(f(a))$. Por C3-012.T1, $g \circ f$ es continua en a.

4. *Proyecciones y norma.* $|x_i - a_i| \le |x - a|$ (C3-001.T2) y $\big||x| - |a|\big| \le |x - a|$ (C3-001.T4): con $\delta := \varepsilon$ se cumple C3-012.D2. Las constantes son continuas (δ cualquiera).
5. *Polinomios.* Un monomio $c\,x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ es producto de una constante y de proyecciones; por el paso 1 e inducción en el número de factores (C1-005.T1) es continuo, y un polinomio es una suma finita de monomios (otra inducción).
6. *Restricción.* Si f es continua en a y $A' \subset A$ contiene a a, el mismo δ sirve para $x \in A'$ (C3-012.D2).
7. *Límites.* Los pasos 1-3 con sucesiones en $A \setminus \{a\}$ y la caracterización de límites de C3-012.T1 dan las reglas para límites. En la composición, si $x_k \to a$ con $x_k \neq a$, $f(x_k) \to L$ y, por la continuidad de g en L, $g(f(x_k)) \to g(L)$. ■

Teorema C3-012.T3 (las lineales son lipschitzianas)

Para A $m \times n$ y $\|A\|_F := \big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\big)^{1/2}$: $|Ax| \le \|A\|_F |x|$ y $|Ax - Ay| \le \|A\|_F |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$; toda transformación lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua.

Demostración.

1. Sea $a^{(i)} := (a_{i1}, \dots, a_{in})$ la fila i de A. Por C3-007.D4, $(Ax)_i = a^{(i)} \cdot x$, y por Cauchy–Schwarz (C3-001.T3), $(Ax)_i^2 \le |a^{(i)}|^2 |x|^2 = \big(\sum_j a_{ij}^2\big)|x|^2$ (C3-001.T2).
2. Sumando sobre i (C1-005.T12),

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i^2 \le \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)|x|^2 = \|A\|_F^2 |x|^2,$$

   y como $\sqrt{\ }$ es creciente (C2-014.T1), $|Ax| \le \|A\|_F |x|$.
3. $x \mapsto Ax$ es lineal (C3-007.T3), así que $Ax - Ay = A(x - y)$ y $|Ax - Ay| \le \|A\|_F |x - y|$ (paso 2).
4. Dado $\varepsilon > 0$, $\delta := \varepsilon/(\|A\|_F + 1)$ cumple: $|x - y| < \delta \Rightarrow |Ax - Ay| < \varepsilon$. Así $x \mapsto Ax$ es continua (C3-012.D2). Toda lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es $x \mapsto Ax$ para una matriz A (C3-007.T3). ■

Teorema C3-012.T4 (continuidad y abiertos)

$f : A \to \mathbb{R}^m$ es continua en A $\iff$ para todo abierto $V \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(V)$ es abierto en A $\iff$ para todo cerrado $F \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(F)$ es cerrado en A. En particular, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, $\{f > c\}$ es abierto y $\{f = c\}$, $\{f \le c\}$ son cerrados.

Idea de la demostración

Una bola alrededor de $f(a)$ dentro de V se «jala», con el δ de la continuidad, a una bola alrededor de a; y al revés, la bola $B(f(a), \varepsilon)$ es un abierto, y el radio que da su preimagen es el δ.

Demostración.

1. *(⇒)* Sean $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $a \in f^{-1}(V)$. Hay $\varepsilon > 0$ con $B(f(a), \varepsilon) \subset V$ (C3-008.D1).
2. Por la continuidad en a hay $\delta > 0$ tal que $x \in A$ y $|x - a| < \delta$ implican $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (C3-012.D2), es decir, $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V$. Así $B(a, \delta) \cap A \subset f^{-1}(V)$, y $f^{-1}(V)$ es abierto en A (C3-008.T4).
3. *(⇐)* Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. $V := B(f(a), \varepsilon)$ es abierto (C3-008.T1) y $a \in f^{-1}(V)$.
4. Por hipótesis $f^{-1}(V)$ es abierto en A, así que hay $r > 0$ con $B(a, r) \cap A \subset f^{-1}(V)$ (C3-008.T4). Con $\delta := r$: $x \in A$, $|x - a| < \delta$ implican $f(x) \in V$, es decir, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. f es continua en a.
5. *Cerrados.* Para $F \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F) = A \setminus f^{-1}(F)$. F es cerrado $\iff \mathbb{R}^m \setminus F$ es abierto, y $f^{-1}(F)$ es cerrado en $A \iff A \setminus f^{-1}(F)$ es abierto en A (C3-008.D2). Así la condición con cerrados equivale a la condición con abiertos.
6. *Caso $A = \mathbb{R}^n$, $m = 1$.* (c, ∞) es abierto: si $u > c$, $B(u, u - c) \subset (c, \infty)$ (C3-008.D1); lo mismo $(-\infty, c)$. Por lo tanto $\{c\}$ y $(-\infty, c]$ son cerrados, pues sus complementos $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$ y (c, ∞) son abiertos (C3-008.T2). Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto (cerrado) en $\mathbb{R}^n$ es abierto (cerrado), porque $U \cap \mathbb{R}^n = U$. Así $\{f > c\} = f^{-1}((c, \infty))$ es abierto y $\{f = c\} = f^{-1}(\{c\})$, $\{f \leq c\} = f^{-1}((-\infty, c])$ son cerrados. ■

⚠ Preimágenes, no imágenes

Una continua no manda abiertos en abiertos: $f(x) = x^2$ manda $(-1, 1)$ en $[0, 1)$, que no es abierto. C3-012.T4 habla de $f^{-1}(V)$.

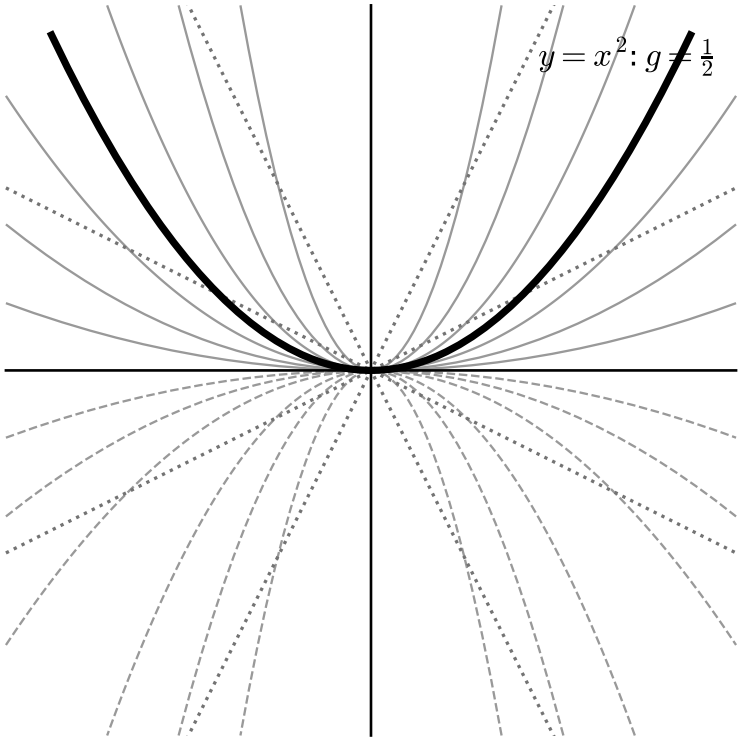


Figura 8: Curvas de nivel de $g(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$. Sobre cada recta por el origen (punteadas) $g \to 0$, pero sobre la parábola $y = x^2$ (trazo grueso) g vale $1/2$.

Ejemplo C3-012.E1 (las rectas no bastan)
$f(x,y) := xy/(x^2+y^2)$ no tiene límite en $(0,0)$: sobre $y = mx$ vale $m/(1+m^2)$. $g(x,y) := x^2y/(x^4+y^2)$ tiende a 0 sobre toda recta por el origen y vale $1/2$ sobre $y = x^2$. En cambio $h(x,y) := x^2y/(x^2+y^2) \to 0$, porque $|h| \le |y|$.

1. *f.* Para $x \neq 0$, $f(x,mx) = mx^2/(x^2(1+m^2)) = m/(1+m^2)$. Con $x_k := (1/k, 0)$ y $y_k := (1/k, 1/k)$, ambas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y con límite 0 (C1-012.T2, C3-009.T1), $f(x_k) = 0$ y $f(y_k) = 1/2$. Si hubiera límite L, ambas sucesiones darían L (C3-012.T1): $0 = 1/2$, absurdo.
2. *g sobre rectas.* Para $x \neq 0$, $g(x,mx) = mx^3/(x^4+m^2x^2) = mx/(x^2+m^2)$, que tiende a 0 cuando $x \to 0$ (si $m \neq 0$, por el álgebra de límites en una variable, C1-013.T2; si $m = 0$ vale 0). Sobre $x = 0$, $g(0,y) = 0$.
3. *g sobre la parábola.* Para $x \neq 0$, $g(x,x^2) = x^4/(2x^4) = 1/2$. Con $z_k := (1/k, 1/k^2) \to 0$, $g(z_k) = 1/2$, mientras que $g(1/k, 0) = 0$: por C3-012.T1, g no tiene límite en 0.

4. *h.* $|h(x,y)| = |y|\,x^2/(x^2+y^2) \le |y| \le |(x,y)|$ (C3-001.T2), así que con $\delta := \varepsilon$, $0 < |(x,y)| < \delta$ implica $|h(x,y)| < \varepsilon$: $\lim_{(x,y)\to 0} h = 0$.

Ejemplo C3-012.E2 (continua en cada variable no basta)
Con $f(0,0) := 0$, la f de C3-012.E1 es continua en x para cada y fijo y en y para cada x fijo, y no es continua en $(0,0)$.

1. Para $y_0 \neq 0$, $x \mapsto xy_0/(x^2+y_0^2)$ es un cociente de polinomios con denominador positivo: continua en $\mathbb{R}$ (C1-022.T2). Para $y_0 = 0$, $x \mapsto f(x,0) = 0$ es constante. Lo mismo en la otra variable.
2. En $(0,0)$: $f(1/k, 1/k) = 1/2 \not\to 0 = f(0,0)$, así que f no es continua en el origen (C3-012.T1).

Por qué cada hipótesis

⚠ Que a sea punto de acumulación

Si $A = \{0, (1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ y $a = (1,0)$, para $\delta \le 1$ no hay $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$: la condición de C3-012.D2 se cumple para todo L, y la unicidad del límite falla. Por eso los límites solo se toman en puntos de acumulación.

⚠ «Toda sucesión», no algunas

En C3-012.T1 la condición es sobre **todas** las sucesiones. Las rectas por el origen son solo algunas maneras de acercarse: g de C3-012.E1 tiende a 0 sobre todas ellas y no tiene límite.

⚠ En C3-012.T4, continuidad en todo A

$f(x) = 0$ si $x \le 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$: $f^{-1}((-1/2, 1/2)) = (-\infty, 0]$ no es abierto. La caracterización pide continuidad en cada punto.

Ejercicios

1. Demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y/(x^2+y^2) = 0$.
2. ¿Tiene límite en el origen $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$?
3. Demuestra que $\{(x,y) : x^2+y^2 < 10\}$ es abierto usando C3-012.T4.
4. Sea A 2×2 con filas $(3,-2)$ y $(0,0)$. Calcula $\|A\|_F$ y verifica $|Ax| \le \|A\|_F|x|$ con $x=(3,-2)$.
5. Da una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y un cerrado F tales que $f(F)$ no sea cerrado.

Respuestas

1. $|x^3y|/(x^2+y^2) \le |x||y|\,x^2/(x^2+y^2) \le |x||y| \le |(x,y)|^2$ (C3-001.T2); con $\delta := \min(1,\varepsilon)$.
2. No: sobre el eje x vale 1 y sobre el eje y vale -1 (C3-012.T1).
3. $T(x,y)=x^2+y^2$ es continua (polinomio, C3-012.T2) y el conjunto es $T^{-1}((-\infty,10))$.
4. $\|A\|_F=\sqrt{13}\approx 3.6056$; $Ax=(13,0)$, $|Ax|=13=\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=\|A\|_F|x|$: la cota se alcanza.
5. $f(x,y)=x$ y la hipérbola $F=\{xy=1\}$ (cerrada: $\{xy=1\}$ es un conjunto de nivel de un polinomio, C3-012.T4). $f(F)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ no es cerrado.

C3-013 · Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Motivación

> **El radar de la base de drones**
> El radar de una base de drones no da coordenadas (x, y): da la distancia r al dron y su rumbo θ, medido desde el este, entre $-\pi$ y π. ¿Cada posición tiene un único par (distancia, rumbo)? Sí, salvo la base misma. Pero si un dron pasa justo al oeste de la base, de un poco al norte a un poco al sur, la lectura del rumbo salta: en $(-1, 0.001)$ vale ≈ 3.140593 y en $(-1, -0.001)$ vale ≈ -3.140593. Un movimiento de 0.002 cambia la lectura en casi 2π.
> Dónde falla la analogía: los radares reales miden el rumbo desde el norte y en sentido horario, de 0° a 360°; aquí se mide desde el eje x, en sentido antihorario, en $(-\pi, \pi]$.

Definiciones

Definición C3-013.D1 (polares, cilíndricas, esféricas)

Polares $P(r, \theta) := (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$; cilíndricas $C(r, \theta, z) := (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)$; esféricas $E(\rho, \varphi, \theta) := (\rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\varphi)$.

Las funciones sen y cos son las de C2-014.D4, sin ninguna ⚠: todo lo que se usa de ellas está demostrado en Cálculo II.

Resultados

Teorema C3-013.T1 (polares)

(a) P es continua en $\mathbb{R}^2$ y $|P(r,\theta)| = |r|$. (b) Todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es $P(r,\theta)$ para un único $r > 0$ y un único $\theta \in (-\pi, \pi]$; $r = |x|$, y $\theta =: \arg x$. (c) arg es continua en $\mathbb{R}^2$ sin la semirrecta $\{(t,0) : t \leq 0\}$.

Idea de la demostración

r es la norma. El ángulo «sin signo» con el eje positivo es $\arccos(x_1/r) \in [0,\pi]$, y el signo lo pone x_2. La unicidad sale de que cos es inyectiva en $[0,\pi]$, y la continuidad de arg, de tres fórmulas continuas en tres abiertos que cubren el plano cortado.

Demostración.

1. *(a)* Las componentes $(r,\theta) \mapsto r\cos\theta$ y $r\operatorname{sen}\theta$ son productos de una proyección por la composición de cos (o sen) con una proyección, y cos, sen son continuas (C2-014.T5): por C3-012.T2, P es continua.
2. Por C2-014.T5,

$$|P(r,\theta)|^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2,$$

así que $|P(r,\theta)| = \sqrt{r^2} = |r|$ (C2-014.D1, C1-004.T6).
3. *(b), existencia.* Sea $x \neq 0$ y $r := |x| > 0$ (C3-001.T2). Como $|x_1| \leq |x|$ (C3-001.T2), $x_1/r \in [-1,1]$ y $\theta_0 := \arccos(x_1/r) \in [0,\pi]$ cumple $\cos\theta_0 = x_1/r$ (C2-014.D6).
4. En $[0,\pi]$, $\operatorname{sen}\theta_0 \geq 0$ (C2-014.T4), y

$$\operatorname{sen}^2\theta_0 = 1 - \cos^2\theta_0 = 1 - \frac{x_1^2}{r^2} = \frac{x_2^2}{r^2}.$$

Dos números ≥ 0 con el mismo cuadrado son iguales (C1-003.T9), así que $\operatorname{sen}\theta_0 = |x_2|/r$.
5. Si $x_2 \geq 0$, sea $\theta := \theta_0 \in [0,\pi]$: $P(r,\theta) = (x_1, |x_2|) = x$. Si $x_2 < 0$, sea $\theta := -\theta_0$: por la paridad (C2-014.T5), $\cos\theta = x_1/r$ y $\operatorname{sen}\theta = -|x_2|/r = x_2/r$, así que $P(r,\theta) = x$. Además $\operatorname{sen}\theta_0 > 0$, y como $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = 0$ (C2-014.T4), $\theta_0 \in (0,\pi)$ y $\theta \in (-\pi, 0)$. En ambos casos $\theta \in (-\pi,\pi]$.
6. *(b), unicidad.* Supón $P(r,\theta) = P(r',\theta') = x$ con $r, r' > 0$ y $\theta, \theta' \in (-\pi,\pi]$. Por el paso 2, $r = |x| = r'$, y dividiendo entre r: $\cos\theta = \cos\theta'$, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$.
7. En $(-\pi, 0)$ el seno es negativo: si $-\pi < t < 0$, $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(-t) < 0$ (C2-014.T5, C2-014.T4).

Así que si $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, θ y θ' están en $[0,\pi]$, donde cos es estrictamente decreciente (C2-014.T4), y $\cos\theta = \cos\theta'$ da $\theta = \theta'$.

8. Si $\operatorname{sen}\theta < 0$, $\theta, \theta' \in (-\pi, 0)$, luego $-\theta, -\theta' \in (0,\pi)$ con $\cos(-\theta) = \cos(-\theta')$ (C2-014.T5): $\theta = \theta'$.
9. *(c)* Sea $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) : t \leq 0\}$. Si $x \in D$ y $x_2 = 0$, entonces $x_1 > 0$. Así $D = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ con $U_1 := \{x_2 > 0\}$, $U_2 := \{x_2 < 0\}$, $U_3 := \{x_1 > 0\}$, abiertos por C3-012.T4 (preimágenes de $(0,\infty)$ y $(-\infty, 0)$ por las proyecciones, continuas por C3-012.T2).
10. En U_1, $\arg x = \operatorname{arc\,cos}(x_1/|x|)$ y en U_2, $\arg x = -\operatorname{arc\,cos}(x_1/|x|)$ (paso 5). En U_3, $\cos(\arg x) = x_1/|x| > 0$; como cos ≤ 0 en $[\pi/2, \pi]$ ($\cos(\pi/2) = 0$ y cos decrece, C2-014.C1, C2-014.T4) y cos es par, $\arg x \in (-\pi/2, \pi/2)$, donde arcsen invierte al seno (C2-014.D6): $\arg x = \operatorname{arcsen}(x_2/|x|)$.
11. Las tres fórmulas son continuas en sus abiertos: arc cos y arcsen lo son en $[-1, 1]$ (C2-014.T11), $|x| \neq 0$ ahí, y se aplica C3-012.T2 (cociente, composición).
12. Sea $a \in D$, en U_i, con $B(a,\rho) \subset U_i$. Si g_i es la fórmula continua de U_i, dado ε hay δ con $|g_i(x) - g_i(a)| < \varepsilon$ para $|x - a| < \delta$, $x \in U_i$; con $\min(\delta, \rho)$, como $\arg = g_i$ en $B(a,\rho)$, $|\arg x - \arg a| < \varepsilon$. Así arg es continua en a (C3-012.D2). ■

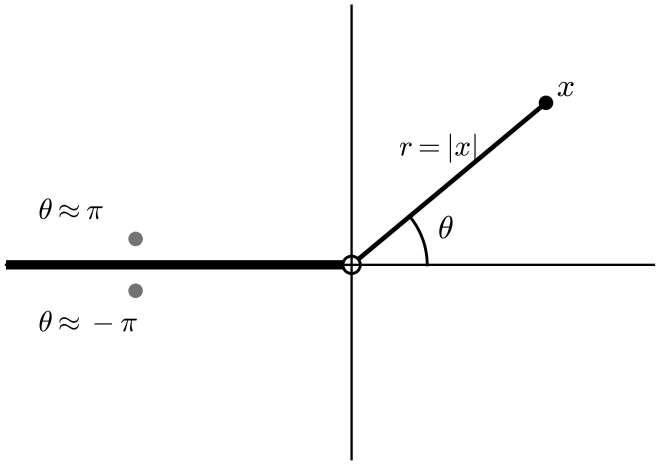


Figura 9: El argumento $\theta = \arg x$ y la semirrecta quitada $\{(t,0) : t \leq 0\}$ (trazo grueso): a un lado θ está cerca de π, al otro, cerca de $-\pi$.

Teorema C3-013.T2 (cilíndricas y esféricas)

C y E son continuas. $|E(\rho,\varphi,\theta)| = |\rho|$. Todo $x \in \mathbb{R}^3$ con $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ es $E(\rho,\varphi,\theta)$ para únicos $\rho > 0$, $\varphi \in (0,\pi)$ y $\theta \in (-\pi,\pi]$, con $\rho = |x|$ y $\varphi = \operatorname{arc\,cos}(x_3/\rho)$.

Demostración.

1. *Continuidad.* Las componentes de C y E son productos de proyecciones y de sen, cos compuestas con proyecciones: continuas (C2-014.T5, C3-012.T2).
2. *Norma.* Por C2-014.T5 dos veces,

$$|E|^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2,$$

   y $|E| = |\rho|$ (C2-014.D1, C1-004.T6).
3. *Existencia.* Sea $\rho := |x| > 0$. Como $x_1^2 + x_2^2 > 0$, $x_3^2 < \rho^2$, es decir, $x_3/\rho \in (-1, 1)$. Sea $\varphi := \arccos(x_3/\rho) \in [0, \pi]$ (C2-014.D6); como $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ (C2-014.T4) y $x_3/\rho \neq \pm 1$, $\varphi \in (0, \pi)$.
4. $\operatorname{sen}\varphi > 0$ y $\operatorname{sen}^2\varphi = 1 - x_3^2/\rho^2 = (x_1^2 + x_2^2)/\rho^2$, así que $\rho \operatorname{sen}\varphi = |(x_1, x_2)| > 0$ (C1-003.T9). Por C3-013.T1 (b), $(x_1, x_2) = P(\rho \operatorname{sen}\varphi, \theta)$ con $\theta := \arg(x_1, x_2)$, y entonces $E(\rho, \varphi, \theta) = x$.
5. *Unicidad.* Si $E(\rho', \varphi', \theta') = x$ con $\rho' > 0$, $\varphi' \in (0, \pi)$, $\theta' \in (-\pi, \pi]$: $\rho' = |x| = \rho$ (paso 2), $\cos\varphi' = x_3/\rho = \cos\varphi$, y cos es inyectiva en $[0, \pi]$ (C2-014.T4): $\varphi' = \varphi$. Entonces $P(\rho \operatorname{sen}\varphi, \theta') = (x_1, x_2) = P(\rho \operatorname{sen}\varphi, \theta)$ con $\rho \operatorname{sen}\varphi > 0$, y por C3-013.T1 (b), $\theta' = \theta$. ■

Ejemplo C3-013.E1 (límites en polares)
$x^3/(x^2 + y^2) \to 0$ en el origen: en polares vale $r\cos^3\theta$ y $|r\cos^3\theta| \leq r$. La cota debe ser **uniforme en** θ: para g de C3-012.E1, $g(P(r, \theta)) \to 0$ con θ fijo, y sin embargo g no tiene límite.

1. Para $(x, y) \neq 0$, con $r := |(x, y)|$ y $\theta := \arg(x, y)$ (C3-013.T1), $x = r\cos\theta$ y $x^2 + y^2 = r^2$, así que

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = r\cos^3\theta.$$

2. $|r\cos^3\theta| = r|\cos\theta|^3 \leq r$ (C1-004.T2, C2-014.T5). Dado ε, $\delta := \varepsilon$: si $0 < r < \delta$, el valor está a menos de ε de 0, **sin importar** θ. Así el límite es 0 (C3-012.D2).
3. *El contraejemplo.* Para $g(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$ y θ fijo con $\operatorname{sen}\theta \neq 0$,

$$g(P(r, \theta)) = \frac{r\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta} \to 0 \quad (r \to 0),$$

   y si $\operatorname{sen}\theta = 0$, $g(P(r, \theta)) = 0$. Pero la cota depende de θ: el denominador se hace pequeño cuando sen θ es pequeño. Sobre la parábola $y = x^2$, θ cambia con r y $g = 1/2$ (C3-012.E1).

Por qué cada hipótesis

⚠ $x \neq 0$ **y** $\theta \in (-\pi, \pi]$

$P(0, \theta) = 0$ para todo θ: en el origen no hay ángulo. Y $P(r, \theta) = P(r, \theta + 2\pi)$ (C2-014.T5): sin restringir θ a un intervalo de longitud 2π, semiabierto, no hay unicidad.

⚠ **Quitar la semirrecta** $(t, 0) : t \leq 0$

$x_k := (-1, 1/k)$ y $y_k := (-1, -1/k)$ tienden a $(-1, 0)$, y por el paso 10 de la demostración, $\arg x_k = \arccos(-1/|x_k|) \to \arccos(-1) = \pi$ y $\arg y_k \to -\pi$ (C2-014.T11, C3-012.T2). Si arg fuera continua en $(-1, 0)$, ambas darían $\arg(-1, 0) = \pi$ (C3-012.T1). En el origen, arg ni siquiera está definida.

Ejercicios

1. Escribe $(1, -1)$ en polares y $(1, 1, \sqrt{2})$ en esféricas.
2. Demuestra con polares que $x^2y^2/(x^2 + y^2) \to 0$ en el origen.
3. ¿Tiene límite $xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ en el origen?
4. Demuestra que $\arg(-x) = \arg x - \pi$ si $x_2 > 0$.
5. Explica por qué «$g(P(r, \theta)) \to 0$ para cada θ» no basta para que g tenga límite.

Respuestas

1. $r = \sqrt{2}, \theta = -\arccos(1/\sqrt{2}) = -\pi/4$ (C2-014.C1). $\rho = 2, \varphi = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4, \theta = \pi/4$.
2. Vale $r^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta$, y $|\cdot| \leq r^2$, uniforme en θ.
3. Sí, 0: vale $r \cos\theta \operatorname{sen}\theta$ y $|\cdot| \leq r$.
4. Si $\arg x = \theta \in (0, \pi)$, $-x = P(r, \theta - \pi)$ por $\cos(t - \pi) = -\cos t$, $\operatorname{sen}(t - \pi) = -\operatorname{sen} t$ (C2-014.C1), y $\theta - \pi \in (-\pi, 0)$: por la unicidad, $\arg(-x) = \theta - \pi$.
5. «Para cada θ» es acercarse por rectas; un límite pide controlar todas las sucesiones (C3-012.T1), y para eso la cota debe ser la misma para todos los θ.

C3-014 · Funciones continuas en compactos y en conexos

Motivación

> **Dos placas calientes**
> Una placa cuadrada de metal de lado 1 m, con su borde, tiene temperatura $T(x,y) = 20 + 480\,x(1-x)\,y(1-y)$ °C. Otra, sin borde (el cuadrado abierto), se calienta desde su lado derecho: $S(x,y) = 20 + 30x$. ¿Cada placa tiene un punto más caliente?
> La primera sí: 50 °C en $(1/2, 1/2)$. La segunda no: $S < 50$ en todo punto, pero $S(0.999, y) = 49.97$ y hay valores tan cerca de 50 como se quiera. La diferencia es que $[0,1]^2$ es compacto y $(0,1)^2$ no. Es el teorema de Weierstrass de Cálculo I, ahora en $\mathbb{R}^n$.
> Dónde falla la analogía: una placa real tiene grosor y la temperatura se mide con error, así que «el punto más caliente» es una zona; aquí es un punto exacto.

Resultados en compactos

Teorema C3-014.T1 (imagen de un compacto)
Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}^m$ es continua, $f(K)$ es compacto.

> **Idea de la demostración**
> Una sucesión en la imagen viene de una sucesión en K; esta tiene una subsucesión convergente en K, y la continuidad lleva su límite a la imagen.

Demostración.

1. Sea (y_k) una sucesión en $f(K)$. Cada conjunto $\{x \in K : f(x) = y_k\}$ es no vacío; por la elección

numerable en $\mathbb{R}^n$ (C3-009.T0) hay una sucesión (x_k) en K con $f(x_k) = y_k$.

2. K es compacto, luego secuencialmente compacto (C3-010.T4): hay una subsucesión $x_{k_j} \to x \in K$ (C1-015.D1).
3. Por la continuidad de f en x (C3-012.T1), $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \to f(x)$, y $f(x) \in f(K)$.
4. Toda sucesión en $f(K)$ tiene una subsucesión que converge en $f(K)$: $f(K)$ es secuencialmente compacto, luego compacto (C3-010.T4). ■

Corolario C3-014.C1 (Weierstrass en $\mathbb{R}^n$)

Si $K \neq \emptyset$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, f alcanza un máximo y un mínimo en K.

Demostración.

1. Por C3-014.T1, $f(K) \subset \mathbb{R}$ es compacto, luego cerrado y acotado (C3-010.T4); es no vacío porque K lo es. Sea $s := \sup f(K)$ (axioma S).
2. Sea $r > 0$. La bola $B(s, r)$ de $\mathbb{R}$ es $(s - r, s + r)$ (C1-004.T3). Contiene un punto de $f(K)$: como $s - r < s$, hay $y \in f(K)$ con $s - r < y \leq s$ (C1-006.T2). Y contiene un punto fuera de $f(K)$: $s + r/2$, que es mayor que el supremo.
3. Si $s \notin f(K)$, el paso 2 dice que toda bola alrededor de s corta a $f(K)$ y a su complemento: $s \in \partial f(K)$ (C3-008.D1). Pero $f(K)$ es cerrado, así que $\partial f(K) \subset f(K)$ (C3-008.T3), y $s \in f(K)$: contradicción.
4. Así $s \in f(K)$: $s = f(x_2)$ para algún $x_2 \in K$, y $f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$. No se eligió ninguna sucesión, así que no hace falta EN.
5. $f(K)$ es acotado inferiormente; su ínfimo existe (C1-006.T3), y los pasos 2-4 con $\inf f(K)$ y el punto $\inf f(K) - r/2$ dan $x_1 \in K$ con $f(x_1) = \inf f(K)$. ■

Definición C3-014.D1 (continuidad uniforme, Lipschitz)

$f : A \to \mathbb{R}^m$ es **uniformemente continua** en A si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$; es **lipschitziana** si existe $L \geq 0$ con $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Lo segundo implica lo primero, y lo primero la continuidad.

La afirmación final se comprueba así: si f es lipschitziana con constante L, $\delta := \varepsilon/(L + 1)$ da $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < \varepsilon$; si es uniformemente continua, fijando $y = a$ se obtiene la continuidad en a (C3-012.D2).

Teorema C3-014.T2 (Heine en $\mathbb{R}^n$)

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}^m$ es continua, f es uniformemente continua en K.

Demostración.

1. Supón que no. Entonces hay $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada k existen $x, y \in K$ con $|x - y| < 1/k$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. Por C3-009.T0 (en $\mathbb{R}^{2n}$, para pares) se eligen sucesiones (x_k), (y_k) en K con esas propiedades.
2. Por C3-010.T4 hay una subsucesión $x_{k_j} \to x \in K$. Como $k_j \geq j$ (C1-015.T0),

$$|y_{k_j} - x| \leq |y_{k_j} - x_{k_j}| + |x_{k_j} - x| < \frac{1}{j} + |x_{k_j} - x|,$$

   que tiende a 0 (C3-001.T4, C1-007.C1): $y_{k_j} \to x$.
3. Por la continuidad en x (C3-012.T1), $f(x_{k_j}) \to f(x)$ y $f(y_{k_j}) \to f(x)$, así que $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \to 0$ (C3-009.T1).
4. Pero $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \geq \varepsilon_0$ para todo j: contradicción. ■

Márgenes y conexos

Teorema C3-014.T3 (distancia a un cerrado; margen alrededor de un compacto)

(a) Si $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y no vacío, $d(x, F) := \inf\{|x - y| : y \in F\}$ se alcanza en algún $y \in F$, cumple $|d(x, F) - d(z, F)| \leq |x - z|$, y $d(x, F) = 0 \iff x \in F$. (b) Si $K \subset U$ con K compacto y U abierto, existe $r > 0$ con $B(x, r) \subset U$ para todo $x \in K$.

> **Idea de la demostración**
>
> (a) Se minimiza $|x - \cdot|$ en el compacto $F \cap \bar{B}(x, R)$. (b) La distancia al complemento de U es continua y positiva en K; su mínimo es el margen.

Demostración.

1. *(a), se alcanza.* Toma $y_0 \in F$ y $R := |x - y_0|$. $K_0 := F \cap \bar{B}(x, R)$ es cerrado (C3-008.T1, C3-008.T2) y está contenido en la bola cerrada, que es compacta (C3-010.E1); por C3-010.T3, K_0 es compacto,

y $y_0 \in K_0$.

2. $y \mapsto |x-y|$ es continua (C3-012.T2), así que alcanza un mínimo en K_0 en algún y^* (C3-014.C1). Si $y \in F \setminus K_0$, $|x-y| > R \geq |x-y^*|$. Así $|x-y^*| \leq |x-y|$ para todo $y \in F$: es el mínimo, y por lo tanto el ínfimo (C1-006.T3), $d(x,F) = |x-y^*|$.
3. *(a), Lipschitz.* Sea $y_z^* \in F$ con $d(z,F) = |z-y_z^*|$. Entonces

$$d(x,F) \leq |x-y_z^*| \leq |x-z| + |z-y_z^*| = |x-z| + d(z,F)$$

(C3-001.T4). Cambiando x y z, $|d(x,F) - d(z,F)| \leq |x-z|$ (C1-004.T3).

4. *(a), ceros.* Si $x \in F$, $0 \leq d(x,F) \leq |x-x| = 0$. Si $d(x,F) = 0$, con y^* del paso 2, $|x-y^*| = 0$ y $x = y^* \in F$ (C3-001.T2).
5. *(b)* Si $K = \emptyset$ o $U = \mathbb{R}^n$, cualquier r sirve. Si no, $F := \mathbb{R}^n \setminus U$ es cerrado y no vacío, y $\varphi(x) := d(x,F)$ es lipschitziana (paso 3), luego continua (C3-014.D1).
6. Para $x \in K \subset U$, $x \notin F$, así que $\varphi(x) > 0$ (paso 4). Por Weierstrass, φ alcanza en K un mínimo $r := \varphi(x_0) > 0$ (C3-014.C1).
7. Si $x \in K$ y $|y-x| < r$, entonces $y \notin F$: si lo estuviera, $d(x,F) \leq |x-y| < r \leq d(x,F)$. Así $B(x,r) \subset U$. ■

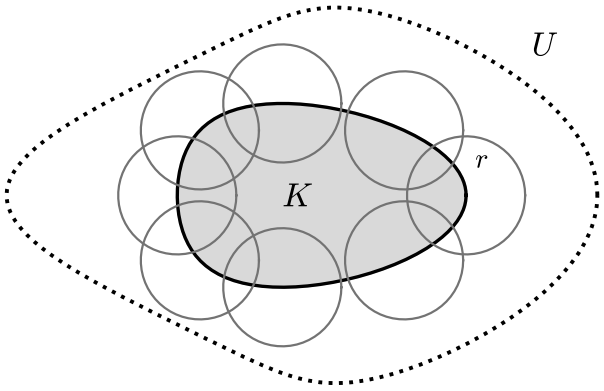


Figura 10: Un compacto K (gris) dentro de un abierto U (contorno punteado): un mismo radio r sirve alrededor de cada punto de K.

Teorema C3-014.T4 (imagen de un conexo; valor intermedio)

Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es conexo y $f : S \to \mathbb{R}^m$ es continua, $f(S)$ es conexo. Si además $m = 1$, $p, q \in S$ y $f(p) < c < f(q)$, existe $x \in S$ con $f(x) = c$.

Demostración.

1. Supón que $f(S) = A \cup B$ con A, B abiertos en $f(S)$, disjuntos y no vacíos. Por C3-008.D2, $A = V \cap f(S)$ y $B = W \cap f(S)$ con V, W abiertos de $\mathbb{R}^m$.
2. $f^{-1}(V) = \{x \in S : f(x) \in V\} = f^{-1}(A)$, porque $f(x)$ siempre está en $f(S)$; igual $f^{-1}(W) = f^{-1}(B)$. Por C3-012.T4, ambos son abiertos en S.
3. Son disjuntos (porque $A \cap B = \emptyset$), no vacíos (si $a \in A$, $a = f(x)$ con $x \in f^{-1}(A)$) y su unión es S (porque $f(S) = A \cup B$). Así S sería disconexo: contradicción (C3-011.D1).
4. *Valor intermedio.* Con $m = 1$, $f(S) \subset \mathbb{R}$ es conexo, luego un intervalo (C3-011.T1). Como $f(p), f(q) \in f(S)$ y $f(p) < c < f(q)$, $c \in f(S)$. ■

Todas las normas de $\mathbb{R}^n$

> **Tres maneras de medir en la ciudad**
> En una ciudad con cuadrícula se mide en línea recta $|\cdot|$, en taxi $\|\cdot\|_1$ o con el medidor de una app de reparto, $\|(x,y)\| := |x+2y| + |y|$. Para $(3,4)$: 5, 7 y 15. Si un dron se acerca a su destino según el medidor de la app, ¿se acerca en línea recta? Sí: en la circunferencia unitaria, el medidor de la app vale al menos $1/\sqrt{5} \approx 0.4472$ y a lo más $\sqrt{10} \approx 3.1623$, así que $0.4472|x| \leq \|x\| \leq 3.1623|x|$.
> Dónde falla la analogía: en una ciudad real no se atraviesan los edificios, y la distancia en taxi solo tiene sentido sobre las calles; aquí cada norma mide cualquier vector.

Teorema C3-014.T5 (todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes)

Toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a $|\cdot|$; por lo tanto todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes entre sí y dan los mismos abiertos, las mismas sucesiones convergentes y las mismas funciones continuas.

> **Idea de la demostración**
> La cota de arriba sale de la base canónica. Con ella, $\|\cdot\|$ es continua, y su mínimo en la esfera unitaria (compacta, sin el 0) es la cota de abajo.

Demostración.

1. Sea $M := \max(\|e_1\|, \dots, \|e_n\|)$ (C1-005.T13). Como $x = \sum_i x_i e_i$ (C3-001.T1), el triángulo y la homogeneidad de la norma (C3-007.D2, por inducción en el número de sumandos, C1-005.T12) dan
$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\| \le M \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le Mn|x|$$
(C3-001.T5). Sea $C := Mn$; $C > 0$ porque $e_1 \neq 0$.
2. De $\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$ y de lo mismo con x, y intercambiados (C3-007.D2, C1-004.T3),
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\| \le C|x-y|.$$
Así $\|\cdot\|$ es lipschitziana respecto de $|\cdot|$, luego continua (C3-014.D1).
3. La esfera $S := \{|x| = 1\}$ es compacta (C3-010.E1) y no vacía ($e_1 \in S$). Por Weierstrass (C3-014.C1), $\|\cdot\|$ alcanza en S un mínimo $c := \|x_0\|$, y $c > 0$ porque $x_0 \neq 0$ (C3-007.D2).
4. Si $x \neq 0$, $x/|x| \in S$ (C3-001.T2), así que $\|x\| = |x| \, \|x/|x|\| \ge c|x|$. Si $x = 0$, $\|0\| = 0 = c|0|$.
5. Así $c|x| \le \|x\| \le C|x|$ para todo x: $\|\cdot\|$ es equivalente a $|\cdot|$ (C3-007.D3). Como la equivalencia de normas es una relación de equivalencia (C3-007.T2), dos normas cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.
6. *Mismos abiertos.* Definiendo bolas y abiertos con $\|\cdot\|$ como en C3-008.D1, las cotas dan $\{\|y-a\| < cr\} \subset B(a,r)$ y $B(a, r/C) \subset \{\|y-a\| < r\}$; así, si un conjunto contiene una bola de una norma alrededor de cada punto, contiene una de la otra.
7. *Mismas sucesiones convergentes.* $c|x_k - x| \le \|x_k - x\| \le C|x_k - x|$: una tiende a 0 si y solo si la otra (C1-014.T1).
8. *Mismas continuas.* Si $|x-a| < \delta$ implica $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, entonces $\|x-a\| < c\delta$ implica lo mismo, y $\|f(x)-f(a)\|' < C'\varepsilon$ para otra norma $\|\cdot\|'$ de $\mathbb{R}^m$ con constantes c', C'; reemplazando ε por ε/C' se obtiene la definición con las otras normas. ■

⚠ Solo en dimensión finita

El paso 1 usa una base finita y el paso 3, que la esfera unitaria es compacta. En el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$, $\|f_k\|_1 = 1/(k+1) \to 0$ y $\|f_k\|_\infty = 1$ para $f_k(x) = x^k$: esas dos normas no son equivalentes (C3-007.E1).

Teorema C3-014.T6 (completitud y convergencia absoluta con cualquier norma)

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^N$. (a) Toda sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|$ ($\forall \varepsilon > 0\ \exists K\ \forall k,l \geq K : \|x_k - x_l\| < \varepsilon$) converge en $\|\cdot\|$. (b) Si $(v_k)_{k\geq 0}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^N$ y la serie real $\sum \|v_k\|$ converge, las sumas parciales $s_l := \sum_{k=0}^{l} v_k$ convergen (en $\|\cdot\|$, o lo que es lo mismo en $|\cdot|$) a un $s =: \sum_{k=0}^{\infty} v_k$, y $\|s\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$. Se aplica a las matrices $m \times n$ ($= \mathbb{R}^{mn}$, C3-007.D4).

Demostración. Sean $c, C > 0$ con $c|x| \leq \|x\| \leq C|x|$ (C3-014.T5).

1. *(a)* Si (x_k) es de Cauchy en $\|\cdot\|$, dado ε hay K con $\|x_k - x_l\| < c\varepsilon$ para $k, l \geq K$, luego $|x_k - x_l| < \varepsilon$: es de Cauchy en $|\cdot|$ (C3-009.D1).
2. Por la completitud de $\mathbb{R}^N$ (C3-009.T2), $x_k \to x$ en $|\cdot|$, y $\|x_k - x\| \leq C|x_k - x| \to 0$.
3. *(b)* Para $l > k$, por el triángulo de la norma e inducción (C3-007.D2, C1-005.T1),

$$\|s_l - s_k\| = \Big\| \sum_{j=k+1}^{l} v_j \Big\| \leq \sum_{j=k+1}^{l} \|v_j\|.$$

4. Como $\sum \|v_j\|$ converge, por el criterio de Cauchy para series (C2-024.T4), dado ε hay K con $\sum_{j=k+1}^{l} \|v_j\| < \varepsilon$ para $l > k \geq K$. Así (s_l) es de Cauchy en $\|\cdot\|$ y, por (a), converge a un s.
5. $\|s_l\| \leq \sum_{k=0}^{l} \|v_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$ (triángulo e inducción, C1-005.T1; términos ≥ 0, C2-024.D1). Como $|\|s_l\| - \|s\|| \leq \|s_l - s\| \to 0$, $\|s_l\| \to \|s\|$, y la desigualdad pasa al límite (C1-013.T3). ■

Ejemplo C3-014.E1 (cada hipótesis)
$1/|x|$ es continua y no acotada en $B(0,1) \setminus \{0\}$ (no compacto); x_1 no alcanza máximo en $\mathbb{R}^n$; $|x|^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$; $f(x) = 1/x$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es continua y su imagen no es un intervalo.

1. $1/|x|$ es continua donde $x \neq 0$ (C3-012.T2) y $1/|x_k| = k$ para $x_k := e_1/k$: no es acotada, así que no tiene máximo. Su dominio no es cerrado (0 es límite de x_k, C3-009.T4) y C3-014.C1 no se aplica.
2. x_1 es continua en $\mathbb{R}^n$, no acotado (C3-010.T4 falla) y $x_1(ke_1) = k$: no hay máximo.
3. Con $x := (t + 1/t)e_1$ y $y := te_1$ ($t > 0$), $|x - y| = 1/t$ y $|x|^2 - |y|^2 = 2 + 1/t^2 > 2$. Para $\varepsilon = 1$, ningún δ sirve: basta $t > 1/\delta$ (C1-007.C1). Es C1-025.E1 en $\mathbb{R}^n$.
4. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es disconexo (C3-011.E1) y $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es un intervalo: C3-014.T4 pide un dominio conexo.

Por qué cada hipótesis

⚠ Compacto en C3-014.C1 y C3-014.T2

Sin cerrado: $S(x, y) = 20 + 30x$ en $(0, 1)^2$ no alcanza su supremo 50. Sin acotado: x_1 en $\mathbb{R}^n$ no tiene máximo, y $|x|^2$ no es uniformemente continua (C3-014.E1).

⚠ Continua

$f(x) = 1/|x|$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ en la bola cerrada $\bar{B}(0, 1)$, que es compacta: no es acotada, porque no es continua en 0.

⚠ Conexo en C3-014.T4

$1/x$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ toma los valores -1 y 1 y nunca el 0.

Ejercicios

1. Demuestra que $\|(x, y)\| := |x + 2y| + |y|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.
2. Calcula el máximo y el mínimo de $x + y$ en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 1$, sabiendo que existen.
3. Demuestra que todo polinomio en dos variables que toma un valor positivo y uno negativo en un disco se anula en algún punto del disco.
4. Calcula $d((3, 4), F)$ para $F = \bar{B}(0, 1)$.
5. ¿Es uniformemente continua $x \mapsto |x|$ en $\mathbb{R}^n$?

Respuestas

1. Es $\|Mx\|_1$ con M de filas $(1, 2)$ y $(0, 1)$. Homogeneidad y triángulo vienen de las de $\|\cdot\|_1$ (C3-007.T1) y de la linealidad; si $\|x\| = 0$, entonces $y = 0$ y $x + 2y = 0$, así que $x = 0$.
2. Existen por C3-014.C1. Por Cauchy–Schwarz, $|x + y| = |(1, 1) \cdot (x, y)| \leq \sqrt{2}$, con igualdad en $\pm(1, 1)/\sqrt{2}$: máximo $\sqrt{2}$, mínimo $-\sqrt{2}$.
3. El disco es convexo, luego conexo (C3-011.T2), y el polinomio es continuo: C3-014.T4.
4. $|(3, 4)| = 5$; el punto más cercano es $(3, 4)/5$ y la distancia es 4.
5. Sí: $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (C3-001.T4), es lipschitziana con $L = 1$.

C3-015 · Gráficas, niveles y derivadas parciales

Motivación

El mapa topográfico del cerro

En el mapa topográfico de un cerro la altura es $h(x, y) = 1000 - x^2 - 2y^2$ metros (x, y en hectómetros). Las curvas del mapa son los puntos de igual altura. Estás en $(1, 1)$, a 997 m. Si caminas hacia el este, la altura a lo largo de tu camino es $t \mapsto h(t, 1)$, y su pendiente en $t = 1$ es -2 m/hm. Hacia el noreste, en la dirección $(1, 1)/\sqrt{2}$, la pendiente es $-6/\sqrt{2} \approx -4.2426$.

Cada pendiente es una derivada de una variable. La pregunta delicada es otra: si un terreno tiene pendiente en todas las direcciones en un punto, ¿puede tener ahí un salto? Sí, y lo veremos en C3-015.E2.

Dónde falla la analogía: un terreno real con un escalón tendría pendientes enormes cerca de él; la función del ejemplo tiene pendientes finitas en todas las direcciones y aun así salta, porque sus valores dependen de cómo te acercas, no solo de la dirección.

Definiciones

Definición C3-015.D1 (gráfica, conjunto de nivel)

Para $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$: **gráfica** $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y **conjunto de nivel** $N_c(f) := \{x \in A : f(x) = c\}$.

Ejemplo C3-015.E1

Los niveles de $x^2 + y^2$ son circunferencias (y $\{0\}$ y $\emptyset$); los de $x^2 - y^2$, hipérbolas y las dos diagonales. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, sus conjuntos de nivel son cerrados.

1. x^2+y^2. Si $c>0$, $x^2+y^2=c$ es la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt{c}$; si $c=0$, solo $(0,0)$ (una suma de cuadrados es 0 solo si ambos lo son, C3-001.T2); si $c<0$, ningún punto.
2. x^2-y^2. Si $c\neq 0$, $x^2-y^2=c$ es una hipérbola. Si $c=0$, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$ equivale a $x=y$ o $x=-y$ (C1-002.T5): las dos diagonales.
3. *Cerrados.* $N_c(f)=f^{-1}(\{c\})$ y $\{c\}$ es cerrado; por C3-012.T4, $N_c(f)$ es cerrado. Los polinomios son continuos (C3-012.T2).

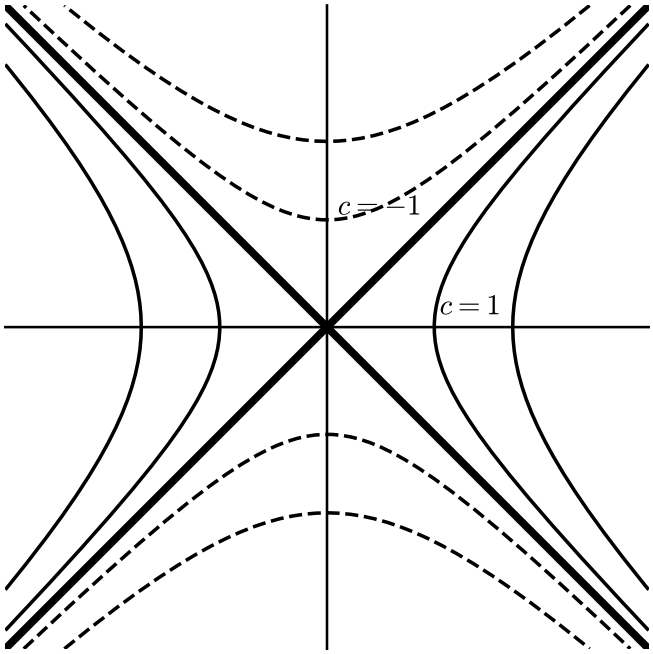


Figura 11: Niveles de x^2-y^2: las hipérbolas $x^2-y^2=\pm 1,\pm 3$ (trazo continuo para $c>0$, discontinuo para $c<0$) y el nivel 0, las dos diagonales (trazo grueso).

Definición C3-015.D2 (derivadas direccionales y parciales)

Sean $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto, $f: U\to\mathbb{R}$, $a\in U$ y $v\in\mathbb{R}^n$. La **derivada direccional** es $D_v f(a) := \lim_{t\to 0}(f(a+tv)-f(a))/t$ si existe (si $B(a,r)\subset U$, $a+tv\in U$ para $|t||v|<r$). La **parcial** $\partial_i f(a) := D_{e_i} f(a)$, también $\partial f/\partial x_i(a)$.

Que U sea abierto garantiza que $t\mapsto f(a+tv)$ está definida en un intervalo abierto alrededor de 0: si $v\neq 0$ y $B(a,r)\subset U$, en $(-r/|v|, r/|v|)$, porque $|a+tv-a|=|t||v|$ (C3-001.T2).

Resultados

Teorema C3-015.T1 (cálculo de parciales)

$\partial_i f(a)$ es la derivada en a_i de la función de una variable $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$; $D_v f(a)$ es la derivada en 0 de $t \mapsto f(a + tv)$; si existe $D_v f(a)$ y $c \in \mathbb{R}$, $D_{cv} f(a) = c \cdot D_v f(a)$.

Demostración.

1. *Direccional.* Sea $\varphi_v(t) := f(a + tv)$, definida en un intervalo abierto alrededor de 0 (comentario de arriba; si $v = 0$, en todo $\mathbb{R}$). Como $\varphi_v(0) = f(a)$, el cociente de C3-015.D2 es $(\varphi_v(0 + t) - \varphi_v(0))/t$, y su límite es $\varphi_v'(0)$ por definición (C1-027.D1).
2. *Parcial.* Sea $\psi(t) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Entonces $a + te_i$ es el punto con $a_i + t$ en el lugar i (C3-001.D1), así que $\varphi_{e_i}(t) = \psi(a_i + t)$. Por la traslación (C1-017.T2),

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(a_i + t) - \psi(a_i)}{t} = \lim_{s \to a_i} \frac{\psi(s) - \psi(a_i)}{s - a_i},$$

   y uno existe si y solo si el otro: $\partial_i f(a) = \psi'(a_i)$.
3. *Homogeneidad, $c = 0$.* $f(a + t \cdot 0) - f(a) = 0$, así que $D_0 f(a) = \lim 0 = 0 = 0 \cdot D_v f(a)$ (C1-017.E1).
4. *Homogeneidad, $c \neq 0$.* $\varphi_{cv}(t) = f(a + (ct)v) = \varphi_v(ct)$. Si φ_v es derivable en 0, por la regla de la cadena con $t \mapsto ct$ (C1-030.T1, C1-028.T2),

$$D_{cv} f(a) = \varphi_{cv}'(0) = c\, \varphi_v'(0) = c\, D_v f(a). \qquad \blacksquare$$

Las pendientes del cerro

Para $h(x, y) = 1000 - x^2 - 2y^2$ en $(1, 1)$: $h(t, 1) = 998 - t^2$, cuya derivada en 1 es -2; $h(1, t) = 999 - 2t^2$, derivada -4 en 1. En la dirección $v = (1, 1)/\sqrt{2}$,

$$\varphi_v(t) = 1000 - 3\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2, \qquad \varphi_v'(0) = -\frac{6}{\sqrt{2}} \approx -4.2426.$$

Ejemplo C3-015.E2 (las parciales no bastan)

Para f de C3-012.E2: $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$ y f no es continua en 0. Para $g(x, y) := x^2 y/(x^4 +$

$y^2)$, $g(0) := 0$: existen todas las $D_v g(0)$ (v_1^2/v_2 si $v_2 \neq 0$, y 0 si $v_2 = 0$), g no es continua en 0 y $v \mapsto D_v g(0)$ no es lineal.

1. f. $f(t, 0) = 0$ para todo t (incluido $t = 0$), así que $\partial_1 f(0) = \lim_{t\to 0} 0/t = 0$ (C3-015.T1, C1-017.E1); igual $\partial_2 f(0) = 0$. Pero f no es continua en 0 (C3-012.E2).
2. *g, con $v_2 \neq 0$.* Para $t \neq 0$,

$$\frac{g(tv) - g(0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t(t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2},$$

   un cociente de polinomios en t con denominador $v_2^2 \neq 0$ en $t = 0$: tiende a $v_1^2 v_2/v_2^2 = v_1^2/v_2$ (C1-018.C1).
3. *g, con $v_2 = 0$.* $g(tv) = 0$ para todo t, así que $D_v g(0) = 0$.
4. *No continua.* $g(x, x^2) = 1/2$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ (C3-012.E1, C3-012.T1).
5. *No lineal.* $D_{(1,0)} g(0) = 0$ y $D_{(0,1)} g(0) = 0$, pero $D_{(1,1)} g(0) = 1 \neq 0 + 0$.

Por qué cada hipótesis

⚠ U abierto

Si a estuviera en el borde del dominio, $f(a + tv)$ podría no estar definida para t pequeño de un lado, y el límite de C3-015.D2 no tendría sentido en ambas direcciones. Por eso, en este curso, las funciones de varias variables se derivan solo en abiertos.

⚠ Las direccionales no dan continuidad ni linealidad

C3-015.E2: g tiene todas sus direccionales en 0, no es continua ahí, y $v \mapsto D_v g(0)$ no es lineal. La diferenciabilidad (C3-016) pedirá que el error de una aproximación lineal sea pequeño **uniformemente** en todas las maneras de acercarse.

Ejercicios

1. Calcula $\partial_1 f$ y $\partial_2 f$ para $f(x, y) = x^3 y + \operatorname{sen}(xy)$.
2. Calcula $D_v f(1, 2)$ para $f(x, y) = x^2 y$ y $v = (3, 4)$ directamente con C3-015.T1.
3. Dibuja los niveles $c = 0, 1, 4$ de $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$.

4. Demuestra que $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ tiene $\partial_1 f(0)=\partial_2 f(0)=0$ y no tiene $D_{(1,1)}f(0)$.
5. ¿Existe $D_v|x|$ en $x=0$ para algún $v\neq 0$?

Respuestas

1. $\partial_1 f=3x^2y+y\cos(xy)$, $\partial_2 f=x^3+x\cos(xy)$ (C3-015.T1, C2-014.T6, C1-030.T1).
2. $\varphi(t)=(1+3t)^2(2+4t)$; $\varphi'(0)=2\cdot 3\cdot 2+1\cdot 4=16$.
3. $c=0$: el origen; $c=1$: el borde del cuadrado $[-1,1]^2$; $c=4$: el borde de $[-4,4]^2$.
4. $f(t,0)=f(0,t)=0$. En la diagonal, $(f(t,t)-0)/t=|t|/t$, sin límite (C1-028.E1).
5. No: $(|tv|-0)/t=|v|\,|t|/t$ no tiene límite cuando $t\to 0$.

C3-016 · Diferenciabilidad y gradiente

Motivación

> **Dos lecturas para todas las direcciones**
> En el cerro $h(x,y) = 1000 - x^2 - 2y^2$ de C3-015, en $(1,1)$, un dron mide solo dos pendientes: hacia el este (-2) y hacia el norte (-4). ¿Puede predecir con ellas la pendiente en cualquier dirección u? Si el terreno es «liso» en ese punto, sí: es $(-2,-4)\cdot u$, y para $u = (1,1)/\sqrt{2}$ da $-6/\sqrt{2} \approx -4.2426$, lo mismo que se midió directamente. Para $g = x^2y/(x^4+y^2)$ no se podía: sus parciales en el origen valen 0 y su pendiente en la diagonal vale 1.
> «Liso» quiere decir que una sola función lineal $k \mapsto v\cdot k$ aproxima a $h(a+k)-h(a)$ con un error pequeño comparado con $|k|$, en todas las direcciones a la vez. Para el cerro, el error en $k=(0.1,0.05)$ es 0.015, y $0.015/|k| \approx 0.134$; con k diez veces menor, el cociente es diez veces menor.
> Dónde falla la analogía: un dron real mide pendientes con error y en tramos de longitud positiva; la derivada es un límite exacto.

Definiciones

Definición C3-016.D1 (diferenciable, gradiente)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ y $a \in U$. Si existen $\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)$, el **gradiente** es $\nabla f(a) := (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$. f es **diferenciable** en a si existe $v \in \mathbb{R}^n$ con

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - v\cdot h}{|h|} = 0;$$

ese v resulta ser $\nabla f(a)$ (C3-016.T1), y la lineal $df(a) : h \mapsto \nabla f(a)\cdot h$ es la **diferencial** de f en a. Diferenciable en U: en cada punto.

El límite es el de C3-012.D2 para la función $h \mapsto (f(a+h) - f(a) - v\cdot h)/|h|$, definida en $\{h \neq 0 : a+h \in U\}$; 0 es punto de acumulación de ese conjunto porque U es abierto (C3-008.T5).

Resultados

Teorema C3-016.T1 (diferenciable ⇒ direccionales)

Si f es diferenciable en a con el vector v de C3-016.D1, para todo $w \in \mathbb{R}^n$ existe $D_w f(a)$ y $D_w f(a) = v \cdot w$; en particular existen las parciales y $v = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)) = \nabla f(a)$. Así v es único y $D_w f(a) = \nabla f(a) \cdot w$.

Idea de la demostración
Se toma $h = tw$ en la definición: un error pequeño comparado con $|h| = |t||w|$ sigue siendo pequeño comparado con t.

Demostración.

1. Si $w = 0$, $f(a + t \cdot 0) - f(a) = 0$ y $D_0 f(a) = 0 = v \cdot 0$. Sea $w \neq 0$ y $r > 0$ con $B(a, r) \subset U$ (C3-008.D1); para $|t| < r/|w|$, $a + tw \in U$ (C3-001.T2).
2. Para $h \neq 0$ con $a + h \in U$ sea $E(h) := (f(a + h) - f(a) - v \cdot h)/|h|$. Para $0 < |t| < r/|w|$, como $|tw| = |t||w|$ y $v \cdot (tw) = t(v \cdot w)$ (C3-001.T2),
$$\frac{f(a + tw) - f(a)}{t} - v \cdot w = \frac{|t||w|}{t} E(tw).$$
3. Dado $\varepsilon > 0$, por la diferenciabilidad hay $\delta > 0$ con $|E(h)| < \varepsilon/|w|$ si $0 < |h| < \delta$ (C3-012.D2).
4. Si $0 < |t| < \min(\delta, r)/|w|$, entonces $0 < |tw| < \delta$, y por C1-004.T2,
$$\left|\frac{f(a + tw) - f(a)}{t} - v \cdot w\right| = |w|\,|E(tw)| < \varepsilon.$$
Así existe $D_w f(a) = v \cdot w$ (C1-017.D1).
5. Con $w = e_i$: $\partial_i f(a) = v \cdot e_i = v_i$ (C3-001.T2). Por lo tanto $v = \nabla f(a)$; si dos vectores cumplen la definición, ambos son $\nabla f(a)$. ■

Teorema C3-016.T2

Si f es diferenciable en a, es continua en a.

Demostración.

1. Con E como en C3-016.T1 y $v = \nabla f(a)$, para $h \neq 0$ con $a + h \in U$,

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + |h|\, E(h).$$

2. $|\nabla f(a) \cdot h| \leq |\nabla f(a)||h|$ (Cauchy–Schwarz, C3-001.T3), que tiende a 0; y $|h|E(h) \to 0 \cdot 0 = 0$ (C3-012.T2). Así $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.
3. a es punto de acumulación de U (C3-008.T5), y por C3-012.T1, f es continua en a. ■

Teorema C3-016.T3 (álgebra)

Si f y g son diferenciables en a y $c \in \mathbb{R}$: $f + g$, cf y fg son diferenciables en a, con $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$, $\nabla(cf) = c\nabla f$ y $\nabla(fg)(a) = g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)$; si $g(a) \neq 0$, hay $r > 0$ con $g \neq 0$ en $B(a,r) \subset U$ (C3-016.T2), y f/g, definida en $B(a,r)$, es diferenciable en a con $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$ en a. Las constantes, las proyecciones ($\nabla x_i = e_i$) y los polinomios en n variables son diferenciables en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean E_f, E_g las funciones de error de f y g en a (como en C3-016.T1); ambas tienden a 0.

1. *Suma y múltiplo.* El error de $f + g$ con $v = \nabla f(a) + \nabla g(a)$ es $E_f + E_g \to 0$, y el de cf con $c\nabla f(a)$ es $cE_f \to 0$ (C3-012.T2).
2. *Producto.* Sumando y restando,

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - \big(g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)\big)\cdot h = {} & g(a+h)\big[f(a+h) - f(a) - \nabla f(a)\cdot h\big] \\ & + f(a)\big[g(a+h) - g(a) - \nabla g(a)\cdot h\big] \\ & + \big(g(a+h) - g(a)\big)\nabla f(a)\cdot h. \end{aligned}$$

3. Dividido entre $|h|$: el primer sumando es $g(a+h)E_f(h) \to g(a)\cdot 0$ (g es continua, C3-016.T2); el segundo es $f(a)E_g(h) \to 0$; el tercero tiene valor absoluto $\leq |g(a+h) - g(a)|\,|\nabla f(a)| \to 0$ (C3-001.T3). Así fg es diferenciable con el gradiente indicado.
4. *Cociente.* Como g es continua en a y $g(a) \neq 0$, con $\varepsilon := |g(a)|/2$ hay $r > 0$ con $|g(x) - g(a)| < |g(a)|/2$ en $B(a,r) \subset U$, luego $g(x) \neq 0$ ahí (C1-004.T5).
5. Para $1/g$ con $v := -\nabla g(a)/g(a)^2$ y $0 < |h| < r$,

$$\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} + \frac{\nabla g(a)\cdot h}{g(a)^2} = -\frac{g(a+h) - g(a) - \nabla g(a)\cdot h}{g(a+h)g(a)} + \nabla g(a)\cdot h\Big[\frac{1}{g(a)^2} - \frac{1}{g(a+h)g(a)}\Big].$$

6. Dividido entre $|h|$: el primer sumando es $-E_g(h)/(g(a+h)g(a)) \to 0$, y el segundo tiene valor absoluto $\leq |\nabla g(a)| \cdot |1/g(a)^2 - 1/(g(a+h)g(a))| \to 0$ (C3-012.T2, C3-001.T3). Así $1/g$ es

diferenciable en a, y $f/g = f \cdot (1/g)$ lo es por el paso 3, con

$$\nabla(f/g)(a) = \frac{\nabla f(a)}{g(a)} - f(a)\frac{\nabla g(a)}{g(a)^2} = \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g(a)^2}.$$

7. *Constantes y proyecciones.* Para $f \equiv c$, el error con $v = 0$ es 0. Para $x \mapsto x_i$, $(a_i + h_i) - a_i - e_i \cdot h = 0$ (C3-001.T2): $\nabla x_i = e_i$.
8. *Polinomios.* Un monomio es producto de una constante y proyecciones, y un polinomio es una suma de monomios; por los pasos 1-3 e inducción en el número de factores y de sumandos (C1-005.T1), son diferenciables. ■

Teorema C3-016.T4 (regla de la cadena con una variable)

(a) Sean J un intervalo abierto, $\gamma : J \to U$ derivable en t_0 y f diferenciable en $\gamma(t_0)$. Entonces $f \circ \gamma$ es derivable en t_0 y $(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$. (b) Si f es diferenciable en a, I es un intervalo abierto con $f(U) \subset I$ y $g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $f(a)$, $g \circ f$ es diferenciable en a con $\nabla(g \circ f)(a) = g'(f(a))\nabla f(a)$.

Idea de la demostración

Se escribe $f(a + h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + |h|E(h)$ con E **continua** en 0 ($E(0) := 0$), se pone $h = \gamma(t) - \gamma(t_0)$ y se divide entre $t - t_0$. Así nunca se divide entre cero, como en la prueba de C1-030.T1.

Demostración.

1. *(a)* Sea $a := \gamma(t_0)$. Define $E(h) := (f(a + h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h)/|h|$ si $h \neq 0$ y $a + h \in U$, y $E(0) := 0$. Por la diferenciabilidad y C3-016.T1, $\lim_{h \to 0} E(h) = 0 = E(0)$: E es continua en 0 (C3-012.T1).
2. Para todo h con $a + h \in U$, incluido $h = 0$,

$$f(a + h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + |h|\, E(h).$$

3. Para $t \in J$, $t \neq t_0$, sea $h := \gamma(t) - a$ (se tiene $a + h = \gamma(t) \in U$). Dividiendo entre $t - t_0$, con $\sigma(t) := |t - t_0|/(t - t_0) = \pm 1$ (C3-001.T2),

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t - t_0} = \nabla f(a) \cdot \frac{\gamma(t) - a}{t - t_0} + \sigma(t)\left|\frac{\gamma(t) - a}{t - t_0}\right| E(\gamma(t) - a).$$

4. Cuando $t \to t_0$, $(\gamma(t) - a)/(t - t_0) \to \gamma'(t_0)$ (C3-002.D3); por el álgebra de límites de curvas (C3-002.T2), el primer sumando tiende a $\nabla f(a) \cdot \gamma'(t_0)$ y la norma tiende a $|\gamma'(t_0)|$.
5. γ es continua en t_0 (C3-002.T3), así que $\gamma(t) - a \to 0$, y como E es continua en 0, $E(\gamma(t) - a) \to E(0) = 0$ (C3-012.T2). El segundo sumando tiene valor absoluto $|(\gamma(t) - a)/(t - t_0)|\,|E(\gamma(t) - a)| \to |\gamma'(t_0)| \cdot 0 = 0$.
6. Por lo tanto el cociente tiende a $\nabla f(a) \cdot \gamma'(t_0)$: $f \circ \gamma$ es derivable en t_0 con esa derivada (C1-027.D1).
7. *(b)* Sea $b := f(a)$. Define $\eta(u) := (g(u) - g(b))/(u - b) - g'(b)$ para $u \in I$, $u \neq b$, y $\eta(b) := 0$; por C1-027.D1, η es continua en b. Para todo $u \in I$,

$$g(u) - g(b) = g'(b)(u - b) + (u - b)\,\eta(u).$$

8. Con $u = f(a + h)$ y E la función de error de f en a,

$$g(f(a + h)) - g(b) - g'(b)\nabla f(a) \cdot h = g'(b)\,|h|\,E(h) + \big(f(a + h) - f(a)\big)\,\eta(f(a + h)).$$

9. Dividido entre $|h|$: el primer sumando es $g'(b)E(h) \to 0$. En el segundo, $|f(a + h) - f(a)|/|h| \leq |\nabla f(a)| + |E(h)|$ (paso 2 y C3-001.T3) está acotado cerca de 0, y $\eta(f(a + h)) \to \eta(b) = 0$ porque f es continua en a (C3-016.T2) y η en b (C3-012.T2). Así $g \circ f$ es diferenciable en a con vector $g'(b)\nabla f(a)$ (C3-016.D1, C3-016.T1). ■

⚠ Hace falta diferenciable, no solo parciales

Para $g = x^2y/(x^4 + y^2)$, $g(0) = 0$, y $\gamma(t) = (t, t^2)$: $g(\gamma(t)) = 1/2$ si $t \neq 0$ y $g(\gamma(0)) = 0$, así que $g \circ \gamma$ no es ni continua en 0, mientras que $\nabla g(0) \cdot \gamma'(0) = 0$. La regla de la cadena falla porque g no es diferenciable en 0.

Corolario C3-016.C1 (dirección de máximo crecimiento)

Si f es diferenciable en a y $\nabla f(a) \neq 0$, para todo u unitario $|D_u f(a)| \leq |\nabla f(a)|$, y $D_u f(a) = |\nabla f(a)| \iff u = \nabla f(a)/|\nabla f(a)|$.

Demostración.

1. Por C3-016.T1 y Cauchy–Schwarz (C3-001.T3), $|D_u f(a)| = |\nabla f(a) \cdot u| \leq |\nabla f(a)||u| = |\nabla f(a)|$.
2. Si $u = \nabla f(a)/|\nabla f(a)|$, $D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot \nabla f(a)/|\nabla f(a)| = |\nabla f(a)|$ (C3-001.T2).
3. Si $D_u f(a) = |\nabla f(a)| = |\nabla f(a)||u|$, hay igualdad en Cauchy–Schwarz y, como ambos vectores

son no nulos, $u = \lambda\nabla f(a)$ para algún λ (C3-001.T3). Entonces $\lambda|\nabla f(a)|^2 = |\nabla f(a)|$, es decir, $\lambda = 1/|\nabla f(a)|$. ■

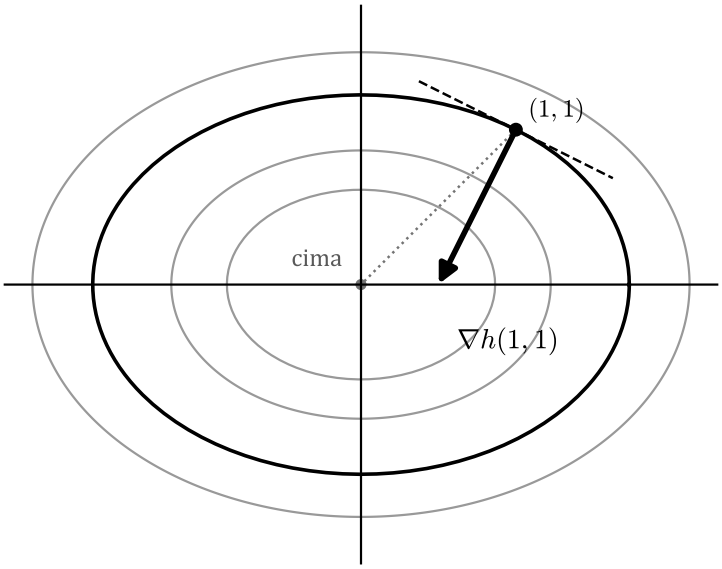


Figura 12: Curvas de nivel del cerro $h = 1000 - x^2 - 2y^2$ y, en $(1, 1)$, la dirección del gradiente $\nabla h(1, 1) = (-2, -4)$ (flecha), perpendicular a la tangente a la curva de nivel (discontinua); la línea punteada va hacia la cima, que no es la dirección de subida más rápida.

Definición C3-016.D2 (punto crítico)

$a \in U$ es **punto crítico** de f si f es diferenciable en a y $\nabla f(a) = 0$.

Ejemplo C3-016.E1

$\nabla(x^2 + 3xy) = (2x + 3y, 3x)$. $x \mapsto |x|$ es diferenciable en $x \neq 0$ con $\nabla|x| = x/|x|$, y no lo es en 0 (∂_1 no existe: $|t|/t$ no tiene límite).

1. $x^2 + 3xy$ es un polinomio, diferenciable (C3-016.T3), y su gradiente son sus parciales (C3-016.T1), que se calculan en una variable (C3-015.T1): $2x + 3y$ y $3x$. Su único punto crítico es $(0, 0)$.
2. $|x| = \sqrt{q(x)}$ con $q(x) := x_1^2 + \cdots + x_n^2$, polinomio diferenciable con $\nabla q = 2x$. Si $x \neq 0$, $q(x) > 0$ y $\sqrt{}$ es derivable en $(0, \infty)$ con derivada $1/(2\sqrt{})$ (C2-014.T1). Por C3-016.T4 (b),

con $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $I = (0, \infty)$,

$$\nabla|x| = \frac{1}{2|x|}\, 2x = \frac{x}{|x|}.$$

3. En 0: $(|te_1| - 0)/t = |t|/t$, que vale 1 si $t > 0$ y -1 si $t < 0$: no tiene límite (C1-028.E1). No existe $\partial_1 |\cdot|(0)$, y por C3-016.T1, $|\cdot|$ no es diferenciable en 0.

Ejemplo C3-016.E2 (el argumento es diferenciable)

Sea $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : t \leq 0\}$. arg (C3-013.T1) es diferenciable en D con $\nabla \arg(x) = (-x_2, x_1)/|x|^2$; en particular $|\nabla \arg(x)| = 1/|x|$.

1. Por C3-013.T1 (c), D es la unión de los abiertos $U_1 := \{x_2 > 0\}$, $U_2 := \{x_2 < 0\}$ y $U_3 := \{x_1 > 0\}$, y en ellos $\arg x$ es $\arccos(x_1/|x|)$, $-\arccos(x_1/|x|)$ y $\operatorname{arcsen}(x_2/|x|)$.
2. En $U_1 \cup U_2$, $x_2 \neq 0$, así que $x_1^2 < |x|^2$ y $q(x) := x_1/|x| \in (-1, 1)$ (C3-001.T2). Por C3-016.T3 y $\nabla|x| = x/|x|$ (C3-016.E1),

$$\nabla q(x) = \frac{e_1}{|x|} - \frac{x_1\, x}{|x|^3} = \frac{(x_2^2, -x_1 x_2)}{|x|^3}.$$

3. $\arccos$ es derivable en $(-1, 1)$ con $\arccos' u = -1/\sqrt{1 - u^2}$ (C2-014.T11), y $\sqrt{1 - q(x)^2} = |x_2|/|x|$ (C2-014.T1). Por C3-016.T4 (b), en U_1 ($|x_2| = x_2$),

$$\nabla \arg(x) = -\frac{|x|}{x_2} \cdot \frac{(x_2^2, -x_1 x_2)}{|x|^3} = \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2},$$

   y en U_2 ($|x_2| = -x_2$ y el signo menos de $-\arccos$) sale lo mismo.
4. En U_3, $x_1 \neq 0$, $p(x) := x_2/|x| \in (-1, 1)$ con $\nabla p = (-x_1 x_2, x_1^2)/|x|^3$, y $\operatorname{arcsen}' u = 1/\sqrt{1 - u^2}$ con $\sqrt{1 - p^2} = x_1/|x|$ (C2-014.T11). De nuevo $\nabla \arg(x) = (|x|/x_1)(-x_1 x_2, x_1^2)/|x|^3 = (-x_2, x_1)/|x|^2$.
5. Cada $a \in D$ está en algún U_i, que es abierto: hay $B(a, \rho) \subset U_i$ (C3-008.D1), y ahí arg coincide con una función diferenciable en a. El límite de C3-016.D1 solo usa puntos cercanos a a, así que arg es diferenciable en a con ese gradiente (C3-016.T1).
6. $|(-x_2, x_1)| = |x|$ (C3-001.T2), así que $|\nabla \arg(x)| = |x|/|x|^2 = 1/|x|$.

Los contraejemplos de C3-017, C3-019 y C3-022 usan este cálculo: cerca del corte, arg cambia casi 2π entre dos puntos cercanos, aunque su gradiente sea pequeño.

Por qué cada hipótesis

⚠ Diferenciable en C3-016.T1

g de C3-015.E2 tiene $\nabla g(0) = (0,0)$, pero $D_{(1,1)}g(0) = 1 \neq \nabla g(0) \cdot (1,1)$. Y $f = xy/(x^2+y^2)$ tiene $\nabla f(0) = 0$ sin ser continua en 0: por C3-016.T2, no es diferenciable.

⚠ γ derivable en C3-016.T4

$\gamma(t) = (|t|, 0)$ y $f(x,y) = x$: $f \circ \gamma = |t|$ no es derivable en 0 (C1-028.E1), aunque f es lineal.

Ejercicios

1. Calcula $\nabla(xye^x)$ y los puntos críticos de $x^3 - 3x + y^2$.
2. Demuestra con la definición que $f(x,y) = xy$ es diferenciable en todo punto.
3. Un excursionista sigue $\gamma(t) = (1+t, 1+2t)$ en el cerro $h = 1000 - x^2 - 2y^2$. Calcula $(h \circ \gamma)'(0)$ de dos maneras.
4. ¿En qué dirección baja más rápido h desde $(1,1)$, y con qué pendiente?
5. Demuestra que $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ no es diferenciable en el origen.

Respuestas

1. $\nabla = (ye^x(1+x), xe^x)$. Puntos críticos de $x^3 - 3x + y^2$: $3x^2 - 3 = 0$, $2y = 0$: $(\pm 1, 0)$.
2. $f(a+h) - f(a) - (a_2, a_1) \cdot h = h_1 h_2$ y $|h_1 h_2| \leq |h|^2$ (C3-001.T2), así que el error entre $|h|$ es $\leq |h| \to 0$.
3. Con la cadena: $(-2,-4) \cdot (1,2) = -10$. Directo: $\frac{d}{dt}\left[1000 - (1+t)^2 - 2(1+2t)^2\right]_{t=0} = -2 - 8 = -10$.
4. En la dirección $-\nabla h/|\nabla h| = (1,2)/\sqrt{5}$, con pendiente $-\sqrt{20} \approx -4.4721$ (C3-016.C1 aplicado a $-h$).
5. Si lo fuera, por C3-016.T1, $D_{(1,1)}f(0) = \nabla f(0) \cdot (1,1) = 0$; pero $(f(t,t) - 0)/t = |t|/t$ no tiene límite.

C3-017 · TVM y criterio de las parciales continuas

Motivación

La escalera del dron

El dron del cerro $h(x, y) = 1000 - x^2 - 2y^2$ sabe calcular en cada punto las pendientes este y norte, y sabe que esas pendientes cambian de manera continua. Para predecir el cambio de altura de a a $a + k$, sube una «escalera»: primero un tramo hacia el este, luego uno hacia el norte. En cada tramo, el TVM de Cálculo I convierte el cambio en «pendiente en algún punto del tramo por longitud del tramo», y como las pendientes son continuas, esos puntos dan casi la pendiente en a.

Desde $(1, 1)$ con $k = (0.1, 0.05)$: el cambio real es -0.415, la predicción $\nabla h(1, 1) \cdot k = -0.4$, y el error 0.015 entre $|k|$ es ≈ 0.134, que se va a 0 con k.

Dónde falla la analogía: un dron real mide pendientes en un número finito de puntos; «continuas en a» es una condición sobre todos los puntos cercanos.

El teorema del valor medio

Teorema C3-017.T1 (TVM en varias variables)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en U y $a, b \in U$ con $[a, b] \subset U$. Existe $\theta \in (0, 1)$ tal que, con $c := a + \theta(b - a)$, $f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a)$.

Idea de la demostración

Se restringe f al segmento: $\varphi(t) := f(a + t(b - a))$ es una función de una variable, y se le aplica el TVM de Cálculo I con la regla de la cadena.

Demostración. Sea $\gamma(t) := a + t(b-a)$, que manda $[0,1]$ en $[a,b] \subset U$ (C3-011.D1), y $\varphi := f \circ \gamma$ en $[0,1]$.

1. γ es continua (sus componentes son polinomios de grado ≤ 1, C3-002.T3) y f es continua en U (C3-016.T2): φ es continua en $[0,1]$ (C3-012.T2).
2. Sea $t \in (0,1)$. Como U es abierto, hay $\rho > 0$ con $B(\gamma(t),\rho) \subset U$ (C3-008.D1); si $b \neq a$, para $s \in J_t := (t - \rho/|b-a|, t + \rho/|b-a|)$, $|\gamma(s) - \gamma(t)| = |s-t||b-a| < \rho$, así que $\gamma(J_t) \subset U$.
3. γ es derivable con $\gamma' = b - a$ (C3-002.T3) y f es diferenciable en $\gamma(t)$. Por la regla de la cadena en J_t (C3-016.T4 (a)), φ es derivable en t con $\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot (b-a)$.
4. Por el TVM de una variable (C1-033.T1) hay $\theta \in (0,1)$ con $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$, es decir, $f(b) - f(a) = \nabla f(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a)$.
5. Si $b = a$, ambos lados son 0 y cualquier θ sirve. ■

Corolario C3-017.C1 (gradiente cero)

Si U es abierto y conexo, f es diferenciable en U y $\nabla f = 0$ en U, f es constante.

Demostración.

1. Fija $p \in U$ y sea $q \in U$. Por C3-011.T3 hay una poligonal $p = x_0, x_1, \ldots, x_k = q$ con $[x_{j-1}, x_j] \subset U$.
2. Por C3-017.T1 en cada segmento, $f(x_j) - f(x_{j-1}) = \nabla f(c_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = 0$.
3. Sumando (C1-005.T12), $f(q) - f(p) = 0$. ■

⚠ Sin conexo, no

En $U = \{x \neq 0\} \subset \mathbb{R}$, $f = 0$ en los negativos y $f = 1$ en los positivos tiene $f' = 0$ y no es constante.

El criterio de las parciales continuas

Teorema C3-017.T2 (criterio de diferenciabilidad)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ y $a \in U$. Si existe $r > 0$ con $B(a,r) \subset U$ tal que las n parciales $\partial_i f$ existen en $B(a,r)$, y son continuas en a, f es diferenciable en a.

Idea de la demostración

Se va de a a $a+h$ por una escalera de tramos paralelos a los ejes; en cada tramo se aplica el TVM de una variable, y la continuidad de las parciales en a hace pequeño el error.

Demostración.

1. Sea $0 < |h| < r$ y, para $k = 0, \dots, n$, $p_k := a + h_1 e_1 + \cdots + h_k e_k$ ($p_0 = a$, $p_n = a + h$). Como $|p_k - a|^2 = h_1^2 + \cdots + h_k^2 \le |h|^2$ (C3-001.T2), todos están en $B(a,r)$.
2. Por la suma telescópica (C1-005.T12),

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(p_k) - f(p_{k-1})\big).$$

3. Fija k. Si $h_k = 0$, $p_k = p_{k-1}$ y el término es $0 = \partial_k f(p_{k-1}) h_k$; sea $q_k := p_{k-1}$.
4. Si $h_k \neq 0$, sea $\varphi(t) := f(p_{k-1} + t e_k)$. Como $|p_{k-1} + t e_k - a|^2 = h_1^2 + \cdots + h_{k-1}^2 + t^2$ y $h_1^2 + \cdots + h_k^2 < r^2$, φ está definida para $|t| < \rho := (r^2 - h_1^2 - \cdots - h_{k-1}^2)^{1/2}$, y $\rho > |h_k|$ (C2-014.T1). En ese intervalo abierto, φ es derivable con $\varphi'(t) = \partial_k f(p_{k-1} + t e_k)$ (las parciales existen en $B(a,r)$; C3-015.T1).
5. φ es continua en el intervalo cerrado de extremos 0 y h_k (C1-028.T1) y derivable en su interior. Por el TVM (C1-033.T1) hay τ entre 0 y h_k con $\varphi(h_k) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) h_k$:

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) = \partial_k f(q_k)\, h_k, \qquad q_k := p_{k-1} + \tau e_k.$$

   Además $|q_k - a|^2 = h_1^2 + \cdots + h_{k-1}^2 + \tau^2 \le |h|^2$.
6. Restando $\nabla f(a) \cdot h = \sum_k \partial_k f(a) h_k$ y usando el triángulo (C1-004.T4) y $|h_k| \le |h|$ (C3-001.T2),

$$\big|f(a+h) - f(a) - \nabla f(a)\cdot h\big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \big(\partial_k f(q_k) - \partial_k f(a)\big) h_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} \big|\partial_k f(q_k) - \partial_k f(a)\big|\, |h|.$$

7. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de $\partial_k f$ en a (C3-012.D2) hay $\delta_k > 0$ con $|\partial_k f(q) - \partial_k f(a)| < \varepsilon/n$

si $q \in B(a,r)$ y $|q-a| < \delta_k$. Sea $\delta := \min(r, \delta_1, \dots, \delta_n)$ (C1-005.T13).

8. Si $0 < |h| < \delta$, cada $|q_k - a| \le |h| < \delta_k$ (paso 5), y por el paso 6 el error entre $|h|$ es menor que $n \cdot \varepsilon/n = \varepsilon$. Así f es diferenciable en a con vector $\nabla f(a)$ (C3-016.D1). ■

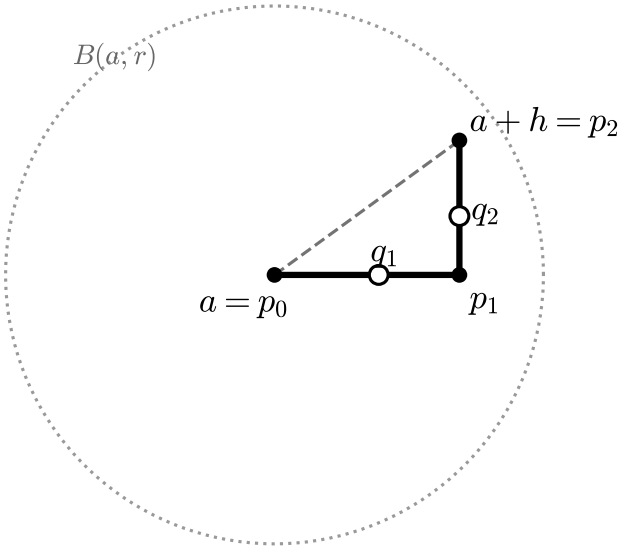


Figura 13: La escalera de $a = p_0$ a $a + h = p_2$ en el plano: un tramo paralelo a cada eje, y en cada tramo el punto q_k que da el TVM de una variable.

Definición C3-017.D1 (clase C^1)
$f \in C^1(U)$ si las parciales $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ existen y son continuas en U.

Corolario C3-017.C2
Toda $f \in C^1(U)$ es diferenciable en U (y continua).

Demostración. Sea $a \in U$ y $B(a,r) \subset U$ (U abierto, C3-008.D1). Las parciales existen en $B(a,r)$ y son continuas en a: por C3-017.T2, f es diferenciable en a, y por C3-016.T2, continua. ■

> **Ejemplo C3-017.E1 (el recíproco falla)**
> $f(x) := |x|^2 \operatorname{sen}(1/|x|)$ si $x \neq 0, f(0) := 0$, en $\mathbb{R}^2$: es diferenciable en 0 con $\nabla f(0) = 0$ ($|f(x)| \le$

$|x|^2$), pero $\partial_1 f(t,0) = 2t\,\mathrm{sen}(1/|t|) - (t/|t|)\cos(1/|t|)$ no tiene límite cuando $t \to 0$.

1. *Diferenciable en 0.* $|\,\mathrm{sen}\,| \le 1$ (C2-014.T5), así que $|f(h) - f(0) - 0\cdot h|/|h| \le |h|^2/|h| = |h| \to 0$ (C3-016.D1).
2. *La parcial fuera de 0.* Por C3-015.T1, $\partial_1 f(t,0)$ es la derivada de $s \mapsto f(s,0) = s^2\,\mathrm{sen}(1/|s|)$ en $t \neq 0$. Para $s > 0$ es $s^2\,\mathrm{sen}(1/s)$; para $s < 0$, $s^2\,\mathrm{sen}(-1/s)$. Por el producto y la cadena (C1-029.T2, C1-030.T1, C2-014.T6), en ambos casos queda
$$\partial_1 f(t,0) = 2t\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{|t|} - \frac{t}{|t|}\cos\frac{1}{|t|}.$$
3. *Sin límite.* Para $t_k := 1/(2k\pi) \to 0$, $\mathrm{sen}(2k\pi) = 0$ y $\cos(2k\pi) = 1$ (C2-014.C1): $\partial_1 f(t_k,0) = -1$. Para $s_k := 1/((2k+1)\pi)$, $\cos((2k+1)\pi) = -1$: $\partial_1 f(s_k,0) = 1$. Por C3-012.T1, $\partial_1 f$ no tiene límite en 0, así que no es continua ahí y $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

El plano tangente

Definición C3-017.D2 (plano tangente a una gráfica)

Si f es diferenciable en a, el **hiperplano tangente** a la gráfica en $(a, f(a))$ es $\{(x,z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(a) + \nabla f(a)\cdot(x-a)\}$; $(\nabla f(a), -1)$ es normal a él.

La normalidad es una cuenta: si (x,z) y $(a,f(a))$ están en el hiperplano, su diferencia es $(x-a, \nabla f(a)\cdot(x-a))$, y su producto punto con $(\nabla f(a), -1)$ es $\nabla f(a)\cdot(x-a) - \nabla f(a)\cdot(x-a) = 0$ (C3-001.T2).

Ejemplo C3-017.E2

El plano tangente a $z = x^2 + y^2$ en $(1,1,2)$ es $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$.
Las parciales $2x, 2y$ son continuas, así que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ es diferenciable (C3-017.C2) y $\nabla f(1,1) = (2,2)$ (C3-016.T1, C3-015.T1). Se sustituye en C3-017.D2.

Por qué cada hipótesis

⚠ En C3-017.T1, el segmento dentro de U y f diferenciable

En $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) : t \leq 0\}$, arg es diferenciable con $|\nabla \arg(x)| = 1/|x|$ (C3-016.E2). Con $a = (-1,1)$ y $b = (-1,-1)$, $|\arg b - \arg a| = 3\pi/2 \approx 4.71$, mientras que en todo punto c del segmento $[a,b]$ (si estuviera en U) se tendría $|\nabla \arg(c) \cdot (b-a)| \leq 1 \cdot 2$. El TVM falla porque $[a,b]$ corta a la semirrecta quitada. Sin diferenciabilidad: $f(x) = |x|$ en $[-e_1, e_1]$ cumple $f(e_1) - f(-e_1) = 0$, pero en $c = 0$ no hay gradiente (C3-016.E1).

⚠ En C3-017.T2, continuas en a

$f = xy/(x^2+y^2)$, $f(0) = 0$, tiene parciales en todo $\mathbb{R}^2$, discontinuas en 0, y no es diferenciable en 0 (ni siquiera continua, C3-012.E2, C3-016.T2).

⚠ En C3-017.T2, parciales en toda una bola

$f := 0$ en los ejes y $f := 1$ fuera de ellos: $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$, pero $\partial_2 f(t,0)$ no existe para $t \neq 0$ (el cociente vale $1/s$), así que la continuidad de las parciales en 0 ni siquiera se puede plantear; y f no es diferenciable en 0 porque no es continua.

Ejercicios

1. Demuestra que $f(x,y) = e^x \cos y$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y escribe su plano tangente en $(0,0,1)$.
2. Sea f diferenciable en $\mathbb{R}^n$ con $|\nabla f| \leq M$. Demuestra que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.
3. ¿Es constante una f diferenciable en $\{(x,y) : y \neq 0\}$ con $\nabla f = 0$?
4. Verifica la escalera del cerro: con $a = (1,1)$ y $k = (0.1, 0.05)$, encuentra q_1 y q_2.
5. Demuestra que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Respuestas

1. Parciales $e^x \cos y$ y $-e^x \operatorname{sen} y$, continuas (C3-012.T2); plano $z = 1 + x$.
2. Por C3-017.T1 y Cauchy–Schwarz: $|f(x) - f(y)| = |\nabla f(c) \cdot (x-y)| \leq M|x-y|$ ($\mathbb{R}^n$ es convexo).
3. No necesariamente: el conjunto no es conexo; $f = 1$ si $y > 0$ y 0 si $y < 0$.
4. Tramo 1, de $(1,1)$ a $(1.1,1)$: $\varphi(t) = 1000 - (1+t)^2 - 2$, $\varphi(0.1) - \varphi(0) = -0.21 = -2(1+\tau)(0.1)$,

$\tau = 0.05$, $q_1 = (1.05, 1)$. Tramo 2, de $(1.1, 1)$ a $(1.1, 1.05)$: $-0.205 = -4(1 + \tau)(0.05)$, $\tau = 0.025$, $q_2 = (1.1, 1.025)$.

5. $\nabla = (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$, continuo donde $(x, y) \neq 0$ (C3-016.E1, C3-012.T2).

C3-018 · Derivadas de orden superior y teorema de Schwarz

Motivación

Dos drones y un cuadrito de la cuadrícula

En una placa, la temperatura es $T(x, y) = x^2y^3$. Un dron mide la pendiente hacia el este y observa cómo cambia esa pendiente al moverse al norte; otro mide la pendiente hacia el norte y observa cómo cambia al moverse al este. En $(1, 2)$ ambos obtienen 24. La razón es un cuadrito de la cuadrícula: la «diferencia doble»

$$\Delta(h) = T(1 + h, 2 + h) - T(1 + h, 2) - T(1, 2 + h) + T(1, 2)$$

se puede leer como diferencia norte de diferencias este o al revés, y es el mismo número; con $h = 0.01$, $\Delta(h)/h^2 \approx 24.24$.

Pero hay funciones (el ejemplo de Peano) en las que los dos drones obtienen -1 y $+1$.

Dónde falla la analogía: un dron mide en un cuadrito de tamaño fijo, y $\Delta(h)$ es simétrica siempre; las derivadas cruzadas son dos límites iterados, y lo que puede cambiar es el orden de los límites.

Definiciones

Definición C3-018.D1 (parciales de orden superior, clase C^k)

$\partial_j\partial_i f := \partial_j(\partial_i f)$ donde exista, y así sucesivamente ($\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f$). $f \in C^k(U)$ ($k \in \mathbb{N}$) si todas las parciales de orden $\leq k$ existen y son continuas en U; $C^0(U)$ = continuas; $C^\infty(U) = C^k(U)$ para todo k. Para $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^k$ si cada componente lo es.

La definición recursiva de las parciales de orden k es la de C1-005.T11. Con $k = 1$ es C3-017.D1. Si $f \in C^k(U)$ con $k \geq 1$, cada parcial de orden $< k$ es de clase C^1, luego diferenciable y continua (C3-

017.C2).

Resultados

Teorema C3-018.T1 (Schwarz)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$, $i \neq j$, $a \in U$ y $r > 0$ con $B(a,r) \subset U$. Si $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_j \partial_i f$ y $\partial_i \partial_j f$ existen en $B(a,r)$ y $\partial_j \partial_i f$, $\partial_i \partial_j f$ son continuas en a, entonces $\partial_j \partial_i f(a) = \partial_i \partial_j f(a)$. En particular, si $f \in C^2(U)$, $\partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f$ en U.

Idea de la demostración

La diferencia doble $\Delta(h)$ es simétrica. Con dos TVM se escribe como $h^2\, \partial_j \partial_i f$ en un punto del cuadrito, y por simetría como $h^2\, \partial_i \partial_j f$ en otro; la continuidad en a hace que los dos valores estén tan cerca como se quiera de las cruzadas en a.

Demostración.

1. Si $0 < |h| < r/2$ y $|s|, |t| \leq |h|$, entonces $|se_i + te_j| \leq |s| + |t| \leq 2|h| < r$ (C3-001.T5), así que $a + se_i + te_j \in B(a,r)$ (C3-008.D1). Para esos h sea

$$\Delta(h) := f(a + he_i + he_j) - f(a + he_i) - f(a + he_j) + f(a).$$

2. Sea $u(s) := f(a + se_i + he_j) - f(a + se_i)$ para $|s| < r/2$ (los dos puntos están en $B(a,r)$). Entonces $\Delta(h) = u(h) - u(0)$.
3. Como $\partial_i f$ existe en $B(a,r)$, u es derivable con

$$u'(s) = \partial_i f(a + se_i + he_j) - \partial_i f(a + se_i)$$

   (C3-015.T1, C1-029.T1); en particular es continua (C1-028.T1).
4. Por el TVM (C1-033.T1) en el intervalo de extremos 0 y h, hay σ entre 0 y h con

$$\Delta(h) = h\big[\partial_i f(a + \sigma e_i + he_j) - \partial_i f(a + \sigma e_i)\big].$$

5. Sea $w(t) := \partial_i f(a + \sigma e_i + te_j)$ para $|t| < r/2$. Como $\partial_j \partial_i f$ existe en $B(a,r)$, w es derivable con $w'(t) = \partial_j \partial_i f(a + \sigma e_i + te_j)$ (C3-015.T1, C3-018.D1). Por el TVM, hay τ entre 0 y h con

$w(h) - w(0) = h\,\partial_j\partial_i f(\xi)$, $\xi := a + \sigma e_i + \tau e_j$. Así

$$\Delta(h) = h^2\,\partial_j\partial_i f(\xi), \qquad |\xi - a| \le |\sigma| + |\tau| \le 2|h|.$$

6. *El otro orden.* Con $v(t) := f(a+he_i+te_j) - f(a+te_j)$ se tiene $\Delta(h) = v(h) - v(0)$ (la misma suma de cuatro términos, en otro orden: aquí se ve la simetría). Los pasos 3-5 con i y j intercambiados dan

$$\Delta(h) = h^2\,\partial_i\partial_j f(\eta), \qquad |\eta - a| \le 2|h|.$$

7. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de las dos cruzadas en a hay $\delta > 0$ tal que $|q - a| < \delta$ implica $|\partial_j\partial_i f(q) - \partial_j\partial_i f(a)| < \varepsilon$ y $|\partial_i\partial_j f(q) - \partial_i\partial_j f(a)| < \varepsilon$ (C3-012.D2).
8. Sea $h := \min(r, \delta)/4$. Entonces $0 < h < r/2$ y $|\xi - a|, |\eta - a| \le 2h < \delta$. Por los pasos 5 y 6, $\partial_j\partial_i f(\xi) = \Delta(h)/h^2 = \partial_i\partial_j f(\eta)$, y por el triángulo (C1-004.T4),

$$\left|\partial_j\partial_i f(a) - \partial_i\partial_j f(a)\right| \le \left|\partial_j\partial_i f(a) - \partial_j\partial_i f(\xi)\right| + \left|\partial_i\partial_j f(\eta) - \partial_i\partial_j f(a)\right| < 2\varepsilon.$$

9. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\partial_j\partial_i f(a) = \partial_i\partial_j f(a)$ (C1-003.T9).
10. Si $f \in C^2(U)$ y $a \in U$, hay r con $B(a,r) \subset U$ (U abierto), y las hipótesis se cumplen en $B(a,r)$. ■

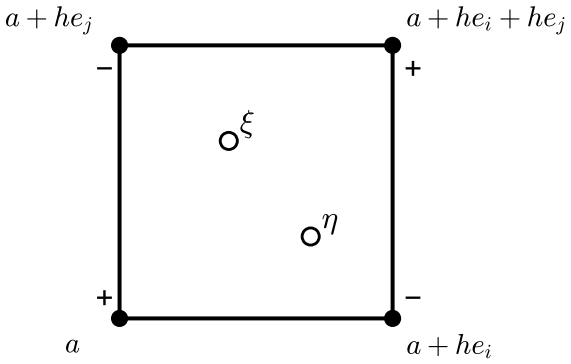


Figura 14: El cuadrito de la diferencia doble: $\Delta(h)$ suma los valores en las esquinas con los signos indicados. Los puntos ξ y η que dan los dos TVM están dentro del cuadrito.

⚠ Por qué no se usan sucesiones

La versión «tomar $h_k \to 0$ y pasar al límite» pide elegir σ_k y τ_k para cada k, es decir, una elección numerable. La prueba de arriba usa un solo h por cada ε y evita esa elección.

Corolario C3-018.C1

Si $f \in C^k(U)$, cada parcial de orden $\leq k$ no depende del orden en que se derive: $\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f = \partial_{i_{\pi(k)}} \cdots \partial_{i_{\pi(1)}} f$ para toda permutación π de $\{1, \dots, k\}$.

Demostración. Por inducción en el orden $m \leq k$ de la parcial (C1-005.T1).

1. *Dos vecinos.* Sea $g := \partial_{i_{l-1}} \cdots \partial_{i_1} f$ una parcial de orden $l-1 \leq k-2$ (o $g = f$). Como $f \in C^k(U)$, $g \in C^2(U)$ (C3-018.D1). Por Schwarz, $\partial_{i_{l+1}} \partial_{i_l} g = \partial_{i_l} \partial_{i_{l+1}} g$, y derivando después con los índices restantes, la parcial no cambia al intercambiar los índices vecinos i_l e i_{l+1}.
2. *Cualquier permutación.* Con intercambios de vecinos, cualquier índice se lleva a la primera posición (la que se deriva al final) sin alterar el orden relativo de los demás.
3. Así $\partial_{i_m} \cdots \partial_{i_1} f = \partial_{i_{\pi(m)}} \left(\partial_{\dots} \cdots f \right)$, donde lo de adentro es una parcial de orden $m-1$ con los índices restantes; por la hipótesis de inducción, su orden interno no importa. ■

Teorema C3-018.T2 (álgebra de C^k)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (o $k = \infty$). Sumas, productos y cocientes (con denominador sin ceros en U) de funciones de $C^k(U)$ están en $C^k(U)$; los polinomios en n variables están en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Por inducción en k (C1-005.T1).

1. $k = 0$. Sumas, productos y cocientes de continuas son continuos (C3-012.T2).
2. *Fórmulas.* Por C3-015.T1, cada parcial se calcula en una variable, y por C1-029.T1-T3,

$$\partial_i(f+g) = \partial_i f + \partial_i g, \qquad \partial_i(fg) = (\partial_i f) g + f\, \partial_i g, \qquad \partial_i(1/g) = -\partial_i g \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g}.$$

3. *Paso.* Si el resultado vale para k y $f, g \in C^{k+1}(U)$, entonces $f, g, \partial_i f, \partial_i g \in C^k(U)$, y los lados derechos del paso 2 están en $C^k(U)$ por la hipótesis de inducción. Así todas las parciales de $f+g$, fg, $1/g$ son de clase C^k, es decir, esas funciones son de clase C^{k+1}; $f/g = f \cdot (1/g)$.
4. $k = \infty$. Es la intersección de todos los C^k.
5. *Polinomios.* Las constantes y las proyecciones tienen parciales constantes (0 o 1, C1-028.T2), luego son C^∞; un polinomio se obtiene con sumas y productos. ■

Ejemplo C3-018.E1 (Peano)
$f(x,y) := xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$, $f(0,0) := 0$, es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, y $\partial_2\partial_1 f(0,0) = -1 \neq 1 = \partial_1\partial_2 f(0,0)$.

1. *Fuera del origen*, f es un cociente de polinomios con denominador positivo: C^∞ (C3-018.T2). Por el cociente en una variable (C3-015.T1, C1-029.T3),

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. *En el origen*, $f(t,0) = f(0,t) = 0$, así que $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$ (C3-015.T1).
3. *Continuidad de las parciales en 0.* Como $x^4+4x^2y^2+y^4 \leq 2(x^2+y^2)^2$ (C1-003.T9),

$$|\partial_1 f(x,y)| \leq 2|y| \leq 2|(x,y)|, \qquad |\partial_2 f(x,y)| \leq 2|x| \leq 2|(x,y)|,$$

   que tienden a 0 (C1-019.T2, C3-012.T1). Así $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (C3-017.D1).
4. *Las cruzadas.* Por el paso 1, $\partial_1 f(0,y) = y(-y^4)/y^4 = -y$ para $y \neq 0$, y $\partial_1 f(0,0) = 0$: con $t \mapsto \partial_1 f(0,t) = -t$,

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = -1.$$

   Igual, $\partial_2 f(x,0) = x$, y $\partial_1\partial_2 f(0,0) = 1$.
5. *Diferencia doble.* $f(h,h) = 0$, así que $\Delta(h) = f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0) = 0$ para todo h: el límite «diagonal» $\Delta(h)/h^2 = 0$ no decide nada. Por Schwarz, las cruzadas no pueden ser continuas en 0.

Por qué cada hipótesis

⚠ Cruzadas continuas en a

La f de Peano cumple todo lo demás: es C^1, sus cuatro parciales de segundo orden existen en todo $\mathbb{R}^2$ (fuera del origen por el paso 1 de C3-018.E1; en el origen por el paso 4 y lo análogo para $\partial_1\partial_1 f$, $\partial_2\partial_2 f$), y las cruzadas en 0 son -1 y 1. Lo único que falla es la continuidad de las cruzadas en 0.

Ejercicios

1. Comprueba Schwarz para $f(x,y) = e^{xy}$.
2. Calcula $\partial_1\partial_2\partial_3(xyz\,e^x)$ en dos órdenes distintos.
3. Para la f de Peano, calcula $\partial_2\partial_1 f(x,y)$ fuera del origen y demuestra que no tiene límite en 0.
4. Demuestra que si $f \in C^2(U)$ y $\nabla f = (P,Q)$ en $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces $\partial_2 P = \partial_1 Q$.
5. ¿Existe $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ con $\partial_1 f = y$ y $\partial_2 f = -x$?

Respuestas

1. $\partial_1 f = ye^{xy}$, $\partial_2\partial_1 f = e^{xy}(1+xy)$; $\partial_2 f = xe^{xy}$, $\partial_1\partial_2 f = e^{xy}(1+xy)$.
2. Ambos dan $e^x(1+x)$.
3. $\partial_2\partial_1 f = (x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)/(x^2+y^2)^3$; en el eje x vale 1 y en el eje y, -1.
4. $\partial_2 P = \partial_2\partial_1 f = \partial_1\partial_2 f = \partial_1 Q$ (C3-018.T1).
5. No: por el ejercicio 4 tendría que ser $\partial_2(y) = \partial_1(-x)$, es decir, $1 = -1$.

C3-019 · Fórmula de Taylor en varias variables

Motivación

> **La computadora del dron que solo suma y multiplica**
> La computadora de un dron solo sabe sumar y multiplicar. Necesita la intensidad de una señal $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ en $(0.1, 0.2)$, cerca de la antena en $(0,0)$. Con el polinomio de Taylor de orden 2, $y + xy$, estima 0.22; el valor exacto es ≈ 0.219564. ¿Se puede **garantizar** el error sin conocer el valor exacto? Sí: la fórmula de Taylor con residuo de Lagrange da $|\text{error}| \leq e^{0.1}(0.3)^3/6 \approx 0.00497$.
> No hace falta teoría nueva: sobre el segmento de la antena al punto, la señal es una función de una variable, y se aplica el Taylor de Cálculo I.
> Dónde falla la analogía: una computadora real redondea cada operación; aquí la suma y el producto son exactos y el único error es el de truncar el polinomio.

Definiciones

Definición C3-019.D1 (diferencial de orden k, hessiana)

Para $f \in C^k(U)$, $x \in U$ y $h \in \mathbb{R}^n$:

$$d^k f(x)(h) := \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f(x)\, h_{i_1} \cdots h_{i_k},$$

y $d^0 f(x)(h) := f(x)$. $d^1 f(x)(h) = \nabla f(x) \cdot h$. La **hessiana** de $f \in C^2(U)$ es la matriz simétrica $H_f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j}$, y $d^2 f(x)(h) = h \cdot H_f(x) h$.

Las dos igualdades finales se comprueban así. $d^1 f(x)(h) = \sum_i \partial_i f(x) h_i = \nabla f(x) \cdot h$ (C3-001.D2). $H_f(x)$

es simétrica por Schwarz (C3-018.T1), y

$$h \cdot H_f(x)h = \sum_i h_i \sum_j \partial_i \partial_j f(x) h_j = \sum_{i,j} \partial_j \partial_i f(x)\, h_i h_j = d^2 f(x)(h)$$

(C3-007.D4, C1-005.T12, C3-018.T1).

Resultados

Teorema C3-019.T1 (derivadas a lo largo de un segmento)

Sean $f \in C^k(U)$, $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ y J un intervalo abierto con $a + th \in U$ para $t \in J$. $\varphi(t) := f(a + th)$ es de clase C^k en J y $\varphi^{(j)}(t) = d^j f(a + th)(h)$ para $j = 0, \dots, k$.

Demostración. Por inducción en j (C1-005.T1) se prueba la fórmula para $j \leq k$.

1. $j = 0$. $\varphi(t) = f(a + th) = d^0 f(a + th)(h)$.
2. *Paso $j \to j + 1$ ($j < k$).* Por hipótesis, $\varphi^{(j)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_j} g_{i_1 \cdots i_j}(a + th)\, h_{i_1} \cdots h_{i_j}$, con $g_{i_1 \cdots i_j} := \partial_{i_j} \cdots \partial_{i_1} f \in C^{k-j}(U) \subset C^1(U)$ (C3-018.D1).
3. Cada $g := g_{i_1 \cdots i_j}$ es diferenciable en U (C3-017.C2). Con $\gamma(t) := a + th$, derivable con $\gamma' = h$ (C3-002.T3), la regla de la cadena (C3-016.T4 (a), C3-016.T1) da

$$\frac{d}{dt}\, g(a + th) = \nabla g(a + th) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i g(a + th)\, h_i.$$

4. Sumando (C1-029.T1, C1-005.T12),

$$\varphi^{(j+1)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_j,i} \partial_i \partial_{i_j} \cdots \partial_{i_1} f(a + th)\, h_{i_1} \cdots h_{i_j} h_i = d^{j+1} f(a + th)(h).$$

5. *Clase C^k.* $\varphi^{(k)}(t) = d^k f(a + th)(h)$ es una suma de funciones $t \mapsto g(a + th)$ con g continua, por constantes: continua en J (C3-012.T2). Así φ es de clase C^k en J (C2-015.D1). ■

Teorema C3-019.T2 (Taylor con residuo de Lagrange)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^{k+1}(U)$, $a \in U$ y $h \in \mathbb{R}^n$ con $[a, a+h] \subset U$. Existe $\theta \in (0,1)$ con

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{d^j f(a)(h)}{j!} + \frac{d^{k+1} f(a+\theta h)(h)}{(k+1)!}.$$

Idea de la demostración

Se restringe f al segmento: $\varphi(t) = f(a+th)$ tiene por derivadas las diferenciales de f (C3-019.T1), y el Taylor de Cálculo I aplicado a φ entre 0 y 1 es la fórmula. El único cuidado: C1-038.T2 pide un intervalo **abierto** alrededor de $[0,1]$, y para eso hace falta un margen alrededor del segmento.

Demostración.

1. Si $h = 0$, cada $d^j f(a)(0)$ con $j \geq 1$ es una suma de productos con un factor 0, y ambos lados valen $f(a)$: cualquier θ sirve. Sea $h \neq 0$.
2. El segmento $S := [a, a+h]$ (C3-011.D1) es la imagen de $[0,1]$, compacto (C3-010.E1), por $t \mapsto a+th$, que es continua (C3-012.T2). Por C3-014.T1, S es compacto, y $S \subset U$ por hipótesis.
3. Por el margen alrededor de un compacto (C3-014.T3 (b)) hay $r > 0$ con $B(x,r) \subset U$ para todo $x \in S$.
4. Sea $J := (-r/|h|, 1 + r/|h|)$. Si $t \in [0,1]$, $a+th \in S \subset U$. Si $t < 0$, $|a+th-a| = |t||h| < r$, así que $a+th \in B(a,r) \subset U$. Si $t > 1$, $|a+th-(a+h)| = (t-1)|h| < r$ y $a+th \in B(a+h,r) \subset U$ (C3-001.T2).
5. Por C3-019.T1, $\varphi(t) := f(a+th)$ es de clase C^{k+1} en J y $\varphi^{(j)}(t) = d^j f(a+th)(h)$ para $j \leq k+1$; en particular $\varphi^{(k+1)}$ existe en J.
6. Por el residuo de Lagrange (C1-038.T2, con el polinomio de C1-038.D1) en el intervalo abierto J, con centro 0, punto 1 y $n = k$, existe θ entre 0 y 1 con

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\, 1^j + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}\, 1^{k+1}.$$

7. Sustituyendo $\varphi(1) = f(a+h)$, $\varphi^{(j)}(0) = d^j f(a)(h)$ y $\varphi^{(k+1)}(\theta) = d^{k+1} f(a+\theta h)(h)$ (paso 5) se obtiene la fórmula. ■

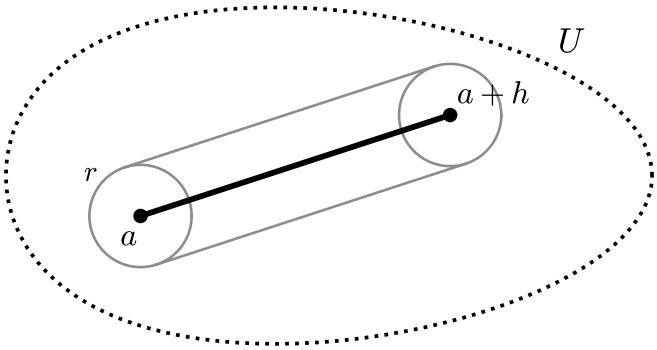


Figura 15: El segmento $[a, a+h]$ dentro de U y el margen r alrededor de él: la función $t \mapsto f(a+th)$ está definida en un intervalo abierto $J \supset [0,1]$.

Corolario C3-019.C1 (orden 2, forma de Peano)

Si $f \in C^2(U)$ y $a \in U$, entonces

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)\cdot h + \tfrac{1}{2}\, h \cdot H_f(a)h + R(h) \qquad \text{con} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{|h|^2} = 0.$$

Demostración.

1. Sea $r > 0$ con $B(a,r) \subset U$. Para $|h| < r$, $[a, a+h] \subset B(a,r) \subset U$, porque la bola es convexa (C3-011.T2).
2. Por C3-019.T2 con $k = 1$ y C3-019.D1, hay $\theta = \theta(h) \in (0,1)$ con $f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)\cdot h + \frac{1}{2}\, h \cdot H_f(a+\theta h)h$. Así
$$R(h) = \tfrac{1}{2}\, h \cdot \big(H_f(a+\theta h) - H_f(a)\big)h.$$
3. Por Cauchy–Schwarz (C3-001.T3) y C3-012.T3,
$$|R(h)| \le \tfrac{1}{2}\,|h|\,\big|(H_f(a+\theta h) - H_f(a))h\big| \le \tfrac{1}{2}\,\big\|H_f(a+\theta h) - H_f(a)\big\|_F\,|h|^2.$$
4. Las entradas de H_f son continuas ($f \in C^2(U)$), así que $x \mapsto \|H_f(x) - H_f(a)\|_F$ es continua en a y vale 0 ahí (C3-012.T2). Dado $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ con $\|H_f(x) - H_f(a)\|_F < 2\varepsilon$ si $|x-a| < \delta$.
5. Si $0 < |h| < \min(r, \delta)$, entonces $|a+\theta h - a| = \theta|h| < \delta$, y por el paso 3, $|R(h)|/|h|^2 < \varepsilon$. Así $R(h)/|h|^2 \to 0$ (C3-012.D2). ■

Ejemplo C3-019.E1

El polinomio de Taylor de orden 2 de $e^x \operatorname{sen} y$ en $(0,0)$ es $y + xy$.

1. Por C2-012.T1 y C2-014.T6 (en una variable, C3-015.T1): $\partial_1 f = e^x \operatorname{sen} y$, $\partial_2 f = e^x \cos y$, $\partial_1\partial_1 f = e^x \operatorname{sen} y$, $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f = e^x \cos y$, $\partial_2\partial_2 f = -e^x \operatorname{sen} y$.
2. En $(0,0)$, con $e^0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ (C2-012.T4, C2-014.T4): $f = 0$, $\nabla f = (0,1)$ y $H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $f(0) + \nabla f(0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \cdot H_f(0)(x,y) = y + \frac{1}{2}(2xy) = y + xy$.
4. *La cota del gancho.* Cada parcial de tercer orden es $\pm e^x \operatorname{sen} y$ o $\pm e^x \cos y$, de valor absoluto $\leq e^x$ (C2-014.T5). En el segmento de 0 a $h = (0.1, 0.2)$, $x \leq 0.1$ y $e^x \leq e^{0.1}$ (C2-012.T1). Como $d^3 f(x)(h)$ suma los 8 términos $\partial_{i_3}\partial_{i_2}\partial_{i_1} f \, h_{i_1} h_{i_2} h_{i_3}$, su valor absoluto es $\leq e^{0.1}(|h_1| + |h_2|)^3$, y por C3-019.T2 con $k = 2$, $|f(h) - (y + xy)| \leq e^{0.1}(0.3)^3/6 \approx 0.004973$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El segmento dentro de U

En $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) : t \leq 0\}$, con $f = \arg$ (diferenciable en U con $|\nabla \arg(c)| = 1/|c|$, C3-016.E2), $a = (-1,1)$ y $h = (0,-2)$: $f(a+h) - f(a) = -3\pi/2$. Con $k = 0$, la fórmula diría que eso es $\nabla f(c) \cdot h$ para un c del segmento, y en todo punto c con $|c| \geq 1$, $|\nabla \arg(c) \cdot h| \leq 2$. El segmento cruza la semirrecta quitada: no está en U.

⚠ f de clase C^{k+1}

$f(x,y) = |x|$, $k = 0$, $a = (-1,0)$, $h = (2,0)$: $f(a+h) - f(a) = 0$, pero $d^1 f(a + \theta h)(h) = \pm 2$ donde existe, y en el punto medio $(0,0)$ ni siquiera existe.

Ejercicios

1. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \cos(x + 2y)$ en $(0,0)$.
2. Escribe $f(x,y) = x^2 + xy + 3$ en potencias de $(x-1)$ y $(y-1)$ usando C3-019.T2.
3. Demuestra que si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\nabla f(a) = 0$ y $H_f(a) = 0$, entonces $f(a+h) - f(a) = o(|h|^2)$.

4. Acota el error de aproximar $e^{0.1}$ sen 0.2 con el polinomio de orden 1.
5. ¿Por qué C3-019.T2 pide $[a, a+h] \subset U$ y no solo $a, a+h \in U$?

Respuestas

1. $f(0) = 1, \nabla f(0) = 0, H_f(0) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: $1 - \frac{1}{2}(x+2y)^2$.
2. $\nabla f(1,1) = (3,1), H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, d^3 f = 0$: $5 + 3(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-1)$, exacto.
3. Es C3-019.C1 con los dos primeros términos nulos.
4. Orden 1: $y = 0.2$. Por C3-019.T2 con $k = 1$, $|\text{error}| \leq e^{0.1}(0.3)^2/2 \approx 0.0497$; el error real es $|0.2 - 0.219564| \approx 0.0196$.
5. Porque la prueba usa $\varphi(t) = f(a+th)$ para todo $t \in [0,1]$ (ver el contraejemplo con arg).

C3-020 · Norma de operador e inversas

Motivación

La calibración de la cámara del dron

La cámara de un dron se corrige con una matriz de calibración $I+E$, donde E es un error pequeño de fábrica,

$$E = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Para deshacer la corrección hace falta $(I+E)^{-1}$. ¿Existe siempre que E sea «pequeño»? ¿Qué quiere decir pequeño? Y ¿se puede calcular solo sumando y multiplicando?

Como $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - \cdots$ para $|x| < 1$, uno espera $(I+E)^{-1} = I - E + E^2 - \cdots$. Aquí $\|E\| \approx 0.2414$, y con solo tres términos, $I - E + E^2$ difiere de la inversa exacta en menos de 0.0021 por entrada. La medida correcta de «pequeño» es la norma de operador.

Dónde falla la analogía: una cámara real tiene distorsiones no lineales; aquí la calibración es exactamente una matriz.

Definiciones

Definición C3-020.D1 (norma de operador)

Para A $m \times n$: $\|A\| := \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$ (existe: el conjunto está acotado por $\|A\|_F$, C3-012.T3).

El conjunto es no vacío ($x = 0$) y, por C3-012.T3, $|Ax| \leq \|A\|_F |x| \leq \|A\|_F$; por el axioma S y C1-006.D1, el supremo existe. Geométricamente, $\|A\|$ es lo más que A estira un vector unitario.

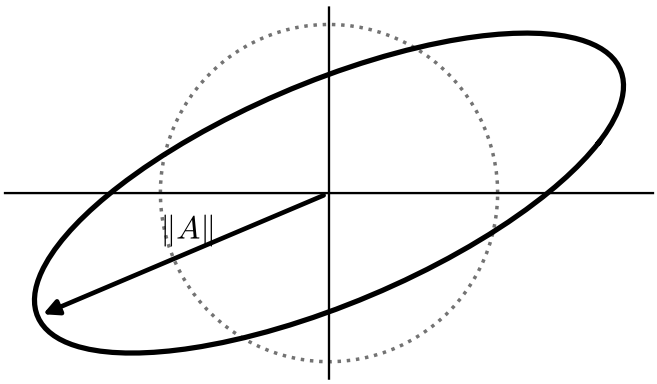


Figura 16: La circunferencia unitaria (punteada) y su imagen por A, una elipse; $\|A\|$ es la longitud de su semieje mayor.

Resultados

Teorema C3-020.T1 (propiedades)

$\|\cdot\|$ es una norma en el espacio de las matrices $m \times n$; $|Ax| \le \|A\||x|$ para todo x; $|a_{ij}| \le \|A\| \le \|A\|_F$; $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ (B $n \times p$); $\|I_n\| = 1$. Por C3-014.T5, una sucesión de matrices converge en $\|\cdot\| \iff$ converge entrada por entrada, y una función $x \mapsto A(x)$ con valores matrices es continua en $\|\cdot\| \iff$ lo son sus entradas.

Demostración.

1. $|Ax| \le \|A\||x|$. Si $x = 0$ es $0 \le 0$. Si $x \neq 0$, $x/|x|$ es unitario (C3-001.T2), así que $|A(x/|x|)| \le \|A\|$ (C1-006.D1), y por la linealidad $|Ax| = |x|\,|A(x/|x|)| \le \|A\||x|$.
2. *Norma: positividad.* $\|A\| \ge |A0| = 0$. Si $\|A\| = 0$, por el paso 1, $Ax = 0$ para todo x; en particular la columna j, que es Ae_j (C3-007.T3), es 0: $A = 0$.
3. *Homogeneidad.* Si $c = 0$ es claro. Si $c \neq 0$, $\{|cAx|\} = |c|\{|Ax|\}$ y $\sup(|c|S) = |c| \sup S$ (C1-006.T4).
4. *Triángulo.* Para $|x| \le 1$, $|(A+B)x| \le |Ax| + |Bx| \le \|A\| + \|B\|$ (C3-001.T4); $\|A\| + \|B\|$ es una cota superior, y $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ (C1-006.D1). Así $\|\cdot\|$ es una norma (C3-007.D2).
5. *Entradas.* $a_{ij} = e_i \cdot Ae_j$, así que $|a_{ij}| \le |Ae_j| \le \|A\|$ (C3-001.T2, $|e_j| = 1$). *Frobenius.* $\|A\|_F$ es cota superior del conjunto (C3-012.T3), luego $\|A\| \le \|A\|_F$.
6. *Producto.* Para $|x| \le 1$, por AL.1 y el paso 1, $|(AB)x| = |A(Bx)| \le \|A\||Bx| \le \|A\|\|B\|$; así

$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

7. *Identidad.* $|I_n x| = |x| \le 1$ para $|x| \le 1$, con igualdad en e_1: $\|I_n\| = 1$.
8. *Convergencia y continuidad.* Las matrices $m \times n$ son $\mathbb{R}^{mn}$ (C3-007.D4) y $\|\cdot\|$ es una norma ahí; por C3-014.T5 es equivalente a la euclidiana de $\mathbb{R}^{mn}$, con las mismas sucesiones convergentes y las mismas funciones continuas, y en la euclidiana eso es entrada por entrada (C3-009.T1, C3-012.T1). ■

Teorema C3-020.T3 (serie de Neumann)

Si E es $n \times n$ con $\|E\| < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-E)^k$ converge ($E^0 := I_n$), $I_n + E$ es invertible con $(I_n + E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-E)^k$, y $\|(I_n + E)^{-1}\| \le 1/(1 - \|E\|)$.

Idea de la demostración

Es la serie geométrica $1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - \cdots$ con matrices. Converge por comparación con $\sum \|E\|^k$ (el espacio de matrices es completo con cualquier norma), y la suma telescópica muestra que su límite es la inversa.

Demostración.

1. Por C3-020.T1, $\| - E\| = \|E\|$, $\|I_n\| = 1$ y $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$. Por inducción (C1-005.T1), $\|(-E)^{k+1}\| = \|(-E)^k(-E)\| \le \|E\|^k\|E\|$, así que $\|(-E)^k\| \le \|E\|^k$ para todo $k \ge 0$.
2. Como $0 \le \|E\| < 1$, $\sum_k \|E\|^k$ converge a $1/(1-\|E\|)$ (C2-024.T3), y por comparación $\sum_k \|(-E)^k\|$ converge (C2-025.T1).
3. Por C3-014.T6 (b) en el espacio de las matrices $n \times n$ con la norma de operador, las sumas parciales

$$S_l := \sum_{k=0}^{l}(-E)^k$$

convergen a un S, con $\|S\| \le \sum_k \|(-E)^k\| \le \sum_k \|E\|^k = 1/(1 - \|E\|)$ (C1-013.T3, comparando las sumas parciales).

4. *Suma telescópica.* Por la distributividad (AL.1),

$$(I_n + E)S_l = \sum_{k=0}^{l}(-E)^k - \sum_{k=0}^{l}(-E)^{k+1} = I_n - (-E)^{l+1},$$

y del mismo modo $S_l(I_n + E) = I_n - (-E)^{l+1}$ (como en C1-005.T8).

5. Por el triángulo de la norma y $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$,

$$\|(I_n + E)S - I_n\| \le \|(I_n + E)(S - S_l)\| + \|(I_n + E)S_l - I_n\| \le \|I_n + E\|\,\|S - S_l\| + \|E\|^{l+1}.$$

6. Cuando $l \to \infty$, $\|S - S_l\| \to 0$ (paso 3) y $\|E\|^{l+1} \to 0$ (C1-014.T3). El lado izquierdo no depende de l y es ≥ 0, así que es 0 (C1-013.T3): $(I_n + E)S = I_n$ (C3-007.D2). Igual, $S(I_n + E) = I_n$.
7. Por C3-007.D5, $I_n + E$ es invertible, y por la unicidad de la inversa (C3-007.T4), $(I_n + E)^{-1} = S$; la cota es la del paso 3. ■

⚠ Sin determinantes

Ni esta prueba ni la siguiente usan determinantes ni «inyectiva ⇒ invertible». Solo usan la norma, la completitud (C3-014.T6) y la serie geométrica. Por eso la cadena función inversa → implícita → Lagrange no depende del determinante (AL.4).

Teorema C3-020.T2 (las invertibles forman un abierto; la inversión es continua)

Sean A $n \times n$ invertible, $\alpha := 1/\|A^{-1}\|$ y B $n \times n$ con $\beta := \|B - A\| < \alpha$. Entonces B es invertible, $\|B^{-1}\| \le 1/(\alpha - \beta)$ y $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\|A^{-1}\|\beta$. En consecuencia el conjunto de matrices invertibles es abierto (en $\mathbb{R}^{n^2}$) y $A \mapsto A^{-1}$ es continua en él.

Idea de la demostración

$B = A(I_n + E)$ con $E := A^{-1}(B - A)$ pequeño; la serie de Neumann invierte $I_n + E$.

Demostración.

1. $A^{-1} \neq 0$ (porque $AA^{-1} = I_n \neq 0$), así que $\alpha > 0$ está bien definido. Sea $E := A^{-1}(B - A)$. Por AL.1,

$$A(I_n + E) = A + AA^{-1}(B - A) = A + (B - A) = B.$$

2. $\|E\| \le \|A^{-1}\|\,\|B - A\| = \beta/\alpha < 1$ (C3-020.T1).
3. Por la serie de Neumann (C3-020.T3), $I_n + E$ es invertible con $\|(I_n + E)^{-1}\| \le 1/(1 - \beta/\alpha)$.
4. $B = A(I_n + E)$ es producto de invertibles, luego invertible, con $B^{-1} = (I_n + E)^{-1}A^{-1}$ (C3-007.T4),

y

$$\|B^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\beta/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\alpha-\beta}.$$

5. Por AL.1, $B^{-1}(A-B)A^{-1} = B^{-1}AA^{-1} - B^{-1}BA^{-1} = B^{-1} - A^{-1}$, así que $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\,\beta\,\|A^{-1}\|$ (C3-020.T1).
6. *Abierto.* Por C3-014.T5 hay $c > 0$ con $c|X| \le \|X\|$ para toda matriz X, y también $\|X\| \le C|X|$, donde $|\cdot|$ es la euclidiana de $\mathbb{R}^{n^2}$. Si $|B-A| < \alpha/C$, entonces $\|B-A\| < \alpha$ y B es invertible: la bola euclidiana $B(A, \alpha/C)$ está formada por invertibles (C3-008.D1).
7. *Continuidad.* Si $\beta \le \alpha/2$, el paso 4 da $\|B^{-1}\| \le 2/\alpha$, y el paso 5, $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le 2\beta/\alpha^2$. Dado $\varepsilon > 0$, si $\|B-A\| < \min(\alpha/2, \varepsilon\alpha^2/2)$, entonces $\|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon$. Así $X \mapsto X^{-1}$ es continua en A con la norma de operador, y por C3-020.T1, también entrada por entrada (C3-012.D2). ■

Ejemplo C3-020.E1

Para la rotación $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\|R_\theta\| = 1$; para una diagonal, $\|\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)\| = \max|d_i|$; $\|I_n\| = 1 < \sqrt{n} = \|I_n\|_F$ si $n \ge 2$.

1. *Rotación.* $|R_\theta x|^2 = (x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta)^2 = x_1^2 + x_2^2$, porque los términos cruzados se cancelan y $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$ (C2-014.T5). Así $|R_\theta x| = |x|$, el supremo sobre $|x| \le 1$ es 1, alcanzado en e_1.
2. *Diagonal.* Sea $M := \max|d_i|$ (C1-005.T13). $|Dx|^2 = \sum d_i^2 x_i^2 \le M^2|x|^2$, así que $\|D\| \le M$; si $|d_{i_0}| = M$, $|De_{i_0}| = M$, así que $\|D\| = M$.
3. *Identidad.* $\|I_n\| = 1$ (C3-020.T1) y $\|I_n\|_F = \sqrt{1+\cdots+1} = \sqrt{n} > 1$ si $n \ge 2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $\|E\| < 1$ **en la serie de Neumann**
Con $E = -I_n$, $\|E\| = 1$, $I_n + E = 0$ no es invertible y $\sum(-E)^k = \sum I_n$ diverge.

⚠ La norma de operador, no las entradas

$E = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ tiene entradas menores que 1, pero con $u = (1,1)/\sqrt{2}$, $Eu = 1.2u$: $\|E\| \geq 1.2$, y $E^k = 1.2^{k-1}E$ hace que $\sum(-E)^k$ diverja. La hipótesis es sobre $\|E\|$.

⚠ La hipótesis es suficiente, no necesaria

$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene $\|E\| = 3$, y sin embargo $I + E$ es invertible: como $E^2 = 0$, $(I+E)(I-E) = I$. La serie de Neumann no dice nada aquí; no es la única manera de invertir.

Ejercicios

1. Calcula $\|A\|$ para $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Con E del gancho, calcula $I - E + E^2$ y compárala con $(I+E)^{-1}$.
3. Demuestra que si $\|A\| < 1$, entonces $|Ax| < |x|$ para todo $x \neq 0$.
4. Sea A invertible con $\|A^{-1}\| = 2$. ¿Qué tan lejos de A puede estar B para garantizar que es invertible?
5. Demuestra que $\|A\| = \sup\{|Ax|/|x| : x \neq 0\}$.

Respuestas

1. 5 (diagonal, C3-020.E1). Para la segunda, $|Ax| = |x_1 + x_2| \leq \sqrt{2}|x|$, con igualdad en $(1,1)/\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$.
2. $I - E + E^2 = \begin{pmatrix} 0.91 & -0.2 \\ 0 & 1.11 \end{pmatrix}$; $(I+E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1.1 & -0.2/0.99 \\ 0 & 1/0.9 \end{pmatrix}$: diferencias < 0.0021.
3. $|Ax| \leq \|A\||x| < |x|$.
4. Basta $\|B - A\| < 1/2$ (C3-020.T2).
5. Para $x \neq 0$, $|Ax|/|x| = |A(x/|x|)| \leq \|A\|$; y para $0 < |x| \leq 1$, $|Ax| \leq |Ax|/|x|$, así que los dos supremos coinciden (para $x = 0$, $|Ax| = 0$).

C3-021 · Formas cuadráticas

Motivación

> **La temperatura de una placa**
> Un sensor reporta que, cerca del centro de una placa metálica, la temperatura es $T \approx 20 + h^2 + 4hk + k^2$ grados, donde (h, k) es el desplazamiento en centímetros. Todos los coeficientes son positivos: parece que el centro es el punto más frío de la zona.
> No lo es. En $(1, -1)$ el término extra vale $1 - 4 + 1 = -2$, y en $(0.1, -0.1)$ vale -0.02: sobre la diagonal $k = -h$ la temperatura baja. Lo que decide no es el signo de los coeficientes, sino la forma entera $h \mapsto h \cdot Ah$.
> Dónde falla la analogía: una temperatura real no es exactamente cuadrática. Que los términos de orden mayor no cambien la conclusión cuando la forma es definida es el criterio del hessiano (C3-028.T3).

Definiciones

Definición C3-021.D1 (forma cuadrática)

Para A simétrica $n \times n$, $Q_A(h) := h \cdot Ah = \sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j$. Q_A es **definida positiva** si $Q_A(h) > 0$ para todo $h \neq 0$; **definida negativa** si $Q_A(h) < 0$ para todo $h \neq 0$; **semidefinida** positiva (negativa) si $Q_A \geq 0$ (≤ 0); **indefinida** si toma valores positivos y negativos.

La igualdad $h \cdot Ah = \sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j$ es la definición de Ah (C3-007.D4) y del producto punto (C3-001.D2). Dos hechos se usan todo el tiempo:

- Q_A es un polinomio en $h_1, \ldots, h_n$, luego continua en $\mathbb{R}^n$ (C3-012.T2).
- $Q_A(ch) = c^2 Q_A(h)$ para $c \in \mathbb{R}$: $(ch) \cdot A(ch) = (ch) \cdot (cAh) = c^2\, h \cdot Ah$ (C3-007.T3, C3-001.T2).

Además $Q_{-A} = -Q_A$, así que todo lo que se diga de «definida positiva» vale para «definida negativa»

cambiando A por $-A$.

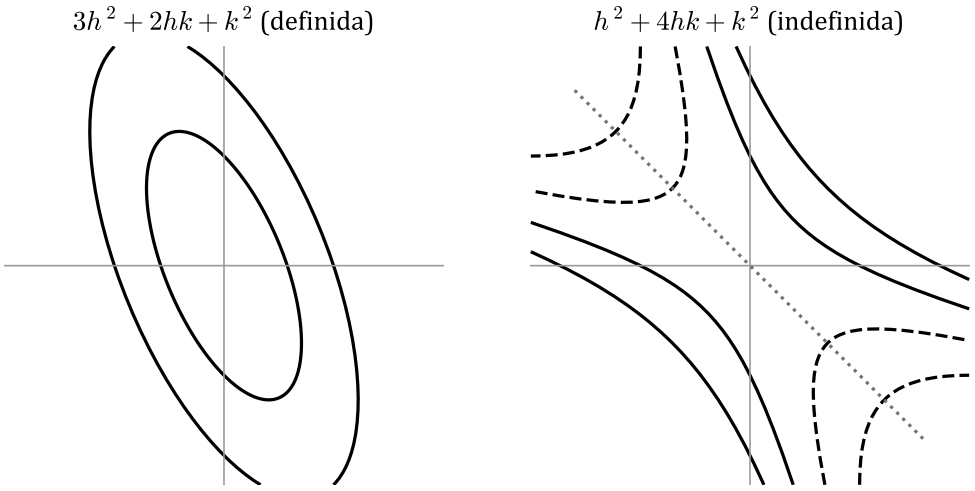


Figura 17: Niveles $Q = \pm 1, \pm 3$ (continuos los positivos, discontinuos los negativos). Izquierda: forma definida, elipses. Derecha: forma indefinida, hipérbolas; en la diagonal punteada $k = -h$ la forma es negativa.

Resultados

Teorema C3-021.T1 (cota cuadrática)

Q_A es definida positiva $\iff$ existe $m > 0$ con $Q_A(h) \geq m|h|^2$ para todo h; se puede tomar $m :=$ mín de Q_A en la esfera unitaria. Análogo para definida negativa con $Q_A(h) \leq -m|h|^2$.

Idea de la demostración
Por la homogeneidad, $Q_A(h)/|h|^2 = Q_A(h/|h|)$: todo se decide en la esfera unitaria, que es compacta. Ahí Q_A alcanza un mínimo, y ese mínimo es positivo.

Demostración. Sea $S := \{u : |u| = 1\}$.

1. ($\Leftarrow$) Si $Q_A(h) \geq m|h|^2$ con $m > 0$ y $h \neq 0$, entonces $|h|^2 > 0$ (C3-001.T2, C1-003.T5) y $Q_A(h) \geq m|h|^2 > 0$ (C1-003.T4).
2. ($\Rightarrow$) S es compacta (C3-010.E1) y no vacía ($e_1 \in S$). Q_A es continua (C3-012.T2).

3. Por Weierstrass (C3-014.C1) existe $u_0 \in S$ con $Q_A(u_0) \le Q_A(u)$ para todo $u \in S$. Sea $m := Q_A(u_0)$.
4. $u_0 \neq 0$, así que $m = Q_A(u_0) > 0$ (Q_A definida positiva).
5. Si $h \neq 0$, $u := h/|h| \in S$ (C3-001.T2) y, por la homogeneidad con $c = |h|$,

$$Q_A(h) = Q_A(|h|u) = |h|^2 Q_A(u) \ge m|h|^2$$

(C1-003.T4).
6. Si $h = 0$, $Q_A(0) = 0 = m|0|^2$.
7. El caso definida negativa es el anterior aplicado a $-A$, que es simétrica (AL.1) y cumple $Q_{-A} = -Q_A$. ■

⚠ La compacidad no sobra

«$Q > 0$ fuera del origen» no da por sí solo una cota $m|h|^2$ en un dominio cualquiera: $x \mapsto x^2$ es positiva en $(0, 1]$ y su ínfimo ahí es 0. Lo que salva a Q_A es que el cociente $Q_A(h)/|h|^2$ solo depende de $h/|h|$, que vive en un compacto.

Teorema C3-021.T2 (estabilidad)

Si $Q_A(h) \ge m|h|^2$ para todo h y B es simétrica con $\|B - A\| < m$, entonces $Q_B(h) \ge (m - \|B - A\|)|h|^2$, y Q_B es definida positiva.

Demostración. Sea $\beta := \|B - A\|$.

1. $Bh = Ah + (B - A)h$ (AL.1), así que $Q_B(h) = Q_A(h) + h \cdot (B - A)h$ (C3-001.T2).
2. Por Cauchy–Schwarz (C3-001.T3) y la norma de operador (C3-020.T1),

$$|h \cdot (B - A)h| \le |h|\,|(B - A)h| \le \beta|h|^2.$$

3. Como $-|t| \le t$ para todo real t (C1-004.T3), $h \cdot (B - A)h \ge -\beta|h|^2$.
4. Sumando con la hipótesis (C1-003.T9):

$$Q_B(h) \ge m|h|^2 - \beta|h|^2 = (m - \beta)|h|^2.$$

5. Como $m - \beta > 0$, el Teorema C3-021.T1 ($\Leftarrow$) dice que Q_B es definida positiva. ■

Esta es la pieza que el criterio del hessiano necesita: si $H_f(a)$ es definida positiva y $H_f(x)$ está cerca de $H_f(a)$, también $H_f(x)$ lo es, con una cota uniforme.

Teorema C3-021.T3 (caso 2×2)

Para $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$: Q es definida positiva $\iff a > 0$ y $ac - b^2 > 0$; definida negativa $\iff a < 0$ y $ac - b^2 > 0$; indefinida si $ac - b^2 < 0$.

Es la forma Q_A de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Idea de la demostración
Multiplicar por a y completar el cuadrado: $aQ = (ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2$. Para los recíprocos, dos testigos: $Q(1,0) = a$ y $Q(-b,a) = a(ac - b^2)$.

Demostración.

1. Desarrollando (K1-K9, C1-005.T12), para todos h, k:

$$aQ(h,k) = a^2h^2 + 2abhk + ack^2 = (ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2.$$

2. También, sustituyendo:

$$Q(1,0) = a, \qquad Q(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2).$$

3. *Definida positiva,* $\Leftarrow$. Sean $a > 0, ac - b^2 > 0$ y $(h,k) \neq 0$. Si $k \neq 0$, el paso 1 da $aQ \geq (ac - b^2)k^2 > 0$ (C1-003.T5, C1-003.T4). Si $k = 0$, entonces $h \neq 0$ y $Q = ah^2 > 0$. En los dos casos $aQ > 0$ con $a > 0$, luego $Q > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
4. *Definida positiva,* $\Rightarrow$. $a = Q(1,0) > 0$. Como $a \neq 0$, $(-b,a) \neq 0$ y $a(ac - b^2) = Q(-b,a) > 0$; dividiendo entre $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4).
5. *Definida negativa.* Q es definida negativa $\iff -Q = (-a)h^2 + 2(-b)hk + (-c)k^2$ es definida positiva $\iff -a > 0$ y $(-a)(-c) - (-b)^2 = ac - b^2 > 0$ (pasos 3 y 4).
6. *Indefinida,* $a \neq 0$. Si $ac - b^2 < 0$, por el paso 2, $Q(1,0) = a$ y $Q(-b,a) = a(ac - b^2)$ son no nulos y de signos opuestos (C1-003.T4).
7. *Indefinida,* $a = 0$. Entonces $ac - b^2 = -b^2 < 0$ obliga a $b \neq 0$, y $Q(h,1) = 2bh + c$. Con $h_\pm := (\pm 1 - c)/(2b)$ se tiene $Q(h_\pm, 1) = \pm 1$. ■

⚠ Lo que el criterio 2×2 no dice

Si $ac - b^2 = 0$ la forma es semidefinida y no definida (por ejemplo h^2, o $h^2 + 2hk + k^2 = (h+k)^2$), y el criterio del hessiano no decidirá nada (C3-028.E1).

Criterios generales (con Álgebra Lineal)

Para $n \geq 3$ el completar cuadrados se vuelve una eliminación de Gauss. El curso no la necesita: el criterio del hessiano (C3-028.T3) usa solo la cota $m|h|^2$. Para *calcular* en ejemplos se citan dos hechos de Álgebra Lineal I.

Teorema C3-021.T4 (criterios generales)

Sea A simétrica. Q_A es definida positiva $\iff$ todos los valores propios de A son positivos $\iff$ $\det A_k > 0$ para $k = 1, \dots, n$ (AL.6). Q_A es indefinida $\iff$ A tiene valores propios de signos opuestos.

Demostración. Sean $u_1, \dots, u_n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los de AL.5 ⚠ Álgebra Lineal.

1. Si $Av = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $Q_A(v) = v \cdot \lambda v = \lambda |v|^2$ (C3-001.T2).
2. ($\Rightarrow$) Si Q_A es definida positiva y λ es un valor propio con vector $v \neq 0$, el paso 1 da $\lambda |v|^2 > 0$, luego $\lambda > 0$ (C1-003.T4).
3. ($\Leftarrow$) Los λ_i son valores propios ($u_i \neq 0$), luego positivos. Si $x \neq 0$, por AL.5 $x = \sum_i (x \cdot u_i) u_i$, así que algún $x \cdot u_i \neq 0$, y

$$Q_A(x) = \sum_i \lambda_i (x \cdot u_i)^2 > 0$$

   (C1-005.T12, C1-003.T5, C1-003.T4).
4. La equivalencia con los menores $\det A_k$ es AL.6 ⚠ Álgebra Lineal.
5. *Indefinida,* $\Leftarrow$. Si $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$ con $v, w \neq 0$ y $\lambda > 0 > \mu$, el paso 1 da $Q_A(v) > 0 > Q_A(w)$.
6. *Indefinida,* $\Rightarrow$. Si $Q_A(x) > 0$, en $Q_A(x) = \sum_i \lambda_i (x \cdot u_i)^2$ algún λ_i es positivo (si todos fueran ≤ 0 la suma sería ≤ 0). Igual, si $Q_A(y) < 0$, algún $\lambda_j < 0$. ■

Ejemplo C3-021.E1

$h^2+4hk+k^2$ es indefinida: $a=c=1$, $b=2$ y $ac-b^2=1-4=-3<0$ (C3-021.T3). Testigos: $Q(1,0)=1$ y $Q(1,-1)=-2$.

La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es definida positiva: sus menores principales valen $\det A_1 = 2$, $\det A_2 = 4-1 = 3$ y, por cofactores (AL.4), $\det A_3 = 2\cdot 3-(-1)(-2) = 4$; los tres son positivos (C3-021.T4).

Por qué cada hipótesis

⚠ Que A sea simétrica

La clasificación solo ve la parte simétrica: $h\cdot Ah = h\cdot\frac{A+A^{\mathsf{T}}}{2}h$ (AL.1). Por eso $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ da la misma forma $h^2+4hk+k^2$ que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; el criterio 2×2 se aplica a la simétrica, con $b=2$, no a las entradas 4 y 0.

⚠ En C3-021.T2, $|B-A|<m$

Con $A=I_2$ $(m=1)$ y $B=\operatorname{diag}(1,1-\beta)$: $\|B-A\|=\beta$ (C3-020.E1). Para $\beta<1$ la forma $Q_B=h^2+(1-\beta)k^2$ sigue definida; con $\beta=1$ es h^2, que ya no lo es.

⚠ En C3-021.T3, el signo de a

$ac-b^2>0$ solo no basta: $-h^2-k^2$ tiene $ac-b^2=1>0$ y es definida *negativa*.

Ejercicios

1. Clasifica $3h^2+2hk+k^2$, hk y $h^2-6hk+9k^2$.
2. Demuestra que si Q_A es definida positiva, todas las entradas diagonales a_{ii} son positivas. ¿Vale el recíproco?

3. Sea A simétrica con $Q_A(h) \geq m|h|^2$. Demuestra que $|Ah| \geq m|h|$ para todo h.
4. Encuentra el mayor β tal que toda B simétrica con $\|B - I_2\| < \beta$ da una forma definida positiva.
5. Demuestra que si Q_A es definida negativa, $\max_{|u|=1} Q_A(u) < 0$, y que $Ah = 0$ implica $h = 0$.

Respuestas

1. $3h^2 + 2hk + k^2$: $a = 3 > 0$, $ac - b^2 = 3 - 1 = 2 > 0$, definida positiva. hk: $a = 0$, $b = 1/2$, $ac - b^2 = -1/4 < 0$, indefinida. $h^2 - 6hk + 9k^2 = (h - 3k)^2$: $ac - b^2 = 0$, semidefinida positiva y no definida (vale 0 en $(3, 1)$).
2. $a_{ii} = Q_A(e_i) > 0$. No: $h^2 + 4hk + k^2$ tiene diagonal 1, 1 y es indefinida.
3. Por Cauchy–Schwarz, $m|h|^2 \leq h \cdot Ah \leq |h||Ah|$; si $h \neq 0$ se divide entre $|h|$.
4. $\beta = 1$: si $\|B - I_2\| < 1$, C3-021.T2 con $m = 1$ (mín de $|h|^2$ en la esfera); el ejemplo $\text{diag}(1, 0)$ muestra que $\beta = 1$ ya falla.
5. Aplica C3-021.T1 a $-A$: $Q_A(u) \leq -m < 0$ en la esfera. Si $Ah = 0$, $Q_A(h) = h \cdot 0 = 0$, y como $Q_A(h) < 0$ para $h \neq 0$, debe ser $h = 0$.

C3-022 · La diferencial y la matriz jacobiana

Motivación

> **El radar de un dron**
> El radar de un dron reporta distancia r y ángulo θ, y el programa convierte a $(x, y) = P(r, \theta)$. En $r = 2$ m, $\theta = \pi/6$, si r aumenta 1 cm y θ aumenta 0.01 rad, el punto se mueve $(-0.00148, 0.02236)$: unos 0.0224 m, no 0.02. La matriz
>
> $$JP(2, \pi/6) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$
>
> aplicada a $(0.01, 0.01)$ da $(-0.00134, 0.02232)$, casi lo mismo. La diferencial de una función con varias componentes es esa matriz.
> Dónde falla la analogía: la aproximación solo es buena para cambios pequeños, y un radar real mide con ruido.

Parte 1 · La diferencial es una matriz

Definición C3-022.D1 (diferenciable)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ y $a \in U$. f es **diferenciable** en a si existe una matriz A $(m \times n)$ con

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{|h|} = 0.$$

Tal A es única: cada f_i cumple C3-016.D1 con v el renglón i de A ($|f_i(a+h) - f_i(a) - (Ah)_i| \leq |f(a+h) - f(a) - Ah|$), así que ese renglón es $\nabla f_i(a)$ (C3-016.T1). $Df(a) := A$ es la **diferencial** (la lineal $h \mapsto Ah$). Con $m = 1$ es C3-016.D1 ($Df(a)$ es el renglón $\nabla f(a)$); con $n = 1$, $Df(a)$ es la columna $\gamma'(a)$ de C3-002.D3.

Teorema C3-022.T1 (componentes y jacobiana)

f es diferenciable en $a \iff$ cada f_i lo es; entonces $Df(a)$ es única y es la **matriz jacobiana** $Jf(a) := (\partial_j f_i(a))$, y $Df(a)v = (D_v f_1(a), \ldots, D_v f_m(a))$. Diferenciable en $a \Rightarrow$ continua en a. $x \mapsto Bx + c$ tiene diferencial B en todo punto.

Idea de la demostración

La norma de un vector controla cada componente, y las componentes controlan la norma.

Demostración. Para $h \neq 0$ con $a + h \in U$ y una matriz A, sea $q_A(h) := (f(a+h) - f(a) - Ah)/|h|$.

1. ($\Rightarrow$) Si A cumple C3-022.D1 y r_i es su renglón i, entonces $(Ah)_i = r_i \cdot h$ (C3-007.D4) y
$$\frac{|f_i(a+h) - f_i(a) - r_i \cdot h|}{|h|} = |(q_A(h))_i| \leq |q_A(h)|$$
(C3-001.T2). El lado derecho tiende a 0, así que f_i es diferenciable en a con vector r_i (C3-016.D1).
2. Por C3-016.T1, $r_i = \nabla f_i(a) = (\partial_1 f_i(a), \ldots, \partial_n f_i(a))$. Así $A = Jf(a)$: la matriz está determinada.
3. ($\Leftarrow$) Si cada f_i es diferenciable en a, sea $A := Jf(a)$, de renglones $\nabla f_i(a)$. La componente i de $q_A(h)$ tiende a 0 (C3-016.D1, C3-016.T1).
4. Por componentes, $q_A(h) \to 0$ (C3-012.T1), y por la continuidad de la norma $|q_A(h)| \to 0$ (C3-012.T2): f es diferenciable en a con $Df(a) = Jf(a)$.
5. La componente i de $Df(a)v$ es $\nabla f_i(a) \cdot v = D_v f_i(a)$ (C3-016.T1).
6. Si f es diferenciable en a, cada f_i lo es (paso 1), luego es continua en a (C3-016.T2), y f es continua en a (C3-012.T1).

7. Para $f(x) = Bx + c$: $f(a+h) - f(a) - Bh = B(a+h) - Ba - Bh = 0$ (C3-007.T3), así que $q_B \equiv 0$ y $Df(a) = B$. ■

Definición C3-022.D2 (clase C^1)

$f : U \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 en U si todas las $\partial_j f_i$ existen y son continuas en U (C3-018.D1).

Teorema C3-022.T2 ($C^1 \iff Df$ continua)

Si f es de clase C^1 en U, es diferenciable en U y $\|Df(x) - Df(a)\| \le \|Jf(x) - Jf(a)\|_F \to 0$ cuando $x \to a$. Recíprocamente, si f es diferenciable en U y $x \mapsto Df(x)$ es continua (en $\|\cdot\|$), f es de clase C^1.

Demostración. Sea $a \in U$.

1. Si f es C^1, cada $f_i \in C^1(U)$ (C3-022.D2, C3-017.D1), así que cada f_i es diferenciable en U (C3-017.C2) y f también, con $Df(x) = Jf(x)$ (C3-022.T1).
2. Por C3-020.T1, $\|Df(x) - Df(a)\| \le \|Jf(x) - Jf(a)\|_F$.
3. $\|Jf(x) - Jf(a)\|_F$ es la norma euclidiana, en $\mathbb{R}^{mn}$, del vector de diferencias $\partial_j f_i(x) - \partial_j f_i(a)$ (C3-012.T3). Cada entrada es continua en a y vale 0 en $x = a$; por C3-012.T2 y C3-012.T1, $\|Jf(x) - Jf(a)\|_F \to 0$.
4. Recíprocamente, si f es diferenciable en U, las parciales existen y $Df(x) = Jf(x)$ (C3-022.T1). Por C3-020.T1,

$$|\partial_j f_i(x) - \partial_j f_i(a)| \le \|Df(x) - Df(a)\| \to 0 \quad (x \to a).$$

5. Cada $\partial_j f_i$ es continua en cada $a \in U$: f es de clase C^1 (C3-022.D2). ■

Definición C3-022.D3 (jacobiano)

Si $m = n$, $\det Jf(a)$ (AL.4) es el **jacobiano** de f en a. Por AL.4, $Df(a)$ es invertible $\iff$ $\det Jf(a) \neq 0$; es solo una lectura: ningún teorema del curso sobre la función inversa, la implícita o Lagrange la usa.

Ejemplo C3-022.E1 (polares y esféricas)

Para las polares, $JP(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ y $\det JP = r$; para las esféricas, $\det JE = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$.

1. $P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ (C3-013.D1). Derivando en cada variable con la otra fija (C3-015.T1, C2-014.T6): $\partial_r P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\partial_\theta P = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$. Son las columnas de JP (C3-022.T1).
2. $\det JP = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r$ (AL.4, C2-014.T5).
3. Para $E(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$, las columnas son

$$\partial_\rho E = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi E = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta E = \begin{pmatrix} -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Desarrollando por el tercer renglón (AL.4), con los dos menores simplificados por $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ (C2-014.T5):

$$\begin{aligned} \det JE &= \cos\varphi \cdot \rho^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \rho\operatorname{sen}\varphi \cdot \rho\operatorname{sen}^2\varphi \\ &= \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = \rho^2\operatorname{sen}\varphi. \end{aligned}$$

En Cálculo IV estos jacobianos serán el factor del cambio de variables en integrales dobles y triples.

Parte 2 · Dos herramientas para la función inversa

La app de mapas

Una app de mapas deforma la ciudad al dibujarla y garantiza que, en ningún punto, estira más de 1.2 veces. Dos esquinas a 500 m no pueden quedar a más de 600 m en la pantalla, *si la calle recta entre ellas está en la zona dibujada*. Si la zona tiene un corte, la garantía local no basta.

Dónde falla la analogía: una app real dibuja con pixeles y no corta el plano; el corte del ejemplo de abajo es una costura que se pone a propósito.

Teorema C3-022.T3 (desigualdad del valor medio)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en U, $a, b \in U$ con $[a,b] \subset U$ y $M \geq 0$ con $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Idea de la demostración

Para una función real sí hay TVM con igualdad. Se proyecta f sobre la dirección $u := f(b)-f(a)$ y se acota con Cauchy–Schwarz.

Demostración. Sea $u := f(b) - f(a)$. Si $u = 0$ no hay nada que probar; supongamos $u \neq 0$.

1. $\varphi(x) := u \cdot f(x) = \sum_i u_i f_i(x)$ es diferenciable en U: cada f_i lo es (C3-022.T1) y las combinaciones lineales de diferenciables lo son (C3-016.T3), con
$$\nabla\varphi(x) \cdot h = \sum_i u_i \, \nabla f_i(x) \cdot h = u \cdot Df(x)h$$
(C3-022.T1, AL.1).
2. Por el TVM en varias variables (C3-017.T1), como $[a,b] \subset U$, existe $c \in [a,b]$ con $\varphi(b) - \varphi(a) = \nabla\varphi(c) \cdot (b-a)$.
3. El lado izquierdo es $u \cdot (f(b) - f(a)) = u \cdot u = |u|^2$ (C3-001.T2).
4. El lado derecho se acota con Cauchy–Schwarz (C3-001.T3), la norma de operador (C3-020.T1) y la hipótesis ($c \in [a,b]$):
$$\begin{aligned} u \cdot Df(c)(b-a) &\leq |u| \, |Df(c)(b-a)| \\ &\leq |u| \, \|Df(c)\| \, |b-a| \\ &\leq |u| \, M \, |b-a|. \end{aligned}$$
5. Así $|u|^2 \leq |u| M |b-a|$, y dividiendo entre $|u| > 0$ (C1-003.T7, C1-003.T4), $|u| \leq M|b-a|$. ■

Con $n = 1$ es la desigualdad del valor medio para curvas (C3-003.C1).

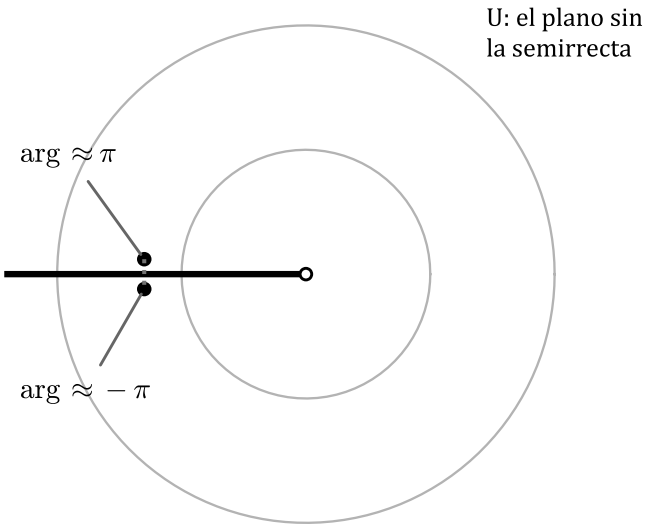


Figura 18: El plano sin la semirrecta negativa: dos puntos cercanos a ambos lados del corte tienen argumentos que difieren casi 2π, aunque $|\nabla \arg| \leq 1$ fuera del disco unitario. El segmento que los une no está en el dominio.

Teorema C3-022.T4 (la inversión de matrices es C^∞)

Sean $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ el abierto de las matrices $n \times n$ invertibles (C3-020.T2) e $\iota : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^{n^2}, \iota(M) := M^{-1}$. Entonces ι es diferenciable en cada $M \in \mathcal{G}$ con $D\iota(M)H = -M^{-1}HM^{-1}$ para toda H $n \times n$; sus parciales son $\partial \iota_{ij}/\partial m_{kl}(M) = -\iota_{ik}(M)\iota_{lj}(M)$, y $\iota \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{n^2})$.

Idea de la demostración

Es la versión matricial de $(1/m)' = -1/m^2$: $(M + H)^{-1} - M^{-1} = -(M + H)^{-1}HM^{-1}$, y el error se controla con la continuidad de la inversión. Las parciales son productos de entradas de ι: inducción. No hay determinantes.

Demostración. Las matrices $n \times n$ son $\mathbb{R}^{n^2}$ (C3-007.D4) con la norma euclidiana $|X| = \|X\|_F$. Sea $M \in \mathcal{G}$.

1. $L(H) := -M^{-1}HM^{-1}$ es lineal en H (AL.1), luego es una matriz $n^2 \times n^2$ (C3-007.T3).
2. Como $\mathcal{G}$ es abierto, hay $r > 0$ con $M + H \in \mathcal{G}$ si $|H| < r$ (C3-020.T2, C3-008.D1). Para esas H

(AL.1, C3-007.T4):

$$(M+H)^{-1} - M^{-1} = (M+H)^{-1}\big(M - (M+H)\big)M^{-1} = -(M+H)^{-1}HM^{-1}.$$

3. El error es entonces

$$R(H) := (M+H)^{-1} - M^{-1} - L(H) = \big(M^{-1} - (M+H)^{-1}\big)HM^{-1}.$$

4. Por $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ (C3-020.T1): $\|R(H)\| \le \|M^{-1} - (M+H)^{-1}\|\,\|H\|\,\|M^{-1}\|$.
5. Para toda X $n \times n$, cada $|x_{ij}| \le \|X\|$ (C3-020.T1), así que $|X|^2 = \sum_{i,j} x_{ij}^2 \le n^2\|X\|^2$ (C1-005.T12) y $|X| \le n\|X\|$; además $\|H\| \le |H|$ (C3-020.T1).
6. Con los pasos 4 y 5, para $0 < |H| < r$:

$$\frac{|R(H)|}{|H|} \le \frac{n\|R(H)\|}{|H|} \le n\,\|M^{-1}\|\,\|M^{-1} - (M+H)^{-1}\|.$$

7. Cuando $H \to 0$, $(M+H)^{-1} \to M^{-1}$ por la continuidad de la inversión (C3-020.T2), y el lado derecho tiende a 0. Por C3-022.D1, ι es diferenciable en M con $D\iota(M) = L$.
8. *Parciales.* Con $H = E_{kl}$ (un 1 en el lugar (k,l) y 0 en los demás), C3-022.T1 da $\partial\iota/\partial m_{kl}(M) = D\iota(M)E_{kl} = -M^{-1}E_{kl}M^{-1}$, cuya entrada (i,j) es $-\iota_{ik}(M)\iota_{lj}(M)$ (AL.1).
9. C^1. ι es continua (C3-020.T2); por el paso 8 sus parciales son productos de funciones continuas, luego continuas (C3-012.T2): $\iota \in C^1$ (C3-022.D2).
10. *Inducción.* Si $\iota \in C^j$ $(j \ge 1)$, cada entrada ι_{ik} está en $C^j(\mathcal{G})$, y por C3-018.T2 las parciales $-\iota_{ik}\iota_{lj}$ también. Todas las parciales de orden $\le j+1$ de ι son parciales de orden $\le j$ de esas funciones, luego existen y son continuas: $\iota \in C^{j+1}$ (C3-018.D1).
11. Por inducción (C1-005.T1), $\iota \in C^j$ para todo j, es decir, $\iota \in C^\infty$. ■

⚠ El orden de los factores

$D\iota(M)H = -M^{-1}HM^{-1}$, no $-M^{-2}H$: el producto de matrices no conmuta. Con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $-M^{-1}HM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $-M^{-2}H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por qué cada hipótesis

⚠ En C3-022.T3, $[a,b]\subset U$

Sea $U:=\mathbb{R}^2\setminus\{(t,0):t\le 0\}$ y arg la de C3-013.T1. Por C3-016.E2, arg es diferenciable en U con $\nabla\arg(x,y)=(-y,x)/(x^2+y^2)$, así que $\|D\arg(p)\|=|\nabla\arg(p)|=1/|p|\le 1$ si $|p|\ge 1$. Pero $a=(-1,0.01)$ y $b=(-1,-0.01)$ están a distancia 0.02 y $|\arg a-\arg b|\approx 6.263$: el segmento $[a,b]$ cruza el corte y no está en U.

⚠ No hay igualdad

Para $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ en $[0,2\pi]$: $\|D\gamma\|=|\gamma'|=1$ y $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=0$, pero $2\pi\gamma'(c)\neq 0$ para todo c (C3-002.E2). La desigualdad no se puede mejorar a una igualdad con un c.

⚠ La cota en todo el segmento

$f(x)=x^2$ en $[0,3]$ cumple $|f'|\le 2$ solo en $[0,1]$, y $|f(3)-f(0)|=9>2\cdot 3$.

Ejercicios

1. Calcula la jacobiana de $f(x,y,z)=(xy,\ y\operatorname{sen} z,\ e^{x+z})$ y su valor en $(1,2,0)$.
2. Demuestra que si U es convexo, f es diferenciable en U y $\|Df\|\le M$ en U, entonces f es lipschitziana en U con constante M.
3. Demuestra que si U es abierto y conexo, $f:U\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable y $Df=0$ en U, f es constante.
4. Sea ι la inversión con $n=1$. ¿Qué dice C3-022.T4? Compáralo con C1-029.
5. Verifica con $M=I_n$ que $D\iota(I_n)H=-H$, y deduce que $(I_n+H)^{-1}=I_n-H+R(H)$ con $|R(H)|/|H|\to 0$.

Respuestas

1. $Jf=\begin{pmatrix} y & x & 0\\ 0 & \operatorname{sen} z & y\cos z\\ e^{x+z} & 0 & e^{x+z}\end{pmatrix}$; en $(1,2,0)$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ e & 0 & e\end{pmatrix}$.
2. Para $x,y\in U$, $[x,y]\subset U$ (convexo) y C3-022.T3 da $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$.

3. Cada f_i tiene $\nabla f_i = 0$ (renglón de Df), luego es constante (C3-017.C1).
4. $\iota(m) = 1/m$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D\iota(m)h = -m^{-1}hm^{-1} = -h/m^2$: es $(1/m)' = -1/m^2$.
5. $D\iota(I_n)H = -I_n H I_n = -H$; la definición de diferenciable da $(I_n + H)^{-1} - I_n + H = R(H)$ con $|R(H)|/|H| \to 0$. (La serie de Neumann, C3-020.T3, da además $R(H) = \sum_{k\geq 2}(-H)^k$ si $\|H\| < 1$.)

C3-023 · Regla de la cadena

Motivación

> **La placa leída en polares**
> En una placa la temperatura es $T(x,y) = x^2 - y^2$, y un programa guarda la posición del sensor en polares, $(x,y) = P(r,\theta)$. En $(r,\theta) = (2,\pi/6)$, es decir en $(\sqrt{3},1)$, ¿a qué ritmo cambia la temperatura si el sensor se aleja del centro sin girar?
> El ritmo es $\nabla T(\sqrt{3},1)\cdot\partial_r P = (2\sqrt{3},-2)\cdot(\sqrt{3}/2,1/2) = 2$. Lo mismo sale de escribir $T\circ P = r^2\cos 2\theta$ y derivar: $2r\cos 2\theta = 2$. Al girar, el ritmo es $-4\sqrt{3}\approx -6.93$. Los dos ritmos forman el renglón $\nabla T\cdot JP$: la diferencial de la composición es el producto de las diferenciales.
> Dónde falla la analogía: el programa podría guardar el mismo punto con θ y $\theta+2\pi$; la regla de la cadena no lo ve, porque es local.

Resultados

Teorema C3-023.T1 (regla de la cadena)

Sean $U\subset\mathbb{R}^n$ y $V\subset\mathbb{R}^m$ abiertos, $f: U\to\mathbb{R}^m$ con $f(U)\subset V$ diferenciable en a y $g: V\to\mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(a)$. Entonces $g\circ f$ es diferenciable en a y $D(g\circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a)$; en entradas, $\partial_j(g_k\circ f)(a) = \sum_i \partial_i g_k(f(a))\,\partial_j f_i(a)$.

> **Idea de la demostración**
> Cada función es «lineal más un error pequeño». Se sustituye una en la otra y se comprueba que los dos errores, divididos entre $|h|$, tienden a 0, sin dividir nunca entre $|f(a+h)-f(a)|$, que puede valer 0.

Demostración. Sean $b := f(a)$, $A := Df(a)$ y $B := Dg(b)$. Como $f(U)\subset V$, $g\circ f$ está definida en U.

1. Para $h \neq 0$ con $a+h \in U$ sea $E_f(h) := (f(a+h) - f(a) - Ah)/|h|$, y $E_f(0) := 0$. Por C3-022.D1, $E_f(h) \to 0$ cuando $h \to 0$, así que E_f es continua en 0 (C3-012.D2).
2. Igual, para $k \neq 0$ con $b+k \in V$ sea $E_g(k) := (g(b+k) - g(b) - Bk)/|k|$, $E_g(0) := 0$; E_g es continua en 0.
3. Por la definición de E_f, para todo h con $a+h \in U$ (también $h = 0$):

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h|E_f(h).$$

   Lo mismo para g: $g(b+k) - g(b) = Bk + |k|E_g(k)$ si $b+k \in V$.
4. Sea $k(h) := f(a+h) - f(a)$; $b + k(h) = f(a+h) \in V$. Por el triángulo (C3-001.T4), $|cx| = |c||x|$ (C3-001.T2) y la norma de operador (C3-020.T1):

$$|k(h)| \leq |Ah| + |h||E_f(h)| \leq \big(\|A\| + |E_f(h)|\big)|h|.$$

   En particular $k(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.
5. Por el paso 3 aplicado a g con $k = k(h)$, y luego a f (con B lineal, AL.1):

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(b) &= Bk(h) + |k(h)|E_g(k(h)) \\ &= BAh + |h|\,BE_f(h) + |k(h)|E_g(k(h)). \end{aligned}$$

6. Para $h \neq 0$, por el triángulo, C3-020.T1 y el paso 4:

$$\frac{|g(f(a+h)) - g(b) - BAh|}{|h|} \leq \|B\|\,|E_f(h)| + \big(\|A\| + |E_f(h)|\big)\,|E_g(k(h))|.$$

7. Cuando $h \to 0$: $E_f(h) \to 0$ (paso 1); $k(h) \to 0$ (paso 4) y E_g es continua en 0 con $E_g(0) = 0$, luego $E_g(k(h)) \to 0$ (C3-012.T2). Por el álgebra de límites (C3-012.T2), el lado derecho tiende a 0, y con él el izquierdo, que es ≥ 0 (C3-012.D2).
8. Por C3-022.D1, $g \circ f$ es diferenciable en a con $D(g \circ f)(a) = BA$. La entrada (k,j) de BA es $\sum_i b_{ki}a_{ij}$ (AL.1), con $b_{ki} = \partial_i g_k(b)$ y $a_{ij} = \partial_j f_i(a)$ (C3-022.T1). ■

> ⚠ **La prueba «corta» que no sirve**
>
> Escribir $\dfrac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{|h|} = \dfrac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{|k|} \cdot \dfrac{|k|}{|h|}$ falla cuando $k = f(a+h) - f(a) = 0$ con $h \neq 0$, por ejemplo si f es constante en una dirección. Por eso se usa E_g con $E_g(0) := 0$, como en la prueba de C1-030.T1.

Corolario C3-023.C1 (composición de clase C^k)

Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ y $g \in C^k(V, \mathbb{R}^p)$ $(k \geq 1)$ con $f(U) \subset V$, $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$.

Demostración. Por inducción en k (C1-005.T1), para todos los f, g que cumplan las hipótesis.

1. f y g son diferenciables en U y V (C3-022.T2), así que por C3-023.T1, para cada $x \in U$,
$$\partial_j(g_l \circ f)(x) = \sum_i \big(\partial_i g_l \circ f\big)(x)\, \partial_j f_i(x).$$
2. $k = 1$. f es continua (C3-022.T1) y $\partial_i g_l$ es continua, luego $\partial_i g_l \circ f$ es continua (C3-012.T2); $\partial_j f_i$ es continua. Sumas y productos de continuas son continuos (C3-012.T2): las parciales de $g \circ f$ son continuas y $g \circ f \in C^1$ (C3-022.D2).
3. *De $k-1$ a k $(k \geq 2)$.* Si $f \in C^k$ y $g \in C^k$, entonces $f \in C^{k-1}$ y $\partial_i g_l \in C^{k-1}(V)$ (C3-018.D1). Por la hipótesis de inducción, $\partial_i g_l \circ f \in C^{k-1}(U)$.
4. También $\partial_j f_i \in C^{k-1}(U)$. Por C3-018.T2, la suma de productos del paso 1 está en $C^{k-1}(U)$.
5. Las parciales de orden $\leq k$ de $g_l \circ f$ son parciales de orden $\leq k-1$ de sus primeras parciales, que existen y son continuas (paso 4): $g \circ f \in C^k$ (C3-018.D1). ■

Teorema C3-023.T2 (el gradiente es ortogonal a los niveles)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $F : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, J un intervalo abierto y $\gamma : J \to U$ derivable con $F(\gamma(t)) = c$ para todo $t \in J$. Entonces $\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

Demostración.

1. $t \mapsto F(\gamma(t))$ es la constante c en J, así que su derivada es 0 (C1-028.T2).
2. Por la cadena con una variable (C3-016.T4), esa derivada es $\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. ■

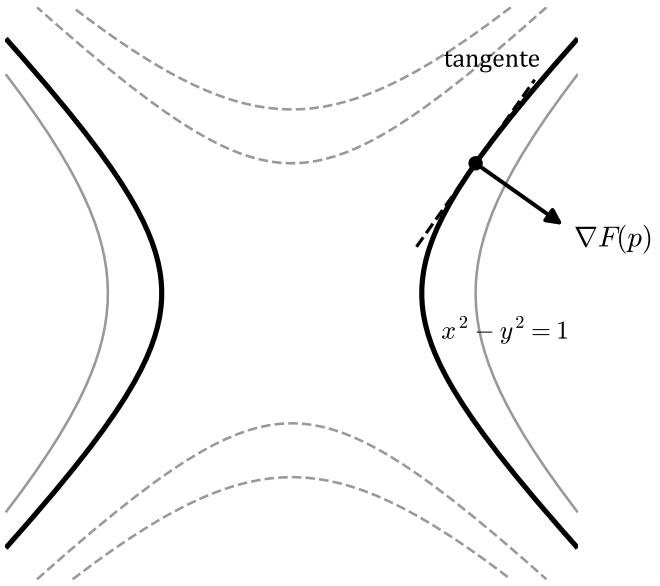


Figura 19: Niveles de $F = x^2 - y^2$. En $p = (\sqrt{2}, 1)$, sobre el nivel 1, $\nabla F(p)$ es perpendicular a la recta tangente.

Definición C3-023.D1 (hiperplano tangente a un nivel)

Si $F \in C^1(U)$, $F(p) = c$ y $\nabla F(p) \neq 0$, el **hiperplano tangente** a $N_c(F)$ en p es $\{x : \nabla F(p) \cdot (x - p) = 0\}$.

Que *todo* vector ortogonal a $\nabla F(p)$ sea la velocidad de una curva en el nivel es más difícil: pide la función implícita, y es C3-026.C2.

Ejemplo C3-023.E1

El plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en $(1, 1, 1)$ es $x + y + z = 3$. Si $f \in C^1(U)$, la gráfica de f es el nivel 0 de $F(x, z) := f(x) - z$, y C3-023.D1 da el plano de C3-017.D2.

1. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ es un polinomio, de clase C^1, con $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$ (C3-015.T1, C3-016.T1); $\nabla F(1, 1, 1) = (2, 2, 2) \neq 0$.
2. El plano es $2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$, es decir, $x + y + z = 3$.
3. Para $f \in C^1(U)$, $F(x, z) := f(x) - z$ es de clase C^1 en $U \times \mathbb{R}$ (C3-016.T3) con $\nabla F(a, f(a)) = (\nabla f(a), -1) \neq 0$.
4. El hiperplano $\nabla f(a) \cdot (x - a) - (z - f(a)) = 0$ es $z = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$: el de

> C3-017.D2.

Por qué cada hipótesis

⚠ g diferenciable, no solo con parciales

Sean $g(x,y) := xy/(x^2+y^2)$, $g(0) := 0$, y $f(t) = (t,t)$. Existen $\nabla g(0) = 0$ y $f'(0) = (1,1)$; la «regla» daría $(g \circ f)'(0) = 0$. Pero $g(f(t)) = 1/2$ si $t \neq 0$ y $g(f(0)) = 0$: $g \circ f$ ni siquiera es continua en 0. Falla porque g no es diferenciable en 0 (C3-015.E2).

⚠ Ni siquiera todas las direccionales bastan

Con $g(x,y) := x^2y/(x^4+y^2)$, $g(0) := 0$, todas las $D_v g(0)$ existen (C3-015.E2), y con $f(t) = (t,t^2)$, $g(f(t)) = 1/2$ para $t \neq 0$: $g \circ f$ no es continua en 0.

⚠ f diferenciable

Con $f(t) = (|t|, 0)$ y $g(x,y) = x$ (lineal), $g \circ f = |t|$ no es derivable en 0.

Ejercicios

1. Sea $u(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Expresa $\partial_x u$ y $\partial_y u$ con las parciales de f.
2. Demuestra que si f es diferenciable y $f(tx) = t^p f(x)$ para todo $t > 0$ y $x \neq 0$ (homogénea de grado p), entonces $\nabla f(x) \cdot x = p f(x)$ (Euler).
3. Calcula el plano tangente a $z = xy$ en $(1,2,2)$ de las dos maneras de C3-023.E1.
4. Sea $L(x) = Bx$ lineal. Demuestra con C3-023.T1 que $D(L \circ f)(a) = B\,Df(a)$.
5. Demuestra que si $F \in C^1(U)$ y γ es una curva en un nivel de F que pasa por un punto crítico p de F, C3-023.T2 no da ninguna información en p.

Respuestas

1. Con $(s,t) = (x^2 - y^2, 2xy)$: $\partial_x u = 2x\,\partial_1 f + 2y\,\partial_2 f$ y $\partial_y u = -2y\,\partial_1 f + 2x\,\partial_2 f$, evaluadas en (s,t).
2. Fija x y deriva $t \mapsto f(tx) = t^p f(x)$ en $t = 1$: por C3-016.T4, $\nabla f(x) \cdot x = p f(x)$.

3. $\nabla(xy) = (2,1)$ en $(1,2)$: $z = 2 + 2(x-1) + (y-2)$. Con $F = xy - z$, $\nabla F = (2,1,-1)$ y $2(x-1) + (y-2) - (z-2) = 0$: el mismo plano.
4. $DL(y) = B$ en todo punto (C3-022.T1), así que $D(L \circ f)(a) = B\,Df(a)$.
5. En p, $\nabla F(p) = 0$ y $0 \cdot \gamma'(t) = 0$ para cualquier γ': la conclusión es trivial.

C3-024 · Contracciones: punto fijo de Banach

Motivación

> **El plano de tu sala sobre el piso de tu sala**
> Imprimes el plano de tu sala a escala 1:50 y lo dejas caer sobre el piso de la misma sala, girado como sea, sin que se salga. Hay exactamente un punto del plano que queda justo encima del lugar que representa.
> Para encontrarlo basta repetir: toma un punto del piso, busca dónde lo dibuja el plano, toma ese nuevo punto, y así. Cada paso acerca los puntos 50 veces más. Es el teorema del punto fijo de Banach, y será la herramienta para resolver ecuaciones $f(x) = y$ en la función inversa.
> Dónde falla la analogía: un plano de papel se dobla y tiene grosor, así que no es exactamente una contracción; y si el plano se sale de la sala, falla la hipótesis $\varphi(F) \subset F$.

Definiciones

Definición C3-024.D1 (contracción)

Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. $\varphi : F \to F$ es una **contracción** si existe $c \in [0, 1)$ con $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x - y|$ para todos $x, y \in F$. x es **punto fijo** si $\varphi(x) = x$.

Toda contracción es lipschitziana, luego continua (C3-014.D1).

Resultados

Teorema C3-024.T1 (Banach)

Sean $F \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y no vacío y $\varphi : F \to F$ una contracción de constante c. Entonces φ tiene un único punto fijo x^*, y para cada $x_0 \in F$ la sucesión $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ converge a x^* con

$$|x_k - x^*| \leq \frac{c^k |x_1 - x_0|}{1 - c}.$$

Idea de la demostración

Los saltos $|x_{k+1} - x_k|$ decrecen como una progresión geométrica, así que la sucesión es de Cauchy. Converge por la completitud de $\mathbb{R}^n$; el límite está en F porque F es cerrado, y es fijo porque φ es continua.

Demostración. Como $F \neq \emptyset$, hay $x_0 \in F$; sea $d := |x_1 - x_0|$.

1. Como $\varphi(F) \subset F$, la recursión $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ define una sucesión (x_k) en F (C1-005.T11).
2. Para todo $k \geq 0$, $|x_{k+1} - x_k| \leq c^k d$. Por inducción (C1-005.T1): para $k = 0$ es una igualdad ($c^0 = 1$); si vale para k, por C3-024.D1 y C1-003.T4,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leq c\,|x_{k+1} - x_k| \leq c^{k+1} d$$

   (C1-005.T9).
3. Para $l > k$, por el triángulo repetido (C3-001.T4, C1-005.T1), el paso 2 y la suma geométrica (C1-005.T12, C1-005.T8; si $c = 0$ la suma vale d o 0 y la cuenta sigue):

$$\begin{aligned} |x_l - x_k| &\leq \sum_{j=k}^{l-1} |x_{j+1} - x_j| \leq \sum_{j=k}^{l-1} c^j d \\ &= c^k d\,\frac{1 - c^{l-k}}{1 - c} \leq \frac{c^k d}{1 - c} \end{aligned}$$

   (C1-003.T7, C1-003.T4: $1/(1-c) > 0$ y $0 \leq c^{l-k}$).
4. Como $0 \leq c < 1$, $c^k \to 0$ (C1-014.T3). Dado $\varepsilon > 0$ hay N con $c^N d/(1-c) < \varepsilon$ (C1-013.T2), y para $l > k \geq N$, $c^k = c^N c^{k-N} \leq c^N$ (C1-005.T9, C1-003.T4). Así $|x_l - x_k| < \varepsilon$: (x_k) es de Cauchy (C3-009.D1).
5. Por la completitud (C3-009.T2), $x_k \to x^*$ para algún $x^* \in \mathbb{R}^n$, y como F es cerrado, $x^* \in F$

(C3-009.T4).

6. φ es continua en x^* (C3-014.D1), así que $\varphi(x_k) \to \varphi(x^*)$ (C3-012.T1). Pero $\varphi(x_k) = x_{k+1} \to x^*$ (C3-009.T1, una subsucesión). Por la unicidad del límite (C3-009.T1), $\varphi(x^*) = x^*$.
7. *Unicidad.* Si $\varphi(y^*) = y^*$ con $y^* \in F$:

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \leq c|x^* - y^*|,$$

así que $(1-c)|x^* - y^*| \leq 0$; como $1 - c > 0$, $|x^* - y^*| = 0$ y $y^* = x^*$ (C1-003.T4, C3-001.T2).
8. *Cota del error.* Fijo k, en el paso 3 hacemos $l \to \infty$: $|x_l - x_k| \to |x^* - x_k|$ (C3-009.T1), y la desigualdad pasa al límite (C1-013.T3): $|x^* - x_k| \leq c^k d/(1-c)$. ■

⚠ La cota es del peor caso

La cota no necesita conocer x^*: solo c y el primer salto. Por eso suele ser pesimista (ver el ejemplo con cos).

Por qué cada hipótesis

Ejemplo C3-024.E1 (cada hipótesis)
$x \mapsto x/2$ en $(0, 1]$ (no cerrado) no tiene punto fijo; $\varphi(x) = x + 1/x$ en $[1, \infty)$ cumple $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$ y no tiene punto fijo (no basta «< 1» sin una c fija). cos manda $[0, 1]$ en $[0, 1]$ y es contracción con $c = \operatorname{sen} 1 < 1$: las iteraciones $x_{k+1} = \cos x_k$ convergen al único $x^* = \cos x^*$ (≈ 0.739).

1. *F cerrado.* $x \mapsto x/2$ manda $(0, 1]$ en $(0, 1/2] \subset (0, 1]$ con $c = 1/2$. Si $x = x/2$, entonces $x = 0 \notin (0, 1]$. Las iteraciones tienden a 0, que se escapa de F.
2. *Una c fija.* Para $x, y \geq 1$: $\varphi(x) \geq x \geq 1$, así que φ manda $[1, \infty)$ en sí mismo, y

$$\varphi(x) - \varphi(y) = (x - y)\Big(1 - \frac{1}{xy}\Big), \qquad 0 \leq 1 - \frac{1}{xy} < 1$$

(C1-003.T7). Si $x \neq y$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$. Pero $\varphi(x) - x = 1/x > 0$: no hay punto fijo. El factor $1 - 1/(xy)$ se acerca a 1 cuando x, y crecen, y ninguna $c < 1$ sirve.
3. cos *en* $[0, 1]$. Como $\pi > 2$ (C2-014.C3), $1 < \pi/2 < \pi$. cos es decreciente en $[0, \pi]$ (C2-014.T4), así que $\cos([0, 1]) \subset [\cos 1, 1]$, y $\cos 1 > 0$ (C2-014.C1): cos manda $[0, 1]$ en $[0, 1]$.

4. Para $x \neq y$ en $[0,1]$, por el TVM (C1-033.T1, C2-014.T6) hay ξ entre ellos con $\cos x - \cos y = -\operatorname{sen}\xi\,(x-y)$.
5. $\operatorname{sen}' = \cos > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ (C2-014.C1), así que sen es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ (C1-034.T2); con $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ (C2-014.C1): $0 \leq \operatorname{sen}\xi \leq \operatorname{sen} 1 < 1$.
6. Así $|\cos x - \cos y| \leq (\operatorname{sen} 1)|x-y|$, y por C3-024.T1 hay un único $x^* \in [0,1]$ con $\cos x^* = x^*$. Numéricamente $x^* \approx 0.739085$.

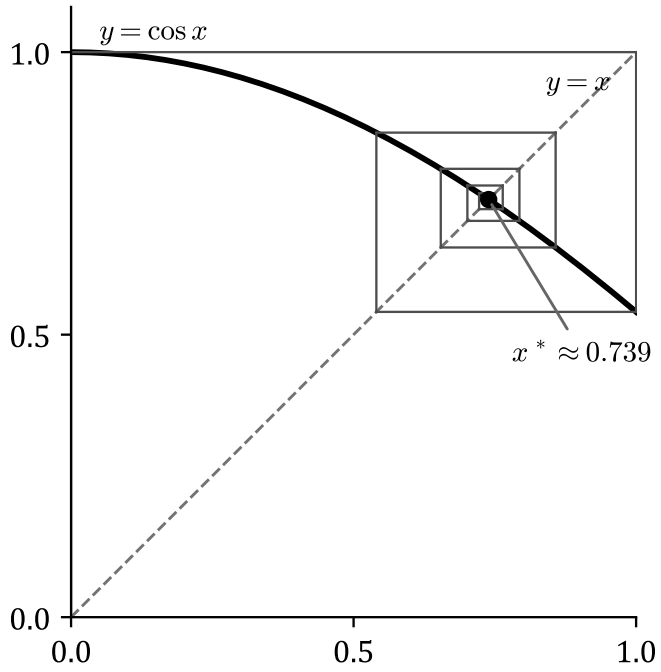


Figura 20: La telaraña de $x_{k+1} = \cos x_k$ desde $x_0 = 0$: los saltos se encogen y la espiral se cierra sobre el único punto fijo.

Con $c = \operatorname{sen} 1 \approx 0.841471$ y $|x_1 - x_0| = 1$, la cota garantiza error $< 10^{-6}$ en $k = 91$ pasos; de hecho bastan 33, porque cerca de x^* el factor real es $\operatorname{sen} x^* \approx 0.674$.

⚠ $\varphi(F) \subset F$

$\varphi(x) = x/2 + 3$ es contracción ($c = 1/2$) de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, pero su único punto fijo, 6, no está en $[0,1]$: las iteraciones salen de F.

Ejercicios

1. Demuestra que $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}$ tiene un único punto fijo en $\mathbb{R}$ y da una cota para $|x_{10} - x^*|$ desde $x_0 = 0$.
2. Sean F cerrado no vacío y $\varphi : F \to F$ tal que $\varphi^m := \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (m veces) es contracción. Demuestra que φ tiene un único punto fijo.
3. Demuestra la cota *a posteriori* $|x_k - x^*| \leq \frac{c}{1-c}|x_k - x_{k-1}|$.
4. Sea A una matriz $n \times n$ con $\|A\| < 1$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que $x = Ax + b$ tiene solución única y compárala con la serie de Neumann (C3-020.T3).
5. ¿Es $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ una contracción de $\mathbb{R}$? ¿Tiene punto fijo?

Respuestas

1. $|\varphi'| = \frac{1}{2}|\operatorname{sen}| \leq \frac{1}{2}$, así que es contracción de $\mathbb{R}$ (cerrado) con $c = 1/2$ (TVM). $x_1 = 3/4$: $|x_{10} - x^*| \leq (1/2)^{10}(3/4)/(1/2) = 3/2^{11} \approx 0.00146$.
2. φ^m tiene un único fijo x^*. $\varphi(x^*)$ también es fijo de φ^m ($\varphi^m(\varphi(x^*)) = \varphi(\varphi^m(x^*)) = \varphi(x^*)$), luego $\varphi(x^*) = x^*$. Todo fijo de φ lo es de φ^m: unicidad.
3. Aplica la cota del teorema a la sucesión que empieza en x_{k-1}: $|x_k - x^*| \leq c|x_k - x_{k-1}|/(1-c)$.
4. $\varphi(x) = Ax + b$ cumple $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|A\||x - y|$ (C3-020.T1): contracción de $\mathbb{R}^n$. La solución es $x^* = (I_n - A)^{-1}b = \sum_k A^k b$, y la iteración desde $x_0 = 0$ da las sumas parciales.
5. $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$ (TVM con $|\varphi'(t)| = |t|/\sqrt{t^2+1} < 1$), pero no es contracción: el cociente tiende a 1 cuando $x, y \to \infty$. No tiene punto fijo: $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$.

C3-025 · Teorema de la función inversa

Motivación

Los mandos de un dron

Un dron tiene dos mandos (u, v); en reposo están en $(0, 0)$, y la posición que alcanza es $f(u, v) = (u + v^3/3, v + u^2/4)$. Para llevarlo a $y = (0.05, -0.03)$ no hay fórmula. Pero en el reposo $Df(0, 0) = I_2$ no aplasta ninguna dirección, y la corrección $p \mapsto p + (y - f(p))$, repetida desde $(0, 0)$, llega en 4 pasos a $|f(p) - y| < 10^{-10}$, con $p \approx (0.0500096, -0.0306252)$. Cerca del reposo, la solución existe y es única.

Dónde falla la analogía: un dron real tiene límites físicos y ruido, y el teorema no dice qué tan grande es «cerca».

⚠ Regla de esta clase

Ninguna demostración de este capítulo usa determinantes (AL.4). «$Df(a)$ invertible» se lee «jacobiano $\neq 0$» (C3-022.D3), pero lo que se usa es la norma de operador (C3-020) y la inversión C^∞ (C3-022.T4).

Parte 1 · Inyectiva cerca y con imagen abierta

Teorema C3-025.T1 (inyectividad local e imagen abierta)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y $a \in U$ con $A := Df(a)$ invertible (C3-007.D5; se lee «jacobiano $\neq 0$», C3-022.D3, pero la prueba no usa determinantes). Sea $\lambda := 1/(2\|A^{-1}\|)$. Existe $r > 0$ con $W := B(a, r) \subset U$ y $\|Df(x) - A\| < \lambda$ para $x \in W$, y entonces:

(a) $|f(x) - f(y)| \geq \lambda|x - y|$ para $x, y \in W$; en particular f es inyectiva en W.

(b) $V := f(W)$ es abierto.

(c) $Df(x)$ es invertible para todo $x \in W$.

Idea de la demostración
$f(x) = y$ equivale a que x sea punto fijo de $\varphi_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$. Cerca de a, $D\varphi_y$ es pequeña, así que φ_y es una contracción: de ahí la inyectividad (a) y, con Banach, que la imagen es abierta (b).

Demostración.

1. $AA^{-1} = I_n \neq 0$, así que $A^{-1} \neq 0$ y $\|A^{-1}\| > 0$ (AL.1, C3-020.T1): $\lambda > 0$ está definido.
2. $x \mapsto Df(x)$ es continua en a (C3-022.T2). Como U es abierto, hay $r > 0$ con $W := B(a, r) \subset U$ y $\|Df(x) - A\| < \lambda$ para todo $x \in W$ (C3-008.D1, C3-012.D2; se toma el menor de los dos radios).
3. Fijo $y \in \mathbb{R}^n$, sea $\varphi_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$ en U. Por C3-022.T1 (la identidad y las constantes) y la cadena con la lineal $z \mapsto A^{-1}z$ (C3-023.T1), φ_y es diferenciable con

$$D\varphi_y(x) = I_n - A^{-1}Df(x) = A^{-1}\big(A - Df(x)\big)$$

   (AL.1).
4. Para $x \in W$, por C3-020.T1 y el paso 2:

$$\|D\varphi_y(x)\| \leq \|A^{-1}\|\,\|A - Df(x)\| < \|A^{-1}\|\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

5. La bola W es convexa (C3-011.T2): si $x, x' \in W$, $[x, x'] \subset W$. Por la desigualdad del valor medio (C3-022.T3) con $M = \frac{1}{2}$:

$$|\varphi_y(x) - \varphi_y(x')| \leq \tfrac{1}{2}|x - x'| \qquad (x, x' \in W).$$

6. *(a).* Por la definición de φ_y (AL.1), $x - x' = \big(\varphi_y(x) - \varphi_y(x')\big) + A^{-1}\big(f(x) - f(x')\big)$. Por el triángulo (C3-001.T4), el paso 5 y C3-020.T1:

$$|x - x'| \leq \tfrac{1}{2}|x - x'| + \|A^{-1}\|\,|f(x) - f(x')|.$$

   Restando y dividiendo entre $\|A^{-1}\| > 0$: $|f(x) - f(x')| \geq \lambda|x - x'|$. Si $f(x) = f(x')$, entonces $|x - x'| \leq 0$ y $x = x'$: f es inyectiva en W.
7. *(b).* Sea $y_0 \in V$, $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 \in W$. Como W es abierto, hay $\rho > 0$ con $K := \bar{B}(x_0, \rho) \subset W$ (C3-008.D1, tomando ρ la mitad del radio de una bola abierta en W).

8. Sea y con $|y - y_0| < \lambda\rho$. Como $\varphi_y(x_0) = x_0 + A^{-1}(y - y_0)$, para $x \in K$, por el triángulo, el paso 5 y C3-020.T1:

$$\begin{aligned} |\varphi_y(x) - x_0| &\le |\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)| + |A^{-1}(y - y_0)| \\ &\le \tfrac{1}{2}\rho + \|A^{-1}\|\,|y - y_0| < \tfrac{1}{2}\rho + \tfrac{1}{2}\rho = \rho. \end{aligned}$$

   Así $\varphi_y(K) \subset K$.
9. K es cerrado (C3-008.T1) y no vacío, y $\varphi_y|_K$ es contracción con $c = \frac{1}{2}$ (paso 5). Por Banach (C3-024.T1), hay $x \in K$ con $\varphi_y(x) = x$, es decir, $A^{-1}(y - f(x)) = 0$.
10. Multiplicando por A (C3-007.T4, AL.1), $y - f(x) = 0$: $y = f(x) \in f(W) = V$. Así $B(y_0, \lambda\rho) \subset V$, y V es abierto (C3-008.D1).
11. *(c).* Para $x \in W$, $\|Df(x) - A\| < \lambda < 1/\|A^{-1}\|$; por C3-020.T2, $Df(x)$ es invertible. ■

⚠ La misma A en todos los pasos

La corrección usa siempre $A = Df(a)$, no $Df(x)$ como el método de Newton. Así $D\varphi_y$ es pequeña en toda la bola a la vez, hay una sola constante $\frac{1}{2}$ y Banach se aplica; y no hace falta saber antes que $Df(x)$ es invertible: sale en (c).

Parte 2 · La inversa es diferenciable

Teorema C3-025.T2 (teorema de la función inversa)

En las condiciones de C3-025.T1, $g := (f|_W)^{-1} : V \to W$ es de clase C^1 y $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$ para todo $y \in V$. Si además $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ $(k \ge 1)$, $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$.

Idea de la demostración

Por (a), g es lipschitziana. El error de g se escribe con el error de f, lo que da $Dg = (Df \circ g)^{-1}$. Esa fórmula es $\iota \circ (Df \circ g)$ con la inversión ι, que es C^∞ (C3-022.T4): cada grado de suavidad de g da uno más.

Demostración.

1. Por C3-025.T1 (a), $f|_W : W \to V$ es biyectiva, así que g está bien definida. Para $y, y' \in V$, con $x = g(y), x' = g(y')$ en (a): $|g(y) - g(y')| \le |y - y'|/\lambda$. En particular g es continua (C3-014.D1).

2. Fijo $y \in V$, sean $x := g(y)$ y $B := Df(x)^{-1}$, que existe por C3-025.T1 (c). Como V es abierto, $y + k \in V$ si $|k|$ es pequeño. Para tales $k \neq 0$ sea $h := g(y + k) - x$: entonces $f(x + h) = y + k$, $h \neq 0$ (g es inyectiva) y $|h| \leq |k|/\lambda$ (paso 1).
3. Como $BDf(x)h = h$ (C3-007.T4, AL.1) y $f(x + h) - f(x) = k$:

$$g(y + k) - g(y) - Bk = h - B\big(f(x + h) - f(x)\big) = -B\big(f(x + h) - f(x) - Df(x)h\big).$$

4. Sea $E(h) := |f(x + h) - f(x) - Df(x)h|/|h|$ para $h \neq 0$ y $E(0) := 0$; E es continua en 0 porque f es diferenciable en x (C3-022.T2, C3-022.D1). Por C3-020.T1 y el paso 2:

$$\frac{|g(y + k) - g(y) - Bk|}{|k|} \leq \|B\|\, E(h)\, \frac{|h|}{|k|} \leq \frac{\|B\|}{\lambda}\, E(h).$$

5. Cuando $k \to 0$, $h = g(y+k) - g(y) \to 0$ (g es continua), y $E(h) \to 0$ (C3-012.T2). Por C3-022.D1, g es diferenciable en y con $Dg(y) = B = Df(g(y))^{-1}$.
6. C^1. Con ι la inversión de C3-022.T4, $Dg = \iota \circ (Df \circ g)$ en V. g es continua, $x \mapsto Df(x)$ es continua en W (C3-022.T2) con valores en el abierto $\mathcal{G}$ de las invertibles (C3-025.T1 c), e ι es continua (C3-020.T2). La composición es continua (C3-012.T2), y por C3-022.T2, $g \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$.
7. C^k. Supongamos $f \in C^k$ y $g \in C^j(V)$ con $1 \leq j < k$. Las entradas $\partial_j f_i$ de Df están en $C^{k-1}(W) \subset C^j(W)$ (C3-018.D1).
8. Por C3-023.C1, $Df \circ g \in C^j(V, \mathbb{R}^{n^2})$, con valores en $\mathcal{G}$; como $\iota \in C^\infty(\mathcal{G})$ (C3-022.T4), de nuevo por C3-023.C1, $Dg = \iota \circ (Df \circ g) \in C^j(V)$.
9. Las entradas de Dg son las primeras parciales de g (C3-022.T1), y están en C^j: $g \in C^{j+1}$ (C3-018.D1).
10. Por inducción en j (C1-005.T1), desde $j = 1$ (paso 6) hasta $j = k$: $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$. ■

Por qué cada hipótesis

Ejemplo C3-025.E1 (local no es global; cada hipótesis)
P (polares) cumple C3-025.T1 en cada (r, θ) con $r \neq 0$ y no es inyectiva en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. $x \mapsto x^3$ es biyectiva y C^∞ en $\mathbb{R}$, y su inversa no es derivable en 0 ($Df(0) = 0$). $f(x) := x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $f(0) := 0$, tiene $f'(0) = 1$ y no es inyectiva en ningún intervalo alrededor de 0 (f' no es continua en 0: $f'(1/(2k\pi)) = -1$).

1. *Polares.* P es C^∞ (C3-018.T2, C2-014.T6) con $JP(r, \theta)$ de C3-022.E1. Para $r \neq 0$, la matriz

$K := \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix}$ cumple $KJP = JPK = I_2$ (AL.1, con $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, C2-014.T5): JP es invertible y C3-025.T1 se aplica. Pero $P(1,0) = P(1,2\pi) = (1,0)$ (C2-014.T5): P no es inyectiva.

2. x^3. $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente, continua y sobre (C1-023.C2 para $x > 0$ y la imparidad), C^∞, con $f'(0) = 0$. Si su inversa g fuera derivable en $0 = f(0)$, la cadena (C1-030.T1) en $g(f(x)) = x$ daría $1 = g'(0)f'(0) = 0$.
3. $x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$. $|2h \operatorname{sen}(1/h)| \leq 2|h|$, así que $f'(0) = \lim_{h\to 0}(1 + 2h\operatorname{sen}(1/h)) = 1$ (C1-027.D1). Para $x \neq 0$ (C1-029.T2, C1-030.T1, C2-014.T6):

$$f'(x) = 1 + 4x\operatorname{sen}(1/x) - 2\cos(1/x).$$

4. Con $x_k := 1/(2k\pi)$ y $y_k := 1/((2k+1)\pi)$ (C2-014.C1): $f'(x_k) = -1$ y $f'(y_k) = 3$. Todo intervalo alrededor de 0 contiene x_k y y_k para k grande (C1-007.C1).
5. Si f fuera inyectiva en un intervalo $I \ni 0$, sería estrictamente monótona ahí (C1-026.T2), y su derivada sería ≥ 0 en todo I o ≤ 0 en todo I (C1-019.T3, por el signo de los cocientes). Contradice el paso 4.

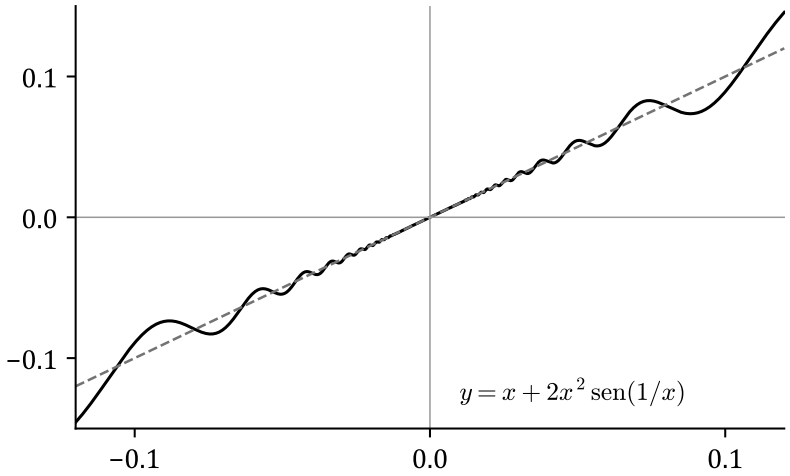


Figura 21: La gráfica de $x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ cerca de 0 oscila alrededor de la recta $y = x$: tiene pendiente 1 en el origen, pero no es monótona en ningún intervalo que lo contenga.

⚠ Lo que cada ejemplo enseña

- Polares: el teorema es **local**. Df invertible en todas partes no da una inversa global.
- x^3: sin $Df(a)$ invertible puede haber inversa, pero no diferenciable.
- $x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$: $Df(a)$ invertible en un solo punto no basta; hace falta que Df sea continua (que f sea C^1), para que $\|Df(x) - A\| < \lambda$ en una bola.

Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Demuestra que $Df(x, y)$ es invertible en todo punto (sin determinantes, exhibiendo la inversa) y que f no es inyectiva.
2. Para f del ejercicio 1 y su inversa local g cerca de $f(0, 0) = (1, 0)$, calcula $Dg(1, 0)$.
3. Demuestra que si f es como en C3-025.T1, entonces f manda abiertos contenidos en W en abiertos.
4. Sea $f(x) = x + x^2$ en $\mathbb{R}$. Encuentra el mayor intervalo abierto alrededor de 0 donde se aplica el teorema y la fórmula de g'.
5. ¿Por qué la prueba de (b) usa la bola *cerrada* $\bar{B}(x_0, \rho)$ y no la abierta?

Respuestas

1. $Jf = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix}$ y $e^{-x} \begin{pmatrix} \cos y & \operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix}$ es su inversa ($\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$). $f(0, 0) = f(0, 2\pi)$.
2. $Dg(1, 0) = Df(0, 0)^{-1} = I_2^{-1} = I_2$.
3. Si $O \subset W$ es abierto, para $x_0 \in O$ hay ρ con $\bar{B}(x_0, \rho) \subset O$, y los pasos 8-10 dan $B(f(x_0), \lambda\rho) \subset f(O)$.
4. $f'(x) = 1+2x \neq 0$ salvo en $x = -1/2$; en $(-1/2, \infty)$ f es inyectiva, con $g(y) = (-1+\sqrt{1 + 4y})/2$ y $g'(y) = 1/f'(g(y)) = 1/\sqrt{1 + 4y}$ para $y > -1/4$.
5. Banach pide un conjunto **cerrado** (C3-024.T1): en la abierta, el punto fijo podría estar en el borde y no pertenecerle.

C3-026 · Teorema de la función implícita

Motivación

> **Un sendero en un mapa topográfico**
> En un mapa topográfico, la curva de nivel de 2,000 m de una colina en forma de domo es (en km, centrada) la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Cerca de $(0.6, 0.8)$ el sendero es la gráfica de $y = \sqrt{1 - x^2}$, con pendiente $-0.6/0.8 = -0.75$. Cerca de $(1, 0)$, donde el sendero va de norte a sur, no: a cada $x < 1$ le tocan dos puntos. Ahí, en cambio, se puede despejar $x = \sqrt{1 - y^2}$.
> El teorema de la función implícita dice cuándo una ecuación $F(x, y) = 0$ se puede despejar cerca de un punto, y con qué derivada. En Cálculo I la derivación implícita (C1-031.D1) *suponía* que se podía; aquí se demuestra.
> Dónde falla la analogía: un sendero real tiene ancho; el teorema solo describe un pedazo pequeño del nivel alrededor de un punto, nunca el sendero entero.

Parte 1 · Despejar cerca de un punto

Teorema C3-026.T0 (inversa por bloques)

Si A es $m \times n$ y B es $m \times m$ invertible, la matriz $(n+m) \times (n+m)$ $M := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$ es invertible, con $M^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{pmatrix}$. Recíprocamente, si M es invertible, B lo es.

Demostración. Todas las cuentas son productos por bloques (AL.1).

1. Sea $N := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{pmatrix}$. Entonces (C3-007.T4)

$$MN = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A - BB^{-1}A & BB^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

2. Y

$$NM = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^{-1}A + B^{-1}A & B^{-1}B \end{pmatrix} = I_{n+m}.$$

   Así M es invertible y $M^{-1} = N$ (C3-007.D5).
3. *Recíproco.* Sea $N' = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$ (bloques del tamaño de los de M) con $MN' = N'M = I_{n+m}$. El primer renglón de bloques de MN' es (N_{11}, N_{12}), así que $N_{11} = I_n$ y $N_{12} = 0$.
4. El bloque $(2,2)$ de $MN' = I$ es $AN_{12} + BN_{22} = I_m$, es decir, $BN_{22} = I_m$.
5. El bloque $(2,2)$ de $N'M = I$ es $N_{21} \cdot 0 + N_{22}B = I_m$, es decir, $N_{22}B = I_m$.
6. Por C3-007.D5, B es invertible con $B^{-1} = N_{22}$. ■

⚠ Los dos lados

El paso 5 no sobra: «$BN_{22} = I_m$ implica $N_{22}B = I_m$» es cierto para matrices cuadradas, pero su prueba usa rango y nulidad, que el curso no necesita. Leer los dos productos lo evita.

Notación: para $F : U \to \mathbb{R}^m$ con $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, D_xF es la matriz $m \times n$ de las parciales respecto de $x_1, \dots, x_n$ y D_yF la $m \times m$ de las parciales respecto de $y_1, \dots, y_m$; así $JF = (D_xF \;\; D_yF)$ (C3-022.T1).

Teorema C3-026.T1 (teorema de la función implícita)

Sean $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abierto (puntos $(x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$), $F : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 y $(a,b) \in U$ con $F(a,b) = 0$ y $D_yF(a,b) := (\partial F_i/\partial y_j(a,b))$ invertible. Existen abiertos $U_0 \subset U$ con $(a,b) \in U_0$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ con $a \in W$, y una única $\varphi : W \to \mathbb{R}^m$ tal que, para $(x,y) \in U_0$: $F(x,y) = 0 \iff x \in W$ y $y = \varphi(x)$. Además $(x, \varphi(x)) \in U_0$ para $x \in W$, φ es de clase C^1, $\varphi(a) = b$, $D_yF(x, \varphi(x))$ es invertible y

$$D\varphi(x) = -D_yF(x, \varphi(x))^{-1} D_xF(x, \varphi(x)) \qquad (x \in W).$$

Si $F \in C^k$, $\varphi \in C^k$.

Idea de la demostración

$G(x,y) := (x, F(x,y))$ no mueve x y mide cuánto falla la ecuación. Su jacobiana es $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ D_xF & D_yF \end{pmatrix}$, invertible por C3-026.T0. La función inversa da G^{-1}, que tampoco mueve x; el nivel $F = 0$ es la imagen por G^{-1} del «piso» $\{(x,0)\}$.

Parte 2 · La demostración y la derivación implícita

Demostración de C3-026.T1.

1. Sea $G : U \to \mathbb{R}^{n+m}$, $G(x,y) := (x, F(x,y))$. Sus componentes son las proyecciones x_i y las F_j, así que G es de clase C^1 (y C^k si F lo es) (C3-022.D2, C3-018.T2), con

$$JG(x,y) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ D_xF(x,y) & D_yF(x,y) \end{pmatrix}$$

   (C3-022.T1).
2. Como $D_yF(a,b)$ es invertible, $JG(a,b)$ lo es (C3-026.T0).
3. Por la función inversa (C3-025.T1, C3-025.T2) aplicada a G en (a,b), hay una bola abierta $U_0 \subset U$ con centro (a,b) tal que G es inyectiva en U_0, $V_0 := G(U_0)$ es abierto, $JG(p)$ es invertible para todo $p \in U_0$, y $H := (G|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ es de clase C^1 (C^k si F lo es).
4. H no mueve x: si $H(x,z) = (x', y')$, entonces $(x,z) = G(x',y') = (x', F(x',y'))$, y $x' = x$ (C3-001.D1). Así $H(x,z) = (x, h(x,z))$, donde h, formada por las últimas m componentes de H, es de clase C^1 (C^k) (C3-022.D2).
5. Sea $W := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,0) \in V_0\}$. Es la preimagen del abierto V_0 por $x \mapsto (x,0)$, que es continua (C3-012.T2), luego es abierto (C3-012.T4). Como $G(a,b) = (a, F(a,b)) = (a,0)$, $a \in W$.
6. Sea $\varphi(x) := h(x,0)$ para $x \in W$. Entonces $(x, \varphi(x)) = H(x,0) \in U_0$ y $G(x,\varphi(x)) = (x,0)$, es decir, $F(x,\varphi(x)) = 0$. Como $H(a,0) = (a,b)$, $\varphi(a) = b$. Y φ es C^1 (C^k), por ser composición de h con $x \mapsto (x,0)$ (C3-023.C1, C3-022.T1).
7. *Equivalencia.* Sea $(x,y) \in U_0$. Si $F(x,y) = 0$, entonces $G(x,y) = (x,0) \in V_0$, así que $x \in W$, y como G es inyectiva en U_0, $(x,y) = H(x,0) = (x, \varphi(x))$: $y = \varphi(x)$. Recíprocamente, si $x \in W$ y $y = \varphi(x)$, $F(x,y) = 0$ por el paso 6.
8. *Unicidad.* Si $\tilde{\varphi} : W \to \mathbb{R}^m$ cumple la misma equivalencia y $x \in W$, el punto $(x, \varphi(x)) \in U_0$ cumple $F = 0$ (paso 6), así que $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$.
9. *D_yF invertible.* Para $x \in W$, $(x, \varphi(x)) \in U_0$, así que $JG(x,\varphi(x))$ es invertible (paso 3), y por el

recíproco de C3-026.T0 su bloque $D_yF(x,\varphi(x))$ lo es.

10. *Fórmula.* $x \mapsto (x,\varphi(x))$ tiene jacobiana $\begin{pmatrix} I_n \\ D\varphi(x) \end{pmatrix}$ (C3-022.T1). Derivando $F(x,\varphi(x)) = 0$ con la cadena (C3-023.T1) y multiplicando por bloques (AL.1):

$$0 = D_xF(x,\varphi(x)) + D_yF(x,\varphi(x))\,D\varphi(x).$$

11. Multiplicando por $D_yF(x,\varphi(x))^{-1}$ a la izquierda (C3-007.T4): $D\varphi(x) = -D_yF(x,\varphi(x))^{-1}D_xF(x,\varphi(x))$. ■

Corolario C3-026.C1 (una ecuación)

Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto, $F \in C^1(U)$, $F(a,b) = 0$ y $\partial_2F(a,b) \neq 0$, cerca de (a,b) el nivel $F = 0$ es la gráfica de una φ de clase C^1 con $\varphi'(x) = -\partial_1F(x,\varphi(x))/\partial_2F(x,\varphi(x))$. Esto justifica la derivación implícita de C1-031.D1.

Demostración.

1. Con $n = m = 1$, $D_yF(a,b)$ es la matriz 1×1 $(\partial_2F(a,b))$, invertible porque $\partial_2F(a,b) \neq 0$, con inversa $(1/\partial_2F(a,b))$ (C3-007.D5).
2. C3-026.T1 da U_0, W y φ; la fórmula de $D\varphi$ con matrices 1×1 es la del enunciado.
3. La derivación implícita de C1-031.D1 derivaba $F(x,y(x)) = 0$ con la cadena *suponiendo* que y era derivable; el paso 2 garantiza esa $y = \varphi$, de clase C^1, cerca de cada punto con $\partial_2F \neq 0$. ■

La derivación implícita de Cálculo I
Para $x^3 + y^3 = 2$ en $(1,1)$: $F = x^3 + y^3 - 2$, $\partial_2F = 3y^2 = 3 \neq 0$. Por C3-026.C1 hay φ de clase C^1 con $\varphi(1) = 1$ y $\varphi'(1) = -3x^2/3y^2 = -1$. En $(2^{1/3},0)$, $\partial_2F = 0$ y la curva tiene tangente vertical.

Corolario C3-026.C2 (curvas en un nivel)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto $(n \geq 2)$, $F \in C^1(U)$, $F(p) = c$ y $\nabla F(p) \neq 0$. Para todo $v \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla F(p)\cdot v = 0$ existen $\delta > 0$ y $\gamma : (-\delta,\delta) \to U$ de clase C^1 con $F(\gamma(t)) = c$, $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Idea de la demostración
Se despeja la coordenada x_i con $\partial_i F(p) \neq 0$ en función de las demás, se mueven esas demás en línea recta con velocidad $\hat{v}$, y la fórmula de $D\varphi$ junto con $\nabla F(p) \cdot v = 0$ dice que la coordenada despejada se mueve con velocidad v_i.

Demostración.

1. Como $\nabla F(p) \neq 0$, hay i con $\partial_i F(p) \neq 0$. Para $z \in \mathbb{R}^n$, sea $\hat{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$ el vector sin la coordenada i, y $\sigma(\hat{z}, s) \in \mathbb{R}^n$ el que inserta s en el lugar i. σ es lineal y biyectiva (una permutación de coordenadas), luego C^∞ (C3-022.T1).
2. $\tilde{U} := \sigma^{-1}(U)$ es abierto (C3-012.T4), y $\tilde{F}(\hat{z}, s) := F(\sigma(\hat{z}, s)) - c$ es C^1 en $\tilde{U}$ (C3-023.C1), con $\tilde{F}(\hat{p}, p_i) = 0$. Por la cadena (C3-023.T1), $\partial_s \tilde{F}(\hat{p}, p_i) = \partial_i F(p) \neq 0$ y $\partial \tilde{F}/\partial z_j(\hat{p}, p_i) = \partial_j F(p)$ para $j \neq i$.
3. Por C3-026.T1 con $n-1$ y $m = 1$: hay $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ abierto con $\hat{p} \in W$ y $\varphi : W \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\varphi(\hat{p}) = p_i$, $\tilde{F}(\hat{w}, \varphi(\hat{w})) = 0$ y $(\hat{w}, \varphi(\hat{w})) \in \tilde{U}$ para $\hat{w} \in W$, y
$$\partial_j \varphi(\hat{p}) = -\frac{\partial_j F(p)}{\partial_i F(p)} \qquad (j \neq i).$$
4. Como W es abierto, hay $\rho > 0$ con $B(\hat{p}, \rho) \subset W$ (C3-008.D1); sea $\delta := \rho/(|\hat{v}| + 1)$. Para $|t| < \delta$, $\hat{p} + t\hat{v} \in W$.
5. Sea $\gamma(t) := \sigma\big(\hat{p} + t\hat{v}, \varphi(\hat{p} + t\hat{v})\big)$ para $|t| < \delta$. Es de clase C^1 (C3-023.C1, C3-002.T3), está en U (paso 3), $F(\gamma(t)) = \tilde{F}(\dots) + c = c$ y $\gamma(0) = \sigma(\hat{p}, p_i) = p$.
6. Las componentes $j \neq i$ de γ son $p_j + tv_j$, con derivada v_j (C3-002.T3). La componente i es $\varphi(\hat{p} + t\hat{v})$, con derivada en 0 igual a $\nabla\varphi(\hat{p}) \cdot \hat{v}$ (C3-016.T4), que por el paso 3 es
$$-\frac{1}{\partial_i F(p)} \sum_{j \neq i} \partial_j F(p)\, v_j = -\frac{1}{\partial_i F(p)} \big(- \partial_i F(p)\, v_i \big) = v_i,$$
porque $\nabla F(p) \cdot v = 0$ (C3-016.T1, C3-001.D2).
7. Así $\gamma'(0) = v$. ■

Con C3-023.T2, esto dice que los vectores ortogonales a $\nabla F(p)$ son *exactamente* las velocidades en p de las curvas C^1 en el nivel. Es la pieza que usa Lagrange (C3-029.T1).

Ejemplo C3-026.E1 (la circunferencia)
Para $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$: cerca de $(0,1)$, $y = \sqrt{1-x^2}$; cerca de $(1,0)$, $\partial_2 F = 0$ y ninguna función $y(x)$ describe el nivel (para $x < 1$ hay dos valores $\pm\sqrt{1-x^2}$, para $x > 1$ ninguno), aunque sí $x = \sqrt{1-y^2}$.

1. *Cerca de* $(0,1)$. $\partial_2 F(0,1) = 2 \neq 0$, y C3-026.C1 da φ. En la ventana $\{y > 0\}$, $F = 0 \iff y = \sqrt{1-x^2}$, por la unicidad de la raíz positiva (C2-014.T1); así $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, con $\varphi'(x) = -x/\sqrt{1-x^2} = -\partial_1 F/\partial_2 F$ (C1-030.T1). En $x = 0.6$: $\varphi' = -0.75$.
2. *Cerca de* $(1,0)$. $\partial_2 F(1,0) = 0$. Supongamos que hubiera $U_0 \ni (1,0)$ abierto y una función $y(x)$ con «$F(x,y) = 0$ y $(x,y) \in U_0 \iff y = y(x)$». Hay $\varepsilon > 0$ con $B((1,0),\varepsilon) \subset U_0$. Para $x \in (1-\varepsilon^2/2, 1)$, los dos puntos $(x, \pm\sqrt{1-x^2})$ están en el nivel, son distintos y distan de $(1,0)$ menos que ε, pues $(x-1)^2 + 1 - x^2 = 2 - 2x < \varepsilon^2$. Contradicción.
3. *x en función de y.* $\partial_1 F(1,0) = 2 \neq 0$, y el mismo argumento del paso 1, con los papeles cambiados, da $x = \sqrt{1-y^2}$ cerca de $(1,0)$.

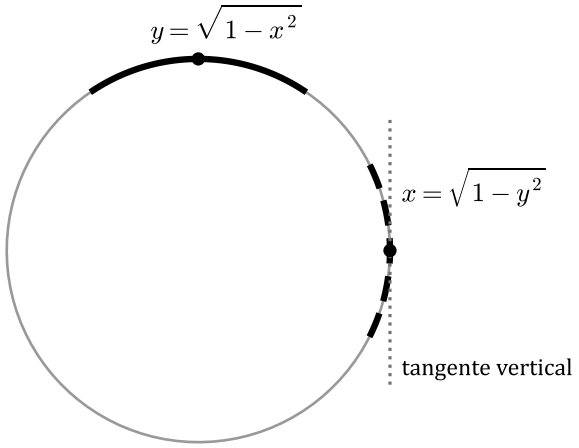


Figura 22: La circunferencia cerca de $(0,1)$ es la gráfica de $y = \sqrt{1-x^2}$ (trazo continuo); cerca de $(1,0)$, donde la tangente es vertical, es la gráfica de $x = \sqrt{1-y^2}$ (discontinuo).

Por qué cada hipótesis

⚠ $D_y F(a,b)$ **invertible**

Es lo que falla en $(1,0)$ en el ejemplo anterior. Y aun cuando sí hay una solución continua, puede no ser derivable: $y^3 - x = 0$ en $(0,0)$ tiene $\partial_2 F = 0$ y su solución $y = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0.

⚠ F **de clase** C^1

Sea $g(y) := y + 2y^2 \operatorname{sen}(1/y)$, $g(0) := 0$, y $F(x,y) := g(y) - x$. Entonces $\partial_2 F(0,0) = g'(0) = 1$, pero g no es inyectiva en ningún intervalo alrededor de 0 (C3-025.E1): en cualquier ventana hay x con dos y distintos tales que $F(x,y) = 0$. Falla porque $\partial_2 F$ no es continua.

⚠ **En C3-026.C2,** $\nabla F(p) \neq 0$

El nivel 0 de $F = x^2 - y^2$ son las rectas $y = \pm x$, y $\nabla F(0) = 0$. Toda v cumple $\nabla F(0) \cdot v = 0$, pero no hay curva C^1 en el nivel con $\gamma(0) = 0$ y $\gamma'(0) = (1,0)$: sobre el nivel $|\gamma_2| = |\gamma_1|$, y $\gamma_1(t)/t \to 1$ mientras $\gamma_2(t)/t \to 0$.

Ejercicios

1. Demuestra que $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ define $z = \varphi(x,y)$ cerca de $(1,1,1)$ y calcula $\nabla\varphi(1,1)$.
2. Para el sistema $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, cerca de $(0,1,-1)$: ¿se pueden despejar (y,z) en función de x? Calcula $(y'(0), z'(0))$.
3. Demuestra que $e^y + y = x$ define una única $y = \varphi(x)$ en todo $\mathbb{R}$, de clase C^∞, y calcula $\varphi'(1)$.
4. Con C3-026.C2, construye una curva en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ que pase por $(1,1,1)$ con velocidad $(1,-1,0)$.
5. Explica por qué C3-026.T0 no necesita que A sea cuadrada.

Respuestas

1. $\partial_z F = 2z = 2 \neq 0$. $\nabla\varphi = -(\partial_x F, \partial_y F)/\partial_z F = -(2,2)/2 = (-1,-1)$.
2. $D_{(y,z)}F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, invertible (inversa $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$). $D_x F = (1,0)^{\mathsf{T}}$, y $(y', z') = -\frac{1}{4}(2,2) = (-1/2, -1/2)$.

3. $y \mapsto e^y + y$ es estrictamente creciente, continua y con límites $\mp\infty$: biyectiva. $\partial_y F = e^y + 1 \neq 0$, así que φ es C^∞ cerca de cada punto (C3-026.T1 con $F \in C^\infty$). En $x = 1, y = 0$: $\varphi'(1) = 1/(e^0 + 1) = 1/2$.
4. Se despeja $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ y $\gamma(t) = (1 + t, 1 - t, \sqrt{3 - (1 + t)^2 - (1 - t)^2}) = (1 + t, 1 - t, \sqrt{1 - 2t^2})$; $\gamma'(0) = (1, -1, 0)$.
5. Los productos por bloques solo piden tamaños compatibles: $BB^{-1}A$ tiene sentido con A de $m \times n$.

C3-027 · Divergencia, rotacional y laplaciano

Motivación

> **Un tocadiscos**
> Un tocadiscos gira a 1 rad/s. La velocidad de cada punto del disco es $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$: un punto a 15 cm del centro va a 0.15 m/s, uno a 5 cm, a 0.05 m/s. Un molinillo diminuto puesto sobre el disco gira, sin embargo, igual en todas partes: lo que lo hace girar es la diferencia de velocidades entre sus dos lados, y esa diferencia no depende del lugar. El rotacional mide eso, y vale $(0, 0, 2)$ en todo punto.
> Dónde falla la analogía: «el molinillo gira con velocidad $\frac{1}{2}\operatorname{rot} F$» es una lectura física que aquí no se demuestra; la justifica el teorema de Stokes, en Cálculo IV. En este capítulo div y rot solo se definen y se calculan.

Definiciones

Definición C3-027.D1 (divergencia, rotacional, laplaciano)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Para un campo $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$: $\operatorname{div} F := \sum_i \partial_i F_i$. Para $n = 3$:

$$\operatorname{rot} F := (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2,\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3,\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \quad (\text{«}\nabla \times F\text{»}).$$

Para $f \in C^2(U)$: **laplaciano** $\Delta f := \sum_i \partial_i \partial_i f = \operatorname{div} \nabla f$; f es **armónica** si $\Delta f = 0$.

La notación $\nabla \times F$ recuerda el producto cruz (C3-006.D1): formalmente es $(\partial_1, \partial_2, \partial_3) \times (F_1, F_2, F_3)$.

Resultados

Teorema C3-027.T1 (identidades)

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $f, g \in C^2(U)$ y $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$. $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$; $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$; $\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$; $\operatorname{rot}(gF) = \nabla g \times F + g \operatorname{rot} F$; $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$.

> **Idea de la demostración**
> Las dos primeras: cada componente es una resta de parciales cruzadas, que Schwarz iguala. Las otras: la regla del producto en cada parcial.

Demostración. Recordemos que $\partial_j \partial_i f := \partial_j(\partial_i f)$ (C3-018.D1) y que, por Schwarz, para $h \in C^2(U)$, $\partial_j \partial_i h = \partial_i \partial_j h$ (C3-018.T1). Cada parcial es la derivada en una variable (C3-015.T1), así que es lineal y cumple la regla del producto (C3-016.T3).

1. $\operatorname{rot} \nabla f = 0$. Con $F = \nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$ (C3-016.T1), la primera componente es $\partial_2(\partial_3 f) - \partial_3(\partial_2 f) = \partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f = 0$ (C3-018.T1). Las otras dos, igual.
2. $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$. Por linealidad de las parciales:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} F &= \partial_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \partial_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \partial_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \\ &= (\partial_1\partial_2 F_3 - \partial_2\partial_1 F_3) + (\partial_2\partial_3 F_1 - \partial_3\partial_2 F_1) + (\partial_3\partial_1 F_2 - \partial_1\partial_3 F_2), \end{aligned}$$

   reagrupando (C1-005.T12). Cada paréntesis es 0 por C3-018.T1, pues cada $F_i \in C^2$.
3. $\operatorname{div}(gF)$. Por la regla del producto, $\partial_i(gF_i) = (\partial_i g)F_i + g\,\partial_i F_i$; sumando en i (C1-005.T12), $\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$ (C3-001.D2).
4. $\operatorname{rot}(gF)$. La primera componente es

$$\partial_2(gF_3) - \partial_3(gF_2) = (\partial_2 g\, F_3 - \partial_3 g\, F_2) + g(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2),$$

   que es $(\nabla g \times F)_1 + g(\operatorname{rot} F)_1$ (C3-006.D1). Las otras dos, igual, permutando los índices.
5. $\Delta(fg)$. Por la regla del producto dos veces:

$$\partial_i\partial_i(fg) = \partial_i\big(\partial_i f\, g + f\, \partial_i g\big) = \partial_i\partial_i f\, g + 2\,\partial_i f\, \partial_i g + f\, \partial_i\partial_i g,$$

   y se suma en i (C1-005.T12, C3-001.D2). ■

Ejemplo C3-027.E1

$F = (-y, x, 0)$: $\operatorname{div} F = 0$ y $\operatorname{rot} F = (0, 0, 2)$ (giro); $F(x) = x$: $\operatorname{div} F = 3$ y $\operatorname{rot} F = 0$; $1/|x|$ es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

1. *Giro.* $\operatorname{div} F = \partial_1(-y) + \partial_2 x + \partial_3 0 = 0$ y $\operatorname{rot} F = (\partial_2 0 - \partial_3 x,\ \partial_3(-y) - \partial_1 0,\ \partial_1 x - \partial_2(-y)) = (0, 0, 2)$ (C3-015.T1).
2. *Radial.* $\operatorname{div} x = 1 + 1 + 1 = 3$; cada componente del rotacional es una resta como $\partial_2 x_3 - \partial_3 x_2 = 0 - 0$.
3. $1/|x|$. En $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\nabla|x| = x/|x|$ (C3-016.E1), y por la cadena con $t \mapsto 1/t$ (C3-016.T4, C1-029.C1),
$$\partial_i \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{|x|^2} \cdot \frac{x_i}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^3}.$$
4. Derivando otra vez (regla del producto; $\partial_i |x|^{-3} = -3|x|^{-4} x_i/|x|$ por la cadena con $t \mapsto t^{-3}$):
$$\partial_i \partial_i \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{|x|^3} + \frac{3x_i^2}{|x|^5}.$$
5. Sumando en $i = 1, 2, 3$, con $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |x|^2$ (C3-001.D2):
$$\Delta \frac{1}{|x|} = -\frac{3}{|x|^3} + \frac{3|x|^2}{|x|^5} = 0.$$

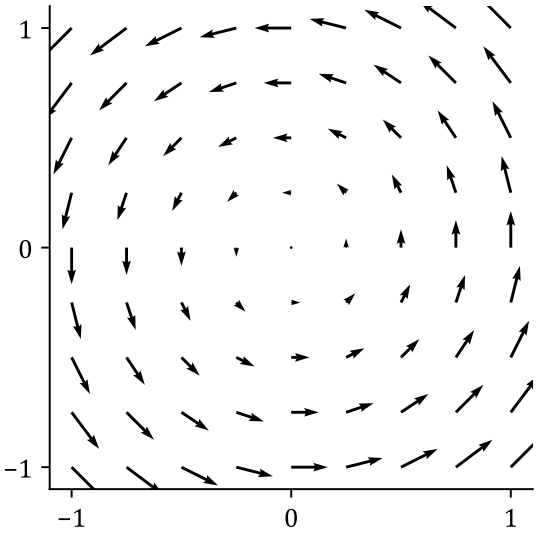


Figura 23: El campo del tocadiscos $F = (-y, x, 0)$: las flechas crecen con la distancia al centro, pero $\operatorname{rot} F = (0, 0, 2)$ en todo punto.

⚠ Circular no es rotar

El remolino $V = (-y, x, 0)/(x^2+y^2)$, definido fuera del eje z, hace que las partículas den vueltas, y sin embargo

$$(\operatorname{rot} V)_3 = \partial_1 \frac{x}{x^2+y^2} + \partial_2 \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

y las otras dos componentes también son 0. Dar vueltas alrededor de un eje y tener rotacional distinto de 0 en cada punto son cosas distintas. (La diferencia entre las dos se entiende con integrales de línea, en Cálculo IV.)

⚠ Las hipótesis C^2

$\operatorname{rot} \nabla f = 0$ necesita que las parciales cruzadas coincidan. Con la f de Peano (C3-018.E1), que es C^1 y no C^2, $\partial_2\partial_1 f(0) = -1 \neq 1 = \partial_1\partial_2 f(0)$: la expresión $\partial_1(\partial_2 f) - \partial_2(\partial_1 f)$, que sería la tercera componente de $\operatorname{rot} \nabla f$, existe en el origen y vale 2. (Ahí ∇f no es C^1, así que C3-027.D1 ni siquiera aplica.)

Ejercicios

1. Calcula div y rot de $F = (yz, xz, xy)$. ¿Es F un gradiente?
2. Demuestra que $\Delta(x^2 - y^2) = 0$ y que $\Delta|x|^2 = 2n$ en $\mathbb{R}^n$.
3. Calcula $\operatorname{div}(|x|^2 x)$ en $\mathbb{R}^3$ con la regla del producto.
4. Demuestra que si f y g son armónicas, fg es armónica si y solo si $\nabla f \cdot \nabla g = 0$.
5. Para $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, demuestra que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$, donde $\Delta F := (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$, verificando la primera componente.

Respuestas

1. $\operatorname{div} F = 0$; $\operatorname{rot} F = (x - x, y - y, z - z) = 0$. Sí: $F = \nabla(xyz)$.
2. $\Delta(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0$. $\Delta \sum x_i^2 = \sum 2 = 2n$ (en $\mathbb{R}^3$, 6).
3. $\operatorname{div}(gF)$ con $g = |x|^2$, $F = x$: $\nabla g \cdot x + g \operatorname{div} x = 2|x|^2 + 3|x|^2 = 5|x|^2$.
4. $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g = 2\nabla f \cdot \nabla g$.
5. La primera componente de $\operatorname{rot}\operatorname{rot} F$ es $\partial_2(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) - \partial_3(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)$; sumando y restando $\partial_1\partial_1 F_1$ y usando Schwarz, es $\partial_1(\operatorname{div} F) - \Delta F_1$.

C3-028 · Extremos locales y criterio del hessiano

Motivación

> **Un dron sobre un mapa topográfico**
> Un dron recorre un terreno de altura $f(x, y)$ y su sensor marca pendiente 0 en todas las direcciones. Puede estar en el fondo de un valle, en una cima o en un puerto de montaña: para $f = x^3 - 3x + y^2$ en $(-1, 0)$, la altura sube sobre el eje y ($f(-1, 0.1) - f(-1, 0) = 0.01$) y baja sobre el eje x ($f(-1.1, 0) - f(-1, 0) = -0.031$).
> Peor: en el terreno $f = (y - x^2)(y - 2x^2)$, el dron puede volar en línea recta desde el origen en *cualquier* dirección y ver que la altura sube, y aun así el origen no es el fondo de un valle: sobre la parábola $y = 3x^2/2$ la altura es negativa. Este capítulo da la condición necesaria (pendiente 0, curvatura semidefinida) y el criterio que sí asegura un extremo: la hessiana definida, con una cota que no depende de la dirección.
> Dónde falla la analogía: un terreno real tiene rugosidad a toda escala; aquí f es de clase C^2.

Parte 1 · Pendiente cero y curvatura que no estorba

Definición C3-028.D1 (extremos)

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. a es un **máximo local** de f si existe $r > 0$ con $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in A \cap B(a, r)$; **estricto** si $f(x) < f(a)$ para $x \neq a$ en ese conjunto; análogo para **mínimo local**; **máximo global** si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in A$. Un **punto silla** es un punto crítico (C3-016.D2) que no es máximo ni mínimo local.

Teorema C3-028.T1 (condición necesaria)

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $a \in U$ es un extremo local de $f : U \to \mathbb{R}$ y existe $D_v f(a)$, entonces $D_v f(a) = 0$; en particular, si f es diferenciable en a, $\nabla f(a) = 0$.

Demostración. Supongamos que a es un máximo local; para un mínimo se aplica lo mismo a $-f$, con $D_v(-f)(a) = -D_v f(a)$ (C3-015.T1).

1. Por C3-028.D1 y porque U es abierto, hay $r > 0$ con $B(a,r) \subset U$ y $f(x) \leq f(a)$ para $x \in B(a,r)$ (C3-008.D1; se toma el menor de los dos radios).
2. Si $v = 0$, $D_0 f(a) = \lim_{t\to 0} 0/t = 0$. Si $v \neq 0$, sea $\varphi(t) := f(a + tv)$ para $|t| < r/|v|$; entonces $a + tv \in B(a,r)$ (C3-001.T2) y $\varphi(t) \leq \varphi(0)$: φ tiene un máximo local en el punto interior 0.
3. φ es derivable en 0 con $\varphi'(0) = D_v f(a)$ (C3-015.T1). Por Fermat (C1-032.T1), $\varphi'(0) = 0$.
4. Si f es diferenciable en a, existen las parciales (C3-016.T1) y $\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a) = 0$ para cada i: $\nabla f(a) = 0$. ■

Teorema C3-028.T2 (condición necesaria de segundo orden)

Si $f \in C^2(U)$ y a es un mínimo local, $\nabla f(a) = 0$ y $H_f(a)$ es semidefinida positiva (análogo para máximo).

Demostración.

1. $f \in C^2(U)$ implica $f \in C^1(U)$, luego diferenciable (C3-017.C2); por C3-028.T1, $\nabla f(a) = 0$.
2. Sea r con $B(a,r) \subset U$ y $f(x) \geq f(a)$ en $B(a,r)$ (C3-028.D1, C3-008.D1). Supongamos que hay h con $h \cdot H_f(a)h < 0$; entonces $h \neq 0$.
3. $\varphi(t) := f(a + th)$ está definida para $|t| < r/|h|$, es de clase C^2 ahí, y por C3-019.T1 y C3-019.D1:

$$\varphi'(0) = \nabla f(a) \cdot h = 0, \qquad \varphi''(0) = d^2 f(a)(h) = h \cdot H_f(a)h < 0.$$

4. Por el criterio de la segunda derivada (C1-034.T4, versión máximo), φ tiene un máximo local estricto en 0: hay $\delta > 0$ con $f(a + th) < f(a)$ para $0 < |t| < \delta$.
5. Para $0 < |t| < \min(\delta, r/|h|)$, el punto $a + th$ está en $B(a,r)$ y $f(a + th) < f(a)$: contradice el paso 2.
6. Así $h \cdot H_f(a)h \geq 0$ para todo h: $H_f(a)$ es semidefinida positiva (C3-021.D1). Para un máximo, se aplica lo anterior a $-f$, con $H_{-f} = -H_f$. ■

⚠ Necesarias, no suficientes

$x^2 - y^2$ tiene $\nabla f(0) = 0$ y es silla. $x^3 + y^2$ tiene $\nabla f(0) = 0$ y $H_f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ semidefinida, y sobre el eje x toma valores negativos. Y si a no es interior, nada de esto vale: $f(x, y) = x$ en $[0, 1]^2$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ con $\nabla f = (1, 0)$.

Parte 2 · El criterio del hessiano

Teorema C3-028.T3 (criterio del hessiano)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^2(U)$ y $a \in U$ con $\nabla f(a) = 0$.

(a) Si $H_f(a)$ es definida positiva, a es un mínimo local estricto.

(b) Si es definida negativa, a es un máximo local estricto.

(c) Si es indefinida, a es un punto silla.

Idea de la demostración

Taylor con residuo de Lagrange escribe $f(a+h) - f(a)$ con la hessiana en un punto intermedio. Cerca de a, esa hessiana sigue cumpliendo una cota $\frac{m}{2}|h|^2$ (estabilidad, C3-021.T2), *la misma para todas las direcciones*. No se diagonaliza la hessiana.

Demostración.

1. *(a).* Por C3-021.T1 hay $m > 0$ con $h \cdot H_f(a)h \geq m|h|^2$ para todo h.
2. Las segundas parciales son continuas en a, así que $\|H_f(x) - H_f(a)\|_F \to 0$ cuando $x \to a$ (C3-012.T3, C3-012.T1). Hay $r > 0$ con $B(a, r) \subset U$ y, para $x \in B(a, r)$ (C3-020.T1),

$$\|H_f(x) - H_f(a)\| \leq \|H_f(x) - H_f(a)\|_F < \frac{m}{2}.$$

3. Cada $H_f(x)$ es simétrica (C3-019.D1). Por la estabilidad (C3-021.T2), para $x \in B(a, r)$ y todo h:

$$h \cdot H_f(x)h \geq \left(m - \frac{m}{2}\right)|h|^2 = \frac{m}{2}|h|^2.$$

4. Sea $0 < |h| < r$. La bola es convexa (C3-011.T2), así que $[a, a+h] \subset B(a,r)$, y Taylor con $k = 1$ (C3-019.T2, C3-019.D1) da $\theta \in (0,1)$ con

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \tfrac{1}{2}\, h \cdot H_f(a+\theta h) h.$$

5. Como $\nabla f(a) = 0$ y $a + \theta h \in B(a,r)$, el paso 3 da

$$f(a+h) - f(a) = \tfrac{1}{2}\, h \cdot H_f(a+\theta h) h \geq \tfrac{m}{4}|h|^2 > 0$$

(C1-003.T4, C1-003.T5). Así $f(x) > f(a)$ para $0 < |x-a| < r$: mínimo local estricto.

6. *(b).* $-f$ cumple (a): $H_{-f}(a) = -H_f(a)$ es definida positiva (C3-021.D1). Un mínimo local estricto de $-f$ es un máximo local estricto de f.
7. *(c).* Si $H_f(a)$ es indefinida, hay h_1, h_2 con $h_1 \cdot H_f(a) h_1 > 0 > h_2 \cdot H_f(a) h_2$. Si a fuera mínimo local, $H_f(a)$ sería semidefinida positiva (C3-028.T2), lo que contradice h_2; si fuera máximo local, sería semidefinida negativa, lo que contradice h_1.
8. Como f es diferenciable en a con $\nabla f(a) = 0$ (C3-017.C2), a es punto crítico (C3-016.D2) que no es extremo local: es un punto silla (C3-028.D1). ■

Corolario C3-028.C1 (dos variables)

Si $n = 2$, con $A := \partial_1\partial_1 f(a)$, $B := \partial_1\partial_2 f(a)$, $C := \partial_2\partial_2 f(a)$ y $D := AC - B^2$: si $D > 0$ y $A > 0$, mínimo local estricto; si $D > 0$ y $A < 0$, máximo local estricto; si $D < 0$, punto silla. Si $D = 0$ el criterio no decide.

Demostración.

1. Por Schwarz (C3-018.T1), $\partial_2\partial_1 f(a) = \partial_1\partial_2 f(a) = B$, así que $H_f(a) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ y $h \cdot H_f(a) h = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ para $h = (h,k)$.
2. Por el caso 2×2 (C3-021.T3): $D > 0$ y $A > 0 \Rightarrow$ definida positiva; $D > 0$ y $A < 0 \Rightarrow$ definida negativa; $D < 0 \Rightarrow$ indefinida. C3-028.T3 da las tres conclusiones.
3. Si $D = 0$, el Ejemplo C3-028.E1 muestra funciones con $D = 0$ en un punto crítico que son mínimo, máximo y silla: el criterio no puede decidir. ■

Ejemplo C3-028.E1 (casos degenerados)

En $(0,0)$ la hessiana es semidefinida y no definida para x^4+y^4 (mínimo), $-x^4-y^4$ (máximo), x^4-y^4 y x^2+y^3 (sillas) y x^3-3xy^2 (silla de mono, $H=0$). $f(x,y) := (y-x^2)(y-2x^2)$ tiene un mínimo en 0 sobre cada recta por el origen y no es mínimo local ($f<0$ sobre $y=3x^2/2$).

1. *Hessianas.* Para $x^4\pm y^4$, x^4-y^4 y x^3-3xy^2, todas las segundas parciales son múltiplos de x^2, y^2, x o y, y valen 0 en el origen: $H=0$. Para x^2+y^3, $H(0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$. En todos los casos $\nabla f(0)=0$ (C3-015.T1, C1-028.T2).
2. $x^4+y^4>0$ fuera del origen (C1-003.T5): mínimo estricto. $-x^4-y^4$: máximo estricto.
3. x^4-y^4 vale $t^4>0$ en $(t,0)$ y $-t^4<0$ en $(0,t)$; x^2+y^3 vale t^3 en $(0,t)$, con los dos signos; x^3-3xy^2 vale t^3 en $(t,0)$. Los tres son puntos críticos que no son extremos: sillas.
4. *Peano.* Sobre $y=mx$: $f(x,mx)=x^2(m-x)(m-2x)$. Si $m\neq 0$ y $0<|x|<|m|/2$, los factores $m-x$ y $m-2x$ tienen el signo de m, y $f>0$ (C1-003.T4, C1-003.T5). Si $m=0$, $f(x,0)=2x^4>0$; sobre $x=0$, $f(0,y)=y^2>0$. En cada recta, el origen es mínimo estricto.
5. Pero $f(x,3x^2/2)=\frac{x^2}{2}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{x^4}{4}<0$ para $x\neq 0$, y $(x,3x^2/2)\to 0$: el origen no es mínimo local. Su hessiana, de $f=y^2-3x^2y+2x^4$, es $\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$: semidefinida.

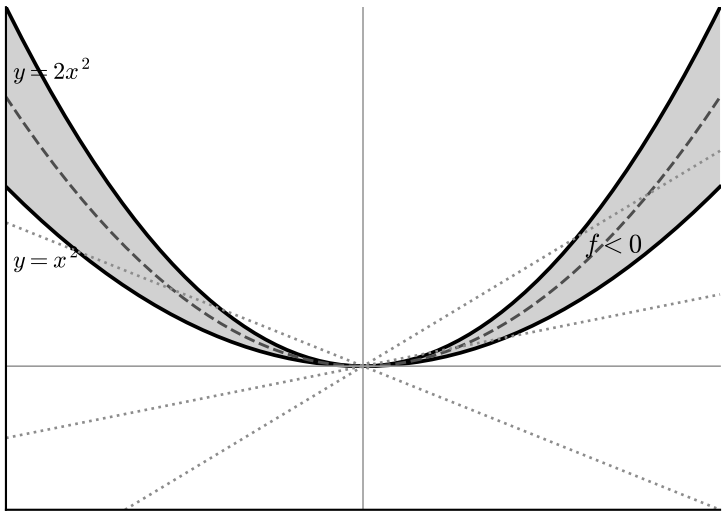


Figura 24: Peano: entre las parábolas $y=x^2$ e $y=2x^2$ (sombreado) $f<0$. Cada recta por el origen (punteada) sale de la zona sombreada cerca del origen; la parábola $y=3x^2/2$ (discontinua) no.

Ejemplo C3-028.E2

$f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$: puntos críticos $(\pm 1, 0)$; $(1,0)$ es mínimo local estricto ($D = 12 > 0$, $A = 6 > 0$) y $(-1,0)$ punto silla ($D = -12$).

1. $\nabla f = (3x^2 - 3, 2y) = 0 \iff x = \pm 1, y = 0$ (C3-015.T1, C3-016.T1, C3-028.T1).
2. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En $(1,0)$: $A = 6$, $D = 12$. En $(-1,0)$: $A = -6$, $D = -12$. C3-028.C1 da las dos conclusiones.
3. El mínimo no es global: $f(x,0) = x^3 - 3x \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$.

Por qué cada hipótesis

⚠ **La cota uniforme**

El Ejemplo de Peano muestra por qué la prueba de C3-028.T3 necesita $h \cdot H_f(x)h \geq \frac{m}{2}|h|^2$ con la **misma** m para todas las direcciones h: mirar cada recta por separado no basta. Con $H_f(0)$ definida esa cota existe (C3-021.T1, compacidad de la esfera); con $H_f(0)$ solo semidefinida, no.

⚠ $\nabla f(a) = 0$

$f = x^2 + y^2 + x$ tiene hessiana $2I_2$ (definida positiva) en todas partes, y 0 no es extremo: $\nabla f(0) = (1,0)$. El criterio se aplica en puntos críticos.

⚠ $f \in C^2$

La prueba usa Taylor con $f \in C^2$ y la continuidad de H_f en a. Si las segundas parciales existen pero no son continuas, la hessiana en a no controla a la hessiana cerca de a.

Ejercicios

1. Clasifica los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$.
2. Clasifica los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
3. Demuestra que si $H_f(a)$ es definida positiva y $\nabla f(a) = 0$, hay $r > 0$ y $c > 0$ con $f(x) \geq f(a) + c|x - a|^2$ en $B(a,r)$.

4. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$. Demuestra que 0 es mínimo local estricto usando AL.6.
5. Sea $f \in C^2$ con $\nabla f(0) = 0$ y $H_f(0)$ semidefinida positiva y no nula. ¿Puede ser 0 un máximo local?

Respuestas

1. $\nabla f = (2x + y - 3, x + 2y) = 0$ en $(2,-1)$; $A = 2, B = 1, C = 2, D = 3 > 0$: mínimo local estricto.
2. $\nabla f = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = 0$: $y = x^3$, $x^9 = x$, así $x \in \{0, 1, -1\}$: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. $H = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$. En $(0,0)$: $D = -16$, silla. En $(\pm 1, \pm 1)$: $D = 128$, $A = 12$: mínimos locales estrictos.
3. Es el paso 5 de la prueba de C3-028.T3, con $c = m/4$.
4. $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, menores $2, 3, 4 > 0$ (AL.6 ⚠ Álgebra Lineal): definida positiva, y $\nabla f(0) = 0$.
5. No. Si 0 fuera máximo local, $H := H_f(0)$ sería también semidefinida negativa (C3-028.T2), así que $h \cdot Hh = 0$ para todo h. Como H es simétrica, $h_{ij} = \frac{1}{2}\big(Q_H(e_i + e_j) - Q_H(e_i) - Q_H(e_j)\big) = 0$ para $i \neq j$ y $h_{ii} = Q_H(e_i) = 0$: $H = 0$, contra la hipótesis. (Puede ser silla: $x^2 - y^4$.)

C3-029 · Multiplicadores de Lagrange

Motivación

> **La pantalla de diagonal fija**
> Las pantallas se venden por su diagonal. Con diagonal fija de $\sqrt{2}$ m, el ancho x y el alto y cumplen $x^2 + y^2 = 2$. ¿Qué forma da más área xy? La cuadrada, de 1 m × 1 m, da 1 m^2; una 16:9 con la misma diagonal da $288/337 \approx 0.8546$ m^2.
> En la mejor pantalla, la hipérbola $xy = 1$ *toca* a la circunferencia sin cruzarla: sus normales, ∇f y ∇g, son paralelas. Eso es el método de los multiplicadores de Lagrange: $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.
> Dónde falla la analogía: las pantallas son 16:9 por el contenido que muestran, no por su área; y en el modelo los anchos negativos también cuentan.

Parte 1 · Una restricción

Definición C3-029.D1 (extremo condicionado)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ y $M := \{x \in U : g(x) = 0\}$. Un extremo local de f **sujeto a** $g = 0$ es un extremo local de $f|_M$ (C3-028.D1 con $A = M$).

Teorema C3-029.T1 (Lagrange, una restricción)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto $(n \geq 2)$, $f, g \in C^1(U)$, $M := \{g = 0\}$ y $a \in M$ un extremo local de $f|_M$ con $\nabla g(a) \neq 0$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

> **Idea de la demostración**
> Por cada dirección v tangente a M (es decir, $v \perp \nabla g(a)$) hay una curva en M con esa velocidad (C3-026.C2). En ella f tiene un extremo, así que $\nabla f(a) \cdot v = 0$. Aplicado a la parte de $\nabla f(a)$

ortogonal a $\nabla g(a)$, esa parte es 0. No hace falta álgebra lineal.

Demostración. Supongamos que a es un máximo local de $f|_M$ (el mínimo es igual): hay $r > 0$ con $f(x) \leq f(a)$ para $x \in M \cap B(a,r)$ (C3-028.D1).

1. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla g(a) \cdot v = 0$. Como $g \in C^1(U)$, $g(a) = 0$ y $\nabla g(a) \neq 0$, por C3-026.C2 hay $\delta > 0$ y $\gamma : (-\delta, \delta) \to U$ de clase C^1 con $g(\gamma(t)) = 0$, $\gamma(0) = a$ y $\gamma'(0) = v$.
2. Cada $\gamma(t)$ está en M. γ es continua en 0 (C3-002.T3), así que hay $\delta' \in (0, \delta]$ con $\gamma(t) \in B(a,r)$ para $|t| < \delta'$. Para esos t, $f(\gamma(t)) \leq f(a) = f(\gamma(0))$: $f \circ \gamma$ tiene un máximo local en el punto interior 0 (C1-032.D1).
3. f es diferenciable en a (C3-017.C2), así que $f \circ \gamma$ es derivable en 0 con $(f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(a) \cdot v$ (C3-016.T4). Por Fermat (C1-032.T1), $\nabla f(a) \cdot v = 0$.
4. Sean $\lambda := \nabla f(a) \cdot \nabla g(a) / |\nabla g(a)|^2$ (definido porque $\nabla g(a) \neq 0$, C3-001.T2) y $w := \nabla f(a) - \lambda \nabla g(a)$. Entonces (C3-001.T2)

$$w \cdot \nabla g(a) = \nabla f(a) \cdot \nabla g(a) - \lambda |\nabla g(a)|^2 = 0.$$

5. Por el paso 3 con $v = w$: $\nabla f(a) \cdot w = 0$.
6. Así (C3-001.T2)

$$|w|^2 = w \cdot \nabla f(a) - \lambda\, w \cdot \nabla g(a) = 0 - 0 = 0,$$

luego $w = 0$ y $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. ■

⚠ El método, no el teorema

C3-029.T1 da una condición *necesaria*: en un extremo condicionado, $\nabla f = \lambda \nabla g$. Los puntos que la cumplen son *candidatos*. Para saber cuál es el máximo hace falta saber que el máximo existe (por ejemplo, M compacto, C3-014.C1) y comparar los valores. Y $f = x^3$ sujeto a $y = 0$ cumple $\nabla f(0) = 0 = 0 \cdot \nabla g$ sin que 0 sea extremo.

Ejemplo C3-029.E1 (primera mitad: xy en la circunferencia)
En $x^2 + y^2 = 2$, $f = xy$ alcanza su máximo 1 en $(\pm 1, \pm 1)$ (mismo signo) y su mínimo -1 en los otros dos.

1. $g := x^2 + y^2 - 2$ es C^1 con $\nabla g = (2x, 2y)$, que no es 0 en M ($0 \notin M$) (C3-016.T1, C3-015.T1).
2. $M = \{g = 0\}$ es cerrado (C3-012.T4) y acotado ($M \subset \bar{B}(0, \sqrt{2})$), luego compacto (C3-010.T4); f es continua. Por Weierstrass (C3-014.C1), $f|_M$ alcanza un máximo y un mínimo, que son extremos locales de $f|_M$.
3. Por C3-029.T1, en ellos $(y, x) = \lambda(2x, 2y)$: $y = 2\lambda x$ y $x = 2\lambda y$, así que $x = 4\lambda^2 x$.
4. Si $x = 0$, entonces $y = 0$, que no está en M. Así $4\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ y $y = \pm x$; con $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 = 1$ (C1-003.T5). Los candidatos son $(\pm 1, \pm 1)$.
5. $f = 1$ en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, $f = -1$ en $(1, -1)$ y $(-1, 1)$. El máximo es 1 y el mínimo -1.

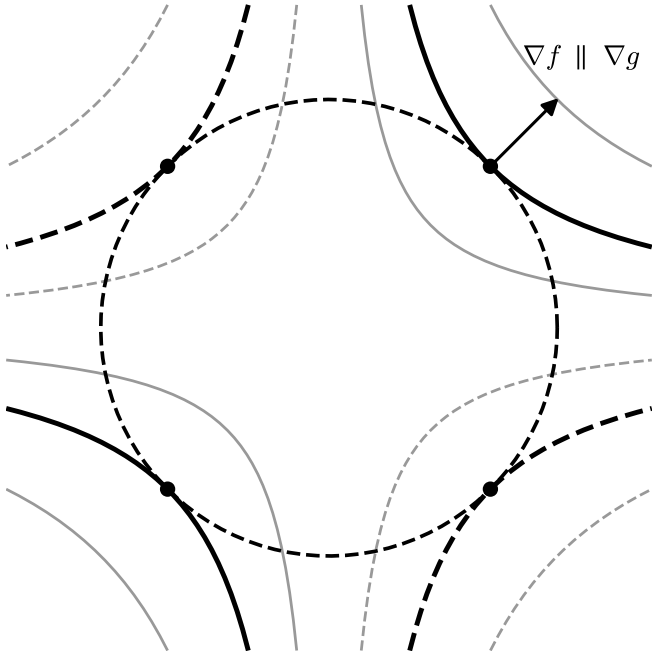


Figura 25: Niveles de $f = xy$ (hipérbolas) y la restricción $x^2 + y^2 = 2$ (discontinua). En los cuatro extremos, la hipérbola $xy = \pm 1$ toca a la circunferencia: $\nabla f \parallel \nabla g$.

Parte 2 · Varias restricciones

Teorema C3-029.T2 (varias restricciones)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(U)$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ con $m < n$, $M := \{g = 0\}$ y $a \in M$ un extremo local de $f|_M$ tal que $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ son linealmente independientes. Entonces existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ con $\nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(a)$.

Idea de la demostración

Con AL.3 se eligen m coordenadas que se pueden despejar; con la función implícita, M es cerca de a la gráfica $y = \varphi(u)$. Entonces $h(u) := f(u, \varphi(u))$ tiene un extremo *libre*, $\nabla h = 0$, y de ahí se despeja el renglón de multiplicadores.

Demostración. Supongamos que a es un máximo local de $f|_M$, con r como en C3-028.D1.

1. *Elegir coordenadas.* Las filas de $Jg(a)$ son los $\nabla g_i(a)$ (C3-022.T1), linealmente independientes, y $m < n$. Por AL.3 ⚠ Álgebra Lineal hay columnas $j_1 < \dots < j_m$ cuya submatriz $m \times m$ es invertible. Sea σ la permutación lineal de coordenadas que pone esas columnas al final; $f \circ \sigma$ y $g \circ \sigma$ son C^1 (C3-023.C1), sus jacobianas son las de f y g con las columnas permutadas (C3-023.T1), y el enunciado para ellas implica el enunciado para f y g (multiplicando por la matriz inversa de la permutación, AL.1). Así, sin perder generalidad, $x = (u, y)$ con $u \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$, y $D_y g(a)$ invertible.
2. *M como gráfica.* Sea $a = (u_0, y_0)$. Por la función implícita (C3-026.T1) hay abiertos $U_0 \ni a$ y $W \ni u_0$ y $\varphi : W \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 con $\varphi(u_0) = y_0$, $(u, \varphi(u)) \in U_0$ y $g(u, \varphi(u)) = 0$ para $u \in W$, y
$$D\varphi(u_0) = -D_y g(a)^{-1} D_u g(a).$$
3. *Extremo libre.* $u \mapsto (u, \varphi(u))$ es continua (C3-012.T2) y vale a en u_0; la preimagen del abierto $B(a, r)$ es un abierto $W' \subset W$ con $u_0 \in W'$ (C3-012.T4). Para $u \in W'$, $(u, \varphi(u)) \in M \cap B(a, r)$, así que $h(u) := f(u, \varphi(u)) \le f(a) = h(u_0)$: h tiene un máximo local en u_0, interior de W'.
4. *$\nabla h = 0$.* h es diferenciable en u_0 (C3-023.T1, C3-017.C2), y por C3-028.T1, $Dh(u_0) = 0$. Por la cadena y el producto por bloques (C3-023.T1, AL.1):
$$0 = Dh(u_0) = D_u f(a) + D_y f(a)\, D\varphi(u_0) = D_u f(a) - D_y f(a)\, D_y g(a)^{-1} D_u g(a).$$

5. *Los multiplicadores.* Sea el renglón $\lambda := D_y f(a)\, D_y g(a)^{-1}$ $(1 \times m)$. Entonces (AL.1, C3-007.T4)

$$\lambda\, D_y g(a) = D_y f(a), \qquad \lambda\, D_u g(a) = D_u f(a)$$

   (la segunda por el paso 4).
6. Juntando los bloques, $Df(a) = (D_u f(a) \;\; D_y f(a)) = \lambda\,(D_u g(a) \;\; D_y g(a)) = \lambda\, Dg(a)$. Como los renglones de $Dg(a)$ son los $\nabla g_i(a)$ (C3-022.T1), esto es $\nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(a)$. ■

Un dron sobre una cúpula y una rampa

La cúpula $x^2+y^2+z^2 = 1$ corta la rampa $x+y+z = 1$ en una circunferencia. Su altura mínima es $-1/3$.

1. $g_1 = x^2+y^2+z^2-1$, $g_2 = x+y+z-1$, $f = z$. $\nabla g_1 = 2(x,y,z)$ y $\nabla g_2 = (1,1,1)$ son dependientes solo si $x = y = z$, y entonces $3x = 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 1/3 \neq 1$: en M son independientes.
2. M es compacto (cerrado y acotado), así que f alcanza máximo y mínimo (C3-014.C1).
3. Por C3-029.T2: $(0,0,1) = \mu_1(2x,2y,2z) + \mu_2(1,1,1)$. Las dos primeras componentes dan $2\mu_1 x = 2\mu_1 y$. Si $\mu_1 = 0$, la primera da $\mu_2 = 0$ y la tercera $1 = 0$; así $x = y$.
4. Entonces $2x + z = 1$ y $2x^2 + z^2 = 1$; sustituyendo $z = 1-2x$: $6x^2 - 4x = 0$, $x \in \{0, 2/3\}$.
5. Candidatos: $(0,0,1)$ con $z = 1$ y $(2/3, 2/3, -1/3)$ con $z = -1/3$. El mínimo es $-1/3$ y el máximo 1.

Ejemplo C3-029.E1 (segunda mitad: la cúspide)

La hipótesis $\nabla g(a) \neq 0$ no sobra: en $M = \{y^2 - x^3 = 0\}$, $f = x$ tiene su mínimo en $(0,0)$, donde $\nabla g = 0$ y $\nabla f = (1,0)$ no es múltiplo de ∇g.

1. Si $(x,y) \in M$, $x^3 = y^2 \geq 0$ (C1-003.T5), así que $x \geq 0$ (si $x < 0$, $x^3 < 0$): $f \geq 0 = f(0,0)$ en M, y $(0,0)$ es el mínimo.
2. $\nabla g = (-3x^2, 2y)$ vale $(0,0)$ en el origen, y $\nabla f = (1,0) \neq \lambda \cdot 0$ para todo λ.
3. La conclusión de C3-029.T1 falla porque falla una hipótesis: en el pico de la cúspide no hay curvas C^1 en M con todas las velocidades tangentes.

Por qué cada hipótesis

⚠ Gradientes independientes

En $\mathbb{R}^3$, $g_1 = z$ y $g_2 = z - x^2$ definen $M = \{x = 0, z = 0\}$, el eje y. $f = x$ es 0 en M, así que todo punto de M es extremo. Pero en M, $\nabla g_1 = \nabla g_2 = (0, 0, 1)$ son dependientes, y $\nabla f = (1, 0, 0)$ no es combinación de ellos.

⚠ f y g de clase C^1

La prueba usa C3-026.C2 y C3-026.T1, que piden C^1; y la regla de la cadena, que pide f diferenciable.

Ejercicios

1. Encuentra los extremos de $f = x + y$ en $x^2 + 4y^2 = 5$.
2. Encuentra la caja rectangular de volumen xyz máximo cuyas tres dimensiones suman 3 ($x + y + z = 3, x, y, z > 0$).
3. Encuentra el punto de la recta $x + y = 2, z = 0$ más cercano a $(0, 0, 1)$ usando dos restricciones.
4. Demuestra que si a es un extremo de $f|_M$ con $M = \{g = 0\}$ y $\nabla g(a) \neq 0$, entonces el hiperplano tangente a M en a está contenido en el hiperplano tangente al nivel $\{f = f(a)\}$, si $\nabla f(a) \neq 0$.
5. ¿Por qué C3-029.T1 pide $n \geq 2$? ¿Qué pasa con $n = 1$?

Respuestas

1. $(1, 1) = \lambda(2x, 8y)$: $x = 4y$, $20y^2 = 5$, $y = \pm\frac{1}{2}$. Máximo $5/2$ en $(2, \frac{1}{2})$, mínimo $-5/2$ en $(-2, -\frac{1}{2})$ (la elipse es compacta).
2. $(yz, xz, xy) = \lambda(1, 1, 1)$ da $x = y = z = 1$ (en $(0, \infty)^3$), volumen 1. El máximo existe en el compacto $\{x, y, z \geq 0, x + y + z = 3\}$ y no está en el borde (volumen 0).
3. $f = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$, $g_1 = x + y - 2$, $g_2 = z$: $(2x, 2y, 2(z - 1)) = \mu_1(1, 1, 0) + \mu_2(0, 0, 1)$ da $x = y = 1, z = 0$; distancia $\sqrt{3}$.
4. Si $\nabla g(a) \cdot (x - a) = 0$, entonces $\nabla f(a) \cdot (x - a) = \lambda \nabla g(a) \cdot (x - a) = 0$.
5. Con $n = 1$ y $\nabla g(a) = g'(a) \neq 0$, M es localmente el punto a (g es estrictamente monótona cerca), y todo punto aislado es extremo: la conclusión vale con $\lambda = f'(a)/g'(a)$, pero C3-026.C2 (que pide $n \geq 2$) no se aplica; el caso es trivial.

C3-030 · Extremos absolutos y aplicaciones

Motivación

> **La placa circular**
> Una placa circular de radio 1 se calienta de forma desigual: su temperatura, sobre la del ambiente, es $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. ¿Dónde está el punto más caliente? La tentación es buscarlo en $(0, \pm 1)$, donde $2y^2$ es mayor; ahí $f = 2$. Pero el máximo es $9/4$, en $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$: el término $-x$ premia ir a la izquierda.
> El método es siempre el mismo: en un compacto el máximo existe; está en el interior, donde $\nabla f = 0$, o en la frontera, donde se usa Lagrange; y se comparan los candidatos.
> Dónde falla la analogía: una placa real pierde calor por el borde y su temperatura cambia con el tiempo; aquí f es una función fija.

Resultados

Teorema C3-030.T1 (método para extremos absolutos)

Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto no vacío y $f : K \to \mathbb{R}$ continua. f alcanza su máximo y su mínimo (C3-014.C1), y cada punto donde los alcanza está en ∂K o es un punto de $\operatorname{int} K$ donde f no es diferenciable o donde $\nabla f = 0$.

Demostración.

1. Por Weierstrass (C3-014.C1), f alcanza su máximo y su mínimo en K.
2. Sea $p \in K$ donde f alcanza su máximo (el mínimo es igual). $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de $\operatorname{int} K$, ∂K e $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ (C3-008.T3), y $p \in K$ no está en la última; así $p \in \operatorname{int} K$ o $p \in \partial K$.
3. Si $p \in \operatorname{int} K$ y f es diferenciable en p: $\operatorname{int} K$ es abierto (C3-008.T3), y $f(x) \leq f(p)$ para todo

$x \in \operatorname{int} K$, así que p es un máximo local de $f|_{\operatorname{int} K}$ (C3-028.D1). Por C3-028.T1 con $U = \operatorname{int} K$, $\nabla f(p) = 0$. ■

En la práctica, si ∂K es un nivel $\{g = 0\}$ con $\nabla g \neq 0$, un máximo de f en ∂K es también un máximo de $f|_{\partial K}$, y C3-029.T1 da los candidatos de frontera.

Ejemplo C3-030.E1 (la placa circular)
En el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $f = x^2 + 2y^2 - x$ tiene mínimo $-1/4$ en $(1/2, 0)$ (crítico interior) y máximo $9/4$ en $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ (Lagrange en la circunferencia).

1. $K = \bar{B}(0, 1)$ es compacto (C3-010.E1), su interior es $B(0, 1)$ y su frontera la circunferencia (C3-008.E1). f es un polinomio, continuo y diferenciable en $\mathbb{R}^2$.
2. *Interior.* $\nabla f = (2x - 1, 4y) = 0 \iff (x, y) = (1/2, 0)$, que está en $B(0, 1)$ (C3-015.T1, C3-016.T1); $f(1/2, 0) = -1/4$.
3. *Frontera.* $g = x^2 + y^2 - 1$, $\nabla g = (2x, 2y) \neq 0$ en la circunferencia. Por C3-029.T1, en un extremo de f en ella: $2x - 1 = 2\lambda x$ y $4y = 2\lambda y$.
4. De la segunda, $y = 0$ o $\lambda = 2$. Si $y = 0$: $(\pm 1, 0)$, con $f(1, 0) = 0$ y $f(-1, 0) = 2$. Si $\lambda = 2$: $2x - 1 = 4x$, $x = -1/2$, $y^2 = 3/4$, y $f(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$.
5. *Comparación.* Por C3-030.T1, el máximo y el mínimo están entre los valores $-\frac{1}{4}, 0, 2, \frac{9}{4}$: el mínimo es $-1/4$ en $(1/2, 0)$ y el máximo $9/4$ en $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$.

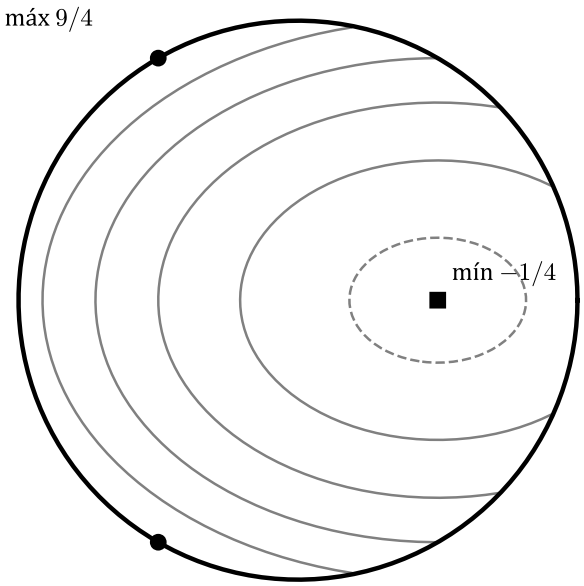


Figura 26: Niveles de $f = x^2 + 2y^2 - x$ en el disco. El mínimo (cuadrado) es un punto crítico interior; los máximos (círculos) están en el borde.

⚠ La frontera no se puede olvidar

$f = x$ en el disco tiene $\nabla f = (1, 0)$: no hay candidatos interiores. Sus extremos, ± 1 en $(\pm 1, 0)$, están en la frontera. Y sin compacidad no hay garantía: $x^2 + y^2$ en el disco *abierto* no alcanza su supremo 1.

Un valor propio por Lagrange

Teorema C3-030.T2 (valor propio por Lagrange)

Si A es simétrica $n \times n$, Q_A alcanza su máximo en la esfera unitaria en algún u, y $Au = \lambda u$ con $\lambda := Q_A(u)$. En particular toda matriz simétrica real tiene un valor propio real, y ese λ es el mayor de sus valores propios.

Idea de la demostración

La esfera es compacta, así que Q_A alcanza su máximo en ella. La esfera es el nivel de $|x|^2 - 1$, con

gradiente $2x$, y $\nabla Q_A = 2Ax$: Lagrange dice exactamente $Au = \lambda u$.

Demostración. Sea $S := \{x : |x| = 1\}$.

1. $n = 1$. $A = (a)$, $S = \{\pm 1\}$, $Q_A(\pm 1) = a$ y $A(1) = a \cdot 1$: $\lambda = a$.
2. $n \geq 2$. S es compacta y no vacía (C3-010.E1) y Q_A es continua (polinomio): alcanza su máximo en algún $u \in S$ (C3-014.C1), que es un máximo local de Q_A sujeto a $g := |x|^2 - 1 = 0$ (C3-029.D1).
3. $\nabla g(x) = 2x \neq 0$ en S (C3-016.T1, C3-016.T3). Para el gradiente de $Q_A(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, por C3-015.T1 y la simetría $a_{ij} = a_{ji}$ (AL.1):

$$\partial_k Q_A(x) = \sum_j a_{kj} x_j + \sum_i a_{ik} x_i = 2(Ax)_k,$$

   es decir, $\nabla Q_A(x) = 2Ax$.
4. Por Lagrange (C3-029.T1) hay μ con $2Au = \mu \cdot 2u$: $Au = \mu u$, y $u \neq 0$: μ es valor propio.
5. $Q_A(u) = u \cdot Au = u \cdot \mu u = \mu |u|^2 = \mu$ (C3-001.T2). Así $\mu = \lambda$.
6. *Es el mayor.* Si $Aw = \nu w$ con $w \neq 0$, sea $w' := w/|w| \in S$; también $Aw' = \nu w'$ (AL.1), y $\nu = Q_A(w') \leq Q_A(u) = \lambda$. ■

⚠ Qué demuestra y qué no

C3-030.T2 es el primer paso del teorema espectral (AL.5). El resto, que hay una base ortonormal de vectores propios, se obtiene repitiendo el argumento en el complemento ortogonal de u: eso queda en Álgebra Lineal I.

Dos aplicaciones más

Ejemplo C3-030.E2 (desigualdad de las medias)
Para $x_1, \ldots, x_n > 0$, $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq (x_1 + \cdots + x_n)/n$, con igualdad solo si todos son iguales.

1. Si $n = 1$, es una igualdad. Sea $n \geq 2$ y $K := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ \sum_i x_i = n\}$. K es cerrado (intersección de preimágenes de cerrados, C3-012.T4) y acotado ($0 \leq x_i \leq n$): compacto (C3-010.T4).
2. $P(x) := x_1 \cdots x_n$ es continua, y alcanza su máximo en K (C3-014.C1). Como $P(1, \ldots, 1) = 1$,

en todo punto de máximo p, $P(p) \geq 1 > 0$, así que todas las $p_i > 0$ (C1-005.T9).

3. Sea $U := (0,\infty)^n$, abierto, y $g(x) := \sum_i x_i - n$, con $\nabla g = (1,\dots,1) \neq 0$. Como $M := U \cap \{g = 0\} \subset K$, p es un máximo de $P|_M$.
4. Por Lagrange (C3-029.T1, C3-015.T1): $\partial_i P(p) = \prod_{j\neq i} p_j = \lambda$ para cada i, es decir, $P(p)/p_i = \lambda$. Como $P(p) > 0$, $\lambda > 0$ y $p_i = P(p)/\lambda$ para todo i: todas iguales, y como suman n, $p = (1,\dots,1)$.
5. Así $x_1 \cdots x_n \leq 1$ en K, con igualdad solo en $(1,\dots,1)$ (todo punto de máximo es ese).
6. Para $x_i > 0$ cualesquiera, sea $s := (x_1 + \cdots + x_n)/n > 0$ e $y_i := x_i/s$; entonces $y \in K$ y $\prod y_i = \prod x_i/s^n \leq 1$ (C1-005.T9): $\prod x_i \leq s^n$, y $(\prod x_i)^{1/n} \leq s$ (C1-023.C2). La igualdad obliga a $y = (1,\dots,1)$, es decir, $x_i = s$ para todo i.

Ejemplo C3-030.E3 (distancia a un hiperplano)
La distancia del origen al hiperplano $a \cdot x = c$ ($a \neq 0$) es $|c|/|a|$, alcanzada en $ca/|a|^2$: por Cauchy–Schwarz (que da también la existencia del mínimo) y, para $n \geq 2$, de nuevo por Lagrange.

1. *Con Cauchy–Schwarz.* Si $a \cdot x = c$, entonces $|c| = |a \cdot x| \leq |a||x|$ (C3-001.T3), así que $|x| \geq |c|/|a|$.
2. $x_0 := ca/|a|^2$ está en el hiperplano ($a \cdot x_0 = c|a|^2/|a|^2 = c$) y $|x_0| = |c|/|a|$: la cota se alcanza.
3. *Con Lagrange* ($n \geq 2$). El mínimo de $|x|^2$ en el hiperplano existe (paso 2); con $g = a\cdot x - c$, $\nabla g = a \neq 0$ y C3-029.T1 da $2x = \lambda a$. Sustituyendo en $a \cdot x = c$: $\lambda|a|^2/2 = c$, y $x = ca/|a|^2 = x_0$.

Ejercicios

1. Encuentra el máximo y el mínimo de $f = xy$ en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$.
2. Encuentra los extremos de $f = x^2 - y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.
3. Encuentra el mayor valor propio de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maximizando Q_A en la circunferencia unitaria.
4. Calcula la distancia del origen al plano $x - 2y + 2z = 6$.
5. Demuestra la desigualdad entre la media aritmética y la cuadrática: $(x_1 + \cdots + x_n)/n \leq \sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)/n}$.

Respuestas

1. Interior: $\nabla f = (y, x) = 0$ solo en $(0, 0)$, que es vértice. Frontera: en los catetos $f = 0$; en $x + y = 2$, $f = x(2 - x)$, máximo 1 en $(1, 1)$. Máximo 1, mínimo 0.
2. Interior: $(0, 0)$, $f = 0$ (silla). Frontera, $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$: $f = 4\cos 2t$. Máximo 4 en $(\pm 2, 0)$, mínimo -4 en $(0, \pm 2)$.
3. $Q = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = 2 + 2hk$ en la circunferencia, máximo en $(1, 1)/\sqrt{2}$: $\lambda = 3$.
4. $|c|/|a| = 6/\sqrt{1 + 4 + 4} = 2$.
5. Por Cauchy–Schwarz con $(1, \dots, 1)$: $\sum x_i \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum x_i^2}$; se divide entre n.

C3-031 · Cierre de Cálculo III

Motivación

> **Un mapa de metro**
> A lo largo del curso hubo un dron que medía distancias con un radar, que se movía con dos mandos y que sobrevolaba terrenos con fondos, cimas y puertos; una placa que se calentaba; una app que deformaba un mapa; una pantalla de diagonal fija. Detrás de todo hubo una sola lista de 205 piezas, cada una demostrada con las anteriores, salvo cinco hechos de Álgebra Lineal I declarados desde el principio.
> Este capítulo es el mapa de esa lista: siete líneas, una por capítulo, y una ruta principal que va de la completitud de $\mathbb{R}^n$ a los multiplicadores de Lagrange.
> Dónde falla la analogía: en el metro puedes ir y volver; en el curso las vías tienen un solo sentido (una pieza solo usa piezas anteriores), y eso es justo lo que evita los círculos viciosos.

Lo que se demostró

1. **Curvas (C3-001 a C3-006).** $\mathbb{R}^n$ con el producto punto, Cauchy–Schwarz (C3-001.T3) y el triángulo; curvas derivadas componente a componente; la longitud de arco de Cálculo II, ahora en $\mathbb{R}^n$, con $\ell(\gamma) = \int |\gamma'|$; el parámetro de arco; curvatura, torsión y Frenet–Serret.
2. **Normas (C3-007).** Espacios vectoriales y normas; $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$; toda lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una matriz; matriz invertible y reglas de A^{-1}.
3. **Topología (C3-008 a C3-014).** Abiertos, cerrados y frontera; completitud (C3-009.T2) y Bolzano–Weierstrass (C3-009.T3) en $\mathbb{R}^n$; Heine–Borel (C3-010.T4); conexidad; continuidad; Weierstrass (C3-014.C1) y Heine en $\mathbb{R}^n$; todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes (C3-014.T5).
4. **Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (C3-015 a C3-019).** Parciales y direccionales; diferenciabilidad y gradiente; TVM (C3-017.T1); parciales continuas ⇒ diferenciable; Schwarz; Taylor con residuo de Lagrange (C3-019.T2), obtenido de Taylor en una variable a lo largo de un segmento.
5. **Transformaciones lineales (C3-020, C3-021).** Norma de operador; serie de Neumann (C3-020.T3); las invertibles forman un abierto y la inversión es continua (C3-020.T2); formas

cuadráticas, la cota $m|h|^2$ y su estabilidad.

6. **Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (C3-022 a C3-027).** Jacobiana; desigualdad del valor medio (C3-022.T3); la inversión es C^∞ (C3-022.T4); regla de la cadena (C3-023.T1); Banach (C3-024.T1); función inversa (C3-025.T1, C3-025.T2); función implícita (C3-026.T1); divergencia, rotacional y laplaciano.
7. **Extremos (C3-028 a C3-030).** Condiciones necesarias; criterio del hessiano sin diagonalizar (C3-028.T3); Lagrange con una (C3-029.T1) y con varias restricciones (C3-029.T2); extremos absolutos; un valor propio real por Lagrange (C3-030.T2).

La ruta principal

Cada flecha es un «usa:» de TEOREMAS-C3.

1. Completitud de $\mathbb{R}^n$ (C3-009.T2) → Banach (C3-024.T1).
2. Compacidad de la esfera (C3-010.T4) y Weierstrass (C3-014.C1) → equivalencia de normas (C3-014.T5) → convergencia absoluta en matrices (C3-014.T6) → serie de Neumann (C3-020.T3) → las invertibles son un abierto (C3-020.T2) → la inversión es C^∞ (C3-022.T4).
3. TVM (C3-017.T1) → desigualdad del valor medio (C3-022.T3).
4. Desigualdad del valor medio + Banach + invertibles abiertas → inyectividad local e imagen abierta (C3-025.T1).
5. C3-025.T1 + regla de la cadena (C3-023.T1) + inversión C^∞ → la inversa es C^1 y C^k (C3-025.T2).
6. Inversa por bloques (C3-026.T0) + función inversa → función implícita (C3-026.T1) → curvas en un nivel (C3-026.C2).
7. Curvas en un nivel + Fermat (C1-032.T1) → Lagrange con una restricción (C3-029.T1) → valor propio real (C3-030.T2).

⚠ Sin determinantes

Ningún teorema de esta ruta usa el determinante (AL.4). «$Df(a)$ invertible» se *lee* como «jacobiano $\neq 0$», pero las pruebas usan la norma de operador, la serie de Neumann y la derivada $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ de la inversión.

Lo que se citó de Álgebra Lineal

Pieza	Qué dice	Dónde se usó
AL.1	álgebra de matrices, transpuesta	norma de operador, formas cuadráticas, cadena, inversas, bloques, $\nabla Q_A = 2Ax$
AL.3	rango por filas = por columnas; submatriz invertible	solo Lagrange con varias restricciones (C3-029.T2)
AL.4	determinante; invertible $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$	solo para leer el jacobiano (C3-022.D3) y en ejemplos (C3-021.E1, C3-022.E1)
AL.5	teorema espectral	solo en los criterios generales (C3-021.T4)
AL.6	criterio de Sylvester	solo en los criterios generales (C3-021.T4)

AL.2 («inyectiva $\Leftrightarrow$ invertible») se eliminó: la serie de Neumann (C3-020.T3), la inversa por bloques con su recíproco (C3-026.T0) y la inversión C^∞ (C3-022.T4) lo hicieron innecesario. El criterio del hessiano (C3-028.T3) no necesita AL.5 ni AL.6: le basta la cota $m|h|^2$ (C3-021.T1). Y el primer paso del teorema espectral, que una simétrica tiene un valor propio real, sí se demostró (C3-030.T2).

De Cálculo I siguen el axioma EN (elección numerable), que en $\mathbb{R}^n$ entra a través de C3-009.T0, y la recursión C1-005.T11, demostrada en el apéndice de C1-005.

Lo que no se enunció

El teorema del rango y el lema de Morse, opcionales del programa 0093, no se enuncian: el curso no deja piezas sin demostrar (TEMARIO, decisión 7).

Lo que viene: Cálculo IV

- **Integrales múltiples.** Fubini y el cambio de variables, donde los jacobianos de C3-022.E1 ($\det JP = r$, $\det JE = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$) serán el factor de escala de áreas y volúmenes.
- **Integrales de línea y de superficie**, con las curvas del capítulo 1.
- **Green, Stokes y Gauss**, donde div y rot (C3-027) tendrán su significado físico: flujo y circulación.
- **Convergencia uniforme**, que cierra las piezas de Cálculo II que quedaron para Cálculo IV.

Ejercicios

1. Sigue en TEOREMAS-C3 los «usa:» de C3-029.T1 hasta llegar a una pieza de Cálculo I. ¿Cuál es?
2. ¿Qué parte de la prueba de la función inversa falla si $\mathbb{R}^n$ no fuera completo?
3. Explica por qué el criterio del hessiano no necesita diagonalizar la hessiana.
4. ¿Dónde se usó la compacidad de la esfera unitaria en el curso? Da tres lugares.
5. ¿Por qué la versión C^k de la función inversa no necesita la fórmula de la adjunta?

Respuestas

1. Por ejemplo, C3-029.T1 usa C1-032.T1 (Fermat) directamente; también, a través de C3-026.C2 → C3-026.T1 → C3-025.T1 → C3-024.T1, llega a C1-014.T3 ($a^n \to 0$).
2. La imagen abierta (C3-025.T1 b): el punto fijo de φ_y sale de Banach, que usa la completitud (C3-009.T2).
3. Porque usa la cota $h \cdot H_f(a)h \geq m|h|^2$ (C3-021.T1, compacidad de la esfera) y su estabilidad (C3-021.T2); no hacen falta valores propios.
4. La equivalencia de normas (C3-014.T5), la cota cuadrática (C3-021.T1) y el valor propio real (C3-030.T2).
5. Porque $Dg = \iota \circ (Df \circ g)$ y la inversión ι es C^∞ (C3-022.T4), demostrado con $D\iota(M)H = -M^{-1}HM^{-1}$ y la continuidad de ι.