Cálculo en varias variables II

Todas las demostraciones, explicadas paso a paso

Cálculo IV · según el programa de la Facultad de Ciencias, UNAM

Guillermo Izquierdo

con revisión de Claude Opus 5.5 (Anthropic)

PyPro · pypro.mx · 2026

Prólogo

Este libro cierra la serie que empezó con *Cálculo diferencial*, *Cálculo integral* y *Cálculo en varias variables I*, con el mismo objetivo: **demostrar todo**. Cada teorema de la integración en varias variables que aparece aquí se demuestra completo, paso a paso, sin «es fácil ver», sin «se deja al lector» y sin usar nada que no se haya demostrado antes, aquí o en los tres primeros libros.

El recorrido sigue el programa de **Cálculo Diferencial e Integral IV** de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en sus temas y en su orden: las integrales múltiples (la integral de Riemann sobre cajas, la medida cero, el **criterio de Lebesgue**, los conjuntos de Jordan, el **teorema de Fubini** y el **teorema del cambio de variables**, con las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas, las integrales impropias y la derivación bajo la integral); las integrales de línea (el trabajo, los campos conservativos, el **teorema de Green** y el índice de una curva); las integrales de superficie (superficies parametrizadas, área, flujo y orientación); los teoremas integrales (**Stokes**, **Gauss**, las identidades de Green, el laplaciano, el principio del máximo y la función de Green); y la convergencia uniforme (la **M de Weierstrass**, la derivación término a término y una función continua sin derivada en ningún punto). De los temas optativos se incluye la parte de **series de Fourier**, hasta el teorema de Dirichlet y la identidad de Parseval; la transformada de Fourier, los métodos numéricos y las formas diferenciales no se enuncian.

Cómo está hecho

- **Todo parte de los mismos axiomas.** Los axiomas de los números reales (K1–K9, O1–O3 y S), el principio de elección numerable (EN) y lo demostrado en los tres libros anteriores son el punto de partida. Sus resultados se citan con su número, por ejemplo «(C2-005.T2)» o «(C3-025.T1)»; los de este libro empiezan con C4.
- **Cada paso dice qué usa.** Las justificaciones aparecen entre paréntesis con el número del resultado que se aplica, por ejemplo «(C4-006.T1)». El número indica la clase (C4-006) y la pieza dentro de ella (T1 = primer teorema). Detrás del libro hay un inventario de 216 piezas en el que cada una declara de qué depende, y un programa comprueba que ninguna use algo posterior.
- **Integral de Riemann, no de Lebesgue.** La integral es la de Darboux sobre cajas, extendida a los conjuntos de Jordan. La medida cero entra solo para caracterizar las funciones integrables

(criterio de Lebesgue, que cumple la promesa de C2-005.T6); la teoría de la medida no se usa.

- **Las rutas se eligieron para no dejar huecos.** El cambio de variables sigue la ruta de Lang: se estima el contenido de la imagen de cubos pequeños, se obtiene una desigualdad y la igualdad sale de aplicar la misma cota a la función inversa de *Cálculo en varias variables I*. Green, Stokes y Gauss se demuestran para imágenes C^2 de un rectángulo o de una caja, y cada ejemplo (disco, corona, esfera, bola) comprueba lado por lado y cara por cara que encaja en esa forma.
- **La elección se dice cuando se usa.** El criterio de Lebesgue arma sus cubiertas con rejillas regulares, sin elegir; la única elección del libro es EN en $\mathbb{R}^n$ (C3-009.T0), citada donde aparece.
- **Intuición primero, formalidad siempre.** Cada capítulo abre con una situación cotidiana (una mochila que sube una colina, un alambre de densidad variable, el agua que se va por un desagüe, la lluvia que cae sobre un paraguas) y dice dónde falla la analogía. Después vienen la definición o el teorema formal, su demostración y un contraejemplo por cada hipótesis.

Álgebra lineal: qué se demuestra y qué se cita

El libro demuestra lo que la integración necesita: las matrices elementales, la reducción de Gauss–Jordan, el contenido de la imagen de una caja bajo una transformación elemental y, con ello, que una transformación lineal multiplica el contenido por $|\det T|$ (C4-008). Solo se citan, con su número y marcados «⚠ Álgebra Lineal», dos hechos ya citados en *Cálculo en varias variables I*: el álgebra de matrices y la transpuesta (AL.1) y el determinante (AL.4).

Este libro **cierra las promesas** de los anteriores: el criterio de Lebesgue (C2-005.T6), el trabajo (C2-022.D1), las áreas y superficies de revolución (C2-019 y C2-021), la derivación término a término (C2-028.T5), la convergencia de las series de Fourier (C2-029.T5) y el sentido físico de la divergencia y el rotacional (C3-027). El último capítulo (C4-032) es un mapa de lo demostrado en los cuatro libros y de dónde se cumplió cada promesa.

Cómo leerlo

Cada capítulo corresponde a una clase en video (algunos, a dos partes) del curso *Cálculo en varias variables II: todas las demostraciones, explicadas paso a paso* de PyPro (pypro.mx). Se puede leer solo, pero funciona mejor junto con el video: el video da la idea y la imagen; el libro da cada detalle por escrito.

Los recuadros ayudan a orientarse:

- **Teorema, definición, ejemplo:** el enunciado exacto, tal como se usa después.
- **Idea:** la estrategia de la demostración en una o dos frases.
- **En la vida diaria:** la situación cotidiana y el límite de la analogía.
- **Cuidado:** errores frecuentes, lo que pasa si se quita una hipótesis y por qué una pieza lleva ⚠.

Al final de cada capítulo hay ejercicios con sus respuestas.

Agradecimientos

A la **Facultad de Ciencias de la UNAM**, por un plan de estudios extraordinario y por haber formado a tantas generaciones de matemáticas y matemáticos. Este libro sigue su programa de Cálculo Diferencial e Integral IV y no existiría sin él.

A los creadores de **Claude**, en Anthropic, por su esfuerzo de condensar el conocimiento del mundo en un modelo capaz de revisar, cuestionar y verificar cada línea de una demostración. Claude Opus 5.5 revisó la estructura lógica de este libro: que cada enunciado esté completo, que ningún paso use algo no demostrado y que no haya contradicciones entre capítulos ni con los tres libros anteriores.

A quienes estudian este material: las demostraciones son la parte del cálculo que más se salta y la que más enseña.

Guillermo Izquierdo

Índice general

Prólogo I

Agradecimientos IV

C4-001 · La integral sobre una caja 1

C4-002 · Rejillas finas: el teorema de Darboux 11

C4-003 · Medida cero y contenido cero 17

C4-004 · Oscilación y criterio de Lebesgue 25

C4-005 · Conjuntos de Jordan e integral sobre conjuntos acotados 32

C4-006 · Teorema de Fubini 40

C4-007 · Regiones elementales, volúmenes y valor medio 46

C4-008 · Transformaciones lineales y contenido 53

C4-009 · Imágenes de conjuntos de Jordan bajo funciones C^1 60

C4-010 · Teorema del cambio de variables 66

C4-011 · Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas 73

C4-012 · Integrales impropias y derivación bajo la integral 80

C4-013 · Caminos e integrales de trayectoria 90

C4-014 · Integral de línea de un campo: el trabajo 97

C4-015 · Campos conservativos y lema de Poincaré 102

C4-016 · Teorema de Green 109

C4-017 · Índice de una curva 120

C4-018 · Superficies parametrizadas y área 127

C4-019 · Integrales de superficie, flujo y orientación 134

C4-020 · Divergencia y rotacional en el plano 140

C4-021 · Teorema de Stokes 145

C4-022 · Teorema de Gauss 152

C4-023 · Flujos, presión y ley de Gauss 164

C4-024 · Identidades de Green y unicidad 170

C4-025 · El laplaciano en coordenadas curvilíneas y funciones armónicas 176

C4-026 · Principio del máximo para la ecuación del calor 184

C4-027 · Función de Green y fórmula de Poisson 189

C4-028 · Convergencia uniforme 196

C4-029 · M de Weierstrass y series de potencias 202

C4-030 · Una función continua sin derivada en ningún punto 208

C4-031 · Teorema de Dirichlet y convergencia uniforme 214

C4-032 · Cierre de Cálculo IV 222

C4-001 · La integral sobre una caja

Motivación

> **La lluvia sobre un terreno**
> Sobre un terreno rectangular cae lluvia, pero no en la misma cantidad en todas partes: en el punto (x, y) caen $f(x, y)$ litros por metro cuadrado. ¿Cuánta agua cayó en total?
> Un agrónomo divide el terreno en una rejilla de parcelas. En cada parcela anota la lluvia mínima y la máxima, las multiplica por el área de la parcela y suma. Obtiene un total por defecto y uno por exceso. Con una rejilla más fina, los dos totales se acercan. Si se acercan a un mismo número, ese número es el agua total: la integral de f sobre el terreno.
> Es exactamente lo que se hizo en Cálculo II con intervalos; ahora los intervalos son cajas.
> Dónde falla la analogía: la lluvia real se mide en pluviómetros, en puntos aislados; aquí suponemos que conocemos f en todos los puntos, y que f es acotada.

Para $f(x, y) = x^2 + y$ en $[0, 1]^2$ y la rejilla de $j \times j$ parcelas, la suma por defecto es $L_j = \frac{(j-1)(2j-1)}{6j^2} + \frac{j-1}{2j}$ y la suma por exceso $U_j = \frac{(j+1)(2j+1)}{6j^2} + \frac{j+1}{2j}$, así que $U_j - L_j = 2/j$. Con $j = 10$: $L_{10} = 0.735$ y $U_{10} = 0.935$. El valor exacto resultará $5/6 \approx 0.8333$ (C4-006.E1 da la herramienta).

Parte 1 · Cajas, particiones y sumas

Cajas y volumen

Definición C4-001.D1 (caja, volumen, cubo)

Para $a_i < b_i$ $(i = 1, \dots, n)$, la **caja** $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ tiene **volumen** $v(R) := \prod_i (b_i - a_i)$. Un **cubo** es una caja con todos sus lados iguales; $Q(a, r) := \{x : \|x - a\|_\infty \leq r\}$ es el cubo de centro a y semilado $r > 0$, con $v = (2r)^n$. Para $n = 1$, $R = [a, b]$ y $v(R) = b - a$. Las cajas son compactas (C3-010.T2) y convexas. Los productos finitos (volúmenes) se reordenan y reagrupan libremente: K2 y K6 por inducción, como C2-027.T0 (a) para las sumas.

Que $Q(a,r)$ es la caja $\prod_i [a_i - r, a_i + r]$ es la definición de $\|\cdot\|_\infty$ (C3-007.T1): $\|x-a\|_\infty \le r$ si y solo si $|x_i - a_i| \le r$ para cada i. Las cajas son convexas: si $x, y \in R$ y $t \in [0,1]$, cada coordenada $(1-t)x_i + ty_i$ está entre a_i y b_i (C1-003.T4), y así $[x,y] \subset R$ (C3-011.D1).

Teorema C4-001.T1 (supremos e ínfimos en $\mathbb{R}^n$)

Las afirmaciones (a)-(d) de C2-001.T2 valen para $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y $f, g : S \to \mathbb{R}$ acotadas; se escribe $\sup_S f$, $\inf_S f$.

Demostración.

1. Cada afirmación de C2-001.T2 habla de los conjuntos de números $f(S)$, $g(S)$, $(f+g)(S)$, $(cf)(S)$ y $f(S')$, y de sus supremos e ínfimos (C1-006.D1, C1-006.T3).
2. La demostración de C2-001.T2 solo usa que esos conjuntos son subconjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$, y que $f(x) + g(x) \in (f+g)(S)$ para $x \in S$: el dominio S nunca interviene.
3. Por lo tanto la misma demostración, palabra por palabra, vale para $S \subset \mathbb{R}^n$. ■

Particiones

Definición C4-001.D2 (particiones)

Una **partición** de R es $P = (P_1, \dots, P_n)$ con P_i partición de $[a_i, b_i]$ (C2-001.D1). Sus **subcajas** son los productos $I_1 \times \cdots \times I_n$ de subintervalos consecutivos I_i de P_i; $\|P\|$:= el mayor lado de una subcaja. Q **refina** a P si $P_i \subset Q_i$ para todo i; $P \cup Q := (P_1 \cup Q_1, \dots, P_n \cup Q_n)$ refina a ambas. La **rejilla** G_j ($j \in \mathbb{N}$) divide cada $[a_i, b_i]$ en j partes iguales; $\|G_j\| = \max_i (b_i - a_i)/j$; si R es un cubo, las subcajas de G_j son j^n cubos. Las sumas sobre las subcajas son sumas finitas sin orden (C2-027.T0).

Si $P_i = \{t_0^i < t_1^i < \cdots < t_{k_i}^i\}$, las subcajas se indexan con los multiíndices $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$, $1 \le j_i \le k_i$:

$$S_{\mathbf{j}} := [t^1_{j_1-1}, t^1_{j_1}] \times \cdots \times [t^n_{j_n-1}, t^n_{j_n}], \qquad v(S_{\mathbf{j}}) = \prod_i \Delta t^i_{j_i}.$$

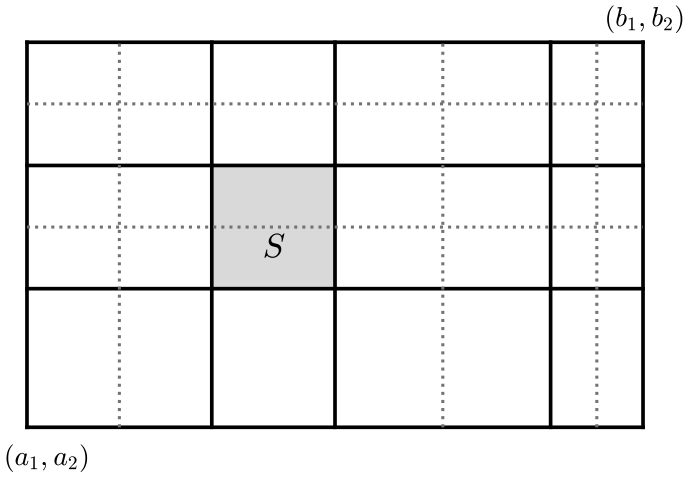


Figura 1: Una partición de una caja de $\mathbb{R}^2$ y un refinamiento (líneas punteadas): cada subcaja gruesa queda partida en subcajas finas.

Teorema C4-001.T2 (las subcajas llenan la caja)

Sea P una partición de R. Para toda caja $S = \prod_i [c_i, d_i]$, $\operatorname{int} S = \prod_i (c_i, d_i)$ y $\partial S = S \setminus \prod_i (c_i, d_i)$. Las subcajas de P cubren R, el interior de una subcaja no corta a ninguna otra subcaja de P (en particular, dos subcajas distintas tienen interiores disjuntos), y $\sum_{S \in P} v(S) = v(R)$. Si Q refina a P, cada subcaja de Q está contenida en exactamente una subcaja de P, y para cada $S \in P$ las subcajas de Q contenidas en S forman una partición de S y son exactamente las subcajas de Q que cortan $\operatorname{int} S$.

Idea de la demostración

Todo se hace coordenada por coordenada: en cada lado $[a_i, b_i]$ ya sabemos todo (Cálculo II). La suma de los volúmenes es un producto de n sumas telescópicas.

Demostración. Escribimos $P_i = \{t_0^i < \cdots < t_{k_i}^i\}$.

1. *Un lema sobre el interior.* Para una caja $S = \prod_i [c_i, d_i]$, $\operatorname{int} S = \prod_i (c_i, d_i)$. Si $c_i < x_i < d_i$ para todo i, sea $r := \min_i \min(x_i - c_i, d_i - x_i) > 0$ (C1-005.T13); si $|y - x| < r$, entonces $|y_i - x_i| \le |y - x| < r$ (C3-001.T2), así que $c_i < y_i < d_i$: $B(x, r) \subset S$. Si en cambio $x_i = c_i$ para algún i, el punto $x - \frac{r}{2} e_i$ está en $B(x, r)$ y fuera de S para todo $r > 0$; igual si $x_i = d_i$ con $x + \frac{r}{2} e_i$. Así x no es interior

(C3-008.D1). Como S es cerrada, $\partial S = S \setminus \operatorname{int} S = S \setminus \prod_i (c_i, d_i)$ (C3-008.T3): los puntos de S con alguna coordenada en un extremo.

2. *Cubren.* Sea $x \in R$. Para cada i, el conjunto $\{k \geq 1 : t_k^i \geq x_i\}$ no es vacío ($t_{k_i}^i = b_i$) y tiene un mínimo j_i (C1-005.T3); entonces $t_{j_i-1}^i \leq x_i \leq t_{j_i}^i$ (si $j_i = 1$, porque $t_0^i = a_i \leq x_i$). Así $x \in S_{\mathbf{j}}$.
3. *Interiores disjuntos.* Si $\mathbf{j} \neq \mathbf{j}'$, hay i con, digamos, $j_i < j_i'$; entonces $t_{j_i}^i \leq t_{j_i'-1}^i$ y los intervalos abiertos $(t_{j_i-1}^i, t_{j_i}^i)$ y $(t_{j_i'-1}^i, t_{j_i'}^i)$ son disjuntos. Por el paso 1, $\operatorname{int} S_{\mathbf{j}}$ y $\operatorname{int} S_{\mathbf{j}'}$ son disjuntos. Más aún, $\operatorname{int} S_{\mathbf{j}}$ no corta a $S_{\mathbf{j}'}$, porque el intervalo cerrado $[t_{j_i'-1}^i, t_{j_i'}^i]$ tampoco corta a $(t_{j_i-1}^i, t_{j_i}^i)$.
4. *Suma de volúmenes.* Por la distributividad (K9) y la inducción en n (C1-005.T1, C1-005.T12), la suma de los productos sobre todos los multiíndices es el producto de las sumas, y cada suma es telescópica (C2-001.T1 a):

$$\sum_{S \in P} v(S) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \Delta t_{j_1}^1 \cdots \Delta t_{j_n}^n$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{j_i=1}^{k_i} \Delta t_{j_i}^i = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = v(R).$$

   El orden de la suma es irrelevante (C2-027.T0).
5. *Refinamientos: un lado.* Sea Q refinamiento de P y $I = [t_{k-1}^i, t_k^i]$ un subintervalo de P_i. Como $t_{k-1}^i, t_k^i \in Q_i$, el conjunto $Q_i \cap I$ es una partición de I (C2-001.D1). Dos puntos consecutivos de $Q_i \cap I$ son consecutivos en Q_i: un punto de Q_i entre ellos estaría en I. Y si $u < u'$ son consecutivos en Q_i, hay un único subintervalo de P_i que contiene a $[u, u']$: con k el menor índice con $t_k^i \geq u'$ (C1-005.T3), $t_{k-1}^i < u'$ y $t_{k-1}^i \in Q_i$, luego $t_{k-1}^i \leq u$.
6. *Refinamientos: las cajas.* Sea $S = I_1 \times \cdots \times I_n \in P$. Por el paso 5, las subcajas de Q contenidas en S son los productos de subintervalos consecutivos de las particiones $Q_i \cap I_i$: forman una partición de S. Por el paso 5 también, cada subcaja de Q está contenida en exactamente una subcaja de P (la existencia, lado por lado; la unicidad, por el paso 3, porque su interior no es vacío).
7. *Las que cortan* $\operatorname{int} S$. Una subcaja S' de Q contenida en S corta a $\operatorname{int} S$, porque $\emptyset \neq \operatorname{int} S' \subset \operatorname{int} S$ (paso 1). Si $S' \subset S''$ con $S'' \in P, S'' \neq S$, entonces $S' \cap \operatorname{int} S \subset S'' \cap \operatorname{int} S = \emptyset$ (paso 3). Por el paso 6, las subcajas de Q que cortan $\operatorname{int} S$ son exactamente las contenidas en S. ■

Sumas de Darboux

Definición C4-001.D3 (sumas de Darboux)

Para $f : R \to \mathbb{R}$ acotada, P partición de R y S subcaja: $m_S(f) := \inf_S f$, $M_S(f) := \sup_S f$; $L(f,P) := \sum_S m_S(f)\, v(S)$ y $U(f,P) := \sum_S M_S(f)\, v(S)$.

Teorema C4-001.T3 (refinamiento)

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. $L(f,P) \le U(f,P)$; si Q refina a P, $L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$; para dos particiones cualesquiera, $L(f,P) \le U(f,Q)$. Si $m \le f \le M$, $m \cdot v(R) \le L(f,P) \le U(f,P) \le M \cdot v(R)$.

Idea de la demostración

Al refinar, cada subcaja gruesa se reparte en subcajas finas; en cada una el ínfimo solo puede subir (es el ínfimo sobre un conjunto menor), y los volúmenes suman lo mismo.

Demostración.

1. Para cada subcaja S, $m_S(f) \le M_S(f)$ (C4-001.T1, C2-001.T2 a) y $v(S) > 0$; multiplicando (C1-003.T9) y sumando, $L(f,P) \le U(f,P)$ (C2-027.T0 c).
2. Sea Q refinamiento de P. Por C4-001.T2, cada subcaja de Q está en exactamente una $S \in P$; agrupamos los términos de $L(f,Q)$ según esa S (C2-027.T0 b):
$$L(f,Q) = \sum_{S \in P} \sum_{S' \in Q,\, S' \subset S} m_{S'}(f)\, v(S').$$
3. Si $S' \subset S$, $m_{S'}(f) \ge m_S(f)$ (C4-001.T1, C2-001.T2 a). Por C4-001.T2 aplicado a la partición de S que forman esas S', $\sum_{S' \subset S} v(S') = v(S)$. Así
$$\sum_{S' \subset S} m_{S'}(f)\, v(S') \ge m_S(f) \sum_{S' \subset S} v(S') = m_S(f)\, v(S),$$
y sumando sobre S, $L(f,Q) \ge L(f,P)$ (C1-003.T9).
4. Igual, con $M_{S'}(f) \le M_S(f)$, $U(f,Q) \le U(f,P)$; con el paso 1 para Q queda la cadena completa.

5. Para P y Q cualesquiera, $P \cup Q$ refina a ambas (C4-001.D2) y

$$L(f,P) \le L(f,P\cup Q) \le U(f,P\cup Q) \le U(f,Q).$$

6. Si $m \le f \le M$, entonces $m \le m_S(f)$ y $M_S(f) \le M$ (C1-006.D1, C1-006.T3), y por C4-001.T2 $m\,v(R) = \sum_S m\,v(S) \le L(f,P)$; igual $U(f,P) \le M\,v(R)$. ■

Parte 2 · La integral

Definición C4-001.D4 (integral)

Para $f : R \to \mathbb{R}$ acotada, $L(f) := \sup_P L(f,P)$ y $U(f) := \inf_P U(f,P)$ (existen por C4-001.T3). f es **integrable** en R si $L(f) = U(f)$, y ese número es $\int_R f$ (también $\int_R f(x)\,dx$).

Existen: el conjunto $\{L(f,P)\}$ no es vacío y está acotado superiormente por $U(f,P_0)$ para cualquier P_0 (C4-001.T3); tiene supremo por S. Igual el ínfimo (C1-006.T3).

Teorema C4-001.T4 (criterio de Riemann)

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. $L(f) \le U(f)$. f es integrable ⇔ para todo $\varepsilon > 0$ existe P con $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$; en ese caso $\int_R f$ es el único número entre $L(f,P)$ y $U(f,P)$ para todas las P.

Demostración.

1. Fija Q. Por C4-001.T3, $L(f,P) \le U(f,Q)$ para toda P: $U(f,Q)$ es cota superior y $L(f) \le U(f,Q)$ (C1-006.D1). Como vale para toda Q, $L(f)$ es cota inferior de los $U(f,Q)$ y $L(f) \le U(f)$ (C1-006.T3).
2. (⇐) Para toda P, $L(f,P) \le L(f) \le U(f) \le U(f,P)$, así que $0 \le U(f) - L(f) \le U(f,P) - L(f,P)$ (C1-003.T9). Si para cada ε hay P con la diferencia $< \varepsilon$, entonces $U(f) - L(f) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y $U(f) = L(f)$.
3. (⇒) Sea $I := L(f) = U(f)$ y $\varepsilon > 0$. Por C1-006.T2 hay P_1 con $L(f,P_1) > I - \varepsilon/2$ y P_2 con $U(f,P_2) < I + \varepsilon/2$. Con $P := P_1 \cup P_2$ y C4-001.T3,

$$U(f,P) - L(f,P) \le U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon.$$

4. *Unicidad.* I está entre $L(f,P)$ y $U(f,P)$ para toda P (paso 2). Si J también, entonces $|I - J| \le$

$U(f,P) - L(f,P)$ para toda P, y por el paso 3 $|I - J| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$: $I = J$. ■

Corolario C4-001.C1 (coherencia con Cálculo II)

Para $n = 1$ y $R = [a,b]$, particiones, sumas, $L(f)$, $U(f)$, integrabilidad y $\int_R f$ son exactamente los de C2-001.D2 y C2-002.D2. Todo resultado de Cálculo II sobre integrales en $[a,b]$ vale para la integral de este capítulo en $\mathbb{R}^1$.

Demostración.

1. Para $n = 1$, una partición $P = (P_1)$ es una partición P_1 de $[a,b]$ (C2-001.D1), y sus subcajas son los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, con volumen Δt_i (C4-001.D1, D2).
2. Entonces $m_S(f)$, $M_S(f)$, $L(f,P)$ y $U(f,P)$ son los m_i, M_i y las sumas de C2-001.D2 (la suma sin orden es la suma ordenada, C2-027.T0 a).
3. Los supremos e ínfimos de C4-001.D4 se toman sobre los mismos conjuntos que en C2-002.D2: son iguales, y también la integrabilidad y la integral. Todo teorema de Cálculo II sobre estos objetos vale, entonces, tal cual. ■

Teorema C4-001.T5 (propiedades)

Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ acotadas y $c \in \mathbb{R}$. (a) $U(f+g) \le U(f) + U(g)$ y $L(f+g) \ge L(f) + L(g)$; si $f \le g$, $U(f) \le U(g)$ y $L(f) \le L(g)$. (b) Si f y g son integrables: $f+g$ y cf lo son, con $\int (f+g) = \int f + \int g$ y $\int cf = c \int f$; $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$; $|f|$ es integrable y $|\int f| \le \int |f|$. (c) $\int_R c = c \cdot v(R)$.

Demostración.

1. *(a), suma.* En cada subcaja, $M_S(f+g) \le M_S(f) + M_S(g)$ (C4-001.T1, C2-001.T2 b); multiplicando por $v(S) > 0$ y sumando, $U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P)$.
2. Para P, Q cualesquiera, con C4-001.T3:

$$U(f+g) \le U(f+g, P \cup Q) \le U(f, P \cup Q) + U(g, P \cup Q) \le U(f,P) + U(g,Q).$$

   Tomando ínfimo en P y luego en Q (C1-006.T3, C1-006.T4), $U(f+g) \le U(f) + U(g)$. Lo de L es igual con ínfimos.
3. *(a), monotonía.* Si $f \le g$, $M_S(f) \le M_S(g)$ (C1-006.D1), luego $U(f,P) \le U(g,P)$ para toda P y

$U(f) \le U(g)$; igual con L.

4. *(b), suma.* Por (a), $L(f)+L(g) \le L(f+g) \le U(f+g) \le U(f)+U(g)$ (C4-001.T4); si f, g son integrables los extremos valen $\int f + \int g$, y todo es igual.
5. *(b), múltiplos.* Si $c \ge 0$, $M_S(cf) = c\,M_S(f)$ y $m_S(cf) = c\,m_S(f)$ (C2-001.T2 c), así que $U(cf,P) = c\,U(f,P)$, $L(cf,P) = c\,L(f,P)$, y $U(cf) = c\,U(f)$, $L(cf) = c\,L(f)$ (C1-006.T4, C1-006.T3). Si $c < 0$, $M_S(cf) = c\,m_S(f)$, luego $U(cf,P) = c\,L(f,P)$ y $U(cf) = c\,L(f)$; igual $L(cf) = c\,U(f)$. En los dos casos, si f es integrable, $L(cf) = U(cf) = c\int f$.
6. *(b), monotonía.* Si $f \le g$, por el paso 3, $\int f = U(f) \le U(g) = \int g$.
7. *(b), valor absoluto.* Para $x, y \in S$, $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)|$ (C1-004.T5), y por la forma de la oscilación (C2-001.T2 d) $M_S(|f|) - m_S(|f|) \le M_S(f) - m_S(f)$. Así $U(|f|,P) - L(|f|,P) \le U(f,P) - L(f,P)$, y por C4-001.T4 $|f|$ es integrable. Como $-|f| \le f \le |f|$ (C1-004.T3), los pasos 5 y 6 dan $-\int |f| \le \int f \le \int |f|$, es decir $|\int f| \le \int |f|$.
8. *(c).* Para $f \equiv c$, $m_S = M_S = c$ y $L(f,P) = U(f,P) = c\sum_S v(S) = c\,v(R)$ (C4-001.T2). ■

Teorema C4-001.T6 (continua ⇒ integrable)

Si $f : R \to \mathbb{R}$ es continua, es integrable en R.

Idea de la demostración

En la caja compacta, f es uniformemente continua (Heine). En una rejilla suficientemente fina, f varía menos de η en cada subcaja, y $U - L \le \eta\, v(R)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $\eta := \varepsilon/(2v(R))$.

1. R es compacta (C3-010.T2) y f es continua, así que es uniformemente continua (C3-014.T2): hay $\delta > 0$ con $|f(x) - f(y)| < \eta$ si $x, y \in R$ y $|x - y| < \delta$.
2. Sea $j \in \mathbb{N}$ con $\|G_j\| < \delta/n$ (C1-007.C1). Si x, y están en una subcaja S de G_j, cada $|x_i - y_i| \le \|G_j\|$ y por C3-001.T5

$$|x - y| \le |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \le n\,\|G_j\| < \delta.$$

3. S es compacta y no vacía (C3-010.T2), y f alcanza en S su máximo en p y su mínimo en q (C3-014.C1): $M_S(f) - m_S(f) = f(p) - f(q) < \eta$.

4. Sumando (C4-001.T2),

$$U(f, G_j) - L(f, G_j) = \sum_S (M_S - m_S)\, v(S) \le \eta \sum_S v(S) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

y f es integrable por el criterio de Riemann (C4-001.T4). ■

Por qué cada hipótesis

En C4-001.T6 la única hipótesis es la continuidad (la caja ya es compacta). Sin ella, el resultado falla:

> **Ejemplo C4-001.E1 (no integrable)**
> $f(x, y) := 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y 0 si no, en $[0, 1]^2$: $L(f, P) = 0$ y $U(f, P) = 1$ para toda P, así que f no es integrable.
>
> 1. Sea $S = [t, t'] \times [u, u']$ una subcaja de P, con $t < t'$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ (C1-007.T3) hay $q \in \mathbb{Q}$ con $t < q < t'$, y $f(q, u) = 1$; por la densidad de los irracionales (C1-008.T3) hay $x \notin \mathbb{Q}$ en (t, t'), con $f(x, u) = 0$.
> 2. Como $0 \le f \le 1$, $M_S(f) = 1$ y $m_S(f) = 0$ (C1-006.D1).
> 3. Así $L(f, P) = 0$ y $U(f, P) = \sum_S v(S) = 1$ (C4-001.T2), y $L(f) = 0 \neq 1 = U(f)$ (C4-001.D4).

> **⚠ Acotada es parte de la definición**
>
> Las sumas de Darboux solo tienen sentido para f acotada: si f no es acotada en alguna subcaja, $M_S(f)$ no existe. Por eso «integrable» incluye «acotada», como en Cálculo II.

Ejercicios

1. Calcula $L(f, G_j)$ y $U(f, G_j)$ para $f(x, y) = x^2 + y$ en $[0, 1]^2$ y comprueba que $U - L = 2/j$.
2. Demuestra que si f es integrable en R y $f \ge 0$, entonces $\int_R f \ge 0$.
3. Sea f integrable en R y g igual a f salvo en un punto p. ¿Es g integrable? (Sugerencia: el punto está en a lo más 2^n subcajas de una partición; pon puntos de la partición muy cerca de p.)
4. Demuestra que $\int_R (f - g) = \int_R f - \int_R g$ para f, g integrables.
5. Da una función f en $[0, 1]^2$ no integrable tal que $|f|$ sí lo sea.

Respuestas

1. En cada subcuadro $[\frac{a-1}{j}, \frac{a}{j}] \times [\frac{b-1}{j}, \frac{b}{j}]$, f es creciente en cada variable: m está en la esquina inferior izquierda y M en la superior derecha. Las sumas son las del gancho, y la diferencia es $\frac{6j}{6j^2} + \frac{2}{2j} = \frac{2}{j}$.
2. $0 \leq f$ y C4-001.T5 (b, c): $\int f \geq \int 0 = 0$.
3. Sí, con $\int g = \int f$: con $|f|, |g| \leq B$, las subcajas que contienen a p cambian $U - L$ en a lo más $2B$ veces su volumen total, que se hace tan chico como se quiera.
4. $f - g = f + (-1)g$ y C4-001.T5 (b).
5. $f = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y -1 si no: $L(f, P) = -1$, $U(f, P) = 1$, pero $|f| \equiv 1$.

C4-002 · Rejillas finas: el teorema de Darboux

Motivación

> **Dos agrónomos y sus rejillas**
> El criterio de Riemann dice que una función es integrable si *alguna* partición tiene sumas superior e inferior cercanas. Pero en la práctica uno usa la rejilla que tiene a la mano: cuadritos iguales, cada vez más chicos. ¿Basta eso?
> Un agrónomo encontró una partición muy buena, P_0, con líneas en lugares raros. Otro usa cuadritos de 1 metro. La pregunta es si los cuadritos chicos, *cualesquiera* que sean, son tan buenos como la partición astuta.
> El teorema de Darboux dice que sí: los cuadritos que no caben dentro de una parcela de P_0 son los que cruzan una de sus líneas, y esos ocupan un área tan chica como se quiera.
> Dónde falla la analogía: en un terreno real los cuadritos tienen un tamaño mínimo; aquí la norma de la partición tiende a cero.

Con $f(x, y) = x^2 + y$ en $[0, 1]^2$ y P_0 la partición con cortes en $1/3$ en las dos coordenadas, las subcajas de G_{10} que cruzan un corte son las de la columna $x \in [0.3, 0.4]$ y las del renglón $y \in [0.3, 0.4]$: 19 de 100, con área total 0.19.

Resultados

Teorema C4-002.T1 (cajas dentro de cajas)

Sea Q una caja. (a) Si $Q_1, \dots, Q_k$ son cajas contenidas en Q con interiores disjuntos dos a dos, $\sum_i v(Q_i) \le v(Q)$. (b) Si $Q_1, \dots, Q_k$ son cajas que cubren Q, $v(Q) \le \sum_i v(Q_i)$.

> **Idea de la demostración**
> Una partición que tiene todos los extremos de todas las cajas parte a cada una en subcajas, y el volumen de cada caja es la suma de las subcajas que contiene. Basta contar subcajas.

Demostración. Para una caja $W = \prod_i [c_i, d_i]$ y una partición P de una caja que contiene a W, con $c_i, d_i \in P_i$ para todo i:

1. *Lema.* Las subcajas de P contenidas en W son las subcajas de la partición $(P_i \cap [c_i, d_i])_i$ de W, y por lo tanto $v(W) = \sum_{S \in P,\ S \subset W} v(S)$. En efecto: un subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ de P_i está en $[c_i, d_i]$ si y solo si sus extremos son consecutivos en $P_i \cap [c_i, d_i]$ (un punto de P_i entre ellos estaría en $[c_i, d_i]$); y un producto de intervalos está en W si y solo si cada factor está en su lado. La igualdad de volúmenes es C4-001.T2.
2. *(a).* Sea P la partición de Q con $P_i :=$ los extremos de Q y de todas las Q_l en la coordenada i (todos están en $[a_i, b_i]$ porque $Q_l \subset Q$). Por el lema, $v(Q_l) = \sum_{S \subset Q_l} v(S)$.
3. Una subcaja S de P está en a lo más una Q_l: si $S \subset Q_l \cap Q_m$ con $l \neq m$, entonces $\emptyset \neq \operatorname{int} S \subset \operatorname{int} Q_l \cap \operatorname{int} Q_m = \emptyset$ (C4-001.T2, paso 1 del libro).
4. Así los conjuntos $\{S : S \subset Q_l\}$ son disjuntos, y por C2-027.T0 (b, c), con $v(S) > 0$:

$$\sum_{l=1}^{k} v(Q_l) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{S \subset Q_l} v(S) \leq \sum_{S \in P} v(S) = v(Q).$$

5. *(b).* Sea R la caja con lados [mın, max] de todos los extremos de Q y de las Q_l (C1-005.T13), y P la partición de R con todos esos extremos. Por el lema, $v(Q) = \sum_{S \subset Q} v(S)$ y $v(Q_l) = \sum_{S \subset Q_l} v(S)$.
6. Sea $S = \prod_i [s_i, s_i'] \subset Q$ una subcaja de P y c su centro. Como $c \in Q \subset \bigcup_l Q_l$, hay l con $c \in Q_l = \prod_i [\alpha_i, \beta_i]$. En la coordenada i, $\alpha_i \leq c_i < s_i'$ y $\alpha_i \in P_i$; como s_i y s_i' son consecutivos en P_i, $\alpha_i \leq s_i$. Igual $\beta_i \geq s_i'$. Así $S \subset Q_l$.
7. Por el paso 6, $\{S \subset Q\} \subset \bigcup_l \{S \subset Q_l\}$. Separando la unión en partes disjuntas (los S que caen por primera vez en Q_l) y usando C2-027.T0 (b, c):

$$v(Q) = \sum_{S \subset Q} v(S) \leq \sum_{l=1}^{k} \sum_{S \subset Q_l} v(S) = \sum_{l=1}^{k} v(Q_l). \qquad \blacksquare$$

Teorema C4-002.T2 (Darboux)

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ integrable. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda partición P de R con $\|P\| < \delta$ cumple $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. En particular $L(f, G_j) \to \int_R f$ y $U(f, G_j) \to \int_R f$.

Idea de la demostración

Se fija una partición buena P_0. Una subcaja de P «buena» cabe en una subcaja de P_0 y aporta a lo más lo que aporta P_0. Una subcaja «mala» cruza una de las paredes interiores de P_0; hay N paredes, y las subcajas malas de una pared caben en una rebanada de grosor $< \delta$.

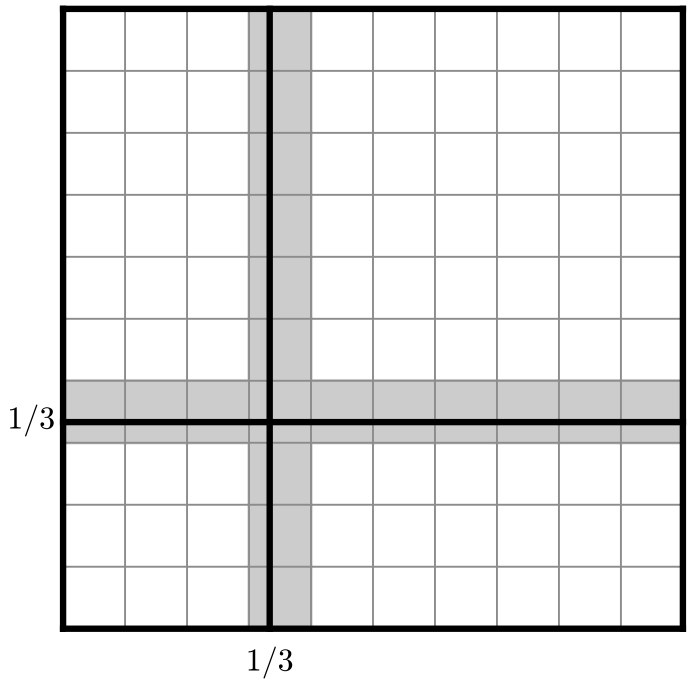


Figura 2: La partición P_0 (líneas gruesas) y una partición fina P. Las subcajas sombreadas cruzan una pared de P_0: son las «malas», y caben en rebanadas delgadas.

Demostración. Sean $B \geq 0$ con $|f| \leq B$ y $\varepsilon > 0$.

1. Por el criterio de Riemann (C4-001.T4) hay P_0 con $U(f, P_0) - L(f, P_0) < \varepsilon/2$. Sea N el número total de puntos de los $(P_0)_i$ en los abiertos (a_i, b_i), sumando sobre i, y $W := \max_i \prod_{k \neq i}(b_k - a_k)$

(C1-005.T13). Sea

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(BNW+1)} > 0, \quad \text{así que} \quad 2BN\delta W < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Sea P con $\|P\| < \delta$. Una subcaja $S = \prod_i [s_i, s_i']$ de P es **buena** si está contenida en una subcaja de P_0, y **mala** si no.
3. *Las malas cruzan una pared.* Si para cada i ningún punto de $(P_0)_i$ está en (s_i, s_i'), sea u el mayor punto de $(P_0)_i$ con $u \le s_i$ (existe: a_i lo es, C1-005.T13) y u' el siguiente; como $u' > s_i$ y $u' \notin (s_i, s_i')$, $u' \ge s_i'$. Así $[s_i, s_i'] \subset [u, u']$ en cada coordenada, y S es buena. Por lo tanto, si S es mala, hay i y $t \in (P_0)_i$ con $s_i < t < s_i'$; ese t no es a_i ni b_i.
4. *Las buenas.* Cada buena S está en exactamente una subcaja T de P_0 (C4-001.T2: dos subcajas de P_0 no comparten interior), y $M_S - m_S \le M_T - m_T$ (C4-001.T1). Para T fija, las buenas $S \subset T$ tienen interiores disjuntos, y por C4-002.T1 (a) $\sum_{S \subset T} v(S) \le v(T)$. Agrupando (C2-027.T0):

$$\sum_{S \text{ buena}} (M_S - m_S)\, v(S) \le \sum_{T \in P_0} (M_T - m_T)\, v(T) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

5. *Las malas de una pared.* Fijos i y t como en el paso 3, hay un único subintervalo $[s, s']$ de P_i con $s < t < s'$ (los subintervalos de P_i tienen interiores disjuntos), y $s' - s < \delta$. Las subcajas malas cuyo lado i contiene a t en su interior están en la rebanada

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [s, s'] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

(el factor $[s, s']$ en el lugar i), una caja de volumen $< \delta W$; por C4-002.T1 (a) su volumen total es $< \delta W$.
6. *Todas las malas.* Toda subcaja mala está en alguna de las N rebanadas (paso 3), y $M_S - m_S \le 2B$. Así (C2-027.T0 b, c):

$$\sum_{S \text{ mala}} (M_S - m_S)\, v(S) \le 2B \sum_{(i,t)} \sum_{S \text{ en la rebanada}} v(S) \le 2BN\delta W < \frac{\varepsilon}{2}.$$

7. Sumando los pasos 4 y 6, $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. (Si $N = 0$, no hay malas y basta el paso 4.)
8. *Rejillas.* $\|G_j\| = \max_i(b_i - a_i)/j < \delta$ para j grande (C1-007.C1). Como $L(f, G_j) \le \int_R f \le U(f, G_j)$ (C4-001.T4), $|L(f, G_j) - \int_R f| < \varepsilon$ y $|U(f, G_j) - \int_R f| < \varepsilon$ para esos j. ■

Definición C4-002.D1 (sumas de Riemann)

Para P partición de R y una elección $\xi_S \in S$ en cada subcaja, $S(f, P, \xi) := \sum_S f(\xi_S)\, v(S)$.

Corolario C4-002.C1

$L(f,P) \le S(f,P,\xi) \le U(f,P)$. Si f es integrable, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $|S(f,P,\xi) - \int_R f| < \varepsilon$ para toda P con $\|P\| < \delta$ y toda elección ξ.

Demostración.

1. $m_S(f) \le f(\xi_S) \le M_S(f)$ (C1-006.D1); multiplicando por $v(S) > 0$ y sumando, $L(f,P) \le S(f,P,\xi) \le U(f,P)$.
2. Si f es integrable, también $L(f,P) \le \int_R f \le U(f,P)$ (C4-001.T4). Con el δ de C4-002.T2, los dos números están en un intervalo de longitud $< \varepsilon$, y $|S(f,P,\xi) - \int_R f| < \varepsilon$. ■

Corolario C4-002.C2 (la integral de una caja)

Si $Q \subset R$ son cajas, χ_Q es integrable en R y $\int_R \chi_Q = v(Q)$.

Demostración. Sean $Q = \prod_i [c_i, d_i] \subset R = \prod_i [a_i, b_i]$ y $\eta > 0$.

1. Sea $Q_\eta := \prod_i [\max(a_i, c_i - \eta), \min(b_i, d_i + \eta)] \subset R$, y P la partición de R con $P_i :=$ los puntos a_i, c_i, d_i, b_i y los números $c_i - \eta, d_i + \eta$ que estén en (a_i, b_i).
2. Si una subcaja S de P está en Q, $m_S(\chi_Q) = M_S(\chi_Q) = 1$. Si $S \not\subset Q$, algún lado $[s_i, s_i']$ no está en $[c_i, d_i]$; como $c_i, d_i \in P_i$, ese lado está en $[a_i, c_i]$ o en $[d_i, b_i]$, y un punto de S con coordenada $s_i < c_i$ o $s_i' > d_i$ está fuera de Q: $m_S(\chi_Q) = 0$.
3. Por el paso 2 y el lema de C4-002.T1, $L(\chi_Q, P) = \sum_{S \subset Q} v(S) = v(Q)$.
4. Si S corta a Q, en cada coordenada su lado corta a $[c_i, d_i]$ y es consecutivo en P_i, así que está en $[\max(a_i, c_i - \eta), \min(b_i, d_i + \eta)]$: $S \subset Q_\eta$. Las que no cortan a Q tienen $M_S = 0$. Por C4-002.T1 (a),
$$U(\chi_Q, P) = \sum_{S \cap Q \neq \emptyset} v(S) \le v(Q_\eta) \le \prod_i (d_i - c_i + 2\eta).$$
5. Así $v(Q) \le L(\chi_Q) \le U(\chi_Q) \le \prod_i (d_i - c_i + 2\eta)$ para todo $\eta > 0$ (C4-001.T4). Con $\eta = 1/m$, el lado derecho tiende a $\prod_i (d_i - c_i) = v(Q)$ cuando $m \to \infty$ (C1-007.C1, C1-013.T2), y por C1-013.T3, $U(\chi_Q) \le v(Q)$. Por lo tanto $L(\chi_Q) = U(\chi_Q) = v(Q)$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Darboux pide integrable

Si f no es integrable, ninguna sucesión de rejillas sirve: para la función de C4-001.E1, $L(f,P)=0$ y $U(f,P)=1$ para *toda* P, por fina que sea. El teorema no da integrabilidad: la usa.

⚠ Interiores disjuntos en C4-002.T1 (a)

Sin la hipótesis de interiores disjuntos la desigualdad falla: $[0,1]$ y $[0,1]$ están en $[0,1]$ y suman 2. Los bordes compartidos sí se permiten: $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ suman exactamente 1.

Ejercicios

1. Para $f(x,y)=x^2+y$ en $[0,1]^2$, calcula las sumas de Riemann con los centros de las subcajas de G_j y compáralas con $5/6$.
2. Demuestra que si $Q_1,\dots,Q_k$ cubren una caja Q y tienen interiores disjuntos, entonces $\sum v(Q_i)=v(Q)$ siempre que todas estén contenidas en Q.
3. Usa C4-002.T2 para probar que, si f es integrable en $[0,1]^2$, $\frac{1}{j^2}\sum_{a,b=1}^{j} f(a/j,b/j)\to\int f$.
4. Demuestra que en el paso 6 de C4-002.T2 no hace falta que las rebanadas sean disjuntas.

Respuestas

1. Con centros, $S_j=\frac{1}{j^2}\sum_{a,b}\left((\frac{a-1/2}{j})^2+\frac{b-1/2}{j}\right)=\frac{4j^2-1}{12j^2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{1}{12j^2}$.
2. Por C4-002.T1 (a) y (b), $v(Q)\le\sum v(Q_i)\le v(Q)$.
3. Son sumas de Riemann de G_j con ξ_S la esquina superior derecha; por C4-002.C1 y $\|G_j\|=1/j\to 0$.
4. Se cuenta cada mala al menos una vez, y la suma sobre una unión es a lo más la suma de las sumas (términos ≥ 0).

C4-003 · Medida cero y contenido cero

Motivación

> **Tapar manchas con calcomanías**
> Sobre una mesa hay manchas de tinta. Queremos taparlas con calcomanías rectangulares cuya área total sea tan chica como queramos: una centésima, una millonésima. Si las manchas son un número finito de puntos, o una línea delgada, se puede. Si una mancha tiene «grosor», no.
> Hay dos versiones: con un número finito de calcomanías (contenido cero) o con una sucesión infinita de ellas, cada vez más chicas (medida cero). Con la segunda se pueden tapar los puntos racionales de un segmento: son infinitos, pero se pueden poner en fila.
> Dónde falla la analogía: una calcomanía real tiene un área mínima y las manchas reales tienen grosor; aquí las cajas pueden ser tan chicas como se quiera y los puntos no tienen tamaño.

Los racionales de $[0, 1]$ en fila: $0/1, 1/1, 0/2, 1/2, 2/2, 0/3, \ldots$ A cada p/q le toca un intervalo de longitud $\varepsilon/(2^{q+1}(q+1))$; los $q+1$ intervalos con denominador q suman $\varepsilon/2^{q+1}$, y todos juntos menos de $\varepsilon/2$. Con $\varepsilon = 0.01$, hasta $q = 10$ se usan 65 intervalos de longitud total $0.0049951\ldots < 0.005$.

Definiciones

Definición C4-003.D1 (contenido cero, medida cero)

$A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **contenido cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay cajas $Q_1, \ldots, Q_k$ que cubren A con $\sum_i v(Q_i) < \varepsilon$. A tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay una sucesión de cajas (Q_k) que cubre A con $\sum_{k=1}^{N} v(Q_k) < \varepsilon$ para todo N.

Las cajas son cerradas y no degeneradas (C4-001.D1). En la medida cero no se habla de la suma de una serie: solo de sus sumas parciales. Una **caja de relleno** explícita, que usaremos varias veces, es

$$Z_\eta := [0, \eta] \times [0, 1]^{n-1}, \qquad v(Z_\eta) = \eta \quad (\eta > 0).$$

Resultados

Teorema C4-003.T1 (variantes de las cubiertas)

En las dos definiciones se puede pedir además: (a) que las cajas sean cubos; (b) que los interiores de las cajas cubran A.

Idea de la demostración

(b) Se agranda cada caja desde su centro por un factor fijo $\lambda > 1$ con $\lambda^n \le 2$: el volumen a lo más se duplica y la caja original queda en el interior de la nueva. (a) Cada caja se parte en cubos de lado $\ell/(2n)$, con ℓ su lado más corto; los cubos sobresalen poco. Las dos reglas son explícitas: no se elige nada.

Demostración. Sea $\lambda := 1 + \frac{1}{2n}$.

1. $\lambda^n \le 2$. Con $h := \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{1+h} = 1 - \frac{h}{1+h}$ y $-\frac{h}{1+h} \ge -1$; por Bernoulli (C1-005.T5),
$$\Big(\frac{1}{1+h}\Big)^n \ge 1 - \frac{nh}{1+h} \ge 1 - nh = \frac{1}{2},$$
así que $\lambda^n = (1+h)^n \le 2$ (C1-003.T7).
2. *(b), una caja.* Para $Q = \prod_i [c_i - r_i, c_i + r_i]$ sea $Q' := \prod_i [c_i - \lambda r_i, c_i + \lambda r_i]$. Como $\lambda r_i > r_i$, $Q \subset \prod_i (c_i - \lambda r_i, c_i + \lambda r_i) = \operatorname{int} Q'$ (C4-001.T2, lema del interior), y $v(Q') = \lambda^n v(Q) \le 2v(Q)$.
3. *(b), las cubiertas.* Dado ε, se toma la cubierta de C4-003.D1 para $\varepsilon/2$ y se reemplaza cada Q_k por Q_k'. Los interiores cubren A, y cada suma (finita o parcial) se multiplica a lo más por 2: es $< \varepsilon$.
4. *(a), una caja.* Sea $Q = \prod_i [c_i, c_i + \ell_i]$, $\ell := \min_i \ell_i$ (C1-005.T13) y $s := \ell/(2n)$. Para cada i sea p_i el menor natural con $p_i s \ge \ell_i$ (C1-007.T2, C1-005.T3); entonces $(p_i - 1)s < \ell_i$. Los cubos
$$\prod_i [c_i + (m_i - 1)s,\ c_i + m_i s], \qquad 1 \le m_i \le p_i,$$
son las subcajas de una rejilla de la caja $\prod_i [c_i, c_i + p_i s] \supset Q$; cubren Q (C4-001.T2), son $\prod_i p_i \ge 1$ en número, y su volumen total es (C4-001.T2)
$$\prod_i p_i s < \prod_i (\ell_i + s) \le \prod_i \lambda \ell_i = \lambda^n v(Q) \le 2v(Q),$$

porque $s \le \ell_i/(2n)$ para todo i (C1-003.T4) y por el paso 1.

5. *(a), contenido cero.* La cubierta finita de C4-003.D1 para $\varepsilon/2$, con cada caja reemplazada por su lista de cubos (paso 4), es una lista finita de cubos que cubre A con volumen total $< \varepsilon$.
6. *(a), medida cero.* Sea (Q_k) la sucesión para $\varepsilon/2$ y $\mathcal{L}_k$ la lista de cubos de Q_k (paso 4), en el orden lexicográfico de $(m_1, \dots, m_n)$, de longitud $r_k \ge 1$. (Si alguna lista fuera vacía se le pondría la caja de relleno $Z_{\varepsilon/2^{k+2}}$, explícita y no degenerada, y las sumas crecerían menos de $\varepsilon/4$; aquí no hace falta, porque $r_k = \prod_i p_i \ge 1$.) Sea $R_k := r_1 + \cdots + r_k$ ($R_0 := 0$). Para $m \in \mathbb{N}$, sea k el menor índice con $R_k \ge m$ (existe porque $R_k \ge k$; C1-005.T3), y C_m el elemento número $m - R_{k-1}$ de $\mathcal{L}_k$. Esta regla define la sucesión (C_m) sin elecciones (C1-005.T11).
7. (C_m) cubre A: cada $x \in A$ está en algún Q_k, y entonces en un cubo de $\mathcal{L}_k$. Para N dado, con K el menor índice con $R_K \ge N$, los $C_1, \dots, C_N$ están en $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_K$, así que

$$\sum_{m=1}^{N} v(C_m) \le \sum_{k=1}^{K} \sum_{C \in \mathcal{L}_k} v(C) \le 2 \sum_{k=1}^{K} v(Q_k) < \varepsilon.$$

8. *(a) y (b) juntas.* Agrandar un cubo desde su centro por λ da un cubo: aplicar el paso 2 a la cubierta del paso 5 o 6 (para $\varepsilon/2$) da cubos cuyos interiores cubren A. ■

⚠ El producto de la línea 4

La desigualdad $\prod_i(\ell_i + s) \le \lambda^n \prod_i \ell_i$ se lee factor por factor: $\ell_i + s \le \ell_i(1 + \frac{1}{2n}) = \lambda\ell_i$, y se multiplican n desigualdades entre positivos (C1-003.T9).

Teorema C4-003.T2 (propiedades)

(a) Todo subconjunto de un conjunto de contenido (medida) cero lo tiene. (b) La unión de un número finito de conjuntos de contenido (medida) cero lo tiene. (c) Contenido cero ⇒ medida cero, y el conjunto es acotado; los conjuntos finitos tienen contenido cero. (d) Si A tiene contenido cero, $\bar{A}$ también. (e) Si $Z \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido cero e $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado, $Z \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tiene contenido cero. (f) Las traslaciones y las permutaciones de coordenadas conservan el contenido cero y la medida cero.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

1. *(a).* Una cubierta de A cubre a todo $B \subset A$.
2. *(b), contenido cero.* Si $A_1, \dots, A_p$ tienen contenido cero, cada uno tiene una cubierta finita con suma

$< \varepsilon/p$ (un número finito de usos de la definición); juntas cubren $A_1 \cup \cdots \cup A_p$ con suma $< \varepsilon$.

3. *(b), medida cero.* Sean $(Q_k^l)_k$ cubiertas de A_l con sumas parciales $< \varepsilon/p$ $(l = 1, \dots, p)$. Se intercalan: $C_{(k-1)p+l} := Q_k^l$ (cada $m \in \mathbb{N}$ se escribe de modo único como $(k-1)p + l$ con $1 \le l \le p$, C1-007.T2). Para N dado, con K tal que $N \le Kp$, $\sum_{m \le N} v(C_m) \le \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{K} v(Q_k^l) < p \cdot \varepsilon/p = \varepsilon$.
4. *(c), medida cero.* Sea $Q_1, \dots, Q_k$ una cubierta con suma $< \varepsilon/2$, y para $m > k$ sea $Q_m := Z_{\varepsilon/2^{m+1}}$ (caja de relleno). Para todo N, $\sum_{m \le N} v(Q_m) < \varepsilon/2 + \sum_{m>k} \varepsilon/2^{m+1} < \varepsilon$ (C1-005.T8). Así (Q_m) prueba la medida cero.
5. *(c), acotado.* Con $\varepsilon = 1$, A está en la unión de un número finito de cajas, cada una acotada; el máximo de sus radios (C1-005.T13) da una bola que las contiene.
6. *(c), finitos.* Un punto p está en $p + Z_\eta$, de volumen η. Si A tiene k puntos, con $\eta := \varepsilon/(k+1)$ la suma es $< \varepsilon$. (El vacío lo cubre cualquier caja de volumen $< \varepsilon$.)
7. *(d).* Sea $Q_1, \dots, Q_k$ una cubierta de A con suma $< \varepsilon$. Cada Q_i es cerrada (compacta, C3-010.T2) y $F := Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ es cerrado (C3-008.T2). Si $x \notin F$, hay una bola $B(x, r)$ contenida en $\mathbb{R}^n \setminus F$, que no corta a A; así x no es de A ni de ∂A (C3-008.D1), es decir, $x \notin \bar{A}$. Por lo tanto $\bar{A} \subset F$, y la misma cubierta sirve.
8. *(e).* Sean $c \le d$ con $I \subset [c, d]$ y $c < d$ (si I es un punto o es vacío, se toma $d := c + 1$). Si $Q_1, \dots, Q_k$ cubren Z con suma $< \varepsilon/(d-c)$, las cajas $Q_i \times [c, d]$ cubren $Z \times I$ y suman $(d-c)\sum v(Q_i) < \varepsilon$.
9. *(f).* Si $Q = \prod_i [c_i, d_i]$, $Q + p = \prod_i [c_i + p_i, d_i + p_i]$ y $P_\sigma(Q) = \prod_k [c_{\sigma(k)}, d_{\sigma(k)}]$ son cajas con el mismo volumen (el producto de los mismos factores en otro orden, K2, K6). Las imágenes de una cubierta cubren la imagen del conjunto, con las mismas sumas. ■

Teorema C4-003.T3 (compacto de medida cero)

Todo compacto de medida cero tiene contenido cero; más aún, para todo $\varepsilon > 0$ hay cajas $Q_1, \dots, Q_k$ con $\sum v(Q_i) < \varepsilon$ cuyos interiores lo cubren.

Demostración. Sean K compacto de medida cero y $\varepsilon > 0$.

1. Por C4-003.T1 (b) hay una sucesión de cajas (Q_k) con $\sum_{k \le N} v(Q_k) < \varepsilon$ para todo N y cuyos interiores cubren K.
2. Los interiores son abiertos (C3-008.T3): $\{\operatorname{int} Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto (C3-010.D1, C3-010.T4), hay una subcubierta finita $\operatorname{int} Q_{k_1}, \dots, \operatorname{int} Q_{k_p}$ con índices distintos.
3. Con $N := \max_l k_l$ (C1-005.T13), $\sum_{l=1}^{p} v(Q_{k_l}) \le \sum_{k=1}^{N} v(Q_k) < \varepsilon$ (C2-027.T0 c). Las cajas $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_p}$ cumplen todo. ■

Teorema C4-003.T4 (gráficas de funciones continuas)

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $\varphi : K \to \mathbb{R}$ es continua, la gráfica $\{(x, \varphi(x)) : x \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tiene contenido cero. En particular tienen contenido cero: los subconjuntos acotados de un hiperplano $\{x_i = c\}$; la frontera de una caja; los segmentos del plano; las circunferencias de $\mathbb{R}^2$ y las esferas de $\mathbb{R}^3$ (dos gráficas sobre un disco).

Idea de la demostración

Sobre cada cuadrito de una rejilla fina, φ varía menos de η (Heine), así que la gráfica sobre ese cuadrito cabe en una caja de altura η. Las alturas son todas η y las bases suman $v(R)$.

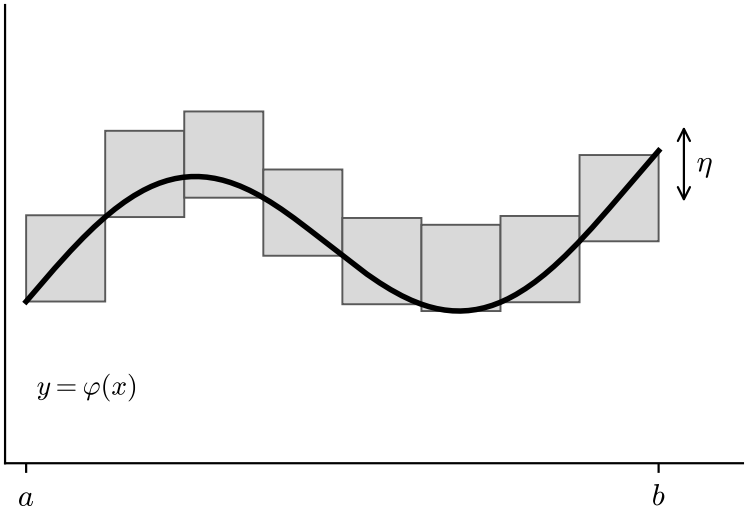


Figura 3: La gráfica de una función continua cubierta por cajas: sobre cada subintervalo de la rejilla, una caja de altura fija η desde el ínfimo.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Si $K = \emptyset$ no hay nada que probar.

1. K es acotado (C3-010.T4), así que está en una caja R (C3-001.T5). Sea $\eta := \varepsilon/(2v(R))$.
2. φ es uniformemente continua en K (C3-014.T2): hay $\delta > 0$ con $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \eta$ si $x, y \in K$ y $|x - y| < \delta$. $\varphi(K)$ es acotado (C3-014.T1, C3-010.T4).
3. Sea j con $\|G_j\| < \delta/n$ (C1-007.C1). Si x, y están en una subcaja S de G_j, $|x - y| \leq n\|G_j\| < \delta$ (C3-001.T5).

4. Para cada subcaja S con $S \cap K \neq \emptyset$ sea $\mu_S := \inf_{S\cap K} \varphi$ (existe, C1-006.T3). Para $x \in S \cap K$ y todo $y \in S \cap K$, $\varphi(x) < \varphi(y) + \eta$; tomando ínfimo en y, $\varphi(x) \leq \mu_S + \eta$. Así la gráfica sobre $S \cap K$ está en la caja (no degenerada) $S \times [\mu_S, \mu_S + \eta]$, de volumen $\eta\, v(S)$.
5. Toda $x \in K$ está en alguna subcaja (C4-001.T2). Así las cajas del paso 4 cubren la gráfica, y su volumen total es a lo más $\eta \sum_S v(S) = \eta\, v(R) = \varepsilon/2 < \varepsilon$. No se eligió ningún punto: μ_S es un ínfimo.
6. *Hiperplanos.* Sea $A \subset \{x_i = c\}$ acotado. Si $n = 1$, $A \subset \{c\}$ es finito (C4-003.T2 c). Si $n \geq 2$, la permutación que lleva la coordenada i al final manda A dentro de la gráfica de la función constante c sobre una caja de $\mathbb{R}^{n-1}$; por los pasos 1-5 y C4-003.T2 (a, f), A tiene contenido cero.
7. *Frontera de una caja.* Por el lema del interior (C4-001.T2), $\partial R = R \setminus \prod_i (a_i, b_i)$ está en la unión de las $2n$ caras $R \cap \{x_i = a_i\}$, $R \cap \{x_i = b_i\}$, acotadas y en hiperplanos; C4-003.T2 (b).
8. *Segmentos.* Si $p_1 \neq q_1$, el segmento $[p, q]$ es la gráfica de una función afín (continua) sobre el intervalo de extremos p_1, q_1; si $p_1 = q_1$, está en $\{x_1 = p_1\}$ y es acotado.
9. *Circunferencias.* $\{|x - p| = r\}$ es la unión de las gráficas de $p_2 \pm \sqrt{r^2 - (x_1 - p_1)^2}$ sobre $[p_1 - r, p_1 + r]$, continuas por C2-014.T1 y C3-012.T2: si $|x - p| = r$, $(x_2 - p_2)^2 = r^2 - (x_1 - p_1)^2$ y $x_2 - p_2 = \pm\sqrt{\cdot}$ (C2-014.T1). Unión finita: C4-003.T2 (b).
10. *Esferas.* Igual, con $p_3 \pm \sqrt{r^2 - (x_1 - p_1)^2 - (x_2 - p_2)^2}$ sobre el disco cerrado $\{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \leq r^2\}$, que es compacto (cerrado por C3-008.T1, acotado; C3-010.T4). ■

Ejemplos que cumplen y que no

Ejemplo C4-003.E1 ($\mathbb{Q} \cap [0,1]$)
Tiene medida cero (la lista p/q, $0 \leq p \leq q$, ordenada por q, y el intervalo de longitud $\varepsilon/(2^{q+1}(q+1))$ alrededor de cada uno) y no tiene contenido cero (su cerradura es $[0,1]$, y por C4-002.T1 (b) ninguna cubierta finita de $[0,1]$ mide menos de 1). Una caja no tiene medida cero (C4-003.T3 y C4-002.T1).

1. *La lista.* Los pares (q, p) con $q \in \mathbb{N}$ y $0 \leq p \leq q$, ordenados por q y luego por p, forman una sucesión explícita: el bloque de q tiene $q + 1$ elementos y empieza después de los $T_{q-1} := \sum_{r<q}(r + 1)$ anteriores (C1-005.T11). Todo racional de $[0,1]$ es algún p/q con $0 \leq p \leq q$. Las repeticiones ($1/2 = 2/4$) no estorban.
2. *Las cajas.* Al término (q, p) le toca $I_{q,p} := [\frac{p}{q} - \ell_q/2, \frac{p}{q} + \ell_q/2]$ con $\ell_q := \varepsilon/(2^{q+1}(q+1))$.
3. *Sumas parciales.* Los primeros N términos están en los bloques $q \leq Q$ para algún Q, así

que

$$\sum_{m\le N} v \le \sum_{q=1}^{Q}(q+1)\ell_q = \sum_{q=1}^{Q}\frac{\varepsilon}{2^{q+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1-2^{-Q}\right) < \varepsilon$$

(C1-005.T8, C2-024.T3).

4. *No tiene contenido cero.* Si $x \in [0,1]$ y $r > 0$, la bola $(x-r, x+r)$ contiene un racional de $[0,1]$ (C1-007.T3; si $x = 1$, se usa $(1-r, 1)$, y 0, 1 ya están en el conjunto), así que x está en la cerradura; y $[0,1]$ es cerrado (C3-008.T1), luego la cerradura es $[0,1]$. Si $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tuviera contenido cero, $[0,1]$ también (C4-003.T2 d), y una cubierta finita de $[0,1]$ mediría menos de $1 = v([0,1])$, contra C4-002.T1 (b).
5. *Una caja no tiene medida cero.* Una caja R es compacta (C3-010.T2). Si tuviera medida cero, tendría contenido cero (C4-003.T3), y habría cajas que la cubren con suma $< v(R)$, contra C4-002.T1 (b).

⚠ Por qué no se enuncia la unión numerable

«Una unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero» es cierto, pero su prueba pide escoger una sucesión de cajas para *cada* k a la vez, y eso es más de lo que da la elección numerable de este curso (TEMARIO, decisión 11). Donde se necesita (C4-004.T2), las cubiertas se construyen con reglas explícitas.

Ejercicios

1. Demuestra que el eje x entero, $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$ pero no contenido cero.
2. Demuestra que $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ tiene contenido cero.
3. ¿Tiene contenido cero el conjunto de puntos de $[0,1]^2$ con las dos coordenadas racionales?
4. Demuestra que si A tiene contenido cero, entonces $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Respuestas

1. Con $h_k := \frac{\varepsilon}{2^{k+3}k}$, la tira $[-k,k] \times [-h_k, h_k]$ tiene volumen $\varepsilon/2^{k+1}$; las tiras $k = 1, 2, \ldots$ cubren el eje. No es acotado, así que no tiene contenido cero (C4-003.T2 c).
2. Es compacto (cerrado y acotado) y numerable en fila: medida cero con intervalos $\varepsilon/2^{k+1}$, luego contenido cero por C4-003.T3. Directo: los $1/n$ con $n > 2/\varepsilon$ caben en $[0, \varepsilon/2]$.

3. No: su cerradura es $[0,1]^2$, que no tiene contenido cero (C4-003.T2 d y C4-002.T1 b).
4. Si $B(x,r) \subset A$, A contendría un cubo Q, y una cubierta finita de Q con suma $< v(Q)$ contradice C4-002.T1 (b).

C4-004 · Oscilación y criterio de Lebesgue

Motivación

> **Un mapa de lluvia con fallas**
> El pluviómetro del terreno falla en algunos puntos: ahí la lectura salta. Si las fallas son pocas, el agua total se puede calcular de todos modos; si están en todas partes, no. ¿Cuántas fallas se permiten?
> El criterio de Lebesgue da la respuesta exacta: una función acotada en una caja es integrable si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero. No importa cuántos son, sino qué tan «flacos» son.
> Dónde falla la analogía: un pluviómetro real tiene un número finito de lecturas; aquí la función está definida en todos los puntos y las fallas pueden ser infinitas.

La función de Riemann (Thomae) es discontinua en cada racional de $[0,1]$, una infinidad de puntos, y es integrable con integral 0 (C2-005.T5). La de Dirichlet es discontinua en todo $[0,1]$ y no es integrable. El criterio separa los dos casos: $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tiene medida cero; $[0,1]$ no.

Parte 1 · Oscilación y la dirección ⇐

Definición C4-004.D1 (oscilación)

Para $f : A \to \mathbb{R}$ acotada ($A \subset \mathbb{R}^n$) y $x \in A$: $o(f,x) := \inf_{r>0} \left[\sup_{B(x,r)\cap A} f - \inf_{B(x,r)\cap A} f \right]$.
$\mathrm{Disc}(f) := \{x \in A : f \text{ no es continua en } x\}$.

Escribimos $\omega_x(r) := \sup_{B(x,r)\cap A} f - \inf_{B(x,r)\cap A} f \geq 0$ (el conjunto contiene a x, C4-001.T1). Si $r' < r$, $\omega_x(r') \leq \omega_x(r)$ (C4-001.T1, C2-001.T2 a). El ínfimo existe porque los $\omega_x(r)$ son ≥ 0 (C1-006.T3).

Teorema C4-004.T1 (propiedades de la oscilación)

f es continua en $x \Leftrightarrow o(f,x) = 0$. Para $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon := \{x \in A : o(f,x) \geq \varepsilon\}$ es cerrado en A (cerrado si A lo es) y $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_{1/k}$. Si A es una caja, S es una subcaja de una partición y $x \in \operatorname{int} S$, $o(f,x) \leq M_S(f) - m_S(f)$.

Demostración.

1. *(⇒).* Si f es continua en x y $\varepsilon > 0$, hay δ con $|f(y)-f(x)| < \varepsilon/2$ para $y \in B(x,\delta)\cap A$ (C3-012.D2). Entonces $f(x) - \varepsilon/2$ es cota inferior y $f(x) + \varepsilon/2$ cota superior de f en esa bola, y $\omega_x(\delta) \leq \varepsilon$. Así $o(f,x) \leq \varepsilon$ para todo ε, y $o(f,x) = 0$.
2. *(⇐).* Si $o(f,x) = 0$ y $\varepsilon > 0$, hay r con $\omega_x(r) < \varepsilon$ (C1-006.T2). Para $y \in B(x,r) \cap A$, $f(y)$ y $f(x)$ están entre el ínfimo y el supremo de la bola, así que $|f(y) - f(x)| \leq \omega_x(r) < \varepsilon$: f es continua en x.
3. *D_ε es cerrado en A.* Sea $x \in A \setminus D_\varepsilon$: hay r con $\omega_x(r) < \varepsilon$. Si $y \in B(x,r)\cap A$, con $s := r - |y-x| > 0$, $B(y,s) \subset B(x,r)$ (C3-001.T4), así que $\omega_y(s) \leq \omega_x(r) < \varepsilon$ y $o(f,y) < \varepsilon$. Así $B(x,r) \cap A \subset A \setminus D_\varepsilon$, y por C3-008.T4, $A \setminus D_\varepsilon$ es abierto en A: D_ε es cerrado en A (C3-008.D2).
4. Si A es cerrado: $A \setminus D_\varepsilon = U \cap A$ con U abierto, y $D_\varepsilon = A \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)$ es intersección de cerrados (C3-008.T2).
5. $\mathrm{Disc}(f)$. Por los pasos 1-2, $x \in \mathrm{Disc}(f) \Leftrightarrow o(f,x) > 0 \Leftrightarrow o(f,x) \geq 1/k$ para algún k (C1-007.C1).
6. *En una subcaja.* Si $x \in \operatorname{int} S$, hay r con $B(x,r) \subset S \subset A$ (C3-008.D1), y $\omega_x(r) \leq M_S(f) - m_S(f)$ (C4-001.T1). Así $o(f,x) \leq M_S(f) - m_S(f)$. ■

Teorema C4-004.T2 (criterio de Lebesgue)

Sean R una caja y $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable en $R \Leftrightarrow \mathrm{Disc}(f)$ tiene medida cero.

Idea de la demostración (⇐)

Los puntos de oscilación grande, D_ε, forman un compacto de medida cero: caben en pocas cajas chicas. El resto se cubre con cubos donde f oscila poco. Una partición hecha con todos esos extremos tiene subcajas de dos tipos, y cada tipo aporta poco a $U - L$.

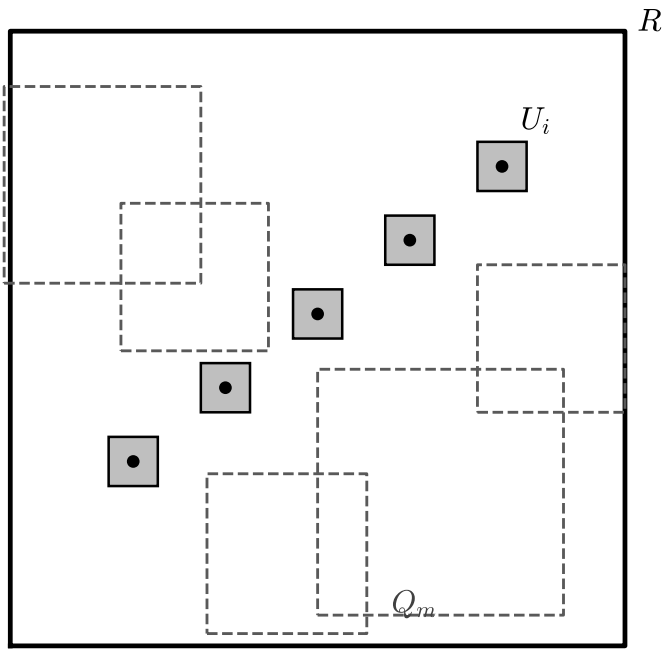


Figura 4: Prueba de ⇐: las cajas chicas U_i (gris) tapan los puntos donde f oscila mucho; el resto lo cubren cubos donde oscila menos de ε. La partición usa todos los extremos.

Demostración de ⇐. Supongamos que $\mathrm{Disc}(f)$ tiene medida cero. Sean $B > 0$ con $|f| \le B$ y $\varepsilon > 0$.

1. $D_\varepsilon \subset \mathrm{Disc}(f)$ (C4-004.T1) tiene medida cero (C4-003.T2 a), y es cerrado (C4-004.T1, R es cerrada) y acotado: es compacto (C3-010.T4). Por C4-003.T3 hay cajas $U_1, \dots, U_k$ con $\sum_i v(U_i) < \varepsilon$ cuyos interiores cubren D_ε.
2. Sea $\mathcal{C}$ la familia de **todos** los cubos cerrados Q con $\sup_{Q\cap R} f - \inf_{Q\cap R} f < \varepsilon$ y $Q \cap R \neq \emptyset$. Si $x \in R \setminus D_\varepsilon$, hay r con $\omega_x(r) < \varepsilon$; el cubo $Q(x, r/(2n))$ está en $B(x,r)$ (si $\|y-x\|_\infty \le r/(2n)$, $|y-x| \le n\|y-x\|_\infty < r$, C3-007.T1), así que está en $\mathcal{C}$, y $x \in \operatorname{int} Q(x, r/(2n))$. No se elige un cubo por punto: se usa la familia entera.
3. Los abiertos $\operatorname{int} U_i$ y $\operatorname{int} Q$ ($Q \in \mathcal{C}$) cubren R (C3-008.T3). Como R es compacta (C3-010.T2), hay una subfamilia finita que la cubre; le agregamos todas las U_i y la escribimos $U_1, \dots, U_k, Q_1, \dots, Q_p$.
4. Sea P la partición de R con $P_i := \{a_i, b_i\}$ y todos los extremos de las U_l y de las Q_m en la coordenada i que estén en (a_i, b_i).
5. *Cada subcaja está en una pieza.* Sea $S = \prod_i [s_i, s_i']$ una subcaja de P y c su centro; $c \in R$ está en una pieza $W = \prod_i [\alpha_i, \beta_i]$ (una U_l o un Q_m). En la coordenada i: si $\alpha_i \le a_i$, entonces $\alpha_i \le s_i$; si $\alpha_i > a_i$, como $\alpha_i \le c_i < s_i' \le b_i$, α_i es un punto de P_i menor que s_i', y por ser s_i, s_i' consecutivos,

$\alpha_i \le s_i$. Igual $\beta_i \ge s_i'$. Así $S \subset W \cap R$.

6. *Tipo I:* las subcajas contenidas en alguna U_l. Con $M_S - m_S \le 2B$ y C4-002.T1 (a) en cada U_l,

$$\sum_{S \text{ tipo I}} (M_S - m_S)\, v(S) \le 2B \sum_{l=1}^{k} \sum_{S \subset U_l} v(S) \le 2B \sum_{l} v(U_l) < 2B\varepsilon.$$

7. *Tipo II:* las demás; por el paso 5 cada una está en algún $Q_m \cap R$, y entonces $M_S - m_S \le \sup_{Q_m \cap R} f - \inf_{Q_m \cap R} f < \varepsilon$ (C4-001.T1). Así su aporte es $\le \varepsilon \sum_S v(S) = \varepsilon\, v(R)$ (C4-001.T2).
8. $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon(2B + v(R))$. Como ε es arbitrario, f es integrable (C4-001.T4). ■

> **⚠ La oscilación se mide en el cubo cerrado**
>
> Las subcajas de la partición son cerradas; por eso la familia $\mathcal{C}$ se define con sup − ınf sobre el cubo **cerrado** $Q \cap R$. Si se midiera solo en el interior, una subcaja que toca la cara del cubo podría ver un valor que el interior no ve.

Parte 2 · La dirección ⇒ y consecuencias

> **Idea de la demostración (⇒)**
> Para cada k, la rejilla regular más gruesa G_{j_k} con $U - L$ muy chico (el menor j que sirve: no se elige). Un punto de $D_{1/k}$ está en una subcaja donde f oscila al menos $1/k$, o en una pared de la rejilla. Las dos cosas se tapan con cajas explícitas de volumen total $< \varepsilon/2^k$, y las listas se ponen en fila.

Demostración de ⇒. Supongamos f integrable y sea $\varepsilon > 0$. Escribimos $W := \max_i \prod_{l \ne i} (b_l - a_l)$.

1. Para $k \in \mathbb{N}$ sea $\eta_k := \varepsilon/(k\, 2^{k+1})$. Por Darboux (C4-002.T2) hay j con $U(f, G_j) - L(f, G_j) < \eta_k$; sea j_k el **menor** (C1-005.T3). La sucesión (j_k) queda definida sin elecciones.
2. *Paredes.* $\Pi_k := \{x \in R : x_i \in (G_{j_k})_i \text{ para algún } i\}$; incluye las caras de R. Para cada i y cada uno de los $j_k + 1$ puntos t de $(G_{j_k})_i$, la caja delgada

$$T_{k,i,t} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [t - \theta_k, t + \theta_k] \times \cdots \times [a_n, b_n], \qquad \theta_k := \frac{\varepsilon}{2^{k+2}\, n\, (j_k + 1)\, W},$$

(el factor delgado en el lugar i) contiene la pared $\{x \in R : x_i = t\}$ y tiene volumen $\le 2\theta_k W$. Las $n(j_k + 1)$ cajas delgadas suman $\le \varepsilon/2^{k+1}$.

3. *Subcajas malas.* Sea $\mathcal{M}_k$ el conjunto de subcajas S de G_{j_k} con $M_S - m_S \geq 1/k$. Entonces

$$\frac{1}{k}\sum_{S\in\mathcal{M}_k} v(S) \leq \sum_S (M_S - m_S)\, v(S) = U(f, G_{j_k}) - L(f, G_{j_k}) < \eta_k,$$

así que $\sum_{S\in\mathcal{M}_k} v(S) < k\eta_k = \varepsilon/2^{k+1}$.

4. *$D_{1/k}$ queda cubierto.* Sea $x \in D_{1/k}$ fuera de Π_k. Está en una subcaja S de G_{j_k} (C4-001.T2), y ninguna coordenada es un punto de la rejilla, así que $x \in \operatorname{int} S$ (lema del interior, C4-001.T2). Por C4-004.T1, $1/k \leq o(f, x) \leq M_S - m_S$: $S \in \mathcal{M}_k$. Así $D_{1/k} \subset \bigcup \mathcal{M}_k \cup \bigcup_{i,t} T_{k,i,t}$.
5. *La lista k.* $\mathcal{L}_k$:= las cajas de $\mathcal{M}_k$ en orden lexicográfico de sus multiíndices, seguidas de las $T_{k,i,t}$ en orden de (i, t). Tiene volumen total $< \varepsilon/2^{k+1} + \varepsilon/2^{k+1} = \varepsilon/2^k$, y no es vacía (tiene al menos las $2n$ cajas delgadas de las caras; si lo fuera, se le pondría la caja de relleno $Z_{\varepsilon/2^{k+2}}$ de C4-003).
6. *En fila.* Como en C4-003.T1 (paso 6): con R_k la suma de las longitudes de $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$, C_m := el elemento número $m - R_{k-1}$ de $\mathcal{L}_k$, con k el menor índice con $R_k \geq m$ (C1-005.T3, C1-005.T11).
7. *Sumas parciales.* Los $C_1, \ldots, C_N$ están en $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_K$ para algún K, así que

$$\sum_{m=1}^{N} v(C_m) < \sum_{k=1}^{K} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\left(1 - 2^{-K}\right) < \varepsilon$$

(C1-005.T8, C2-024.T3).

8. (C_m) cubre $\bigcup_k D_{1/k} = \operatorname{Disc}(f)$ (C4-004.T1). Por lo tanto $\operatorname{Disc}(f)$ tiene medida cero. ■

Corolario C4-004.C1 (cierra C2-005.T6)

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable en $[a, b]$ (Cálculo II) ⇔ el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero. Es el enunciado de C2-005.T6, ahora demostrado.

Demostración. Por C4-001.C1, «integrable en $[a, b]$» en el sentido de Cálculo II es lo mismo que integrable en la caja $R = [a, b]$ de este capítulo; la continuidad de C3-012.D2 con $n = 1$ es la de Cálculo I. Se aplica C4-004.T2. ■

Ejemplo C4-004.E1 (los ejemplos de Cálculo II)

Para la función de Riemann R, $\operatorname{Disc}(R) \cap [0, 1] = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tiene medida cero (C2-005.T5 la integró a mano); para la de Dirichlet, $\operatorname{Disc} = [0, 1]$, que no tiene medida cero; para g de C2-005.E2, $\operatorname{Disc} = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, de medida cero.

1. *Riemann.* Por C2-005.T4 (restringida a $[0, 1]$), los puntos de discontinuidad son los racio-

nales de $[0,1]$; por C4-003.E1 tienen medida cero, y C4-004.C1 confirma lo que C2-005.T5 probó a mano.

2. *Dirichlet.* En todo $x \in [0,1]$ y toda bola hay racionales e irracionales de $[0,1]$ (C1-007.T3, C1-008.T3): $o(D,x) = 1$ y $\text{Disc} = [0,1]$, que no tiene medida cero (C4-003.E1). Por C4-004.C1, D no es integrable (como dijo C2-005.E1).
3. *g.* C2-005.E2 dice que g es discontinua en 0 y en cada $1/n$. En otro $x \in [0,1]$, solo hay un número finito de $1/n$ en $[x/2, 1]$ (los $n \leq 2/x$), y una bola alrededor de x más chica que la distancia a ellos (C1-005.T13) y que no llega a $x/2$ no contiene ningún $1/n$: ahí $g = 0$ y es continua. Los puntos $0, 1, 1/2, 1/3, \ldots$ en fila con intervalos de longitud $\varepsilon/2^{k+1}$ prueban la medida cero (C1-005.T11, C1-005.T8).

Corolario C4-004.C2 (operaciones)

Si f, g son integrables en R y φ es continua en un intervalo cerrado y acotado que contiene a $f(R)$, entonces fg, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ y $\varphi \circ f$ son integrables en R.

⚠ Por qué cerrado y acotado

Para que $\varphi \circ f$ sea integrable tiene que ser acotada. Con $f(x) = x$ en $(0,1]$, $f(0) = 1$ (integrable en $[0,1]$, con $f([0,1]) = (0,1]$) y $\varphi(t) = 1/t$, continua en el intervalo $(0,\infty)$, que no es cerrado, la composición $\varphi \circ f$ no es acotada. Si φ es continua en todo $\mathbb{R}$, sirve $[-B, B]$ con $|f| \leq B$.

Demostración. Sean $|f|, |g| \leq B$ y φ continua en el intervalo cerrado y acotado $J \supset f(R)$.

1. Las cuatro funciones son acotadas: $|fg| \leq B^2$; $|\max(f,g)|, |\min(f,g)| \leq B$; φ es acotada en el compacto J (C3-014.C1), y por lo tanto $\varphi \circ f$ también.
2. Si f y g son continuas en x, también lo son fg (C3-012.T2), $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ y $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ (C3-012.T2: el valor absoluto es la norma de $\mathbb{R}^1$), y $\varphi \circ f$ (C1-022.T3, C3-012.T2).
3. Así el conjunto de discontinuidades de cada una está en $\text{Disc}(f) \cup \text{Disc}(g)$, que tiene medida cero por C4-004.T2 ($\Rightarrow$) y C4-003.T2 (b), y lo mismo sus subconjuntos (C4-003.T2 a).
4. Por C4-004.T2 ($\Leftarrow$), las cuatro son integrables. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Acotada

El criterio es para funciones acotadas. $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $(0, 1]$ con $f(0) = 0$ es discontinua solo en 0 (medida cero) y no es integrable en $[0, 1]$ en el sentido de este capítulo: no es acotada. (Su integral impropia existe, pero eso es C4-012.)

⚠ Medida cero no es contenido cero

Disc puede ser denso: para la función de Riemann es $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, que no tiene contenido cero. El criterio pide solo medida cero.

Ejercicios

1. Demuestra que $f(x, y) = 1$ si $x^2 + y^2 \leq 1$ y 0 si no es integrable en $[-1, 1]^2$.
2. Sea f integrable en R y $f \geq c > 0$. Demuestra que $1/f$ es integrable.
3. Calcula $o(f, 0)$ para $f(x) = \text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, en $[-1, 1]$.
4. ¿Es integrable en $[0, 1]^2$ la función que vale 1 en $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times \{1/2\}$ y 0 en el resto?

Respuestas

1. Es continua fuera de la circunferencia unitaria, que tiene contenido cero (C4-003.T4), luego medida cero.
2. $\varphi(t) = 1/t$ es continua en $[c, B]$, un intervalo cerrado que contiene a $f(R)$: C4-004.C2.
3. En toda bola alrededor de 0, $\text{sen}(1/x)$ toma los valores 1 y -1: $o(f, 0) = 2$.
4. Sí: es discontinua exactamente en el segmento $[0, 1] \times \{1/2\}$, de contenido cero.

C4-005 · Conjuntos de Jordan e integral sobre conjuntos acotados

Motivación

> **Un lago que no es rectangular**
> Hasta ahora integramos sobre cajas. Pero un lago, un terreno o una pieza de metal casi nunca son rectangulares. La idea es sencilla: se mete la región en una caja grande y se integra la función que vale f en la región y 0 fuera.
> Esa función tiene un salto en el borde de la región. Por el criterio de Lebesgue, se puede integrar si el borde es «flaco»: de medida cero. Las regiones con borde flaco se llaman conjuntos de Jordan, y su contenido es su área o su volumen.
> Dónde falla la analogía: la orilla de un lago real es fractal y difusa; aquí el borde es la frontera topológica, y para los conjuntos que usaremos (discos, bolas, regiones entre gráficas) es una unión de gráficas continuas.

Con la rejilla G_j de $[-1,1]^2$, las subcajas dentro del disco unitario suman $L(\chi, G_j)$ y las que lo cortan suman $U(\chi, G_j)$: con $j = 20$, 2.76 y 3.52; con $j = 200$, 3.1016 y 3.1812. Las dos se acercan a $\pi \approx 3.1416$.

Parte 1 · Extender por cero y conjuntos de Jordan

Teorema C4-005.T1 (extensión por cero)

Sean $R \subset R'$ cajas y $h : R' \to \mathbb{R}$ acotada con $h = 0$ fuera de R. h es integrable en $R' \Leftrightarrow h|_R$ es integrable en R, y entonces $\int_{R'} h = \int_R h$.

Demostración. Sea $|h| \leq B$.

1. *Discontinuidades.* Si $x \in \operatorname{int} R$, hay una bola $B(x,r) \subset R$ en la que h y $h|_R$ coinciden; así h es

continua en x (como función en R') si y solo si $h|_R$ lo es (C3-012.D2). Si $x \in R' \setminus R$, como R es cerrada (C3-010.T2) hay una bola alrededor de x que no corta a R, donde $h = 0$: h es continua en x. Por lo tanto

$$\mathrm{Disc}(h) \subset \mathrm{Disc}(h|_R) \cup \partial R, \qquad \mathrm{Disc}(h|_R) \subset \mathrm{Disc}(h) \cup \partial R.$$

2. ∂R tiene contenido cero (C4-003.T4), luego medida cero (C4-003.T2 c). Por C4-003.T2 (a, b), uno de los dos conjuntos de discontinuidades tiene medida cero si y solo si el otro la tiene, y por el criterio de Lebesgue (C4-004.T2) h es integrable en R' si y solo si $h|_R$ lo es en R.
3. *La igualdad.* Supongamos ambas integrables y sean $\varepsilon, \eta > 0$. Hay P partición de R con $U(h|_R, P) - L(h|_R, P) < \varepsilon$ (C4-001.T4). Sea $R_\eta := \prod_i [\max(a_i', a_i - \eta), \min(b_i', b_i + \eta)]$ y P' la partición de R' con $P_i' := P_i \cup \{a_i', b_i'\} \cup$ los puntos $a_i - \eta$, $b_i + \eta$ que estén en (a_i', b_i'). Como los puntos agregados no están en (a_i, b_i), las subcajas de P' contenidas en R son las de P (lema de C4-002.T1).
4. Una subcaja de P' que no corta a R tiene $m_S = M_S = 0$. Las que cortan a R sin estar en R están en R_η (sus lados son consecutivos en P_i' y cortan a $[a_i, b_i]$), y junto con las de R tienen interiores disjuntos dentro de R_η; por C4-002.T1 (a) y C4-001.T2, su volumen total es $\le v(R_\eta) - v(R)$. Así

$$|U(h, P') - U(h|_R, P)| \le B\,(v(R_\eta) - v(R)), \qquad |L(h, P') - L(h|_R, P)| \le B\,(v(R_\eta) - v(R)).$$

5. Como $\int_{R'} h \in [L(h, P'), U(h, P')]$ y $\int_R h \in [L(h|_R, P), U(h|_R, P)]$ (C4-001.T4),

$$\left| \int_{R'} h - \int_R h \right| \le \varepsilon + 2B\,(v(R_\eta) - v(R)).$$

Con $v(R_\eta) \le \prod_i (b_i - a_i + 2\eta) \to v(R)$ cuando $\eta = 1/m \to 0$ (C1-007.C1, C1-013.T2) y ε arbitrario, las integrales son iguales. ■

Definición C4-005.D1 (conjunto de Jordan; integral sobre un conjunto)

$C \subset \mathbb{R}^n$ acotado es **de Jordan** (medible según Jordan) si ∂C tiene medida cero (equivalentemente, contenido cero: ∂C es compacto). Para $f : C \to \mathbb{R}$ acotada sea $\tilde{f} := f$ en C y 0 fuera. f es **integrable en** C si $\tilde{f}$ es integrable en una caja $R \supset C$, y $\int_C f := \int_R \tilde{f}$ (no depende de R: se comparan dos cajas con una tercera que las contiene, C4-005.T1). El **contenido** (área si $n = 2$, volumen si $n = 3$) es $c(C) := \int_C 1$.

Las dos afirmaciones entre paréntesis se demuestran así:

1. *Medida cero ⇔ contenido cero para ∂C.* ∂C es cerrado (C3-008.T3) y está en $\bar{C}$, que es acotado

(si $C \subset B(0,\rho)$, $\bar{C} \subset \bar{B}(0,\rho)$); por Heine–Borel (C3-010.T4) es compacto, y C4-003.T3 da la equivalencia (la otra dirección es C4-003.T2 c).

2. *No depende de R.* Si $R_1, R_2 \supset C$, sea R_3 la caja con lados [mın, max] de los extremos de ambas; $\tilde{f}$ vale 0 fuera de R_1 y fuera de R_2, y por C4-005.T1 (dos veces) es integrable en R_1 si y solo si lo es en R_3, si y solo si lo es en R_2, con la misma integral.

Teorema C4-005.T2 (caracterización)

Sean C acotado y R una caja con $\bar{C} \subset \operatorname{int} R$. χ_C es integrable en $R \Leftrightarrow C$ es de Jordan.

Demostración.

1. Si $x \in \operatorname{int} C$, $\chi_C = 1$ en una bola alrededor de x; si $x \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus C)$, $\chi_C = 0$ en una bola. En los dos casos χ_C es continua en x.
2. Si $x \in \partial C$, entonces $x \in \bar{C} \subset \operatorname{int} R$, y para r chico $B(x,r) \subset R$; toda bola alrededor de x tiene puntos de C y de su complemento (C3-008.D1), donde χ_C vale 1 y 0: $o(\chi_C, x) = 1$ y χ_C no es continua en x (C4-004.T1).
3. Como $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de $\operatorname{int} C$, ∂C e $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus C)$ (C3-008.T3), $\operatorname{Disc}(\chi_C) = \partial C$, y por Lebesgue (C4-004.T2) χ_C es integrable si y solo si ∂C tiene medida cero. ■

Teorema C4-005.T3 (álgebra de conjuntos de Jordan)

Si C, D son de Jordan, también $C \cup D$, $C \cap D$ y $C \setminus D$ (sus fronteras están en $\partial C \cup \partial D$), $\bar{C}$ e $\operatorname{int} C$ (con $c(\bar{C}) = c(\operatorname{int} C) = c(C)$), y las traslaciones $C + p$ (con $c(C + p) = c(C)$). Toda caja Q es de Jordan con $c(Q) = v(Q)$. Un conjunto acotado Z tiene contenido cero ⇔ es de Jordan con $c(Z) = 0$.

Demostración.

1. *Contenido cero ⇒ Jordan con $c = 0$.* Sea Z de contenido cero. $\bar{Z}$ tiene contenido cero (C4-003.T2 d) y $\partial Z \subset \bar{Z}$ (C3-008.D1), así que Z es de Jordan (C4-003.T2 a, c). Si $Q_1, \dots, Q_k$ cubren Z con $\sum v(Q_i) < \varepsilon$, y R es una caja que contiene a Z y a las Q_i, entonces $0 \le \chi_Z \le \sum_i \chi_{Q_i}$ en R; por C4-001.T5 (a) y C4-002.C2, $U(\chi_Z) \le \sum_i U(\chi_{Q_i}) = \sum_i v(Q_i) < \varepsilon$, y $L(\chi_Z) \ge 0$. Así $c(Z) = 0$.
2. *Jordan con $c = 0$ ⇒ contenido cero.* Si $\int_R \chi_Z = 0$, para $\varepsilon > 0$ hay P con $U(\chi_Z, P) < \varepsilon$ (C4-001.T4); las subcajas con $M_S(\chi_Z) = 1$ son las que cortan a Z, lo cubren (C4-001.T2) y suman $U(\chi_Z, P) < \varepsilon$.
3. *Uniones, intersecciones, diferencias.* Sea $x \notin \partial C \cup \partial D$. Entonces x está en $\operatorname{int} C$ o en $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus$

C), y lo mismo con D (C3-008.T3); con la menor de las dos bolas, hay $B(x,r)$ contenida en C o en su complemento, y en D o en su complemento. En cada uno de los cuatro casos, $B(x,r)$ está contenida en $C \cup D$ o en su complemento (y lo mismo para $C \cap D$ y $C \setminus D$), así que x no está en la frontera de esos conjuntos. Las tres fronteras están en $\partial C \cup \partial D$, de medida cero (C4-003.T2 a, b), y los tres conjuntos son acotados.

4. *Cerradura e interior.* $\partial \bar{C} \subset \partial C$: si $x \in \operatorname{int} C$, $x \in \operatorname{int} \bar{C}$; si $B(x,r) \cap C = \emptyset$, ningún punto de $B(x,r)$ está en $\bar{C}$ (cada uno tiene una bola dentro de $B(x,r)$ que no corta a C, C3-008.T1), así que $x \notin \partial \bar{C}$. Igual $\partial(\operatorname{int} C) \subset \partial C$. Así $\bar{C}$ e $\operatorname{int} C$ son de Jordan.
5. $\bar{C} \setminus C$ y $C \setminus \operatorname{int} C$ están en ∂C (C3-008.D1, C3-008.T3), de contenido cero, y por el paso 1 tienen contenido 0. Como $\chi_{\bar{C}} = \chi_C + \chi_{\bar{C}\setminus C}$ y $\chi_C = \chi_{\operatorname{int} C} + \chi_{C \setminus \operatorname{int} C}$, la linealidad (C4-001.T5 b) da $c(\bar{C}) = c(C) = c(\operatorname{int} C)$.
6. *Traslaciones.* $x \mapsto x + p$ conserva distancias (C3-001.T4), así que $\partial(C + p) = \partial C + p$, de medida cero (C4-003.T2 f). Para una caja $R \supset C$ y una partición P de R, $P + p$ es una partición de $R + p$ con subcajas $S + p$ del mismo volumen, y χ_{C+p} toma en $S + p$ los valores que χ_C toma en S: las sumas de Darboux son iguales y $c(C + p) = c(C)$.
7. *Cajas.* ∂Q tiene contenido cero (C4-003.T4) y, con R una caja que contiene a Q, $c(Q) = \int_R \chi_Q = v(Q)$ (C4-002.C2). ■

Parte 2 · La integral sobre un conjunto de Jordan

Teorema C4-005.T4 (propiedades de $\int_C$)

Sea C de Jordan. (a) Si $f : C \to \mathbb{R}$ es acotada y continua salvo en un conjunto de medida cero, es integrable en C; en particular toda f continua y acotada en C. (b) Linealidad, monotonía y $\left|\int_C f\right| \le \int_C |f| \le (\sup_C |f|) \cdot c(C)$. (c) Si C, D son de Jordan y f es integrable en $C \cup D$, lo es en C, D y $C \cap D$, y $\int_{C\cup D} f = \int_C f + \int_D f - \int_{C\cap D} f$; si $C \cap D$ tiene contenido cero, $\int_{C\cup D} f = \int_C f + \int_D f$. (d) Si f, g son acotadas y $f = g$ salvo en un conjunto de contenido cero, f es integrable en $C \Leftrightarrow g$ lo es, con la misma integral. (e) c es monótono y aditivo en el sentido de (c).

Demostración. R denota una caja con $\bar{C} \subset \operatorname{int} R$ (y $\bar{D}$, cuando aparece D).

1. *(a).* Sea N el conjunto de medida cero fuera del cual f es continua. Si $x \in \operatorname{int} C \setminus N$, $\tilde{f} = f$ en una bola alrededor de x y $\tilde{f}$ es continua en x; si $x \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus C)$, $\tilde{f} = 0$ cerca de x. Así $\operatorname{Disc}(\tilde{f}) \subset N \cup \partial C$, de medida cero (C4-003.T2 a, b), y $\tilde{f}$ es acotada: por Lebesgue (C4-004.T2) es integrable en R.
2. *(b).* $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$, $\widetilde{cf} = c\tilde{f}$, y $f \le g$ en C implica $\tilde{f} \le \tilde{g}$; se aplica C4-001.T5 (b). Además

$|\tilde{f}| \le (\sup_C |f|)\,\chi_C$, y por la monotonía $\int_C |f| \le (\sup_C |f|)\,c(C)$.

3. *(c).* Por C4-005.T2, χ_C, χ_D, $\chi_{C\cap D}$ son integrables en R, y los productos $\tilde{f}_{C\cup D}\,\chi_C = \tilde{f}_C$, etc., son integrables (C4-004.C2: producto de integrables). Como $\chi_{C\cup D} = \chi_C + \chi_D - \chi_{C\cap D}$, multiplicando por $\tilde{f}_{C\cup D}$ y por la linealidad, $\int_{C\cup D} f = \int_C f + \int_D f - \int_{C\cap D} f$. Si $C\cap D$ tiene contenido cero, $c(C\cap D) = 0$ (C4-005.T3) y por (b) $|\int_{C\cap D} f| \le (\sup|f|)\cdot 0 = 0$.
4. *(d).* Sean $|f|, |g| \le B$ y Z de contenido cero con $f = g$ fuera de Z. $h := \tilde{f} - \tilde{g}$ cumple $-2B\chi_Z \le h \le 2B\chi_Z$; por C4-001.T5 (a) y C4-005.T3, $U(h) \le 2B\,c(Z) = 0$ y $L(h) \ge -2B\,c(Z) = 0$. Así h es integrable con $\int h = 0$, y $\tilde{g} = \tilde{f} - h$: si una es integrable, la otra también, con la misma integral (C4-001.T5 b).
5. *(e).* Si $C \subset D$ son de Jordan, $\chi_C \le \chi_D$ y $c(C) \le c(D)$ (C4-001.T5 b); (c) con $f = 1$ da la aditividad. ■

Teorema C4-005.T5 (lema de aproximación)

Sean R una caja y $h : R \to \mathbb{R}$ con $|h| \le B$. Si para todo $\varepsilon > 0$ hay un conjunto de Jordan $E \subset R$ con $c(E) < \varepsilon$ tal que $h\chi_{R\setminus E}$ es integrable, entonces h es integrable y $|\int_R h - \int_R h\chi_{R\setminus E}| \le B\cdot c(E)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y E como en la hipótesis.

1. $h = h\chi_{R\setminus E} + h\chi_E$, y $-B\chi_E \le h\chi_E \le B\chi_E$. χ_E es integrable en R con $\int_R \chi_E = c(E)$ (C4-005.D1, con C4-005.T1: $\chi_E = 0$ fuera de R).
2. Por C4-001.T5 (a), con $h\chi_{R\setminus E}$ integrable,

$$U(h) - L(h) \le U(h\chi_E) - L(h\chi_E) \le U(B\chi_E) - L(-B\chi_E) = 2B\,c(E) < 2B\varepsilon.$$

3. Como ε es arbitrario, $L(h) = U(h)$ (C4-001.T4). Entonces $h\chi_E = h - h\chi_{R\setminus E}$ es integrable y, por C4-001.T5 (b), $|\int_R h - \int_R h\chi_{R\setminus E}| = |\int_R h\chi_E| \le \int_R B\chi_E = B\,c(E)$. ■

Teorema C4-005.T6 (positividad)

Si C es de Jordan con $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, $c(C) > 0$. Si f es continua en C, $f \ge 0$ y $\int_C f = 0$, entonces $f = 0$ en $\operatorname{int} C$.

Demostración.

1. Sea $x \in \operatorname{int} C$ y $B(x,r) \subset C$. El cubo $Q := Q(x, r/(2n))$ está en $B(x,r)$ (C3-001.T5) y por C4-

005.T4 (e) y C4-005.T3, $c(C) \geq c(Q) = v(Q) = (r/n)^n > 0$ (C4-001.D1).

2. Sea f como en la hipótesis y supongamos $f(x) > 0$ con $x \in \operatorname{int} C$. Por la continuidad (C3-012.D2) hay $r > 0$ con $B(x,r) \subset C$ y $f > f(x)/2$ en $B(x,r)$; con Q como en el paso 1, $\tilde{f} \geq \tilde{f}\chi_Q \geq \frac{f(x)}{2}\chi_Q$ (porque $f \geq 0$).
3. Por la monotonía (C4-005.T4 b), $\int_C f \geq \frac{f(x)}{2} v(Q) > 0$, contra la hipótesis. Así $f = 0$ en $\operatorname{int} C$. ■

Ejemplos que cumplen y que no

Ejemplo C4-005.E1

Las bolas cerradas $\bar{B}(p,r)$ de $\mathbb{R}^n$ son de Jordan con contenido positivo (su frontera es una esfera, dos gráficas continuas); $\mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$ no es de Jordan (su frontera es $[0,1]^2$, que no tiene medida cero).

1. *Bolas.* $\partial\bar{B}(p,r)$ es la esfera $\{|x-p| = r\}$ (C3-008.E1). Para $n = 1$ son dos puntos. Para $n \geq 2$ es la unión de las gráficas de $p_n \pm \sqrt{r^2 - \sum_{i<n}(x_i - p_i)^2}$ sobre la bola cerrada de $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro $(p_1, \ldots, p_{n-1})$ y radio r, que es compacta; son continuas (C2-014.T1, C3-012.T2), y por C4-003.T4 la esfera tiene contenido cero. Como $p \in \operatorname{int} \bar{B}(p,r)$, $c > 0$ (C4-005.T6).
2. $\mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$. Todo punto de $[0,1]^2$ tiene, en cada bola, puntos con las dos coordenadas racionales en $[0,1]$ y puntos con una coordenada irracional (C1-007.T3, C1-008.T3); los de fuera de $[0,1]^2$ tienen una bola que no lo corta ($[0,1]^2$ es cerrado). La frontera es $[0,1]^2$, una caja, que no tiene medida cero (C4-003.E1).

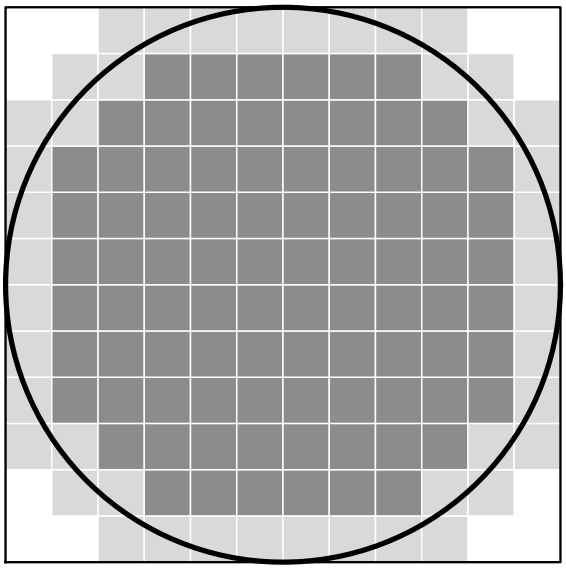


Figura 5: Rejilla G_{12} sobre el disco unitario: las subcajas dentro del disco (gris oscuro) suman $L(\chi, G_j)$; las que lo cortan (gris claro y oscuro) suman $U(\chi, G_j)$.

⚠ Acotado no basta

$\mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$ es acotado y no tiene contenido: $L(\chi, P) = 0$ y $U(\chi, P) = 1$ para toda P. Ser de Jordan es una condición sobre el borde.

Ejercicios

1. Calcula $L(\chi_D, G_j)$ y $U(\chi_D, G_j)$ para el disco unitario D y $j = 20$.
2. Demuestra que si C es de Jordan y $p \in \mathbb{R}^n$, $\int_{C+p} f = \int_C f(x+p)\,dx$ para f integrable en $C + p$.
3. Demuestra que si $C \subset \mathbb{R}^n$ es de Jordan, $C \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ también lo es.
4. Sean C de Jordan y f integrable en C. Demuestra que f es integrable en $\operatorname{int} C$ con la misma integral.

Respuestas

1. 2.76 y 3.52 (ver `tools/checks/C4-005.py`).
2. Las sumas de Darboux de $\tilde{f}$ en $R + p$ con $P + p$ son las de $\tilde{f}(\cdot + p)$ en R con P (como en el paso 6 de C4-005.T3).
3. Un punto de la frontera de $C \times [0,1]$ está en $\partial C \times [0,1]$ o en $\bar{C} \times \{0,1\}$. El primero tiene contenido

cero por C4-003.T2 (e) (∂C es compacto de medida cero, C4-003.T3); el segundo está en dos hiperplanos y es acotado (C4-003.T4).

4. $C \setminus \operatorname{int} C \subset \partial C$ tiene contenido cero; C4-005.T4 (c) o (d).

C4-006 · Teorema de Fubini

Motivación

> **Contar por renglones**
> Para contar el agua que cayó sobre el terreno no hace falta sumar parcela por parcela. Se puede medir, para cada franja x fija, cuánta agua cayó a lo largo de esa franja, y luego sumar las franjas. O al revés, primero por columnas. El teorema de Fubini dice que las tres cuentas dan lo mismo. Hay una sutileza: una franja puede ser «mala» (su lluvia no tiene integral) aunque el total exista. Fubini se enuncia con las integrales inferior y superior de cada franja, que siempre existen. Dónde falla la analogía: una franja real tiene ancho; aquí es un segmento de ancho cero, y por eso puede ser «mala» sin afectar el total.

Para $f(x,y) = x^2 + y$ en $[0,1]^2$: cada franja vale $\int_0^1 (x^2+y)\,dy = x^2 + \frac{1}{2}$, y $\int_0^1 (x^2+\frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, el número al que se acercaban las sumas de C4-001.

Parte 1 · El teorema

Teorema C4-006.T1 (Fubini)

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ cajas y $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrable. Para $x \in A$ sea $f_x : B \to \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x,y)$, y sean $\mathcal{L}(x) := L(f_x)$ y $\mathcal{U}(x) := U(f_x)$ (integrales inferior y superior en B). Entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ son integrables en A y $\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \mathcal{U}$.

> **Idea de la demostración (Spivak, 3-10)**
> Una partición de la caja producto es un par de particiones. En cada subcaja $S_A \times S_B$, el ínfimo de f es a lo más el ínfimo de cada rebanada; sumando primero en B y luego en A queda $L(f,P) \le L(\mathcal{L},P_A) \le U(\mathcal{U},P_A) \le U(f,P)$: las sumas de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{U}$ quedan atrapadas entre las de f.

Demostración. Sea $|f| \le K$.

1. $A \times B$ es una caja de $\mathbb{R}^{n+m}$ (C4-001.D1). Una partición suya es $P = (P_1, \dots, P_{n+m})$; escribimos $P_A := (P_1, \dots, P_n)$ y $P_B := (P_{n+1}, \dots, P_{n+m})$, particiones de A y B, y toda pareja (P_A, P_B) da una partición de $A \times B$ (C4-001.D2).
2. Las subcajas de P son exactamente los productos $S_A \times S_B$ con S_A subcaja de P_A y S_B de P_B, y $v(S_A \times S_B) = v(S_A)\, v(S_B)$ (C4-001.D1, D2).
3. Para $x \in A$, f_x es acotada por K, así que $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{U}(x)$ existen (C4-001.D4) y $-K\, v(B) \le \mathcal{L}(x) \le \mathcal{U}(x) \le K\, v(B)$ (C4-001.T3, C4-001.T4): $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ son acotadas.
4. Fijemos S_A, S_B y $x \in S_A$. Para $y \in S_B$, $(x, y) \in S_A \times S_B$, así que $m_{S_A \times S_B}(f) \le f_x(y)$; luego $m_{S_A \times S_B}(f) \le m_{S_B}(f_x)$ (C1-006.T3).
5. Multiplicando por $v(S_B) > 0$ y sumando sobre S_B (C2-027.T0):

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f)\, v(S_B) \le L(f_x, P_B) \le L(f_x) = \mathcal{L}(x).$$

6. El lado izquierdo no depende de $x \in S_A$: es cota inferior de $\mathcal{L}$ en S_A, así que es $\le m_{S_A}(\mathcal{L})$ (C1-006.T3). Multiplicando por $v(S_A)$ y sumando sobre S_A, con el paso 2 y la distributividad (C1-005.T12, C2-027.T0 b):

$$L(f, P) = \sum_{S_A} \sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f)\, v(S_A)\, v(S_B) \le \sum_{S_A} m_{S_A}(\mathcal{L})\, v(S_A) = L(\mathcal{L}, P_A).$$

7. Lo mismo con supremos da $U(\mathcal{U}, P_A) \le U(f, P)$. Como $\mathcal{L} \le \mathcal{U}$ (paso 3), también $U(\mathcal{L}, P_A) \le U(\mathcal{U}, P_A)$ y $L(\mathcal{L}, P_A) \le L(\mathcal{U}, P_A)$ (C4-001.T1). Con C4-001.T3:

$$L(f, P) \le L(\mathcal{L}, P_A) \le U(\mathcal{L}, P_A) \le U(f, P), \qquad L(f, P) \le L(\mathcal{U}, P_A) \le U(\mathcal{U}, P_A) \le U(f, P).$$

8. Dado $\varepsilon > 0$, como f es integrable hay P con $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ (C4-001.T4); por el paso 7, $U(\mathcal{L}, P_A) - L(\mathcal{L}, P_A) < \varepsilon$: $\mathcal{L}$ es integrable, y lo mismo $\mathcal{U}$.
9. Para toda P, $\int_A \mathcal{L}$ y $\int_{A \times B} f$ están entre $L(f, P)$ y $U(f, P)$ (paso 7 y C4-001.T4); por la unicidad de C4-001.T4, $\int_A \mathcal{L} = \int_{A \times B} f$. Igual con $\mathcal{U}$. ■

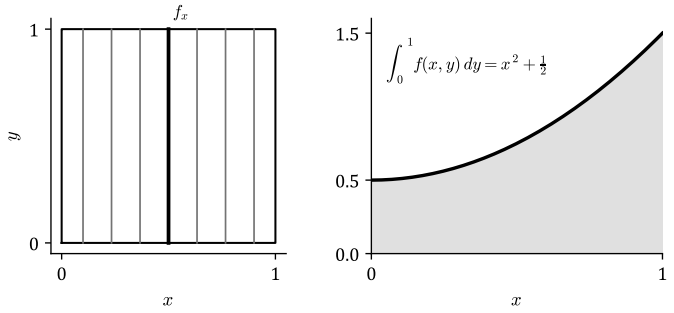


Figura 6: Fubini: la integral de cada rebanada f_x (segmento vertical) da una función de x; integrarla en A da la integral doble.

Parte 2 · Integrales iteradas

Corolario C4-006.C1

Si además cada f_x es integrable, $\int_{A\times B} f = \int_A (\int_B f_x)$. Si f es continua en $A \times B$, la función $x \mapsto \int_B f(x,y)\,dy$ es continua y $\int_{A\times B} f = \int_A (\int_B f(x,y)\,dy)\,dx$.

Demostración.

1. Si cada f_x es integrable, $\mathcal{L}(x) = \int_B f_x$ (C4-001.D4) y C4-006.T1 da la fórmula.
2. Si f es continua, es integrable (C4-001.T6) y cada f_x es continua en B (composición con $y \mapsto (x,y)$, C3-012.T2), luego integrable (C4-001.T6). Sea $F(x) := \int_B f(x,y)\,dy$.
3. $A \times B$ es compacta (C3-010.C1), así que f es uniformemente continua (C3-014.T2): dado $\varepsilon > 0$ hay δ con $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$ si $|p - q| < \delta$.
4. Si $|x - x'| < \delta$, para todo $y \in B$, $|(x,y) - (x',y)| = |x - x'| < \delta$, y $|f(x,y) - f(x',y)| < \varepsilon$. Por C4-001.T5 (b, c),

$$|F(x) - F(x')| \le \int_B |f(x,y) - f(x',y)|\,dy \le \varepsilon\, v(B).$$

Así F es continua (de hecho uniformemente). La fórmula es el paso 1. ■

Teorema C4-006.T2 (permutar coordenadas)

Sean σ una permutación de $\{1, \dots, n\}$ y $P_\sigma(x) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Para una caja R, $P_\sigma(R)$ es una caja con el mismo volumen, f es integrable en $R \Leftrightarrow f \circ P_\sigma^{-1}$ lo es en $P_\sigma(R)$, con la misma integral; si C es de Jordan, $P_\sigma(C)$ lo es y $c(P_\sigma(C)) = c(C)$.

Demostración. Sea $R = \prod_i [a_i, b_i]$.

1. $P_\sigma(R) = \prod_k [a_{\sigma(k)}, b_{\sigma(k)}]$ es una caja, y su volumen $\prod_k (b_{\sigma(k)} - a_{\sigma(k)})$ es el producto de los mismos factores que $v(R)$ en otro orden (K2, K6, por inducción como en C2-027.T0 a).
2. Si $P = (P_1, \dots, P_n)$ es una partición de R, $P^\sigma := (P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(n)})$ es una partición de $P_\sigma(R)$, y toda partición de $P_\sigma(R)$ es de esa forma (con σ^{-1}). Sus subcajas son las $P_\sigma(S)$, S subcaja de P, con $v(P_\sigma(S)) = v(S)$ (paso 1).
3. P_σ es una biyección de S en $P_\sigma(S)$, así que $f \circ P_\sigma^{-1}$ toma en $P_\sigma(S)$ los mismos valores que f en S: los ínfimos y supremos coinciden, y $L(f \circ P_\sigma^{-1}, P^\sigma) = L(f, P)$, $U(f \circ P_\sigma^{-1}, P^\sigma) = U(f, P)$ (C2-027.T0 a: se suma lo mismo en otro orden).
4. Por el paso 2, los conjuntos de sumas inferiores (superiores) son los mismos; sus supremos (ínfimos) coinciden, y con ellos la integrabilidad y la integral (C4-001.D4).
5. *Jordan.* $|P_\sigma x| = |x|$ (la suma de los mismos cuadrados) y P_σ es lineal, así que es una isometría biyectiva y conserva bolas: $\partial P_\sigma(C) = P_\sigma(\partial C)$ (C3-008.D1). Por C4-003.T2 (f) tiene medida cero, y $P_\sigma(C)$ es acotado: es de Jordan. Con una caja $R \supset C$, $\chi_{P_\sigma(C)} = \chi_C \circ P_\sigma^{-1}$ y por el paso 4, $c(P_\sigma(C)) = c(C)$ (C4-005.D1). ■

Corolario C4-006.C2 (integrales iteradas)

Si f es continua en $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} (\cdots (\int_{a_n}^{b_n} f \, dx_n) \cdots) \, dx_1$, y lo mismo en cualquier orden de las variables.

Demostración. Por inducción en n (C1-005.T1) probamos: para toda caja R de $\mathbb{R}^n$ y toda f continua en R, vale la fórmula en el orden $x_n, \dots, x_1$ y cada integral intermedia es una función continua de las variables que quedan.

1. $n = 1$: es C4-001.C1.
2. De n a $n + 1$: $R = [a_1, b_1] \times B$ con B caja de $\mathbb{R}^n$. Por C4-006.C1 (con $A = [a_1, b_1]$), $\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} F(x_1) \, dx_1$ con $F(x_1) = \int_B f(x_1, \cdot)$ continua. Por la hipótesis de inducción aplicada a $f(x_1, \cdot)$,

continua en B, $F(x_1)$ es la integral iterada en las variables $x_2, \dots, x_{n+1}$, con integrales intermedias continuas. (La integral en $[a_1, b_1]$ es la de Cálculo II por C4-001.C1.)

3. *Cualquier orden.* Para el orden $x_{\sigma(n)}, \dots, x_{\sigma(1)}$ (de adentro hacia afuera), se aplica lo anterior a $g := f \circ P_\sigma^{-1}$ en $P_\sigma(R)$, que es continua (C3-012.T2): su integral iterada en el orden usual es la de f en el orden σ, y por C4-006.T2, $\int_{P_\sigma(R)} g = \int_R f$. ■

Ejemplo C4-006.E1

$\int_{[0,1]^2} xy = 1/4$; $\int_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x \cos y = 1/2$.

1. Por C4-006.C1, $\int_{[0,1]^2} xy = \int_0^1 (\int_0^1 xy\, dy)\, dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{4}$ (C2-009.E1).
2. $\int_0^{\pi/2} \cos y\, dy = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$ (C2-009.C1 con $\operatorname{sen}' = \cos$, C2-014.T6, C2-014.C1), así que $\int_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x \cos y = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{1}{2}$.

Por qué $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$

Ejemplo C4-006.E2 (por qué $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$)

$f := 1$ en $\{1/2\} \times (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ y 0 en el resto de $[0,1]^2$: es integrable con $\int = 0$ (vale 0 salvo en un segmento), pero $f_{1/2}$ no es integrable en $[0,1]$ (Dirichlet); $\mathcal{L}(1/2) = 0 \neq 1 = \mathcal{U}(1/2)$, y aun así $\int_A \mathcal{L} = \int_A \mathcal{U} = 0$.

1. f es acotada y vale 0 fuera del segmento $\{1/2\} \times [0,1]$, que tiene contenido cero (C4-003.T4). Por C4-005.T4 (d), f es integrable en $[0,1]^2$ (que es de Jordan) con la misma integral que 0: $\int f = 0$.
2. $f_{1/2}$ es la función de Dirichlet en $[0,1]$: $L(f_{1/2}) = 0$ y $U(f_{1/2}) = 1$ (C2-005.E1). Para $x \neq 1/2$, $f_x \equiv 0$.
3. Así $\mathcal{L} \equiv 0$ y $\mathcal{U} = \chi_{\{1/2\}}$, que vale 0 salvo en un punto: las dos integrales son 0 (C4-005.T4 d), como dice C4-006.T1, aunque «$\int_B f_x$» no exista para $x = 1/2$.

⚠ Hace falta que f sea integrable

Las dos iteradas pueden existir y ser iguales sin que f sea integrable en el cuadrado: Fubini no sirve para probar integrabilidad. (Un ejemplo clásico usa puntos de coordenadas $(p/q, r/q)$; queda como lectura.) Aquí siempre se comprueba primero que f es integrable, con el criterio de

Lebesgue.

Ejercicios

1. Calcula $\int_{[0,1]\times[1,2]}(x+y)^2$ en los dos órdenes.
2. Demuestra que si $f(x,y)=g(x)h(y)$ con g, h continuas, $\int_{A\times B} f = (\int_A g)(\int_B h)$.
3. Calcula $\int_{[0,1]^3} xyz$.
4. En C4-006.E2, ¿qué pasa si se integra primero en x?

Respuestas

1. $\int_0^1\int_1^2 (x+y)^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(x+2)^3-(x+1)^3}{3}\,dx = \frac{3^4-2\cdot 2^4+1}{12} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$, y lo mismo en el otro orden.
2. C4-006.C1: $\int_B g(x)h(y)\,dy = g(x)\int_B h$ (C4-001.T5 b), y luego se integra g.
3. $(1/2)^3 = 1/8$ (ejercicio 2 dos veces).
4. Para cada y, $x \mapsto f(x,y)$ vale 0 salvo quizá en $x = 1/2$: es integrable con integral 0. Las dos iteradas dan 0.

C4-007 · Regiones elementales, volúmenes y valor medio

Motivación

> **Un tanque con fondo y tapa curvos**
> Un tanque de agua tiene la base sobre un terreno K, el fondo en la altura $\varphi_1(x)$ y la tapa en la altura $\varphi_2(x)$. ¿Cuánta agua cabe? Sobre cada punto x de la base hay una columna de altura $\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$: el volumen es la integral de esas alturas sobre la base.
> Eso es Fubini para la función 1 en la región entre dos gráficas. Con la misma idea se cierran dos promesas de Cálculo II: el área entre gráficas y el volumen por secciones dejan de ser definiciones y se vuelven teoremas.
> Dónde falla la analogía: un tanque real tiene paredes de grosor positivo; aquí las paredes son gráficas, de contenido cero.

La bola de radio 1 es la región entre $\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ sobre el disco unitario: su volumen será $\int_{\text{disco}} 2\sqrt{1-x^2-y^2} = 4\pi/3 \approx 4.18879$.

Parte 1 · Regiones elementales

Definición C4-007.D1 (región elemental)

Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto de Jordan y $\varphi_1 \leq \varphi_2$ continuas en K. $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in K,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. También se llama así al conjunto que resulta de poner la variable y en otro lugar (permutando coordenadas, C4-006.T2).

Teorema C4-007.T1 (integrar sobre una región elemental)

D es compacto y de Jordan, y para f continua en D la función $F(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ es integrable en K con $\int_D f = \int_K F$; en particular $c(D) = \int_K (\varphi_2 - \varphi_1)$.

Idea de la demostración

La frontera de D está en las dos gráficas y en las paredes laterales $\partial K \times [m, M]$, todas de contenido cero. En Fubini, cada rebanada vertical de $\tilde{f}$ es $f(x,\cdot)$ entre $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ y cero fuera: a lo más dos saltos, e integral $F(x)$.

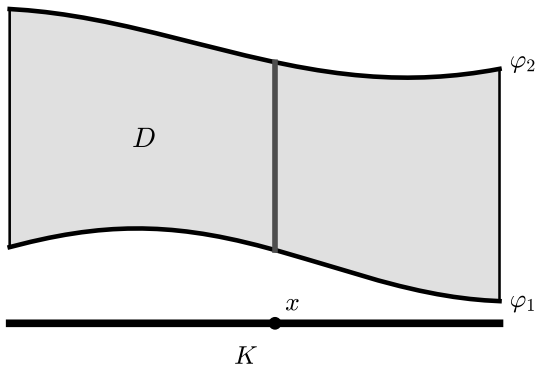


Figura 7: Una región elemental: sobre cada $x \in K$, el segmento vertical de $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$.

Demostración. Si $K = \emptyset$, $D = \emptyset$ y todo vale con 0. Sea $K \neq \emptyset$.

1. *Acotado.* φ_1 y φ_2 alcanzan mínimo y máximo en K (C3-014.C1); sean $m := \min \varphi_1$ y $M := \max \varphi_2$. Entonces $D \subset K \times [m, M]$, acotado.
2. *Cerrado.* $D = \{(x,y) \in K \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) - y \leq 0,\ y - \varphi_2(x) \leq 0\}$. Las funciones $(x,y) \mapsto \varphi_1(x) - y$ y $y - \varphi_2(x)$ son continuas en el cerrado $K \times \mathbb{R}$ (C3-012.T2), y por C3-012.T4, D es cerrado en $K \times \mathbb{R}$, luego cerrado. Por Heine–Borel (C3-010.T4) es compacto.
3. *Frontera.* Sea $(x,y) \in D$ con $x \in \operatorname{int} K$ y $\varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)$. Por la continuidad de $\varphi_1 - y$ y $y - \varphi_2$ en (x,y) hay una bola alrededor de (x,y) donde $x' \in \operatorname{int} K$ y $\varphi_1(x') < y' < \varphi_2(x')$: (x,y) es

interior a D. Como D es cerrado, $\partial D \subset D$ (C3-008.T3), y entonces

$$\partial D \subset \operatorname{graf} \varphi_1 \cup \operatorname{graf} \varphi_2 \cup (\partial K \times [m, M])$$

(si $x \notin \operatorname{int} K$, entonces $x \in K \setminus \operatorname{int} K \subset \partial K$).

4. Las gráficas tienen contenido cero (C4-003.T4). ∂K es compacto de medida cero (C4-005.D1), luego de contenido cero (C4-003.T3), y $\partial K \times [m, M]$ también (C4-003.T2 e). Por C4-003.T2 (a, b), ∂D tiene contenido cero: D es de Jordan.
5. *La integral.* f es continua en el compacto D, luego acotada (C3-014.C1), e integrable en D (C4-005.T4 a). Sean A una caja de $\mathbb{R}^n$ con $K \subset A$ y $B := [m-1, M+1]$. $\tilde{f}$ (la extensión por cero) es integrable en $A \times B$ (C4-005.D1).
6. *Rebanadas.* Si $x \in A \setminus K$, $\tilde{f}_x \equiv 0$. Si $x \in K$, $\tilde{f}_x(y) = f(x, y)$ para $y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ y 0 en el resto de B: es continua salvo quizá en $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ (C3-012.T2), luego integrable en B (C2-005.C1, C4-001.C1). Partiendo B en $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ (C2-004.T1), en los dos pedazos de afuera vale 0 salvo en un extremo (integral 0, C2-005.T2 y C2-002.E1), y en el de enmedio es $f(x, \cdot)$:

$$\int_B \tilde{f}_x = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = F(x)$$

(si $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, las dos cosas valen 0, C2-004.D1).

7. Así cada rebanada es integrable y $\mathcal{L} = \mathcal{U} = \tilde{F}$, la extensión por cero de F. Por Fubini (C4-006.T1), $\tilde{F}$ es integrable en A y $\int_A \tilde{F} = \int_{A \times B} \tilde{f} = \int_D f$. Es decir (C4-005.D1), F es integrable en K y $\int_K F = \int_D f$.
8. Con $f = 1$: $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} 1 = \varphi_2 - \varphi_1$ (C2-002.E1), y $c(D) = \int_K (\varphi_2 - \varphi_1)$. ■

Corolario C4-007.C1 (cierra C2-019.D1)

Si $a < b$ y $f \leq g$ son continuas en $[a, b]$, la región $\{a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ es de Jordan y su contenido es $\int_a^b (g - f)$: el área definida en C2-019.D1 es el contenido de Jordan, y C2-019.T1 se vuelve un caso de C4-005.T4.

Demostración.

1. $K := [a, b]$ es una caja: compacta y de Jordan (C4-005.T3). Con $\varphi_1 = f$ y $\varphi_2 = g$, C4-007.T1 dice que la región es de Jordan con contenido $\int_{[a,b]} (g - f)$, que es $\int_a^b (g - f)$ (C4-001.C1).
2. Así el número que C2-019.D1 *definió* como área es el contenido de Jordan. Las propiedades de C2-019.T1 (área ≥ 0, aditividad al partir $[a, b]$, área del rectángulo) son la monotonía, la aditividad

con intersección de contenido cero (un segmento, C4-003.T4) y $c(Q) = v(Q)$ de C4-005.T4 (b, c, e) y C4-005.T3. ■

Ejemplo C4-007.E1

El disco de radio r tiene área πr^2 y la bola de radio r volumen $4\pi r^3/3$ (la bola es la región entre $\pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ sobre el disco).

1. *Disco.* $\{x^2 + y^2 \le r^2\}$ es la región entre $\pm\sqrt{r^2 - x^2}$ sobre $[-r, r]$: $x^2 + y^2 \le r^2$ si y solo si $|x| \le r$ y $|y| \le \sqrt{r^2 - x^2}$ (C2-014.T1). Por C4-007.T1 y C2-015.E1,
$$c = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2.$$
2. *Bola.* Igual, la bola es la región entre $\pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ sobre el disco K, que es compacto y de Jordan (C4-005.E1). Por C4-007.T1, $c = \int_K 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.
3. Esa integral es otra vez sobre una región elemental (K, con y entre $\pm a$, $a := \sqrt{r^2 - x^2}$). Por C4-007.T1 y C2-015.E1 (con radio a; si $a = 0$ la integral es $0 = \pi a^2$):
$$\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2 = \pi(r^2 - x^2).$$
4. Así el volumen es $\int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \pi(2r^3 - \frac{2}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$ (C2-009.E1).

Parte 2 · Cavalieri, centros de masa y valor medio

Teorema C4-007.T2 (Cavalieri; cierra C2-021.D1)

Sea $S \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2$ compacto de Jordan tal que cada sección $S_x := \{(y, z) : (x, y, z) \in S\}$ es de Jordan con área $A(x)$, y A es integrable en $[a, b]$. Entonces $c(S) = \int_a^b A$. El «volumen por secciones» de C2-021.D1 es el contenido de Jordan del sólido.

Demostración.

1. S es acotado: hay una caja $B \subset \mathbb{R}^2$ con $S \subset [a, b] \times B$, y entonces $S_x \subset B$ para todo x.
2. $c(S) = \int_{[a,b]\times B} \chi_S$ (C4-005.D1; 1 es integrable en S por C4-005.T4 a).
3. Para $x \in [a, b]$, la rebanada $(\chi_S)_x$ es χ_{S_x} en B. Como S_x es de Jordan y está en B, χ_{S_x} es integrable en B con integral $c(S_x) = A(x)$ (C4-005.D1, C4-005.T1). Así $\mathcal{L}(x) = A(x)$.

4. Por Fubini con $n = 1, m = 2$ (C4-006.T1), $c(S) = \int_{[a,b]} \mathcal{L} = \int_a^b A$ (C4-001.C1).
5. En C2-021.D1 el volumen de un sólido con secciones de área $A(x)$ continua se *definió* como $\int_a^b A$; para un sólido compacto de Jordan con secciones de Jordan, ese número es su contenido. ■

Ejemplo C4-007.E2 (sólidos de revolución)
Si $f \geq 0$ es continua en $[a, b]$, $S := \{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ es una región elemental (sobre $\{(x, y) : |y| \leq f(x)\}$) con secciones discos de área $\pi f(x)^2$: $c(S) = \pi \int_a^b f^2$, como en C2-021.D1 y C2-021.E1.

1. $K := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ -f(x) \leq y \leq f(x)\}$ es una región elemental sobre $[a, b]$, compacta y de Jordan (C4-007.T1).
2. En K, $f(x)^2 - y^2 \geq 0$, y S es la región entre $\pm\sqrt{f(x)^2 - y^2}$ (continuas, C2-014.T1, C3-012.T2) sobre K: es compacta y de Jordan (C4-007.T1).
3. La sección S_x es el disco cerrado de radio $f(x)$ (un punto si $f(x) = 0$), de Jordan con área $\pi f(x)^2$ (C4-007.E1; un punto tiene contenido 0, C4-005.T3). $A(x) = \pi f(x)^2$ es continua, luego integrable.
4. Por Cavalieri (C4-007.T2), $c(S) = \pi \int_a^b f^2$: la fórmula de discos de C2-021.D1 y C2-021.E1.

Definición C4-007.D2 (masa, centro de masa, momento de inercia)

Sean C compacto de Jordan y $\rho \geq 0$ continua en C con $m := \int_C \rho > 0$. Centro de masa $\bar{x}$ con $\bar{x}_i := (1/m) \int_C x_i \rho(x)\, dx$; momento de inercia respecto de una recta L: $I_L := \int_C d(x, L)^2 \rho(x)\, dx$.

Las integrales existen: $x_i \rho(x)$ y $d(x, L)^2 \rho(x)$ son continuas en C ($d(\cdot, L)$ es lipschitziana, C3-014.T3) y acotadas en el compacto (C4-005.T4 a).

Ejemplo C4-007.E3 (coherencia con C2-022.D3)
Para la región bajo $f \geq 0$ continua y $\rho \equiv 1$, el centro de masa de C4-007.D2 es el centroide de C2-022.D3 ($\iint y = \frac{1}{2} \int f^2$ por C4-007.T1). La semiesfera sólida de radio r tiene centro de masa a altura $3r/8$; el disco sólido (cilindro) de radio r, grosor h y masa m, con densidad constante, tiene momento $\frac{1}{2}mr^2$ respecto de su eje, sin importar h.

1. *Centroide.* $C = \{a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ es una región elemental, $m = c(C) = \int_a^b f$ (C4-007.T1). Por C4-007.T1 con las funciones x y y: $\int_C x = \int_a^b x f(x)\, dx$ y $\int_C y =$

$\int_a^b (\int_0^{f(x)} y\,dy)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f^2$ (C2-009.E1). Son las fórmulas de C2-022.D3.

2. *Semiesfera.* $H := \{x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ z \ge 0\}$ es la región entre 0 y $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ sobre el disco: compacta y de Jordan, con $m = c(H) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ (C4-007.T1, C4-007.E1: la mitad de la integral del paso 2 de E1). Por C4-007.T1 dos veces (con $a := \sqrt{r^2-x^2}$ y C2-015.E1), $\int_H x = \int_{-r}^{r} x\,\frac{\pi a^2}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r}(r^2x - x^3)\,dx = 0$ (C2-009.E1); como H no cambia al intercambiar x y y, $\int_H y = 0$ también (C4-006.T2). Así $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$.
3. Para $\int_H z$ se pone z como primera coordenada (C4-006.T2) y se usa Fubini (C4-006.T1) con $A = [0,r]$: la rebanada en z es $z\,\chi_{H_z}$ con H_z el disco de radio $\sqrt{r^2-z^2}$, de área $\pi(r^2-z^2)$ (C4-007.E1). Así

$$\int_H z = \int_0^r z\,\pi(r^2-z^2)\,dz = \pi\Big(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\Big) = \frac{\pi r^4}{4}, \qquad \bar{z} = \frac{\pi r^4/4}{2\pi r^3/3} = \frac{3r}{8}.$$

4. *Disco.* Un disco sólido en $\mathbb{R}^3$ es un cilindro $Z := \{x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le h\}$ (una moneda de grosor h) con densidad constante $\rho = m/(\pi r^2 h)$; su eje es el eje z, con $d(p,L)^2 = x^2+y^2$. Por C4-007.T1 sobre el disco K: $I = \rho\,h\int_K (x^2+y^2)$.
5. El paraboloide $\Pi := \{(x,y) \in K,\ 0 \le z \le r^2 - x^2 - y^2\}$ es una región elemental: $c(\Pi) = \int_K (r^2 - x^2 - y^2)$ (C4-007.T1). Por Cavalieri en z (C4-007.T2, con C4-006.T2), sus secciones son discos de radio $\sqrt{r^2-z}$, $z \in [0, r^2]$: $c(\Pi) = \int_0^{r^2} \pi(r^2 - z)\,dz = \pi r^4/2$. Así

$$\int_K (x^2+y^2) = r^2\,c(K) - c(\Pi) = \pi r^4 - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi r^4}{2}, \qquad I = \frac{m}{\pi r^2 h}\,h\,\frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2}mr^2.$$

No depende del grosor h.

Teorema C4-007.T3 (teorema del valor medio)

Sean C no vacío, compacto, conexo y de Jordan, y f continua en C. Existe $\xi \in C$ con $\int_C f = f(\xi)\cdot c(C)$.

Demostración.

1. Por Weierstrass (C3-014.C1), f alcanza en C un mínimo $f(p)$ y un máximo $f(q)$. Por la monotonía (C4-005.T4 b), $f(p)\,c(C) \le \int_C f \le f(q)\,c(C)$.
2. Si $c(C) = 0$, $|\int_C f| \le (\sup|f|)\cdot 0 = 0$ (C4-005.T4 b) y cualquier $\xi \in C$ sirve.
3. Si $c(C) > 0$, sea $\mu := \int_C f/c(C)$, con $f(p) \le \mu \le f(q)$ (C1-003.T4). Si μ es $f(p)$ o $f(q)$, basta $\xi = p$ o q. Si no, $f(p) < \mu < f(q)$ y por el valor intermedio en el conexo C (C3-014.T4) hay $\xi \in C$

con $f(\xi) = \mu$. ■

Corolario C4-007.C2 (lema de los promedios)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ continua. Para $p \in U$, $\lim_{r\to 0^+} (1/c(\bar{B}(p,r))) \int_{\bar{B}(p,r)} f = f(p)$. En consecuencia, si $\int_{\bar{B}(p,r)} f = 0$ para todo $p \in U$ y todo $r > 0$ pequeño, $f = 0$ en U.

Demostración. Sea $p \in U$ y $r_0 > 0$ con $B(p, r_0) \subset U$ (C3-008.D1).

1. Para $0 < r < r_0$, $\bar{B}(p,r) \subset B(p,r_0) \subset U$, es compacta y de Jordan con $c(\bar{B}(p,r)) > 0$ (C4-005.E1), y f es continua y acotada en ella, luego integrable (C4-005.T4 a).
2. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad en p (C3-012.D2) hay $\delta > 0$ con $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ si $|x - p| < \delta$. Si $0 < r < \min(\delta, r_0)$, en $\bar{B}(p,r)$ se cumple $|f - f(p)| < \varepsilon$, y por C4-005.T4 (b),

$$\left|\frac{1}{c(\bar{B}(p,r))}\int_{\bar{B}(p,r)} f - f(p)\right| = \frac{\left|\int_{\bar{B}(p,r)} (f - f(p))\right|}{c(\bar{B}(p,r))} \leq \varepsilon.$$

   Eso es el límite.
3. Si las integrales sobre las bolas chicas son 0, los promedios son 0 y su límite, $f(p)$, es 0. ■

Ejercicios

1. Calcula el área entre $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$ como contenido de Jordan.
2. Calcula el volumen del cono $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq h,\ x^2 + y^2 \leq a^2(1 - z/h)^2\}$ por Cavalieri.
3. Sea C compacto de Jordan con densidad ρ como en C4-007.D2. Demuestra que si $C \subset \{x_1 \geq 0\}$, entonces $\bar{x}_1 \geq 0$.
4. ¿Por qué C4-007.T3 pide C conexo? Da un ejemplo sin conexidad donde falla.

Respuestas

1. $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (C4-007.C1; $\sqrt{x} \geq x^2$ en $[0, 1]$).
2. Secciones discos de radio $a(1 - z/h)$: $\int_0^h \pi a^2 (1 - z/h)^2 \, dz = \pi a^2 h/3$.
3. $x_1 \rho(x) \geq 0$ en C y la monotonía (C4-005.T4 b) dan $\int_C x_1 \rho \geq 0$.
4. $C = [0, 1] \cup [2, 3]$ y $f = 0$ en $[0, 1]$, $f = 1$ en $[2, 3]$: $\int_C f = 1 = f(\xi) \cdot 2$ pide $f(\xi) = 1/2$, que f no toma.

C4-008 · Transformaciones lineales y contenido

Motivación

> **Una fotocopiadora que deforma**
> Una fotocopiadora estropeada no solo amplía: también inclina y estira. Si se fotocopia una mancha de tinta, ¿cuánto crece su área? Para un cuadrado es fácil medir; para una mancha cualquiera parece imposible.
> Para una transformación lineal T la respuesta es un solo número: el área (o el volumen) se multiplica por $|\det T|$, para cualquier conjunto de Jordan. La prueba descompone T en pasos elementales (escalar un eje, intercambiar dos ejes, cortar inclinando) y cada uno se entiende con una caja.
> Dónde falla la analogía: una fotocopiadora real no es exactamente lineal y tiene bordes; aquí T es una matriz y actúa en todo $\mathbb{R}^n$.

$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ manda el cuadrado unitario en un paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$, de área $2 = |\det T|$; el disco unitario va a una elipse de área $2\pi \approx 6.2832$.

Parte 1 · Matrices elementales y Gauss–Jordan

Definición C4-008.D1 (matrices elementales)

Para $n \times n$ e $i \neq j$: $D_i(c)$ ($c \neq 0$) multiplica la coordenada i por c; P_{ij} intercambia las coordenadas i y j; $S_{ij}(c) := I_n + cE_{ij}$ suma $c \cdot x_j$ a la coordenada i (E_{ij} tiene un 1 en el lugar (i,j) y 0 en los demás).

En matrices: $D_i(c)$ es I_n con c en el lugar (i,i); P_{ij} es I_n con las columnas i y j intercambiadas. Por AL.1

⚠ Álgebra Lineal, $E_{ij}E_{kl}$ es E_{il} si $j = k$ y 0 si no.

Teorema C4-008.T1 (operaciones de renglón)

EA es A con la operación de renglón correspondiente (renglón i por c; renglones i, j intercambiados; renglón i más c veces el renglón j). Las elementales son invertibles, con $D_i(c)^{-1} = D_i(1/c)$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ y $S_{ij}(c)^{-1} = S_{ij}(-c)$.

Demostración.

1. Por AL.1 ⚠ Álgebra Lineal, el renglón k de EA es $\sum_l e_{kl}$ (renglón l de A). Para $D_i(c)$: el renglón $k \neq i$ queda igual y el i se multiplica por c. Para P_{ij}: el renglón i de $P_{ij}A$ es el j de A y viceversa.
2. Para $S_{ij}(c)$: $S_{ij}(c)A = A + cE_{ij}A$ (AL.1), y $E_{ij}A$ tiene en el renglón i el renglón j de A y ceros en los demás.
3. *Inversas.* Por el paso 1 con $A = D_i(1/c)$: $D_i(c)D_i(1/c) = I_n$, y en el otro orden igual. Intercambiar dos veces deja todo igual: $P_{ij}P_{ij} = I_n$. Como $i \neq j$, $E_{ij}E_{ij} = 0$ y $S_{ij}(c)S_{ij}(-c) = I_n + cE_{ij} - cE_{ij} - c^2E_{ij}E_{ij} = I_n$, y lo mismo en el otro orden. Por C3-007.D5, son invertibles con esas inversas. ■

Teorema C4-008.T2 (Gauss–Jordan)

Toda matriz $n \times n$ invertible es un producto de matrices elementales.

> **Idea de la demostración**
> Columna por columna: si las primeras j columnas ya son $e_1, \dots, e_j$, la siguiente tiene una entrada no nula abajo del renglón j (si no, la matriz mandaría un vector no nulo a 0). Un intercambio, una escala y varios cortes la vuelven e_{j+1} sin tocar las anteriores.

Demostración. Sea A invertible. Probamos por inducción en $j \in \{0, \dots, n\}$ (C1-005.T1): hay elementales $E_1, \dots, E_k$ ($k \geq 0$; el producto vacío es I_n) tales que las primeras j columnas de $M := E_k \cdots E_1 A$ son $e_1, \dots, e_j$.

1. $j = 0$: $k = 0$ y $M = A$.
2. Paso $j \to j + 1$ ($j < n$). M es invertible, producto de invertibles (C4-008.T1, C3-007.T4). Sea m su columna $j + 1$, es decir $m = Me_{j+1}$ (C3-007.T3).

3. *Hay pivote.* Si $m_l = 0$ para todo $l \geq j+1$, entonces $m = \sum_{l\leq j} m_l e_l = \sum_{l\leq j} m_l M e_l$ (C3-001.T1), y el vector $v := e_{j+1} - \sum_{l\leq j} m_l e_l$ cumple $Mv = m - m = 0$ (AL.1). Pero $v \neq 0$ (su coordenada $j+1$ es 1) y $v = M^{-1}Mv = 0$: contradicción. Sea $l \geq j+1$ el menor índice con $m_l \neq 0$.
4. *Intercambio.* Si $l \neq j+1$, se multiplica por $P_{l,j+1}$: intercambia los renglones l y $j+1$, que en las columnas $1, \dots, j$ tienen ceros (las columnas e_s, $s \leq j$, solo tienen un 1 en el renglón $s \leq j$); esas columnas no cambian, y ahora la entrada $(j+1, j+1)$ es $c \neq 0$.
5. *Escala.* Se multiplica por $D_{j+1}(1/c)$: el renglón $j+1$ tiene ceros en las columnas $1, \dots, j$, que no cambian, y la entrada $(j+1, j+1)$ se vuelve 1.
6. *Cortes.* Para cada $i \neq j+1$, con d_i la entrada $(i, j+1)$ del momento, se multiplica por $S_{i,j+1}(-d_i)$: al renglón i se le resta d_i veces el renglón $j+1$, que tiene ceros en las columnas $1, \dots, j$ y un 1 en la $j+1$. Las columnas anteriores no cambian y la entrada $(i, j+1)$ se vuelve 0. Al final la columna $j+1$ es e_{j+1}.
7. Con $j = n$: $E_k \cdots E_1 A = I_n$. Multiplicando a la izquierda por $E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ (AL.1, C3-007.T4), $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$, producto de elementales (C4-008.T1). Si $k = 0$, $A = I_n = D_1(1)$. ■

Teorema C4-008.T3 (determinante de las elementales)

$\det D_i(c) = c$, $\det P_{ij} = -1$, $\det S_{ij}(c) = 1$; si $A = E_1 \cdots E_k$ con E_i elementales, $|\det A| = \prod_i |\det E_i|$.

Demostración. Se usa AL.4 ⚠ Álgebra Lineal: det es multilineal y alternante en las columnas, $\det I_n = 1$ y $\det(AB) = \det A \det B$.

1. $D_i(c)$ tiene columnas $e_1, \dots, ce_i, \dots, e_n$; por la linealidad en la columna i, $\det D_i(c) = c \det I_n = c$.
2. *Cambio de signo.* Si en las columnas i y j se ponen u y v, por la alternancia y la multilinealidad

$$0 = \det(\dots, u+v, \dots, u+v, \dots) = \det(\dots, u, \dots, v, \dots) + \det(\dots, v, \dots, u, \dots),$$

   (los términos con u, u y v, v son 0). P_{ij} es I_n con las columnas i y j intercambiadas: $\det P_{ij} = -\det I_n = -1$.
3. $S_{ij}(c) = I_n + cE_{ij}$ tiene la columna j igual a $e_j + ce_i$ y las demás e_l. Por la linealidad en la columna j, $\det S_{ij}(c) = \det I_n + c \det(\dots, e_i, \dots, e_i, \dots)$, donde e_i aparece en las columnas i y j: el segundo es 0 y $\det S_{ij}(c) = 1$.
4. Por $\det(AB) = \det A \det B$ e inducción (C1-005.T1), $\det(E_1 \cdots E_k) = \prod_i \det E_i$, y $|ab| = |a||b|$ (C1-004.T2) da $|\det A| = \prod_i |\det E_i|$. ■

Parte 2 · Contenido y determinante

Teorema C4-008.T4 (las lineales y los conjuntos de Jordan)

Sea T $n\times n$ invertible. T manda conjuntos de contenido (medida) cero en conjuntos de contenido (medida) cero; $\partial T(A) = T(\partial A)$ para todo A; T manda conjuntos de Jordan en conjuntos de Jordan y cajas en compactos de Jordan.

Demostración. Sea $L := \|T\|_F > 0$ ($T \neq 0$). Por C3-012.T3, $|Tx - Ty| \leq L|x - y|$.

1. *Cubos.* Si $y \in Q(a,r)$, $|y-a| \leq n\|y-a\|_\infty \leq nr$ (C3-007.T1), así que $\|Ty-Ta\|_\infty \leq |Ty-Ta| \leq Lnr$: $T(Q(a,r)) \subset Q(Ta, Lnr)$, un cubo de volumen $(Ln)^n v(Q(a,r))$.
2. *Contenido y medida cero.* Si Z tiene contenido cero, por C4-003.T1 (a) hay cubos que lo cubren con suma $< \varepsilon/(Ln)^n$; sus imágenes caben en los cubos del paso 1, de suma $< \varepsilon$. Igual con sucesiones para la medida cero.
3. *Fronteras.* T es continua con inversa continua $x \mapsto T^{-1}x$ (C3-007.T4, C3-012.T3). Si W es abierto, $T(W) = (T^{-1})^{-1}(W)$ es abierto (C3-012.T4). Así $T(\operatorname{int} A)$ es un abierto contenido en $T(A)$, luego $\subset \operatorname{int} T(A)$ (C3-008.T3); y $T^{-1}(\operatorname{int} T(A))$ es un abierto contenido en A, luego $\subset \operatorname{int} A$: $T(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} T(A)$. Con el complemento ($T(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus T(A)$, T biyectiva), $T(\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)) = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus T(A))$. Como $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de interior, frontera e interior del complemento (C3-008.T3), $T(\partial A) = \partial T(A)$.
4. *Jordan.* Si A es de Jordan, $T(A)$ es acotado ($|Tx| \leq L|x|$) y $\partial T(A) = T(\partial A)$ tiene medida cero (paso 2): es de Jordan.
5. *Cajas.* Una caja es compacta (C3-010.T2) y de Jordan (C4-005.T3); su imagen es compacta (C3-014.T1) y de Jordan (paso 4). ■

Teorema C4-008.T5 (de cajas a conjuntos de Jordan)

Sean T invertible y $k \geq 0$ con $c(T(Q)) = k \cdot v(Q)$ para toda caja Q. Entonces $c(T(A)) = k \cdot c(A)$ para todo conjunto de Jordan A.

Demostración. Sea A de Jordan y R una caja con $\bar{A} \subset \operatorname{int} R$; χ_A es integrable en R (C4-005.T2).

1. Para la rejilla G_j de R, sean $\mathcal{I}_j$ las subcajas contenidas en A y $\mathcal{O}_j$ las que cortan a A. Como $m_S(\chi_A) = 1$ si y solo si $S \subset A$, y $M_S(\chi_A) = 1$ si y solo si $S \cap A \neq \emptyset$: $L(\chi_A, G_j) = \sum_{\mathcal{I}_j} v(S)$ y $U(\chi_A, G_j) = \sum_{\mathcal{O}_j} v(S)$

(C4-001.D3).

2. *Traslapes.* Dos subcajas distintas se cortan solo en sus fronteras: $S \cap S' \subset \partial S$ (C4-001.T2: el interior de una no corta a la otra). Así $T(S) \cap T(S') = T(S \cap S') \subset T(\partial S)$, de contenido cero (C4-003.T4, C4-008.T4).
3. *Cota inferior.* $\cup_{\mathcal{I}_j} T(S) \subset T(A)$. Por la aditividad con intersecciones de contenido cero (C4-005.T4 c, e, por inducción sobre las subcajas) y la hipótesis,

$$k\, L(\chi_A, G_j) = \sum_{\mathcal{I}_j} c(T(S)) = c\Big(\bigcup_{\mathcal{I}_j} T(S)\Big) \le c(T(A)).$$

4. *Cota superior.* $T(A) \subset \cup_{\mathcal{O}_j} T(S)$ (las subcajas cubren R, C4-001.T2). Por la monotonía y $c(X \cup Y) = c(X) + c(Y) - c(X \cap Y) \le c(X) + c(Y)$ (C4-005.T4 c, e):

$$c(T(A)) \le \sum_{\mathcal{O}_j} c(T(S)) = k\, U(\chi_A, G_j).$$

5. Por Darboux (C4-002.T2), $L(\chi_A, G_j)$ y $U(\chi_A, G_j)$ tienden a $c(A)$, y $k\, c(A) \le c(T(A)) \le k\, c(A)$ (C1-013.T3). ■

Teorema C4-008.T6 (elementales y cajas)
Para toda matriz elemental E y toda caja Q, $c(E(Q)) = \lvert \det E \rvert \cdot v(Q)$.

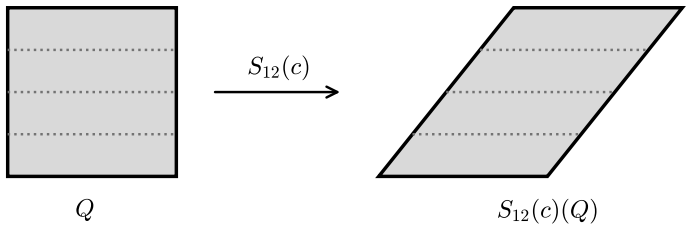


Figura 8: El corte $S_{12}(c)$ manda el cuadrado en un paralelogramo: la región entre $a_1 + cx_2$ y $b_1 + cx_2$. Mismo ancho horizontal en cada altura, misma área.

Demostración. Sea $Q = \prod_l [a_l, b_l]$.

1. $D_i(c)$. $D_i(c)(Q)$ es la caja con lado i igual a $[ca_i, cb_i]$ si $c > 0$ o $[cb_i, ca_i]$ si $c < 0$, y los demás lados iguales: su volumen es $|c|\, v(Q) = \lvert \det D_i(c) \rvert\, v(Q)$ (C4-008.T3), y $c(\text{caja}) = v$ (C4-005.T3).
2. P_{ij}. $P_{ij}(Q)$ es la caja con los lados i y j intercambiados, del mismo volumen (C4-006.T2), y

$|\det P_{ij}| = 1$.

3. $S_{ij}(c)$. $y = S_{ij}(c)x$ quiere decir $y_l = x_l$ $(l \neq i)$ y $y_i = x_i + cx_j$, con $y_j = x_j$ porque $j \neq i$. Así

$$S_{ij}(c)(Q) = \{y : y_l \in [a_l, b_l]\ (l \neq i),\ a_i + cy_j \leq y_i \leq b_i + cy_j\}.$$

Con $K := \prod_{l \neq i}[a_l, b_l]$ (una caja de $\mathbb{R}^{n-1}$, compacta y de Jordan) y $\varphi_1 := a_i + cy_j \leq \varphi_2 := b_i + cy_j$ continuas en K, es la región elemental con la variable y_i en el lugar i (C4-007.D1, C4-006.T2). Por C4-007.T1 y C4-001.T5 (c),

$$c(S_{ij}(c)(Q)) = \int_K (b_i - a_i) = (b_i - a_i)\, v(K) = v(Q) = |\det S_{ij}(c)|\, v(Q). \qquad \blacksquare$$

Teorema C4-008.T7 (contenido y determinante)

Si T es invertible y A es de Jordan, $T(A)$ es de Jordan y $c(T(A)) = |\det T| \cdot c(A)$. En particular las matrices ortogonales ($T^{\mathsf{T}}T = I_n$) conservan el contenido y $c(\lambda A) = |\lambda|^n c(A)$.

Demostración.

1. Por Gauss–Jordan (C4-008.T2), $T = E_1 \cdots E_k$ con E_i elementales. $T(A)$ es de Jordan (C4-008.T4).
2. Por inducción en k (C1-005.T1): para todo A de Jordan, $c(E_1 \cdots E_k(A)) = \prod_{i \leq k} |\det E_i|\, c(A)$. Para $k = 1$: C4-008.T6 da la hipótesis de C4-008.T5 con constante $|\det E_1|$, y C4-008.T5 la extiende a todo A de Jordan. De k a $k+1$: $E_{k+1}(A)$ es de Jordan (C4-008.T4), y

$$c(E_1 \cdots E_{k+1}(A)) = \prod_{i \leq k} |\det E_i|\, c(E_{k+1}(A)) = \prod_{i \leq k+1} |\det E_i|\, c(A).$$

3. Por C4-008.T3, $\prod_i |\det E_i| = |\det T|$.
4. *Ortogonales.* Si $T^{\mathsf{T}}T = I_n$, por AL.4 ⚠ Álgebra Lineal $\det T^{\mathsf{T}} \det T = 1$ y $\det T^{\mathsf{T}} = \det T$, así que $(\det T)^2 = 1$: $\det T \neq 0$, T es invertible (AL.4) y $|\det T| = 1$.
5. *Homotecias.* Si $\lambda \neq 0$, λI_n tiene $\det = \lambda^n$ (multilinealidad, AL.4) y $c(\lambda A) = |\lambda|^n c(A)$. Si $\lambda = 0$, λA es $\{0\}$ o $\emptyset$, de contenido $0 = 0^n c(A)$ (C4-003.T2 c, C4-005.T3). ■

Ejemplo C4-008.E1

Si $\det[a\ b\ c] \neq 0$, el paralelepípedo $\{sa + tb + uc : s, t, u \in [0,1]\}$ tiene volumen $|\det[a\ b\ c]|$; la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ tiene área πab y el elipsoide volumen $4\pi abc/3$.

1. Con $T := [a\ b\ c]$ (columnas a, b, c), $T(s,t,u) = sa + tb + uc$ (C3-007.T3), y el paralelepípedo es $T([0,1]^3)$: por C4-008.T7, su volumen es $|\det T| \cdot 1$.
2. Para $a, b > 0$, $T := \operatorname{diag}(a,b)$ manda el disco unitario en la elipse: $(x,y) = (au, bv)$ con $u^2 + v^2 \leq 1$ si y solo si $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$. Por C4-008.T7 y C4-007.E1, el área es $ab \cdot \pi$.
3. Igual, $\operatorname{diag}(a,b,c)$ manda la bola unitaria en el elipsoide: $abc \cdot \frac{4}{3}\pi$.

Por qué cada hipótesis

⚠ T invertible

Si $\det T = 0$, la imagen de T está en un hiperplano (de contenido cero) y $c(T(A)) = 0$ es cierto, pero la prueba no sirve: Gauss–Jordan pide invertibilidad, y la prueba de C4-008.T4 usa que T^{-1} es continua. Con $T = \operatorname{diag}(1,0)$, $T(\operatorname{int}[0,1]^2) = (0,1) \times \{0\}$ no es abierto, y $\operatorname{int} T([0,1]^2) = \emptyset$.

Ejercicios

1. Escribe $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ como producto de elementales y verifica $|\det| = 2$.
2. Calcula el área del triángulo de vértices $(0,0)$, $(3,1)$, $(1,2)$.
3. Demuestra que las rotaciones R_θ conservan el área.
4. ¿Cuál es el volumen de $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$, sabiendo que el de $\{x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$ es $1/6$?

Respuestas

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{12}(1) D_1(2)$: $D_1(2)$ escala la primera coordenada y luego se suma x_2. $|\det| = 1 \cdot 2$.
2. Es $T(\text{triángulo } \{s,t \geq 0, s+t \leq 1\})$ con $T = [(3,1)\ (1,2)]$, $|\det T| = 5$: área $5/2$.
3. $R_\theta^{\mathsf{T}} R_\theta = I_2$ ($\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$): ortogonal, C4-008.T7.
4. Son 8 copias por reflexiones $D_i(-1)$ ($|\det| = 1$) que se traslapan en planos: $8/6 = 4/3$.

C4-009 · Imágenes de conjuntos de Jordan bajo funciones C^1

Motivación

> **Un mapa impreso en una hoja de hule**
> Se imprime un mapa cuadriculado en una hoja de hule y se estira de manera no uniforme. Cada cuadrito se deforma distinto. Pero si los cuadritos son muy chicos, cada uno se deforma casi como una transformación lineal: la diferencial en su centro. Su área nueva es, casi, | det | de esa diferencial por el área vieja.
> Para llegar al cambio de variables hacen falta tres cosas de hoy: que una función C^1 no infle los conjuntos «flacos», que mande conjuntos de Jordan en conjuntos de Jordan, y una cota del área de la imagen de un cubo chico.
> Dónde falla la analogía: el hule real se rompe o se arruga; aquí g es inyectiva y diferenciable con continuidad.

Para las polares $P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ en el cubo Q de centro $(1, 0.5)$ y semilado 0.05, el área de $P(Q)$ es 0.01 (exacta: $\int_Q r = 0.01$), y la cota de C4-009.T5 con $T = DP(1, 0.5)$ da ≈ 0.01207.

Resultados

Definición C4-009.D1 (norma por renglones)

Para una matriz B $m \times n$, $\|B\|_\infty := \max_i \sum_j |b_{ij}|$.

Teorema C4-009.T1 (propiedades)

$\|Bx\|_\infty \le \|B\|_\infty \|x\|_\infty$; $\|BC\|_\infty \le \|B\|_\infty \|C\|_\infty$; $\|I_n\|_\infty = 1$; $|b_{ij}| \le \|B\|_\infty \le n \cdot \max |b_{ij}|$; si las entradas de $x \mapsto B(x)$ son continuas, $x \mapsto \|B(x)\|_\infty$ es continua.

Demostración.

1. $|(Bx)_i| = |\sum_j b_{ij}x_j| \leq \sum_j |b_{ij}||x_j| \leq (\sum_j |b_{ij}|)\|x\|_\infty \leq \|B\|_\infty\|x\|_\infty$ (C1-004.T4, C1-005.T12, C3-007.T1); se toma el máximo en i (C1-005.T13).
2. Para BC (C $n \times p$), por AL.1 ⚠ Álgebra Lineal, el renglón i suma

$$\sum_k \Big|\sum_j b_{ij}c_{jk}\Big| \leq \sum_j |b_{ij}| \sum_k |c_{jk}| \leq \sum_j |b_{ij}|\,\|C\|_\infty \leq \|B\|_\infty\|C\|_\infty.$$

3. Cada renglón de I_n suma 1. $|b_{ij}|$ es un sumando de su renglón, y cada renglón tiene n sumandos $\leq \max|b_{ij}|$.
4. $x \mapsto \sum_j |b_{ij}(x)|$ es continua (C3-012.T2, C1-004.T5), y el máximo de un número finito de continuas es continuo: $\max(u,v) = \frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$ e inducción (C3-012.T2). ■

Teorema C4-009.T2 (valor medio en la norma del máximo)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $g \in C^1(U,\mathbb{R}^m)$, $x, y \in U$ con $[x,y] \subset U$ y $M \geq 0$ con $\|Dg(z)\|_\infty \leq M$ para $z \in [x,y]$. Entonces $\|g(x)-g(y)\|_\infty \leq M\|x-y\|_\infty$.

Demostración.

1. Cada componente g_i es C^1, luego diferenciable en U (C3-017.C2). Por el TVM (C3-017.T1, con $a=y, b=x$) hay $c_i \in [x,y]$ con $g_i(x)-g_i(y) = \nabla g_i(c_i)\cdot(x-y)$.
2. El renglón i de $Dg(c_i)$ es $\nabla g_i(c_i)$ (C3-022.T1, C3-022.T2), así que

$$|g_i(x)-g_i(y)| \leq \sum_j |\partial_j g_i(c_i)|\,|x_j-y_j| \leq \|Dg(c_i)\|_\infty\|x-y\|_\infty \leq M\|x-y\|_\infty.$$

3. Tomando el máximo en i, $\|g(x)-g(y)\|_\infty \leq M\|x-y\|_\infty$. ■

Teorema C4-009.T3 (imágenes de cubos pequeños)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $g \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ y $K \subset U$ compacto. Existen $\delta > 0$ y $C \geq 0$ tales que todo cubo cerrado S de lado $\leq \delta$ que corta a K está contenido en U y $g(S)$ está contenido en un cubo cerrado de volumen $\leq C \cdot v(S)$. En consecuencia $g(Z)$ tiene contenido (medida) cero para todo $Z \subset K$ de contenido (medida) cero.

Idea de la demostración
Un margen alrededor de K da un compacto $K' \subset U$ donde $\|Dg\|_\infty \leq M$. Un cubo chico que toca K cabe en K', y por el valor medio su imagen cabe en un cubo $\max(M, 1)$ veces más grande en cada lado.

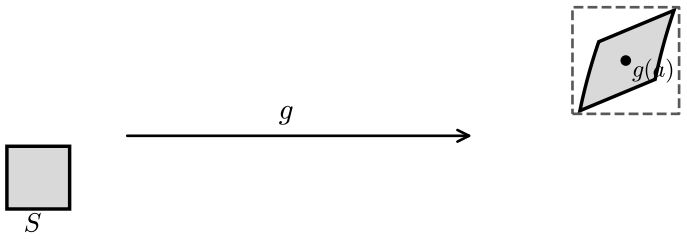


Figura 9: Imagen de un cubo chico por una función C^1: cabe en un cubo (punteado) centrado en la imagen del centro, con lado a lo más $C^{1/n}$ veces el original.

Demostración. Si $K = \emptyset$, cualquier δ y C sirven (ningún cubo corta a K y $Z = \emptyset$).

1. *Margen.* Por C3-014.T3 (b) hay $r > 0$ con $B(x, r) \subset U$ para todo $x \in K$. Sea $K' := \{z : d(z, K) \leq r/2\}$. Es cerrado ($d(\cdot, K)$ es continua, C3-014.T3 a, C3-012.T4) y acotado, luego compacto (C3-010.T4). Si $z \in K'$, la distancia se alcanza en un $x \in K$ (C3-014.T3 a) y $|z - x| \leq r/2 < r$: $z \in B(x, r) \subset U$. Así $K \subset K' \subset U$.
2. *Cota de la derivada.* $z \mapsto \|Dg(z)\|_\infty$ es continua (C4-009.T1, C3-022.T2) y alcanza un máximo M en el compacto no vacío K' (C3-014.C1). Sean $\delta := r/(2n)$ y $C := \max(M, 1)^n$.
3. *Cubos chicos.* Sea $S = Q(a, s/2)$ un cubo de lado $s \leq \delta$ con un punto $x_0 \in S \cap K$. Para $z \in S$, $\|z - x_0\|_\infty \leq s$ y $|z - x_0| \leq ns \leq r/2$ (C3-007.T1): $z \in K' \subset U$. Así $S \subset K'$.
4. S es convexo (C4-001.D1), así que $[z, a] \subset S \subset K'$ para $z \in S$, y por C4-009.T2, $\|g(z) - g(a)\|_\infty \leq M\|z - a\|_\infty \leq Ms/2$. Por lo tanto

$$g(S) \subset Q\big(g(a), \max(M, 1)\, s/2\big),$$

   un cubo (no degenerado, porque $\max(M, 1) \geq 1$) de volumen $\max(M, 1)^n s^n = C\, v(S)$.
5. *Contenido cero.* Sean $Z \subset K$ de contenido cero y $\varepsilon > 0$. Por C4-003.T1 (a) hay cubos $Q_1, \ldots, Q_k$ que cubren Z con $\sum v(Q_i) < \varepsilon/C$. Se descartan los que no cortan a K (no tienen puntos de Z). Cada Q_i restante, de lado ℓ_i, se parte con la rejilla G_{p_i}, con p_i el menor natural con $\ell_i/p_i \leq \delta$ (C1-007.C1, C1-005.T3): son p_i^n cubos de lado $\leq \delta$ y volumen total $v(Q_i)$ (C4-001.T2). De ellos se conservan

los que cortan a K.

6. Los cubos conservados cubren Z, cada uno corta a K y tiene lado $\leq \delta$; por el paso 4, sus imágenes caben en los cubos $Q(g(a), \max(M,1)s/2)$, que cubren $g(Z)$ y suman $\leq C\sum_i v(Q_i) < \varepsilon$.
7. *Medida cero.* Igual, con una sucesión (Q_k) con sumas parciales $< \varepsilon/(2C)$: cada Q_k da una lista finita $\mathcal{L}_k$ de cubos-imagen con volumen total $\leq C\, v(Q_k)$. **Una lista puede quedar vacía** (si Q_k no corta a K); en ese caso se le pone la caja de relleno $Z_{\varepsilon/2^{k+2}} = [0, \varepsilon/2^{k+2}] \times [0,1]^{n-1}$, explícita y no degenerada. Las listas se ponen en fila como en C4-003.T1 (C1-005.T11), y cada suma parcial es $< C \cdot \varepsilon/(2C) + \sum_k \varepsilon/2^{k+2} < \varepsilon$. ■

Teorema C4-009.T4 (difeomorfismos)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $g : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, inyectiva, con $Dg(x)$ invertible para todo $x \in U$. Entonces $g(O)$ es abierto para todo abierto $O \subset U$ (en particular $V := g(U)$ es abierto), $g^{-1} : V \to U$ es C^1 con $D(g^{-1})(y) = Dg(g^{-1}(y))^{-1}$ y $\det D(g^{-1})(y) = 1/\det Dg(g^{-1}(y))$. Si A es de Jordan con $\bar{A} \subset U$: $g(\bar{A})$ es compacto y es la cerradura de $g(A)$, $\operatorname{int} g(A) = g(\operatorname{int} A)$, $\partial g(A) = g(\partial A)$, y $g(A)$ es de Jordan.

Demostración.

1. *Abiertos van a abiertos.* Sea $O \subset U$ abierto y $a \in O$. Por C3-025.T1 aplicado a $g|_O$ (con O en lugar de U) hay una bola $W \subset O$ alrededor de a con $g(W)$ abierto. Así $g(O)$ es la unión de **todos** los $g(W)$ con $W \subset O$ bola y $g(W)$ abierto (no se elige una bola por punto), y es abierto (C3-008.T2). En particular $V = g(U)$ es abierto.
2. *La inversa es C^1.* Sea $y = g(x) \in V$. Por C3-025.T1 y C3-025.T2 hay una bola $W \ni x$ en U tal que $h := (g|_W)^{-1} : g(W) \to W$ es C^1 con $Dh(y') = Dg(h(y'))^{-1}$. Como g es inyectiva, $g^{-1} = h$ en el abierto $g(W) \ni y$. Ser C^1 es una propiedad local (parciales continuas en cada punto), así que g^{-1} es C^1 en V con $D(g^{-1})(y) = Dg(g^{-1}(y))^{-1}$.
3. *Determinante.* $\det Dg(x)\det(Dg(x)^{-1}) = \det I_n = 1$ (AL.4 ⚠ Álgebra Lineal).
4. *Homeomorfismo.* g es continua en U (C3-022.T1) y g^{-1} en V. Sea A de Jordan con $\bar{A} \subset U$. $\bar{A}$ es cerrado y acotado, luego compacto (C3-008.T3, C3-010.T4), y $g(\bar{A})$ es compacto (C3-014.T1), en particular cerrado.
5. *Cerradura.* $g(\bar{A})$ es un cerrado que contiene a $g(A)$, así que contiene a su cerradura (como en C4-003.T2 d). Recíprocamente, si $x \in \bar{A}$ y $\varepsilon > 0$, por la continuidad hay δ con $g(B(x,\delta) \cap U) \subset B(g(x),\varepsilon)$; $B(x,\delta)$ corta a A ($x \in A \cup \partial A$), así que $B(g(x),\varepsilon)$ corta a $g(A)$: $g(x)$ está en la cerradura de $g(A)$ (C3-008.D1).

6. *Interior.* $g(\operatorname{int} A)$ es abierto (paso 1) y está en $g(A)$: está en $\operatorname{int} g(A)$ (C3-008.T3). Si $y \in \operatorname{int} g(A)$, hay $B(y,\varepsilon) \subset g(A) \subset V$, y $g^{-1}(B(y,\varepsilon))$ es un abierto (C3-012.T4) que contiene a $g^{-1}(y)$ y está en A (g es inyectiva): así $g^{-1}(y) \in \operatorname{int} A$ e $y \in g(\operatorname{int} A)$.
7. *Frontera.* La cerradura de $g(A)$ es la unión disjunta de $\operatorname{int} g(A)$ y $\partial g(A)$ (C3-008.T3, C3-008.D1), y $\bar{A}$ la de $\operatorname{int} A$ y ∂A. Por los pasos 5 y 6 y la inyectividad,

$$\partial g(A) = g(\bar{A}) \setminus g(\operatorname{int} A) = g(\bar{A} \setminus \operatorname{int} A) = g(\partial A).$$

8. *Jordan.* $\partial A \subset \bar{A}$ es compacto de medida cero (C4-005.D1), luego de contenido cero (C4-003.T3), y por C4-009.T3 con $K = \bar{A}$, $g(\partial A) = \partial g(A)$ tiene contenido cero. $g(A) \subset g(\bar{A})$ es acotado: es de Jordan. ■

Teorema C4-009.T5 (contenido de la imagen de un cubo)

Sean U, g como en C4-009.T4, T $n \times n$ invertible y $Q \subset U$ un cubo cerrado. Entonces $c(g(Q)) \leq |\det T| \cdot (\max_{x \in Q} \|T^{-1} Dg(x)\|_\infty)^n \cdot v(Q)$.

> **Idea de la demostración**
> Primero se «deshace» la parte lineal: $h := T^{-1} \circ g$ deforma poco si $T \approx Dg$. Por el valor medio, $h(Q)$ cabe en un cubo de lado K veces el de Q. Después se vuelve a aplicar T, que multiplica el contenido por $|\det T|$.

Demostración. Sea $Q = Q(a,r)$.

1. $h := T^{-1} \circ g$ es C^1 en U con $Dh(x) = T^{-1} Dg(x)$ (C3-023.T1, C3-022.T1: la diferencial de una lineal es ella misma), inyectiva y con $Dh(x)$ invertible (C3-007.T4).
2. $x \mapsto \|T^{-1} Dg(x)\|_\infty$ es continua (C4-009.T1, C3-012.T2) y alcanza su máximo K_0 en el compacto Q (C3-014.C1). $K_0 > 0$: $Dh(x)$ es invertible, luego no es la matriz cero (C4-009.T1).
3. Q es convexo y está en U, así que para $z \in Q$, $[z,a] \subset Q$ y por C4-009.T2, $\|h(z) - h(a)\|_\infty \leq K_0 \|z - a\|_\infty \leq K_0 r$: $h(Q) \subset Q(h(a), K_0 r)$.
4. $h(Q)$ es de Jordan (C4-009.T4 aplicado a h, con Q de Jordan y $\bar{Q} = Q \subset U$), y por la monotonía (C4-005.T4 e) y C4-005.T3, $c(h(Q)) \leq (2K_0 r)^n = K_0^n v(Q)$.
5. $g(Q) = T(h(Q))$, y por C4-008.T7, $c(g(Q)) = |\det T|\, c(h(Q)) \leq |\det T|\, K_0^n\, v(Q)$. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ C^1 y no solo continua

Hay funciones continuas de $[0,1]$ sobre $[0,1]^2$ (curvas de Peano): mandan un segmento, de contenido cero en $\mathbb{R}^2$, en un cuadrado. C4-009.T3 necesita la cota $\|Dg\|_\infty \leq M$, es decir, que g sea lipschitziana en el compacto.

⚠ Inyectiva en C4-009.T4

$g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$ tiene Dg invertible en todo punto (su jacobiano es $e^{2x} > 0$) pero no es inyectiva: no hay inversa en todo V, y la fórmula $\partial g(A) = g(\partial A)$ falla para $A = [0,1] \times [0,3\pi]$: la imagen es la corona $1 \leq |w| \leq e$, y la imagen del lado $y = 0$ (el segmento de 1 a e sobre el eje real) cae en su interior.

Ejercicios

1. Calcula $\|B\|_\infty$ para $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0.5 \end{pmatrix}$ y verifica $\|Bx\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|x\|_\infty$ con $x = (1,-1)$.
2. Demuestra que si g es C^1 en U y $Z \subset U$ es compacto de medida cero, $g(Z)$ tiene contenido cero.
3. Sea $g(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$. ¿Se puede aplicar C4-009.T4 en $U = \mathbb{R}$? ¿Y en $U = (0,\infty)$?
4. Con \$g = \$ polares y Q el cubo de centro $(1, 0.5)$ y semilado 0.05, compara la cota de C4-009.T5 con $T = DP(1, 0.5)$ y con $T = I_2$.

Respuestas

1. $\|B\|_\infty = \max(3, 3.5) = 3.5$; $Bx = (3, 2.5)$, $\|Bx\|_\infty = 3 \leq 3.5$.
2. Por C4-003.T3, Z tiene contenido cero; C4-009.T3 con $K = Z$.
3. En $\mathbb{R}$ no: $Dg(0) = 0$ no es invertible. En $(0,\infty)$ sí: la inversa $y^{1/3}$ es C^1 en $(0,\infty)$.
4. Con $T = DP(1, 0.5)$ la cota es ≈ 0.01207 (cercana al área 0.01); con $T = I_2$, $\max \|DP\|_\infty^2 \, v(Q) \approx 0.0201$: elegir $T \approx Dg$ hace la cota casi exacta.

C4-010 · Teorema del cambio de variables

Motivación

> **Contar en un mapa deformado**
> Un mapa de la ciudad está dibujado con una proyección que deforma: cerca del centro amplía, en las orillas encoge. Para saber el área real de un barrio a partir del mapa, cada cuadrito del mapa se multiplica por su «factor de escala» local y se suma. Ese factor es $|\det Dg|$.
> El teorema del cambio de variables dice exactamente eso: $\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)\,|\det Dg|$. Se demuestra en dos pasos: primero una desigualdad sumando cuadritos (la ruta de Lang), después la igualdad aplicando la misma desigualdad a la función inversa.
> Dónde falla la analogía: un mapa real tiene un número finito de cuadritos y errores de impresión; aquí los cubos se hacen tan chicos como se quiera.

Para el cuadrado girado $D := \{|x| + |y| \le 1\}$, con $u = x + y$, $v = x - y$, el cambio de variables da $\int_D (x+y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^2} u^2\,du\,dv = \frac{2}{3} \approx 0.6667$.

Parte 1 · El contenido de la imagen

Teorema C4-010.T1 (contenido de la imagen)
Sean U, g como en C4-009.T4 y A de Jordan con $\bar{A} \subset U$. Entonces $c(g(A)) \le \int_A |\det Dg|$.

> **Idea de la demostración (Lang, *Undergraduate Analysis*, cap. XX)**
> En una rejilla fina, en cada cubo S la diferencial casi no cambia: con $T = Dg(\text{centro})$, la estimación de C4-009.T5 da $c(g(S)) \le (1+\varepsilon)^n |\det Dg(x_S)|\, v(S)$. Se suma sobre los cubos que tocan $\bar{A}$: los que están dentro de A dan casi $\int_A |\det Dg|$, y los que tocan el borde son pocos.

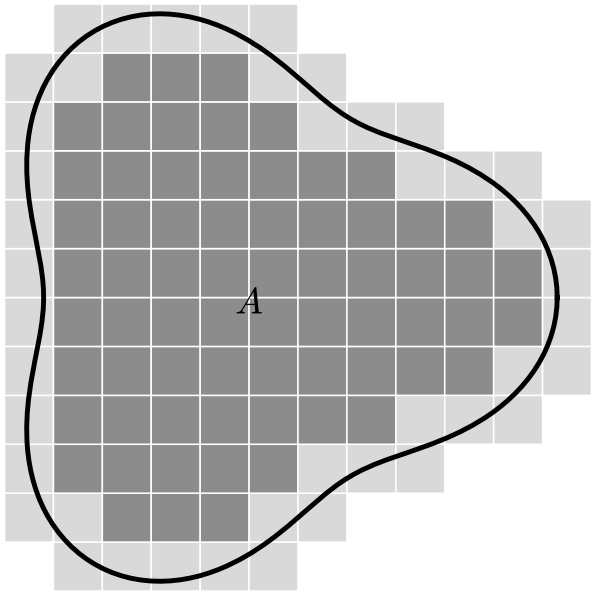


Figura 10: Rejilla sobre A: los cubos dentro de A (gris oscuro) y los que tocan ∂A (gris claro). Las imágenes de los primeros dan casi $\int_A |\det Dg|$; las de los segundos ocupan poco.

Demostración. Si $A = \emptyset$ no hay nada que probar. Sean $\varepsilon \in (0, 1]$ y escribamos $J(x) := |\det Dg(x)|$.

1. *Integrabilidad.* $\det Dg$ es un polinomio en las parciales (AL.4 ⚠ Álgebra Lineal), que son continuas: J es continua en U (C3-012.T2), acotada en el compacto $\bar{A}$ (C3-014.C1) e integrable en A (C4-005.T4 a).
2. *Margen.* Por C3-014.T3 (b) hay $r > 0$ con $B(x, r) \subset U$ para $x \in \bar{A}$, y $K' := \{z : d(z, \bar{A}) \leq r/2\}$ es compacto y está en U (como en C4-009.T3).
3. *Constantes.* $x \mapsto Dg(x)$ es continua en U (C3-022.T2) y $x \mapsto Dg(x)^{-1}$ también (C3-020.T2, composición). Sean $N_1 := \max_{K'} \|Dg(x)^{-1}\|_\infty$ y $D_0 := \max_{K'} J$ (C4-009.T1, C3-014.C1).
4. *Continuidad uniforme.* Las entradas de Dg y la función J son uniformemente continuas en K' (C3-014.T2): hay $\delta_1 > 0$ tal que, si $x, y \in K'$ y $|x - y| < \delta_1$, cada entrada de $Dg(x) - Dg(y)$ tiene valor absoluto $< \varepsilon/(nN_1)$ y $|J(x) - J(y)| < \varepsilon$. Por C4-009.T1, $\|Dg(x) - Dg(y)\|_\infty < \varepsilon/N_1$ y
$$\|Dg(y)^{-1}Dg(x)\|_\infty = \|I_n + Dg(y)^{-1}(Dg(x) - Dg(y))\|_\infty \leq 1 + N_1\frac{\varepsilon}{N_1} = 1 + \varepsilon.$$
5. *La rejilla.* Sea R un cubo con $\bar{A} \subset \operatorname{int} R$, y G_j su rejilla, de cubos de lado $s_j \to 0$. Sea j tal que $ns_j < \min(\delta_1, r/2)$ y $U(\chi_{\partial A}, G_j) < \varepsilon$; existe porque ∂A es de Jordan con contenido 0 (C4-005.T3,

C4-003.T3), así que $U(\chi_{\partial A}, G_j) \to 0$ (C4-002.T2), y por C1-007.C1.

6. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de cubos S de G_j que cortan a $\bar{A}$, y x_S el centro de S. Si $x_0 \in S \cap \bar{A}$ y $z \in S$, $|z - x_0| \le n s_j < r/2$ (C3-007.T1): $S \subset K' \subset U$. Si $x \in S$, $|x - x_S| \le n s_j < \delta_1$.
7. *Un cubo.* Por C4-009.T5 con $T := Dg(x_S)$ y el paso 4,

$$c(g(S)) \le J(x_S)\,(1+\varepsilon)^n\, v(S).$$

8. *Sumar.* $A \subset \bar{A} \subset \bigcup_{\mathcal{S}} S$ (C4-001.T2), así que $g(A) \subset \bigcup_{\mathcal{S}} g(S)$. Los $g(S)$ son de Jordan (C4-009.T4), y por la monotonía y la subaditividad (C4-005.T4 c, e),

$$c(g(A)) \le \sum_{S\in\mathcal{S}} c(g(S)) \le (1+\varepsilon)^n \sum_{S\in\mathcal{S}} J(x_S)\, v(S).$$

9. *Los cubos del borde.* Separamos $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{in}} \cup \mathcal{S}_{\partial}$, con $\mathcal{S}_{\text{in}}$ los cubos contenidos en A. Si $S \in \mathcal{S}_{\partial}$, entonces $S \cap \partial A \neq \emptyset$: si no, S sería la unión de $S \cap \operatorname{int} A$ y $S \cap \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ (C3-008.T3), abiertos en S y disjuntos; el primero no es vacío porque S corta a $\bar{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$, y el segundo tampoco porque $S \not\subset A$. Eso separaría a S, que es convexo y por lo tanto conexo (C3-011.T2, C3-011.D1).
10. Por el paso 9, $\sum_{\mathcal{S}_\partial} J(x_S)\, v(S) \le D_0 \sum_{S\cap\partial A\neq\emptyset} v(S) = D_0\, U(\chi_{\partial A}, G_j) < D_0\varepsilon$.
11. *Los cubos de adentro.* Para $S \subset A$, por el paso 4, $J(x_S) \le m_S(J) + \varepsilon$, y $m_S(J)\, v(S) \le \int_S J$ (C4-005.T4 b). Los $S \in \mathcal{S}_{\text{in}}$ se cortan solo en caras, de contenido cero (C4-003.T4), y su unión E está en A, así que (C4-005.T4 c, b, con $J \ge 0$)

$$\sum_{\mathcal{S}_{\text{in}}} J(x_S)\, v(S) \le \sum_{\mathcal{S}_{\text{in}}} \int_S J + \varepsilon\, v(R) = \int_E J + \varepsilon\, v(R) \le \int_A J + \varepsilon\, v(R).$$

12. Juntando los pasos 8, 10 y 11:

$$c(g(A)) \le (1+\varepsilon)^n \Big(\int_A J + \varepsilon\, v(R) + D_0\varepsilon \Big).$$

R, D_0 y $\int_A J$ no dependen de ε. Con $\varepsilon = 1/k$, el lado derecho tiende a $\int_A J$ cuando $k \to \infty$ (C1-013.T2), y por C1-013.T3, $c(g(A)) \le \int_A J$. ■

⚠ Por qué $\varepsilon \le 1$ no estorba

Las constantes r, K', N_1 y D_0 se fijan antes de ε; solo δ_1 y j dependen de él. Por eso se puede hacer $\varepsilon \to 0$ al final sin que el lado derecho cambie de forma.

Parte 2 · La igualdad

Teorema C4-010.T2 (desigualdad para integrales)

Sean U, g, A como en C4-010.T1 y $f : g(A) \to \mathbb{R}$ acotada, $f \geq 0$, integrable en $g(A)$. Entonces $(f \circ g)|\det Dg|$ es integrable en A y $\int_{g(A)} f \leq \int_A (f \circ g)|\det Dg|$.

Demostración. Sean $J := |\det Dg|$, $D_0 := \max_{\bar{A}} J$, $0 \leq f \leq B$ y R una caja con $\bar{A} \subset \operatorname{int} R$. $g(A)$ es de Jordan con cerradura $g(\bar{A}) \subset V := g(U)$ (C4-009.T4).

1. *Discontinuidades.* $\tilde{f}$ (la extensión por cero de f) es integrable en una caja, así que $\mathrm{Disc}(\tilde{f})$ tiene medida cero (C4-004.T2). Si $y \in \operatorname{int} g(A)$ y $\tilde{f}$ es continua en y, f es continua en y. Así f es continua en $g(A)$ fuera de $N := \mathrm{Disc}(\tilde{f}) \cup \partial g(A)$, de medida cero (C4-003.T2).
2. Si $x \in A$ y $g(x) \notin N$, $f \circ g$ es continua en x (C3-012.T2), y J también. Así $\mathrm{Disc}((f \circ g)J) \subset A \cap g^{-1}(N) \subset g^{-1}(N \cap g(\bar{A}))$, con $N \cap g(\bar{A})$ de medida cero dentro del compacto $g(\bar{A}) \subset V$. Por C4-009.T3 aplicado a g^{-1}, que es C^1 en V (C4-009.T4), ese conjunto tiene medida cero. $(f \circ g)J$ y $f \circ g$ son acotadas, luego integrables en A (C4-005.T4 a).
3. *Partir con una rejilla.* Para $S \in G_j$ sea $A_S := A \cap S$, de Jordan (C4-005.T3), con $\bar{A}_S \subset \bar{A} \subset U$. $g(A) = \bigcup_S g(A_S)$ y, como g es inyectiva, $g(A_S) \cap g(A_{S'}) = g(A_S \cap A_{S'}) \subset g(\bar{A} \cap \partial S)$, de contenido cero (C4-003.T4, C4-003.T2 a, C4-009.T3). Por la aditividad (C4-005.T4 c, inducción), $\int_{g(A)} f = \sum_S \int_{g(A_S)} f$, y lo mismo $\int_A (f \circ g)J = \sum_S \int_{A_S} (f \circ g)J$.
4. *Cada pedazo.* Sean $M_S := \sup_{A_S}(f \circ g) = \sup_{g(A_S)} f$ y $m_S := \inf_{A_S}(f \circ g)$ (si $A_S = \emptyset$, el término es 0). Por la monotonía (C4-005.T4 b) y C4-010.T1,
$$\int_{g(A_S)} f \leq M_S\, c(g(A_S)) \leq M_S \int_{A_S} J.$$
5. *La diferencia.* Por la monotonía, $0 \leq J \leq D_0$ y $c(A_S) \leq v(S)$:
$$M_S \int_{A_S} J - \int_{A_S} (f \circ g)J = \int_{A_S} (M_S - f \circ g)\, J \leq D_0\, (M_S - m_S)\, v(S).$$
6. Sea $\varphi := \widetilde{f \circ g}$ en R (la extensión por cero de $f \circ g$ desde A), integrable (paso 2). Si $A_S \neq \emptyset$, $M_S(\varphi) = M_S$ (porque $\varphi \geq 0$) y $m_S(\varphi) \leq m_S$ (vale 0 fuera de A), así que $M_S - m_S \leq M_S(\varphi) - m_S(\varphi)$. Sumando los pasos 3-5:
$$\int_{g(A)} f \leq \int_A (f \circ g)J + D_0 \left(U(\varphi, G_j) - L(\varphi, G_j)\right).$$

7. Por Darboux (C4-002.T2), $U(\varphi, G_j) - L(\varphi, G_j) \to 0$, y por C1-013.T3, $\int_{g(A)} f \le \int_A (f \circ g) J$. ■

Teorema C4-010.T3 (teorema del cambio de variables)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $g : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, inyectiva, con $\det Dg(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, A de Jordan con $\bar{A} \subset U$ y $f : g(A) \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Entonces $g(A)$ es de Jordan, $(f \circ g)|\det Dg|$ es integrable en A y $\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det Dg|$.

Idea de la demostración

La desigualdad $\le$ es C4-010.T2. Para $\ge$ se aplica C4-010.T2 a la inversa g^{-1}: el factor $|\det D(g^{-1})|$ es el recíproco de $|\det Dg|$ y se cancela. Para f con signo se suma una constante.

Demostración. Por AL.4 ⚠ Álgebra Lineal, $\det Dg(x) \neq 0$ quiere decir que $Dg(x)$ es invertible (C3-022.D3), así que g cumple las hipótesis de C4-009.T4: $V := g(U)$ es abierto, g^{-1} es C^1 con $|\det D(g^{-1})(y)| = 1/|\det Dg(g^{-1}(y))|$, y $g(A)$ es de Jordan con cerradura $g(\bar{A}) \subset V$.

1. $f \ge 0$, *«≤».* Es C4-010.T2, que da también la integrabilidad de $F := (f \circ g)|\det Dg|$ en A.
2. $f \ge 0$, *«≥».* F es acotada, $F \ge 0$ e integrable en $A = g^{-1}(g(A))$. Aplicamos C4-010.T2 a $g^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$, al conjunto de Jordan $g(A)$ (con cerradura en V) y a F:
$$\int_A F \le \int_{g(A)} (F \circ g^{-1})\,|\det D(g^{-1})|.$$
3. Para $y \in g(A)$, $(F \circ g^{-1})(y)\,|\det D(g^{-1})(y)| = f(y)\,|\det Dg(g^{-1}(y))| \cdot \frac{1}{|\det Dg(g^{-1}(y))|} = f(y)$. Así $\int_A F \le \int_{g(A)} f$, y con el paso 1 hay igualdad.
4. *f cualquiera.* Sea $M := \sup_{g(A)} |f|$. $f + M \ge 0$ es acotada e integrable en $g(A)$ (C4-005.T4 a, b), y la constante M también. Por los pasos 1-3 para $f + M$ y para M:
$$\int_{g(A)} (f + M) = \int_A ((f + M) \circ g)|\det Dg|, \qquad \int_{g(A)} M = \int_A M|\det Dg|.$$
5. $(f \circ g)|\det Dg| = ((f + M) \circ g)|\det Dg| - M|\det Dg|$ es integrable (C4-005.T4 b), y restando, $\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det Dg|$. ■

Corolario C4-010.C1 (cambio afín)

Si $g(x) = Tx + p$ con T invertible, $\int_{g(A)} f = |\det T| \int_A f \circ g$.

Demostración. g es C^1 en $U = \mathbb{R}^n$ con $Dg(x) = T$ (C3-022.T1), inyectiva (C3-007.T4) y $\det T \neq 0$ (AL.4). Todo A de Jordan tiene $\bar{A} \subset \mathbb{R}^n$. Por C4-010.T3, $\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det T| = |\det T| \int_A f \circ g$ (C4-005.T4 b). ■

Ejemplo C4-010.E1

Para $D := \{|x| + |y| \leq 1\}$ y $u = x + y, v = x - y$: $\int_D (x+y)^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]^2} u^2\, du\, dv = 2/3$.

1. Sea $g(u,v) := (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$, lineal con matriz $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\det T = -\frac{1}{2}$ (AL.4): $|\det T| = \frac{1}{2}$.
2. $D = g([-1,1]^2)$: si $(x,y) = g(u,v)$, entonces $u = x + y$, $v = x - y$, y $|x| + |y| = \max(|x+y|, |x-y|)$ (si $xy \geq 0$, $|x+y| = |x| + |y| \geq |x-y|$; si $xy < 0$, al revés; C1-004.T4). Así $|x| + |y| \leq 1$ si y solo si $|u|, |v| \leq 1$.
3. $f(x,y) = (x+y)^2$ cumple $f(g(u,v)) = u^2$. Por C4-010.C1 y C4-006.C1,

$$\int_D (x+y)^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2\, dv\, du = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{(C2-009.E1)}.$$

Por qué cada hipótesis

⚠ **Inyectiva**

$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ en $A = [1,2] \times [0, 4\pi]$ da dos vueltas: $\int_A r = 6\pi$, pero $c(g(A)) = 3\pi$ (la corona). Sin inyectividad se cuenta dos veces.

⚠ $\det Dg \neq 0$ **en todo** $\bar{A}$

Las polares tienen $\det DP = r$, que se anula en $r = 0$. El teorema de esta clase no se aplica al disco $P([0,1] \times [-\pi, \pi])$, que toca $r = 0$ y además no es inyectivo en $\theta = \pm\pi$. Para eso está la versión con un conjunto excepcional de contenido cero (C4-011.T1).

Ejercicios

1. Calcula $\int_D (x-y)^2$ en el cuadrado girado D de C4-010.E1.
2. Sea T invertible. Demuestra que $\int_{T(A)} f(T^{-1}y)\,dy = |\det T| \int_A f$.
3. Calcula el área de la región $\{1 \le xy \le 2,\ 1 \le y/x \le 3,\ x, y > 0\}$ con $u = xy$, $v = y/x$.
4. Explica por qué en C4-010.T1 solo se suman los cubos que cortan a $\bar{A}$, y no todos los de la rejilla.

Respuestas

1. Por simetría, $f(g(u,v)) = v^2$: también $2/3$.
2. Con $g = T$ y la función $y \mapsto f(T^{-1}y)$ en C4-010.C1.
3. La inversa $(u,v) \mapsto (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$ en $[1,2] \times [1,3]$ tiene $|\det| = \frac{1}{2v}$: el área es $\int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{2v}\,dv\,du = \frac{1}{2}\log 3 \approx 0.5493$.
4. Los demás no tocan a A y sus imágenes no son necesarias para cubrir $g(A)$; además podrían salirse de U, donde g no está definida.

C4-011 · Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Motivación

> **El radar y su punto ciego**
> Un radar describe cada punto con distancia y ángulo. Es la manera natural de medir discos, conos y bolas. Pero tiene un punto ciego: en el origen el ángulo no está definido, y el ángulo π y el $-\pi$ dan la misma dirección. Ahí las polares no son inyectivas y su jacobiano r se anula.
> Esos defectos viven en segmentos, de contenido cero. El teorema de esta clase dice que el cambio de variables sigue valiendo si los defectos están en un conjunto de contenido cero; con él, polares, cilíndricas y esféricas quedan justificadas, y el área en polares de Cálculo II deja de ser una definición.
> Dónde falla la analogía: un radar real tiene un alcance y una resolución finitos; aquí el «radar» es exacto.

$\int_{\bar{B}(0,2)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi(1-e^{-4}) \approx 3.0841$ en el plano, y la bola de radio 1 mide $4\pi/3$ en esféricas. En cartesianas, la primera cuenta pediría una primitiva de e^{-x^2}, que no se escribe con funciones elementales; en polares sale con una sola primitiva.

Parte 1 · Cambio de variables con un conjunto excepcional

Teorema C4-011.T1 (cambio de variables con un conjunto excepcional)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, A de Jordan con $\bar{A} \subset U$ y $U_0 \subset U$ abierto tal que g es inyectiva y $\det Dg \neq 0$ en U_0, y $Z := \bar{A} \setminus U_0$ tiene contenido cero. Entonces $g(A)$ es de Jordan y, para f acotada e integrable en $g(A)$, $(f \circ g)|\det Dg|$ es integrable en A y $\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det Dg|$.

Idea de la demostración

Se tapa el conjunto malo Z con los cubos de una rejilla que lo tocan: E_j, de contenido $\to 0$. Fuera de E_j vale el teorema de C4-010. Lo que queda dentro de E_j, de los dos lados de la fórmula, tiene contenido tan chico como se quiera (del lado de la imagen, por C4-009.T3), y el lema de aproximación hace el resto.

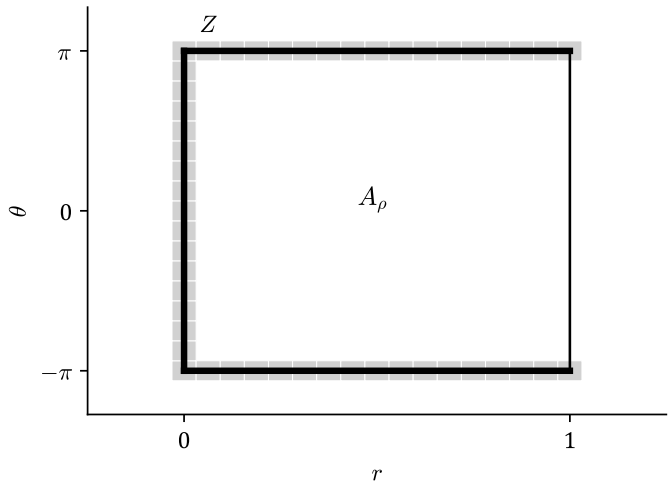


Figura 11: El conjunto excepcional Z (segmentos gruesos) tapado por los cubos de la rejilla que lo tocan (E_j, gris). Fuera de E_j, g es un difeomorfismo.

Demostración. Sea $J := |\det Dg|$, continua en U (AL.4 ⚠ Álgebra Lineal, C3-012.T2), y $D_0 := \max_{\bar{A}} J$ (C3-014.C1).

1. *Z es compacto.* $Z = \bar{A} \cap (\mathbb{R}^n \setminus U_0)$ es cerrado (C3-008.T2, C3-008.T3) y acotado: compacto (C3-010.T4).
2. *Las cubiertas E_j.* Sea R un cubo con $\bar{A} \subset \operatorname{int} R$ y $E_j :=$ la unión de los cubos de G_j que cortan a Z. Cada $z \in Z$ está en $\operatorname{int} E_j$: en cada coordenada, z_i es interior a un subintervalo de la rejilla o es un punto de la rejilla distinto de los extremos de R (porque $z \in \operatorname{int} R$), y la unión de los subintervalos que contienen a z_i contiene un intervalo abierto alrededor de z_i; el producto de esos intervalos es un abierto alrededor de z contenido en la unión de los cubos que contienen a z, que cortan a Z.
3. *$c(E_j) \to 0$.* Los cubos de E_j se cortan solo en caras (contenido cero, C4-003.T4), así que $c(E_j) = \sum_{S \cap Z \neq \emptyset} v(S) = U(\chi_Z, G_j)$ (C4-005.T4 c, C4-001.D3). Como Z tiene contenido cero, es de Jordan

con $c(Z) = 0$ (C4-005.T3), y por Darboux (C4-002.T2), $c(E_j) \to 0$.

4. *Lejos de Z.* $A_j := A \setminus \operatorname{int} E_j$ es de Jordan (C4-005.T3). $\bar{A} \setminus \operatorname{int} E_j$ es cerrado y contiene a A_j, así que $\bar{A}_j \subset \bar{A} \setminus \operatorname{int} E_j \subset \bar{A} \setminus Z \subset U_0$ (paso 2). Como U_0 es abierto y $g|_{U_0}$ es C^1, inyectiva y con $\det Dg \neq 0$, C4-010.T3 da: $g(A_j)$ es de Jordan y, para toda h acotada e integrable en $g(A_j)$, $\int_{g(A_j)} h = \int_{A_j} (h \circ g)J$.
5. *$g(A)$ es de Jordan.* $g(\bar{A})$ es compacto (C3-014.T1) y contiene a $g(A)$, así que $g(A)$ es acotado y su cerradura está en $g(\bar{A})$. Sea $y \in \partial g(A)$; entonces $y = g(x)$ con $x \in \bar{A}$. Si $x \in \operatorname{int} A \cap U_0$, el abierto $O := \operatorname{int} A \cap U_0$ cumple que $g(O)$ es abierto (C3-025.T1 aplicado a $g|_O$ en cada punto, como en C4-009.T4) y $g(O) \subset g(A)$: $y \in \operatorname{int} g(A)$, imposible. Así $x \in \bar{A} \setminus (\operatorname{int} A \cap U_0) \subset \partial A \cup Z$ (C3-008.T3). Por lo tanto $\partial g(A) \subset g(\partial A \cup Z)$. $\partial A \cup Z \subset \bar{A}$ tiene contenido cero (C4-003.T3, C4-003.T2 b), y por C4-009.T3 con $K = \bar{A}$, $g(\partial A \cup Z)$ también: $g(A)$ es de Jordan.
6. *Lo que se pierde en la imagen.* Por C4-009.T3 con $K = \bar{A}$ hay δ y C tales que cada cubo S de lado $\leq \delta$ que corta a $\bar{A}$ cumple $g(S) \subset Q_S$, un cubo explícito de volumen $\leq C\, v(S)$. Para j con lado de $G_j \leq \delta$: si $y \in g(A) \setminus g(A_j)$, $y = g(x)$ con $x \in A \setminus A_j \subset \bar{A} \cap E_j$, así que x está en un cubo S de E_j (que corta a $Z \subset \bar{A}$) e $y \in Q_S$. Con $F_j := \bigcup_{S \subset E_j} Q_S$, de Jordan (C4-005.T3),

$$c\big(g(A) \setminus g(A_j)\big) \leq c(F_j) \leq C \sum_{S \subset E_j} v(S) = C\, c(E_j)$$

(C4-005.T4 c, e; $g(A) \setminus g(A_j)$ es de Jordan por C4-005.T3).
7. *El lado de la imagen.* Sean $|f| \leq B$ y f integrable en $g(A)$; f es integrable en $g(A_j) \subset g(A)$ y en $g(A) \setminus g(A_j)$ (C4-005.T4 c), y

$$\Big| \int_{g(A)} f - \int_{g(A_j)} f \Big| = \Big| \int_{g(A) \setminus g(A_j)} f \Big| \leq B\, C\, c(E_j)$$

(C4-005.T4 b, c).
8. *El lado de A.* Sea H la extensión por cero de $(f \circ g)J$ desde A a R; $|H| \leq BD_0$. Con $E := A \cap \operatorname{int} E_j$ (de Jordan, $c(E) \leq c(E_j)$), $H\chi_{R \setminus E}$ es la extensión por cero de $(f \circ g)J$ desde A_j, integrable por el paso 4 (con $h = f|_{g(A_j)}$). Como $c(E_j) \to 0$, el lema de aproximación (C4-005.T5) dice que H es integrable en R —es decir, $(f \circ g)J$ es integrable en A— y

$$\Big| \int_A (f \circ g)J - \int_{A_j} (f \circ g)J \Big| \leq BD_0\, c(E_j).$$

9. Por los pasos 4, 7 y 8,

$$\Big| \int_{g(A)} f - \int_A (f \circ g)J \Big| \leq B(C + D_0)\, c(E_j) \to 0,$$

y las dos integrales son iguales. ■

⚠ Dónde se usa que g es C^1 en todo U

En Z la función g no es inyectiva ni tiene jacobiano invertible, pero sigue siendo C^1: eso es lo que permite usar C4-009.T3 para que $g(Z)$ y $g(E_j \cap \bar{A})$ tengan contenido chico. Un conjunto excepcional donde g «explota» no se permite.

Parte 2 · Polares, cilíndricas y esféricas

Definición C4-011.D1 (regiones polares)

Para $\alpha < \beta$ con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y $\rho : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ continua: $A_\rho := \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$ y la región polar $P(A_\rho) = \{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) : (r, \theta) \in A_\rho\}$ (C3-013.D1).

A_ρ es una región elemental en el plano (r, θ): sobre $[\alpha, \beta]$, entre 0 y ρ, con la variable r en el primer lugar (C4-007.D1, C4-006.T2). Por C4-007.T1 es compacta y de Jordan.

Teorema C4-011.T2 (integrales en polares)

Para f acotada e integrable en $P(A_\rho)$, $\int_{P(A_\rho)} f = \int_{A_\rho} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$; en particular $c(P(A_\rho)) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2$.

Demostración.

1. P es C^1 en $U = \mathbb{R}^2$ (sus entradas son $r\cos\theta$, $r\operatorname{sen}\theta$, C2-014.T6), y $\det DP(r, \theta) = r$ (C3-022.E1).
2. *Inyectiva en U_0.* $:= (0, \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi)$. Si $P(r, \theta) = P(r', \theta')$ con $r, r' > 0$, entonces $r = |P(r, \theta)| = r'$ (C3-013.T1 a) y $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos\theta', \operatorname{sen}\theta')$. Restando a θ y a θ' múltiplos enteros de 2π (C1-007.T2) se llevan a $(-\pi, \pi]$ sin cambiar sen y cos (C2-014.T5), y por la unicidad de C3-013.T1 (b) quedan iguales: $\theta - \theta' = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como $|\theta - \theta'| < 2\pi$, $k = 0$. En U_0, $\det DP = r > 0$.
3. *El conjunto excepcional.* $\bar{A}_\rho = A_\rho$ (compacto), y $Z := A_\rho \setminus U_0$ está en la unión de los segmentos $\{0\} \times [\alpha, \beta]$, $[0, \rho(\alpha)] \times \{\alpha\}$ y, si $\beta = \alpha + 2\pi$, $[0, \rho(\beta)] \times \{\beta\}$: tres segmentos acotados en rectas, de contenido cero (C4-003.T4, C4-003.T2 b).
4. Por C4-011.T1, $\int_{P(A_\rho)} f = \int_{A_\rho} f(P(r, \theta))\, r$.

5. Con $f = 1$ y C4-007.T1 (región elemental en r sobre $[\alpha, \beta]$) y C2-009.E1:

$$c(P(A_\rho)) = \int_\alpha^\beta \Big(\int_0^{\rho(\theta)} r\, dr \Big) d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2. \qquad \blacksquare$$

Corolario C4-011.C1 (cierra C2-019.D2)

El área en polares definida en C2-019.D2 es el contenido de Jordan de la región; coincide con C2-019.D1 cuando la región es de los dos tipos (C2-019.E2 lo había comprobado solo en sectores).

Demostración. La región de C2-019.D2 es $P(A_\rho)$, y C2-019.D2 *definió* su área como $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2$; por C4-011.T2 ese número es $c(P(A_\rho))$. Si además la región es la de C2-019.D1 (entre dos gráficas), su área según C2-019.D1 también es su contenido (C4-007.C1): las dos definiciones dan el mismo número, el contenido del mismo conjunto. ■

Teorema C4-011.T3 (cilíndricas y esféricas)

Si $A \subset [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R}$ es de Jordan y compacto, $\int_{C(A)} f = \int_A f(C(r,\theta,z))\, r$; si $A \subset [0,\infty) \times [0,\pi] \times [-\pi,\pi]$ es de Jordan y compacto, $\int_{E(A)} f = \int_A f(E(\rho,\varphi,\theta))\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ (f acotada e integrable en la imagen).

Demostración.

1. *Cilíndricas.* $C(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, y por el desarrollo 3×3 (AL.4 ⚠ Álgebra Lineal)

$$\det DC = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r$$

   (C2-014.T5). En $U_0 := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$, C es inyectiva (la tercera coordenada es z, y las dos primeras son las polares, inyectivas por el paso 2 de C4-011.T2 con $\alpha = -\pi$) y $\det DC = r > 0$. $Z = A \setminus U_0 \subset \{r = 0\} \cup \{\theta = -\pi\} \cup \{\theta = \pi\}$, acotado: contenido cero (C4-003.T4, C4-003.T2). Por C4-011.T1, con $|\det DC| = r$ en A ($r \geq 0$), vale la fórmula.
2. *Esféricas.* $E(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$ es C^1 y $\det DE = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$ (C3-022.E1). En $U_0 := (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$: $\operatorname{sen}\varphi > 0$ (C2-014.T4), así que $\det DE > 0$; y si $E(\rho,\varphi,\theta) = E(\rho',\varphi',\theta')$, las dos primeras coordenadas no son ambas cero, y por la unicidad de C3-013.T2 ($\rho > 0, \varphi \in (0,\pi), \theta \in (-\pi,\pi]$) los parámetros coinciden.

3. $Z = A \setminus U_0 \subset \{\rho = 0\} \cup \{\varphi = 0\} \cup \{\varphi = \pi\} \cup \{\theta = \pm\pi\}$, acotado: contenido cero (C4-003.T4, C4-003.T2). Como $\operatorname{sen}\varphi \geq 0$ en $[0,\pi]$, $|\det DE| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ en A, y por C4-011.T1 vale la fórmula. ■

Ejemplos resueltos

Ejemplo C4-011.E1

La bola de radio R tiene volumen $4\pi R^3/3$ (esféricas); $\int_{\bar{B}(0,R)} e^{-x^2-y^2} = \pi(1-e^{-R^2})$ en $\mathbb{R}^2$; $\int_{\bar{B}(0,R)} |x|^2 = 4\pi R^5/5$ en $\mathbb{R}^3$; el cono de altura h y radio a tiene volumen $\pi a^2 h/3$ (cilíndricas).

1. *La bola es $E(A)$ con $A := [0,R]\times[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$.* $|E(\rho,\varphi,\theta)| = \rho \leq R$ (C3-013.T2), así que $E(A) \subset \bar{B}(0,R)$. Recíprocamente, si $|x| \leq R$: si $(x_1,x_2) \neq 0$, C3-013.T2 da los parámetros; si $x = (0,0,x_3)$ con $x_3 \neq 0$, sirve $\rho = |x_3|$ con $\varphi = 0$ o π; si $x = 0$, $\rho = 0$.
2. *Volumen.* A es una caja (compacta y de Jordan). Por C4-011.T3 y las iteradas (C4-006.C2):

$$c(\bar{B}(0,R)) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{R} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{R^3}{3}\cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3},$$

   con $\int_0^\pi \operatorname{sen} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$ (C2-009.C1, C2-014.T6, C2-014.T4).
3. $\int e^{-x^2-y^2}$. El disco es $P(A_\rho)$ con $\rho \equiv R$ en $[-\pi,\pi]$ (C3-013.T1 b, y $0 = P(0,\theta)$), y $e^{-(r\cos\theta)^2-(r\operatorname{sen}\theta)^2} = e^{-r^2}$ (C2-014.T5). Con $G(r) := -\frac{1}{2}e^{-r^2}$, $G'(r) = re^{-r^2}$ (C2-012.T1, C1-030.T1), y por C4-011.T2 y C2-009.C1,

$$\int_{\bar{B}(0,R)} e^{-x^2-y^2} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{R} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1-e^{-R^2}}{2} = \pi(1-e^{-R^2}).$$

4. $\int |x|^2$. $|E(\rho,\varphi,\theta)|^2 = \rho^2$, así que $\int_{\bar{B}(0,R)} |x|^2 = \int_A \rho^4 \operatorname{sen}\varphi = \frac{R^5}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi R^5}{5}$.
5. *Cono.* Sea $A := \{(r,\theta,z) : \theta \in [-\pi,\pi],\ 0 \leq z \leq h,\ 0 \leq r \leq a(1-z/h)\}$, una región elemental en r sobre la caja $[-\pi,\pi]\times[0,h]$ (C4-007.T1, C4-006.T2), compacta y de Jordan; el cono es $C(A)$. Por C4-011.T3,

$$c(C(A)) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{h} \frac{a^2(1-z/h)^2}{2}\, dz\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{a^2}{2}\cdot\frac{h}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

   ($\int_0^h (1 - 2z/h + z^2/h^2)\, dz = h - h + h/3$, C2-009.E1).

Un ejemplo a medias: el volumen de la bola en cilíndricas

La bola de radio R es $C(A)$ con $A = \{(r,\theta,z) : \theta \in [-\pi,\pi],\ |z| \le R,\ 0 \le r \le \sqrt{R^2 - z^2}\}$. Por C4-011.T3, su volumen es $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{R^2-z^2}{2}\, dz\, d\theta$. Termina la cuenta: debe dar $4\pi R^3/3$.

⚠ El factor r no se olvida

$\int_{\bar{B}(0,1)} 1 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\, dr\, d\theta = \pi$. Sin el factor r saldría 2π: el «rectángulo» polar $[0,1]\times[-\pi,\pi]$ tiene área 2π, pero sus cuadritos cerca de $r = 0$ se encogen al pasar al disco.

Ejercicios

1. Calcula el área del cardioide $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [-\pi,\pi]$.
2. Calcula $\int_{\bar{B}(0,1)} (x^2 + y^2)$ en $\mathbb{R}^2$ y compara con C4-007.E3.
3. Calcula el volumen de la región dentro de la esfera $|x| = 2$ y arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. ¿Por qué en C4-011.T2 se pide $\beta - \alpha \le 2\pi$?

Respuestas

1. $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r^3\, dr\, d\theta = \pi/2$, el mismo valor que salió en C4-007.E3 con Cavalieri ($r = 1$).
3. En esféricas, $\rho \le 2$ y $\varphi \le \pi/4$: $\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = 2\pi \cdot \frac{8}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.
4. Si $\beta - \alpha > 2\pi$, P da más de una vuelta y no hay un U_0 con conjunto excepcional de contenido cero: se contaría dos veces una parte de la región.

C4-012 · Integrales impropias y derivación bajo la integral

Motivación

> **La lámpara sobre un piso sin fin**
> Una lámpara cuelga sobre un piso muy grande. La luz que llega a cada metro cuadrado del piso, a distancia r del punto que está justo debajo de la lámpara, es e^{-r^2} (en las unidades de la lámpara). Ningún pedazo del piso queda a oscuras, y el piso no tiene fin. ¿Cuánta luz cae en total?
> Si sumas la luz en discos cada vez más grandes obtienes $\pi(1-e^{-R^2})$: 1.9859, 3.0841, 3.1412 para $R = 1, 2, 3$. Si sumas en cuadrados $[-j, j]^2$ obtienes 2.2310, 3.1123, 3.1415. Las dos cuentas se acercan al mismo número, π. Este capítulo explica por qué no importa la forma de los «cuartos» con que se recorre el piso, y de ahí sale la integral de Gauss $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.
> Dónde falla la analogía: una lámpara real no ilumina como e^{-r^2} y ningún piso es infinito; el modelo sirve porque lo que cae lejos es casi nada.

Parte 1 · Integrales impropias de funciones no negativas

Definición C4-012.D1 (integral impropia de una función no negativa)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to [0, \infty)$ integrable en todo compacto de Jordan $K \subset U$.

$$\int_U f := \sup\left\{ \int_K f : K \subset U \text{ compacto de Jordan} \right\} \in [0, \infty];$$

converge si es finita.

El conjunto del supremo no es vacío: $\emptyset$ es un compacto de Jordan contenido en U (su frontera es vacía, C4-005.D1) con $\int_\emptyset f = 0$. Cada $\int_K f$ es ≥ 0 (C4-005.T4 (b)), y si el conjunto no está acotado superiormente el supremo es ∞ (C1-006.D1, axioma S).

Teorema C4-012.T1 (agotamientos)

Si $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ son compactos de Jordan con $U = \bigcup_j \operatorname{int} K_j$, entonces $\int_U f = \lim \int_{K_j} f$ (finito o ∞). Si $0 \le f \le g$, $\int_U f \le \int_U g$; $\int_U (f+g) = \int_U f + \int_U g$.

Para que $\int_{K_j} f$ tenga sentido, los K_j están contenidos en U (es donde está definida f); así se lee el enunciado.

Idea de la demostración

Un compacto $K \subset U$ está cubierto por los abiertos crecientes $\operatorname{int} K_j$, así que cabe en uno solo de ellos: la sucesión $\int_{K_j} f$ ya «ve» a todos los compactos.

Demostración. Primero un hecho que se usa tres veces: si $K \subset K'$ son compactos de Jordan en U y $f \ge 0$, entonces $\int_K f \le \int_{K'} f$.

1. Sea R una caja que contiene a K'. Las extensiones por cero $\tilde{f}_K$ y $\tilde{f}_{K'}$ (C4-005.D1) cumplen $0 \le \tilde{f}_K \le \tilde{f}_{K'}$ en R, porque $f \ge 0$ y $K \subset K'$.
2. Las dos son integrables en R (hipótesis de C4-012.D1), y por la monotonía (C4-001.T5 (b)) $\int_K f = \int_R \tilde{f}_K \le \int_R \tilde{f}_{K'} = \int_{K'} f$.

Ahora el teorema. Sea $a_j := \int_{K_j} f$.

3. Como $K_j \subset K_{j+1}$, por los pasos 1 y 2 la sucesión (a_j) es creciente.
4. Cada K_j es uno de los compactos de C4-012.D1, así que $a_j \le \int_U f$ para todo j, y $s := \sup_j a_j \le \int_U f$ (C1-006.D1).
5. Sea $K \subset U$ compacto de Jordan. La familia $\{\operatorname{int} K_j\}$ es una cubierta abierta de K ($\operatorname{int} K_j$ es abierto, C3-008.T3, y su unión es $U \supset K$). Por la compacidad (C3-010.D1) hay $j_1 < \cdots < j_m$ con $K \subset \operatorname{int} K_{j_1} \cup \cdots \cup \operatorname{int} K_{j_m}$.
6. Si $j \le j'$, $\operatorname{int} K_j \subset \operatorname{int} K_{j'}$: $\operatorname{int} K_j$ es un abierto contenido en $K_{j'}$ y el interior es el mayor de ellos (C3-008.T3). Con $N := j_m$ queda $K \subset \operatorname{int} K_N \subset K_N$.
7. Por los pasos 1 y 2, $\int_K f \le a_N \le s$. Como K era cualquiera, $\int_U f \le s$ (C1-006.D1), y con el paso 4, $\int_U f = s$.
8. Si $s < \infty$, la sucesión creciente y acotada (a_j) converge a su supremo s (C1-014.T2). Si $s = \infty$, para cada M hay N con $a_N > M$ (C1-006.T2), y por el paso 3 $a_j > M$ para $j \ge N$: $a_j \to \infty$. En los

dos casos $\int_U f = \lim a_j$.

9. *Monotonía.* Si $0 \le f \le g$ y $K \subset U$ es compacto de Jordan, $\int_K f \le \int_K g \le \int_U g$ (C4-005.T4 (b) y C4-012.D1). Tomando el supremo en K, $\int_U f \le \int_U g$ (C1-006.D1).
10. *Aditividad, $\le$.* Para cada K, $\int_K (f+g) = \int_K f + \int_K g \le \int_U f + \int_U g$ (C4-005.T4 (b)); el supremo da $\int_U (f+g) \le \int_U f + \int_U g$.
11. *Aditividad, $\ge$.* Sean K, K' compactos de Jordan en U. $K \cup K'$ es compacto (unión de dos cerrados y acotados, C3-010.T4) y de Jordan (C4-005.T3), y por el paso 1

$$\int_K f + \int_{K'} g \le \int_{K\cup K'} f + \int_{K\cup K'} g = \int_{K\cup K'} (f+g) \le \int_U (f+g).$$

12. Si $\int_U (f+g) = \infty$ no hay nada que probar. Si es finita, el paso 11 con K' fijo y el supremo en K dan $\int_U f + \int_{K'} g \le \int_U (f+g)$ (C1-006.T2); luego el supremo en K' da $\int_U f + \int_U g \le \int_U (f+g)$. ■

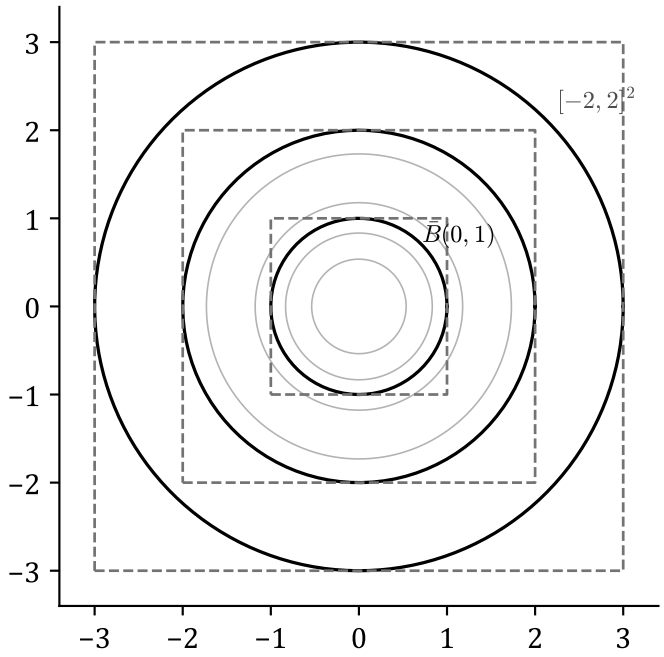


Figura 12: Dos agotamientos de $\mathbb{R}^2$ sobre las curvas de nivel de $e^{-|x|^2}$: discos (continuos) y cuadrados (punteados). Cada compacto cabe en un disco y en un cuadrado.

Corolario C4-012.C1 (coherencia con Cálculo II)

Para $n = 1$, $U = (a,b)$ $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ y $f \ge 0$ continua, $\int_U f$ converge $\iff$ la integral impropia de C2-010.D1 converge, y valen lo mismo.

Demostración. Fijemos $c \in (a,b)$ y sucesiones $a_j \downarrow a$, $b_j \uparrow b$ en (a,b) con $a_1 < c < b_1$ (por ejemplo $a_j := c - j$ si $a = -\infty$ y $a_j := a + (c-a)/(j+1)$ si $a \in \mathbb{R}$, y análogo para b_j). Sean $G(x) := \int_x^c f$ para $x \in (a,c]$ y $H(y) := \int_c^y f$ para $y \in [c,b)$.

1. Los intervalos $K_j := [a_j, b_j]$ son compactos de Jordan (cajas, C4-005.T3), crecientes, y $\bigcup_j (a_j, b_j) = (a,b)$, porque todo $x \in (a,b)$ cumple $a_j < x < b_j$ para j grande (C1-007.C1).
2. En K_j la integral de Jordan es la de Cálculo II (C4-005.T3: $c(K_j) = v(K_j)$, y C4-001.C1), así que por C4-012.T1 y la aditividad (C2-004.T1)
$$\int_U f = \lim_j \int_{a_j}^{b_j} f = \lim_j \big(G(a_j) + H(b_j)\big).$$
3. Como $f \geq 0$, G es decreciente y H creciente (C2-004.T1, C2-004.T3).
4. ($\Rightarrow$) Si $\int_U f < \infty$: para $y \in [c,b)$, $[c,y] \subset U$ es un compacto de Jordan y $H(y) \leq \int_U f$ (C4-012.D1). Así H está acotada y por C2-010.T3 $\int_c^b f$ converge; lo mismo con G y $\int_a^c f$. Por C2-010.D1 (c) la integral impropia de Cálculo II converge.
5. ($\Leftarrow$) Si converge, sean $L_1 := \lim_{x \to a^+} G(x)$ y $L_2 := \lim_{y \to b^-} H(y)$. Por la monotonía del paso 3, $G \leq L_1$ y $H \leq L_2$ (C1-019.T3). Todo compacto $K \subset (a,b)$ tiene mínimo α y máximo β (C3-014.C1) y $K \subset [\alpha, \beta] \subset (a,b)$; por los pasos 1 y 2 de la prueba de C4-012.T1, $\int_K f \leq G(\alpha) + H(\beta) \leq L_1 + L_2$. Así $\int_U f < \infty$.
6. *Mismo valor.* En el caso convergente, $a_j \to a$ y $b_j \to b$ con $a_j \neq a$, $b_j \neq b$, así que $G(a_j) \to L_1$ y $H(b_j) \to L_2$ (C1-019.T1, en su versión lateral y en $\pm\infty$), y por el paso 2 y C1-013.T2, $\int_U f = L_1 + L_2 = \int_a^b f$ (C2-010.D1 (c)). ■

Ejemplo C4-012.E1 (integral de Gauss)
$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} = \pi$ (con discos, C4-011.E1), y con cuadrados $[-j,j]^2$, $(\int_{-j}^{j} e^{-t^2}\,dt)^2 \to \pi$; por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

1. $f(x) := e^{-|x|^2}$ es continua y positiva en $U = \mathbb{R}^2$ (C2-012.T1), así que es integrable en todo compacto de Jordan (C4-005.T4 (a), acotada por C3-014.C1).
2. *Discos.* $K_j := \bar{B}(0,j)$ son compactos de Jordan crecientes (C4-011.E1 los integra; su frontera es una circunferencia, de contenido cero, C4-003.T4) y $\operatorname{int} K_j \supset B(0,j)$ cubre $\mathbb{R}^2$ (C1-007.C1). Por C4-011.E1, $\int_{K_j} f = \pi(1 - e^{-j^2})$, que tiende a π porque $e^{-j^2} \to 0$ (C2-012.T8). Por C4-012.T1, $\int_{\mathbb{R}^2} f = \pi$.
3. *Cuadrados.* $K_j' := [-j,j]^2$ también agota $\mathbb{R}^2$. Como $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ (C2-012.T2), Fubini (C4-

006.C1) da

$$\int_{[-j,j]^2} f = \int_{-j}^{j} \Big(\int_{-j}^{j} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dy \Big) dx = I_j^2, \qquad I_j := \int_{-j}^{j} e^{-t^2}\, dt.$$

4. Por C4-012.T1 con el otro agotamiento, $I_j^2 \to \int_{\mathbb{R}^2} f = \pi$. Como $I_j > 0$ y $\sqrt{\cdot}$ es continua (C2-014.T1), $I_j \to \sqrt{\pi}$ (C2-014.T1, C1-019.T1).
5. Para $n = 1$, $K_j'' := [-j, j]$ agota $\mathbb{R}$, y por C4-012.T1, $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} = \lim I_j = \sqrt{\pi}$. Por C4-012.C1, la integral impropia de Cálculo II converge y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

⚠ Por qué hace falta $f \geq 0$

El supremo sobre compactos no ve cancelaciones. Para una f que cambia de signo, dos agotamientos pueden dar límites distintos (en $\mathbb{R}$, $\int_{-j}^{j} x\, dx = 0$ pero $\int_{-j}^{2j} x\, dx = 3j^2/2 \to \infty$). Por eso el capítulo solo define $\int_U f$ para $f \geq 0$.

Ejemplo C4-012.E2

En $\mathbb{R}^2$, $\int_{B(0,1)\setminus\{0\}} |x|^{-\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha < 2$ (vale $2\pi/(2-\alpha)$); en $\mathbb{R}^3$ converge $\iff$ $\alpha < 3$. Se agota con coronas $\{1/j \leq |x| \leq 1 - 1/j\}$, imágenes de la caja $[1/j, 1-1/j] \times [-\pi, \pi]$ (C4-011.T1 con $U_0 = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$; la corona no es una región A_ρ).

Sea $U := B(0,1) \setminus \{0\}$ (abierto: es $\{0 < |x| < 1\}$, C3-012.T4) y, para $j \geq 3$, $K_j := \{1/j \leq |x| \leq 1 - 1/j\}$.

1. $f(x) = |x|^{-\alpha} = \exp(-\alpha \log |x|)$ es continua y positiva en U (C2-012.D2, C3-012.T2).
2. En $\mathbb{R}^2$ sea $A_j := [1/j, 1-1/j] \times [-\pi, \pi]$. $P(A_j) = K_j$: si $(r, \theta) \in A_j$, $|P(r,\theta)| = r$ (C3-013.T1 (a)); si $x \in K_j$, $x = P(|x|, \arg x)$ con $\arg x \in (-\pi, \pi]$ (C3-013.T1 (b)).
3. Se aplica C4-011.T1 con $g = P$ (C^1 en $\mathbb{R}^2$), $A = A_j$ (caja, de Jordan, $\bar{A} = A$) y $U_0 = (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$: ahí P es inyectiva (C3-013.T1 (b)) y $\det DP = r \neq 0$ (C3-022.E1). $Z = A_j \setminus U_0$ son los dos segmentos $\theta = \pm\pi$, de contenido cero (C4-003.T4, C4-003.T2 (b)).
4. Así K_j es de Jordan, es compacto (imagen continua de un compacto, C3-014.T1), f es continua y acotada en K_j (ahí $|x| \geq 1/j$), y con Fubini (C4-006.C1) y $|P(r,\theta)|^{-\alpha} = r^{-\alpha}$:

$$\int_{K_j} f = \int_{A_j} r^{-\alpha}\, r = 2\pi \int_{1/j}^{1-1/j} r^{1-\alpha}\, dr.$$

5. Los K_j crecen y $\operatorname{int} K_j \supset \{1/j < |x| < 1 - 1/j\}$ (abierto, C3-012.T4), que cubren U (C1-007.C1). Por C4-012.T1, $\int_U f = \lim_j 2\pi \int_{1/j}^{1-1/j} r^{1-\alpha}\, dr$.

6. Si $\alpha \neq 2$, por Barrow (C2-009.C1) con $(r^{2-\alpha})' = (2-\alpha)r^{1-\alpha}$ (C2-012.T6),

$$2\pi \int_{1/j}^{1-1/j} r^{1-\alpha}\, dr = \frac{2\pi}{2-\alpha}\Big[(1-1/j)^{2-\alpha} - j^{\alpha-2}\Big].$$

   $(1-1/j)^{2-\alpha} \to 1$ por la continuidad de $r \mapsto r^{2-\alpha}$ en 1 (C2-012.T6, C1-028.T1), y $j^{\alpha-2} = \exp((\alpha-2)\log j)$ tiende a 0 si $\alpha < 2$ y a ∞ si $\alpha > 2$ (C2-011.T3, C2-012.T8). Así converge a $2\pi/(2-\alpha)$ si $\alpha < 2$ y diverge si $\alpha > 2$.
7. Si $\alpha = 2$: $2\pi \int_{1/j}^{1-1/j} dr/r = 2\pi \log(j-1) \to \infty$ (C2-011.T3).
8. En $\mathbb{R}^3$ se usan $A_j := [1/j, 1-1/j] \times [0,\pi] \times [-\pi,\pi]$ y las esféricas: $E(A_j) = K_j$ (C3-013.T2: $|E(\rho,\varphi,\theta)| = \rho$; un punto de K_j fuera del eje x_3 es $E(|x|,\varphi,\theta)$, y uno del eje es $E(|x|,0,0)$ o $E(|x|,\pi,0)$). Por C4-011.T3 y Fubini,

$$\int_{K_j} f = \int_{A_j} \rho^{-\alpha}\rho^2 \operatorname{sen}\varphi = 4\pi \int_{1/j}^{1-1/j} \rho^{2-\alpha}\, d\rho$$

   ($\int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 2$, C2-009.C1, C2-014.T6). La misma cuenta del paso 6 con $3-\alpha$ en lugar de $2-\alpha$ da convergencia $\iff \alpha < 3$, con valor $4\pi/(3-\alpha)$.

Parte 2 · Derivar bajo el signo de integral

Teorema C4-012.T2 (continuidad de integrales con parámetro)

Sean $P \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto de Jordan y f continua en $P \times K$. $F(p) := \int_K f(p,x)\, dx$ es continua en P.

> **Idea de la demostración**
> Lo que hace falta es que $f(p,\cdot)$ se acerque a $f(p_0,\cdot)$ **a la vez en todo** K. Si no, una sucesión de puntos malos tendría una subsucesión convergente en K, y la continuidad de f en el límite fallaría.

Demostración. Si $K = \emptyset$, $F \equiv 0$. Sea $K \neq \emptyset$, y fijemos $p_0 \in P$ y $\varepsilon > 0$.

1. Para cada $p \in P$, $x \mapsto f(p,x)$ es continua en el compacto K (C3-012.T2), luego acotada (C3-014.C1) e integrable en K (C4-005.T4 (a)): F está bien definida.
2. *Afirmación:* hay $\delta > 0$ tal que $|f(p,x) - f(p_0,x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$ y todo $p \in P$ con $|p - p_0| < \delta$.

3. Si no, para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_k := \{(p,x) \in P \times K : |p-p_0| < 1/k,\ |f(p,x)-f(p_0,x)| \geq \varepsilon\}$ no es vacío, y por la elección numerable (C3-009.T0) hay una sucesión (p_k, x_k) con $(p_k, x_k) \in A_k$.
4. (x_k) está en el compacto K, así que tiene una subsucesión $x_{k_l} \to x^* \in K$ (C3-010.T4 (iii); o C3-009.T3 y K cerrado).
5. $p_{k_l} \to p_0$ (porque $|p_{k_l}-p_0| < 1/k_l$; C1-015.T1), así que $(p_{k_l}, x_{k_l}) \to (p_0, x^*)$ y $(p_0, x_{k_l}) \to (p_0, x^*)$ (C3-009.T1).
6. Por la continuidad de f en $(p_0, x^*) \in P \times K$ (C3-012.T1), $f(p_{k_l}, x_{k_l}) - f(p_0, x_{k_l}) \to f(p_0, x^*) - f(p_0, x^*) = 0$, lo que contradice $|f(p_{k_l}, x_{k_l}) - f(p_0, x_{k_l})| \geq \varepsilon$ para todo l. Esto prueba la afirmación.
7. Para $|p - p_0| < \delta$, por C4-005.T4 (b),

$$|F(p) - F(p_0)| \leq \int_K |f(p,x) - f(p_0,x)|\, dx \leq \varepsilon\, c(K).$$

Como ε es arbitrario, F es continua en p_0. ■

Teorema C4-012.T3 (regla de Leibniz)

Sean J un intervalo abierto, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto de Jordan y $f : J \times K \to \mathbb{R}$ continua tal que $\partial_t f(t,x)$ existe en todo punto y es continua en $J \times K$. Entonces $F(t) := \int_K f(t,x)\, dx$ es de clase C^1 en J y $F'(t) = \int_K \partial_t f(t,x)\, dx$.

Idea de la demostración

Por el TVM, el cociente incremental de $f(\cdot, x)$ es $\partial_t f$ en un punto intermedio. Heine en un compacto $[t-\eta, t+\eta] \times K$ hace que ese punto intermedio no importe, uniformemente en x.

Demostración. Sea $G(t) := \int_K \partial_t f(t,x)\, dx$; está bien definida y es continua en J por C4-012.T2 (con $P = J$). Si $c(K) = 0$, $F \equiv G \equiv 0$; supongamos $c(K) > 0$. Fijemos $t \in J$, $\eta > 0$ con $[t-\eta, t+\eta] \subset J$, y $\varepsilon > 0$.

1. $L := [t-\eta, t+\eta] \times K$ es compacto (C3-010.C1), y $\partial_t f$ es uniformemente continua en L (C3-014.T2): hay $\delta \in (0, \eta)$ con $|\partial_t f(s,x) - \partial_t f(s',x')| < \varepsilon$ si $(s,x), (s',x') \in L$ y $|(s,x) - (s',x')| < \delta$.
2. Sea $0 < |h| < \delta$ y $x \in K$. La función $s \mapsto f(s,x)$ es continua en el intervalo cerrado de extremos t y $t+h$ y derivable en su interior, con derivada $\partial_t f(s,x)$. Por el TVM (C1-033.T1) hay ξ entre t

y $t+h$ con

$$\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}=\partial_t f(\xi,x).$$

3. Como $|(\xi,x)-(t,x)|=|\xi-t|<\delta$, el paso 1 da

$$\left|\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}-\partial_t f(t,x)\right|<\varepsilon \quad \text{para todo } x\in K.$$

4. Por la linealidad y la cota de C4-005.T4 (b),

$$\left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h}-G(t)\right|=\left|\int_K\left(\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}-\partial_t f(t,x)\right)dx\right|\le \varepsilon\, c(K).$$

5. Así $\lim_{h\to 0}(F(t+h)-F(t))/h=G(t)$ (C1-017.D1): F es derivable en t con $F'(t)=G(t)$ (C1-027.D1).
6. $F'=G$ es continua en J (C4-012.T2), así que F es de clase C^1 en J (C2-015.D1). ■

> ⚠ **La hipótesis sobre $\partial_t f$**
>
> Que $\partial_t f$ exista no basta; hace falta que sea continua en $J\times K$ (o algo equivalente): es lo que da la uniformidad del paso 1. En el ejercicio 4 se pide un ejemplo donde derivar bajo la integral da un resultado falso.

Ejemplo C4-012.E3 (Gauss con Leibniz)
$F(t):=\left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2+\int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)}/(1+x^2)\,dx$ tiene $F'=0$ y $F(0)=\pi/4$; con $t\to\infty$, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}/2$, como en C4-012.E1.

1. Sea $A(t):=\int_0^t e^{-x^2}\,dx$. Como e^{-x^2} es continua (C2-012.T1, C1-030.T1), $A'(t)=e^{-t^2}$ (C2-008.T1), y $(A^2)'=2A(t)e^{-t^2}$ (C1-030.T1).
2. Sea $g(t,x):=e^{-t^2(1+x^2)}/(1+x^2)$ en $\mathbb{R}\times[0,1]$: es continua, y $\partial_t g(t,x)=-2t\,e^{-t^2(1+x^2)}$ (C1-030.T1, C2-012.T1) también. Por la regla de Leibniz (C4-012.T3) con $J=\mathbb{R}$ y $K=[0,1]$, y usando $e^{-t^2(1+x^2)}=e^{-t^2}e^{-(tx)^2}$ (C2-012.T2):

$$B'(t)=-2e^{-t^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,t\,dx,\qquad B(t):=\int_0^1 g(t,x)\,dx.$$

3. Con el cambio de variable $u=tx$ (C2-015.T1 con $\phi(x)=tx$, de clase C^1, $\phi(0)=0$, $\phi(1)=t$): $\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,t\,dx=\int_0^t e^{-u^2}\,du=A(t)$. Así $B'(t)=-2e^{-t^2}A(t)$.
4. $F=A^2+B$ cumple $F'=2Ae^{-t^2}-2e^{-t^2}A=0$ en $\mathbb{R}$, y es constante (C1-034.T1): $F(t)=F(0)=$

$0 + \int_0^1 dx/(1+x^2) = \pi/4$ (C2-014.T12).

5. Para $t > 0$, $0 \le g(t,x) \le e^{-t^2}$ (porque $e^{-t^2x^2} \le 1$ y $1/(1+x^2) \le 1$; C2-012.T1), así que $0 \le B(t) \le e^{-t^2} \to 0$ (C2-004.T3, C2-012.T8). Por lo tanto $A(t)^2 = \pi/4 - B(t) \to \pi/4$.
6. $A(t) \ge 0$ para $t \ge 0$, y por la continuidad de $\sqrt{\cdot}$ (C2-014.T1), $A(t) \to \sqrt{\pi}/2$. Por C2-010.D1, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$. Por simetría ($x \mapsto -x$, C2-015.T1) y C2-010.D1 (c), $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, como en C4-012.E1.

Por qué cada hipótesis

- $f \ge 0$ *en C4-012.D1.* Ver el recuadro de cuidado: con signo, el límite depende del agotamiento.
- *K compacto en C4-012.T2.* Si se integra sobre $[0,\infty)$ en lugar de un compacto, $f(p,x) = p\,e^{-px}$ es continua en $[0,1]\times[0,\infty)$, pero $F(p) = \int_0^\infty p\,e^{-px}\,dx$ vale 1 para $p > 0$ y 0 en $p = 0$: F no es continua en 0. La masa «se escapa al infinito» cuando $p \to 0^+$, justo lo que la compacidad impide.
- *$\partial_t f$ continua en C4-012.T3.* Ejercicio 4.

Ejercicios

1. Demuestra que $\int_{\mathbb{R}^2} (1+|x|^2)^{-\beta}$ converge $\iff \beta > 1$ y calcula su valor.
2. Usa C4-012.E1 y el cambio afín (C4-010.C1) para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+4y^2)}$.
3. Con la regla de Leibniz, calcula $F'(t)$ para $F(t) = \int_0^1 \log(1+tx^2)\,dx$, $t > -1$; calcula también $F(1)$.
4. Sea $f(t,x) := t^3x/(x^2+t^2)^2$ para $(t,x) \ne (0,0)$ y $f(0,0) := 0$ en $\mathbb{R}\times[0,1]$. Comprueba que $\partial_t f$ existe en todo punto, pero $F(t) = \int_0^1 f(t,x)\,dx$ cumple $F'(0) \ne \int_0^1 \partial_t f(0,x)\,dx$. ¿Qué hipótesis de C4-012.T3 falla?
5. Demuestra que si $U \subset V$ son abiertos y $f \ge 0$ es integrable en todo compacto de Jordan de V, entonces $\int_U f \le \int_V f$.

Respuestas

1. Coronas $\{1/j \le |x| \le j\}$ y C4-011.T1: $2\pi\int_{1/j}^{j} r(1+r^2)^{-\beta}\,dr$, que converge a $\pi/(\beta-1)$ si $\beta > 1$ y diverge si $\beta \le 1$ (la primitiva es $-\frac{1}{2(\beta-1)}(1+r^2)^{1-\beta}$, o $\frac{1}{2}\log(1+r^2)$ si $\beta = 1$).
2. Con $g(u,v) = (u, v/2)$, $\det = 1/2$, y agotamientos que son imágenes de discos: $\pi/2$.
3. $F'(t) = \int_0^1 x^2/(1+tx^2)\,dx$; $F(0) = 0$. Integrando por partes, $F(1) = \log 2 - 2 + \pi/2$.
4. Para $t \ne 0$, $F(t) = \frac{t^3}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{t}{2(1+t^2)}$, así que $F'(0) = 1/2$; pero $\partial_t f(0,x) = 0$ para todo x (para $x > 0$, $|f(t,x)| \le |t|^3/x^3$; y $f(t,0) = 0$). Fallan la continuidad de f y la de $\partial_t f$ en $(0,0)$

$(f(t,t) = 1/4)$.

5. Todo compacto de Jordan $K \subset U$ también está en V: el conjunto del supremo para U está contenido en el de V (C1-006.D1).

C4-013 · Caminos e integrales de trayectoria

Motivación

Un alambre doblado en semicírculo

Doblas un alambre de cobre de densidad uniforme en una semicircunferencia de radio 10 cm. ¿Dónde está su centro de masa? La simetría dice que en el eje vertical, pero ¿a qué altura? La respuesta, $2r/\pi \approx 6.37$ cm, está en el hueco: el centro de masa del alambre no está en el alambre. Para calcularlo hay que «sumar» la densidad a lo largo de una curva, con la longitud como medida. Es la integral de trayectoria, y su primera propiedad es que no depende de cómo se recorra la curva.

Dónde falla la analogía: un alambre real tiene grosor; aquí es una curva sin espesor con densidad por unidad de longitud.

Definiciones

Definición C4-013.D1 (camino C^1 por tramos)

Un **camino C^1 por tramos** es $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua con una partición $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ tal que cada $\gamma|[t_{i-1}, t_i]$ es la restricción de una curva de clase C^1 en un intervalo abierto que contiene a $[t_{i-1}, t_i]$; γ' existe salvo en finitos puntos, y en los extremos de un tramo γ' es la derivada lateral desde el tramo (la de cualquier extensión C^1). Es **cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$. **Concatenación**: si $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ y $\gamma(b) = \eta(c)$, $(\gamma \oplus \eta)(t) := \gamma(t)$ en $[a,b]$ y $\eta(t-b+c)$ en $[b, b+d-c]$. **Camino inverso**: $\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$. Las poligonales son caminos C^1 por tramos.

Dos precisiones que se usan en todo el capítulo.

- *La derivada en un tramo.* Llamemos γ_i a la curva C^1 del tramo i, definida en un intervalo abierto $J_i \supset [t_{i-1}, t_i]$. En (t_{i-1}, t_i), $\gamma_i' = \gamma'$ (la derivada solo depende de valores cercanos, C3-002.D3). En los extremos, $\gamma_i'(t_{i-1})$ es el límite lateral $\lim_{h\to 0^+}(\gamma(t_{i-1}+h)-\gamma(t_{i-1}))/h$, que solo usa valores de γ en el tramo; así no depende de la extensión elegida. En las integrales del tramo i, «γ'» quiere decir γ_i', continua en $[t_{i-1}, t_i]$.
- *La concatenación.* $\gamma \oplus \eta$ es continua (las dos fórmulas valen $\gamma(b) = \eta(c)$ en $t = b$) y C^1 por tramos con la unión de las dos particiones (la de η trasladada). γ^- es C^1 por tramos con los puntos $a + b - t_{k-i}$ y $(\gamma^-)'(t) = -\gamma'(a+b-t)$ (C3-002.T4).
- *Poligonales.* El segmento $t \mapsto p + t(q-p)$ es la restricción de una función afín, C^1 en $\mathbb{R}$; una poligonal es una concatenación de segmentos (C3-011.T3).

Definición C4-013.D2 (integral de trayectoria)

Para f continua en la traza de γ:

$$\int_\gamma f\,ds := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

Cada sumando existe: $t \mapsto f(\gamma_i(t))|\gamma_i'(t)|$ es continua en $[t_{i-1}, t_i]$ (composición, productos y norma de continuas, C3-002.T2 y C3-012.T2), luego integrable (C2-003.T1).

Resultados

Teorema C4-013.T1 (independencia de la parametrización)

$\int_\gamma f\,ds$ no depende de la partición; es aditiva para la concatenación; $\int_{\gamma^-} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$. Si $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ es de clase C^1 en un intervalo abierto que contiene a $[c,d]$, con $\varphi' \neq 0$ y $\varphi([c,d]) = [a,b]$, $\gamma \circ \varphi$ es C^1 por tramos y $\int_{\gamma\circ\varphi} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$.

Idea de la demostración

Refinar una partición solo parte integrales en pedazos (aditividad). Para φ: su derivada no cambia de signo, así que φ es estrictamente monótona y lleva particiones en particiones; en cada tramo es la sustitución de Cálculo II, y el valor absoluto $|\varphi'|$ absorbe el cambio de orientación.

Demostración. Escribimos $h_i(t) := f(\gamma_i(t))|\gamma_i'(t)|$, continua en $[t_{i-1}, t_i]$.

(a) La partición.

1. Sea P' otra partición con la propiedad de C4-013.D1 y $P'' := P \cup P'$. Cada tramo de P'' está dentro de un tramo de P, así que P'' también tiene la propiedad, con la misma γ_i en cada subtramo.
2. Si un tramo $[t_{i-1}, t_i]$ de P se parte en $t_{i-1} = s_0 < \cdots < s_m = t_i$ por los puntos de P'', por la aditividad repetida (C2-004.T1, C2-004.C1 (b)) $\int_{t_{i-1}}^{t_i} h_i = \sum_l \int_{s_{l-1}}^{s_l} h_i$. Sumando en i, la suma de C4-013.D2 con P es igual a la suma con P''.
3. Lo mismo con P' en lugar de P: las dos sumas son la de P'', y son iguales.

(b) Reparametrización. Sea φ como en el enunciado y J' el intervalo abierto donde es C^1.

4. φ' es continua y no se anula en $[c, d]$; si tomara valores de signos opuestos, se anularía en algún punto (C1-023.C1). Así $\varphi' > 0$ en todo $[c, d]$ o $\varphi' < 0$ en todo $[c, d]$, y φ es estrictamente monótona en $[c, d]$ (C1-034.T2).
5. Supongamos $\varphi' > 0$. Entonces φ es una biyección creciente de $[c, d]$ sobre $\varphi([c, d]) = [a, b]$, con $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Sean $s_i := \varphi^{-1}(t_i)$: $c = s_0 < \cdots < s_k = d$.
6. En $[s_{i-1}, s_i]$, $\gamma \circ \varphi = \gamma_i \circ \varphi$. El conjunto $\{s \in J' : \varphi(s) \in J_i\}$ es abierto (preimagen de un abierto por una continua, C3-012.T4) y contiene a $[s_{i-1}, s_i]$. Hay $\eta > 0$ con $(s_{i-1} - \eta, s_{i-1} + \eta)$ y $(s_i - \eta, s_i + \eta)$ dentro de él, así que contiene al intervalo abierto $J_i'' := (s_{i-1} - \eta, s_i + \eta)$. En J_i'', $\gamma_i \circ \varphi$ es C^1 con $(\gamma_i \circ \varphi)' = (\gamma_i' \circ \varphi)\varphi'$ (C3-002.T4). Así $\gamma \circ \varphi$ es C^1 por tramos y $|(\gamma \circ \varphi)'(s)| = |\gamma_i'(\varphi(s))|\,|\varphi'(s)|$ (C3-001.T2).
7. Para usar el cambio de variable de Cálculo II hace falta un integrando continuo en un intervalo abierto: sea $\tilde{h}_i$ igual a h_i en $[t_{i-1}, t_i]$, a $h_i(t_{i-1})$ a la izquierda y a $h_i(t_i)$ a la derecha; es continua en $\mathbb{R}$. Por C2-015.T1 (con $g = \varphi$ en J_i''),

$$\int_{\varphi(s_{i-1})}^{\varphi(s_i)} \tilde{h}_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \tilde{h}_i(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds.$$

8. Para $s \in [s_{i-1}, s_i]$, $\varphi(s) \in [t_{i-1}, t_i]$, así que $\tilde{h}_i(\varphi(s)) = h_i(\varphi(s))$, y como $\varphi' = |\varphi'|$ (C1-004.D1),

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} h_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(\gamma(\varphi(s)))\,|\gamma_i'(\varphi(s))|\,|\varphi'(s)|\,ds.$$

   El lado derecho es el sumando i de $\int_{\gamma\circ\varphi} f\,ds$ (paso 6); sumando en i, las integrales son iguales.
9. Si $\varphi' < 0$: $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$, y $s_i := \varphi^{-1}(t_{k-i})$ es creciente. En $[s_{i-1}, s_i]$, φ va de t_{k-i+1} a t_{k-i}

y $|\varphi'| = -\varphi'$. Los pasos 6 y 7 dan

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} h_{k-i+1}(\varphi(s))\,|\varphi'(s)|\,ds = -\int_{t_{k-i+1}}^{t_{k-i}} h_{k-i+1} = \int_{t_{k-i}}^{t_{k-i+1}} h_{k-i+1}$$

(C2-004.D1), y sumando en i se obtiene otra vez $\int_\gamma f\,ds$.

(c) Camino inverso. $\gamma^- = \gamma \circ \varphi$ con $\varphi(s) = a + b - s$ en $[a,b]$, de clase C^1 en $\mathbb{R}$ con $\varphi' = -1 \neq 0$ y $\varphi([a,b]) = [a,b]$. Por (b), $\int_{\gamma^-} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$.

(d) Concatenación. Con la partición de $\gamma \oplus \eta$ formada por la de γ y la de η trasladada en $b - c$, la suma de C4-013.D2 se parte en la de γ y la de $s \mapsto \eta(s - b + c)$ (C2-001.T1 (b)). Esta última es $\eta \circ \varphi$ con $\varphi(s) = s - b + c$, $\varphi' = 1$; por (b) vale $\int_\eta f\,ds$. Así $\int_{\gamma\oplus\eta} f\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\eta f\,ds$. ■

⚠ La condición $\varphi' \neq 0$

El teorema pide $\varphi' \neq 0$. Con $\varphi(s) = 3s^2 - 2s^3$ en $[0,1]$ ($\varphi'(s) = 6s(1-s)$, nula en los extremos) el resultado sigue siendo cierto, pero no se sigue de C4-013.T1 tal como está; y si φ va y regresa (por ejemplo $\varphi(s) = \operatorname{sen}(\pi s)$ en $[0,1]$, que recorre $[0,1]$ dos veces), la integral se duplica.

Teorema C4-013.T2 (longitud y cotas)

Para γ C^1 por tramos, $\int_\gamma 1\,ds = \ell(\gamma)$ (C3-003.D2); $\int_\gamma f\,ds$ es lineal en f y $\left|\int_\gamma f\,ds\right| \leq (\max_{\text{traza}} |f|) \cdot \ell(\gamma)$.

Demostración.

1. Cada γ_i es C^1 en $J_i \supset [t_{i-1}, t_i]$, así que por la fórmula de la longitud (C3-003.T4) $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'| = \ell(\gamma|[t_{i-1}, t_i])$.
2. Por la aditividad de la longitud (C3-003.T3 (c)) aplicada $k-1$ veces, γ es rectificable y $\ell(\gamma) = \sum_i \ell(\gamma|[t_{i-1}, t_i]) = \int_\gamma 1\,ds$.
3. La linealidad en f es la linealidad de cada integral (C2-004.T2) y de la suma (C1-005.T12).
4. La traza $\gamma([a,b])$ es compacta (C3-014.T1) y $|f|$ es continua en ella, así que $M := \max_{\text{traza}} |f|$ existe (C3-014.C1). En cada tramo $|f(\gamma)||\gamma'| \leq M|\gamma'|$ y por C2-004.T4 y C2-004.T3

$$\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma)|\gamma'|\right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\gamma)||\gamma'| \leq M\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'|.$$

5. Sumando con el triángulo (C2-001.T1 (c)) y el paso 2: $|\int_\gamma f\,ds| \le M\ell(\gamma)$. ■

Ejemplos

Definición C4-013.D3 (masa y centro de masa de un alambre)

Para un alambre en la traza de γ con densidad lineal $\rho \ge 0$ continua en la traza, su **masa** es $M := \int_\gamma \rho\,ds$ y, si $M > 0$, su **centro de masa** es $\frac{1}{M}\big(\int_\gamma x_1\rho\,ds, \dots, \int_\gamma x_n\rho\,ds\big)$, como en C2-022.D3 con la longitud en lugar del área.

Por C4-013.T1, la masa y el centro de masa no dependen de la parametrización.

Ejemplo C4-013.E1 (alambres)
Un alambre en la semicircunferencia de radio r con densidad constante tiene centro de masa $(0, 2r/\pi)$; la hélice de C3-002.E1 con $c > 0$ y densidad $\rho = z$ en $[0, 2\pi]$ tiene masa $2\pi^2 c\sqrt{r^2+c^2}$.

1. *Semicircunferencia.* $\gamma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$ en $[0,\pi]$, de clase C^1 en $\mathbb{R}$ con $\gamma'(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t)$ (C2-014.T6) y $|\gamma'| = r$ (C2-014.T5). Con densidad $\rho_0 > 0$: $M = \int_0^\pi \rho_0 r\,dt = \rho_0\pi r$.
2. $\int_\gamma x\rho_0\,ds = \rho_0 r^2\int_0^\pi \cos t\,dt = \rho_0 r^2[\operatorname{sen} t]_0^\pi = 0$ (C2-009.C1, C2-014.C1).
3. $\int_\gamma y\rho_0\,ds = \rho_0 r^2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt = \rho_0 r^2[-\cos t]_0^\pi = 2\rho_0 r^2$.
4. El centro de masa es $(0, 2\rho_0 r^2/(\rho_0\pi r)) = (0, 2r/\pi)$. Como $\pi > 2$, $2r/\pi < r$: está dentro del semidisco, fuera del alambre.
5. *Hélice.* $\gamma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, ct)$ con $c > 0$ (para que $\rho = z \ge 0$ en $[0,2\pi]$), rapidez $\sqrt{r^2+c^2}$ (C3-002.E1). $M = \int_0^{2\pi} ct\sqrt{r^2+c^2}\,dt = c\sqrt{r^2+c^2}\,\frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2 c\sqrt{r^2+c^2}$ (C2-009.E1).

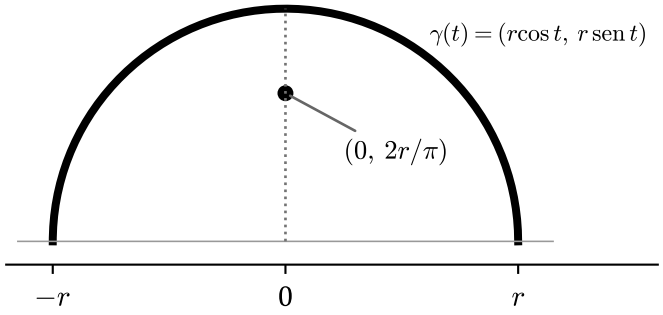


Figura 13: El alambre en la semicircunferencia y su centro de masa $(0, 2r/\pi)$, que no está sobre el alambre.

⚠ Integral de trayectoria no es área bajo una curva

$\int_\gamma f\,ds$ mide «f por longitud». Por eso no cambia al invertir el camino (C4-013.T1). La integral de un campo a lo largo de un camino, que veremos en la siguiente clase, sí cambia de signo.

Ejercicios

1. Calcula $\int_\gamma (x + y)\,ds$ donde γ es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ recorrido una vez.
2. Demuestra que la circunferencia de radio r recorrida dos veces, $\gamma(t) = r(\cos t, \mathrm{sen}\,t)$ en $[0, 4\pi]$, tiene $\int_\gamma 1\,ds = 4\pi r$. ¿Contradice esto que «la longitud no depende de la parametrización»?
3. Halla el centro de masa del alambre en la hélice $(\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, con densidad constante.
4. Demuestra que si $f \geq 0$ es continua en la traza y $\int_\gamma f\,ds = 0$ con γ regular ($\gamma' \neq 0$ en cada tramo), entonces $f = 0$ en la traza.
5. Sea $\gamma(t) = (t, t^2)$ en $[0, 1]$. Calcula $\int_\gamma x\,ds$.

Respuestas

1. Lados: en $[(0, 0), (1, 0)]$ vale $1/2$; en $[(1, 0), (0, 1)]$, con rapidez $\sqrt{2}$ y $x + y = 1$, vale $\sqrt{2}$; en $[(0, 1), (0, 0)]$ vale $1/2$. Total $1 + \sqrt{2}$.
2. $\int_0^{4\pi} r\,dt = 4\pi r$. No hay contradicción: ℓ es la longitud del camino, no de su traza. C4-013.T1 compara γ con $\gamma \circ \varphi$ para una φ biyectiva; el recorrido doble no es de esa forma respecto del simple.

3. Rapidez $\sqrt{2}$, masa $2\pi\sqrt{2}\rho_0$; $\int \cos t = \int \operatorname{sen} t = 0$, $\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2$: centro $(0, 0, \pi)$.
4. Si $f(\gamma(t_*)) > 0$, por continuidad $f(\gamma)|\gamma'| > 0$ en un intervalo alrededor de t_* dentro de un tramo, y la integral de ese tramo sería positiva (C2-006.T1); las demás son ≥ 0.
5. $\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

C4-014 · Integral de línea de un campo: el trabajo

Motivación

> **La mochila y el remolino**
> Subes una mochila de 5 kg al tercer piso, 9 m más arriba. Puedes ir por una escalera recta o por una rampa en espiral que da tres vueltas. En los dos casos la gravedad hace el mismo trabajo: $-5 \cdot 9.8 \cdot 9 = -441$ J. Lo que cuenta es cuánto de la fuerza va **a lo largo** del camino, y la gravedad solo «ve» la componente vertical del avance.
> Ahora estás en una alberca con un remolino: el agua empuja con $F(x, y) = (-y, x)$. Das una vuelta en círculo de radio 2 m a favor de la corriente y regresas al mismo lugar; aun así el agua hizo trabajo: $2\pi \cdot 4 \approx 25.13$. Regresar al punto de partida no garantiza trabajo cero.
> Dónde falla la analogía: el trabajo físico pide unidades y la fuerza de un remolino real no es exactamente $(-y, x)$; aquí solo importan la fuerza y el camino.

Definiciones

Definición C4-014.D1 (integral de línea)

Para γ C^1 por tramos y F continua en la traza de γ con valores en $\mathbb{R}^n$:

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt;$$

para $n = 2$ y $F = (F_1, F_2)$ también se escribe $\int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy$, y $\oint$ si γ es cerrado.

Como en C4-013.D2, en el tramo i el integrando es $F(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)$, continuo en $[t_{i-1}, t_i]$ (C3-002.T2), así que cada sumando existe (C2-003.T1). La notación $F_1\, dx + F_2\, dy$ abrevia $F_1(\gamma)\gamma_1' + F_2(\gamma)\gamma_2'$.

Resultados

Teorema C4-014.T1 (propiedades)

$\int_\gamma F\cdot d\gamma$ es lineal en F, no depende de la partición, es aditiva para la concatenación y $\int_{\gamma^-} F\cdot d\gamma = -\int_\gamma F\cdot d\gamma$. Con φ como en C4-013.T1: $\int_{\gamma\circ\varphi} = \int_\gamma$ si $\varphi' > 0$ y $= -\int_\gamma$ si $\varphi' < 0$. $|\int_\gamma F\cdot d\gamma| \le (\max_{\text{traza}} |F|)\cdot \ell(\gamma)$; si γ es regular, $\int_\gamma F\cdot d\gamma = \int_\gamma F\cdot T\,ds$, donde $\int_\gamma F\cdot T\,ds := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F(\gamma(t))\cdot T(t))|\gamma'(t)|\,dt$ (T depende del parámetro, no del punto de la traza).

Idea de la demostración
Es la prueba de C4-013.T1 sin el valor absoluto: en la sustitución aparece φ' y no $|\varphi'|$, y por eso el signo de φ' sí importa.

Demostración. Sea $g_i(t) := F(\gamma_i(t))\cdot\gamma_i'(t)$, continua en $[t_{i-1}, t_i]$.

1. *Linealidad.* $(aF+bG)(\gamma)\cdot\gamma' = a\,F(\gamma)\cdot\gamma' + b\,G(\gamma)\cdot\gamma'$ (C3-001.T2); se integra (C2-004.T2) y se suma.
2. *Partición.* Con $P'' = P\cup P'$ y la aditividad de la integral en cada tramo (C2-004.T1), la suma con P y la suma con P' coinciden con la de P'': es el paso (a) de C4-013.T1 con g_i en lugar de h_i.
3. *Reparametrización, $\varphi' > 0$.* Por los pasos 4-6 de C4-013.T1, $s_i := \varphi^{-1}(t_i)$ es una partición para $\gamma\circ\varphi$ y $(\gamma\circ\varphi)'(s) = \gamma_i'(\varphi(s))\varphi'(s)$ en $[s_{i-1}, s_i]$. Así

$$F(\gamma(\varphi(s)))\cdot(\gamma\circ\varphi)'(s) = g_i(\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

   (C3-001.T2), y con la extensión por constantes $\tilde{g}_i$ (paso 7 de C4-013.T1) y C2-015.T1:

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} g_i(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_{\varphi(s_{i-1})}^{\varphi(s_i)} g_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i.$$

   Sumando, $\int_{\gamma\circ\varphi} F\cdot d(\gamma\circ\varphi) = \int_\gamma F\cdot d\gamma$.
4. *Reparametrización, $\varphi' < 0$.* Ahora $s_i := \varphi^{-1}(t_{k-i})$ y en $[s_{i-1}, s_i]$, φ va de t_{k-i+1} a t_{k-i}. La misma cuenta da

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} g_{k-i+1}(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_{t_{k-i+1}}^{t_{k-i}} g_{k-i+1} = -\int_{t_{k-i}}^{t_{k-i+1}} g_{k-i+1}$$

   (C2-004.D1). Sumando, $\int_{\gamma\circ\varphi} = -\int_\gamma$.
5. *Camino inverso.* $\gamma^- = \gamma\circ\varphi$ con $\varphi(s) = a+b-s$, $\varphi' = -1$: por el paso 4, $\int_{\gamma^-} = -\int_\gamma$.

6. *Concatenación.* Como en el paso (d) de C4-013.T1: la suma se parte (C2-001.T1 (b)), y la parte de η trasladada es $\eta \circ \varphi$ con $\varphi' = 1$, que por el paso 3 vale $\int_\eta$.
7. *Cota.* Por Cauchy–Schwarz (C3-001.T3), $|g_i| \le |F(\gamma_i)||\gamma_i'| \le M|\gamma_i'|$ con $M := \max_{\text{traza}} |F|$ (existe: traza compacta, C3-014.T1, C3-014.C1). Por C2-004.T4, C2-004.T3 y el triángulo para sumas, $|\int_\gamma F \cdot d\gamma| \le M \sum_i \int |\gamma_i'| = M\ell(\gamma)$ (C4-013.T2).
8. *Con el tangente.* Si γ es regular, $\gamma_i' \neq 0$ en cada tramo y $T = \gamma_i'/|\gamma_i'|$ (C3-002.D3), así que $g_i = (F(\gamma_i) \cdot T)\,|\gamma_i'|$ (C3-001.T2) y la suma es la de C4-013.D2 con el integrando $F(\gamma) \cdot T$. ■

⚠ Trayectoria contra línea

$\int_{\gamma^-} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$ (C4-013.T1), pero $\int_{\gamma^-} F \cdot d\gamma = -\int_\gamma F \cdot d\gamma$: la integral de trayectoria pesa la longitud (que no tiene sentido), la de línea pesa el avance (que sí lo tiene).

Corolario C4-014.C1 (cierra C2-022.D1)

Para $n = 1$, $\gamma(t) = t$ en $[a, b]$ y F continua, $\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_a^b F$: el trabajo definido en C2-022.D1 es la integral de línea. El trabajo de un campo de fuerzas F a lo largo de γ se define en general como $\int_\gamma F \cdot d\gamma$.

Demostración.

1. $\gamma(t) = t$ es la restricción de la identidad, C^1 en $\mathbb{R}$, con $\gamma' = 1$; basta la partición $\{a, b\}$.
2. En $\mathbb{R}^1$ el producto punto es el producto (C3-001.D2), así que $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t)$.
3. Por C4-014.D1, $\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_a^b F(t)\,dt$, que es el trabajo W de C2-022.D1. La segunda frase es una definición: extiende C2-022.D1 a caminos en $\mathbb{R}^n$, y por el paso 3 coincide con ella en la recta. ■

Ejemplos

Ejemplo C4-014.E1

Para $F = (-y, x)$ y la circunferencia de radio r recorrida una vez en sentido positivo, $\oint F \cdot d\gamma = 2\pi r^2$; para la gravedad $F = -mg\,e_3$, el trabajo a lo largo de cualquier camino depende solo de la altura inicial y final.

1. *Circulación.* $\gamma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi]$, con $\gamma'(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t)$ (C2-014.T6). Entonces

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (-r\operatorname{sen} t)(-r\operatorname{sen} t) + (r\cos t)(r\cos t) = r^2$$

   (C2-014.T5), y $\oint F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} r^2\, dt = 2\pi r^2$ (C2-002.E1). Cualquier otro parámetro que recorra la circunferencia una vez en sentido positivo, de la forma $\gamma \circ \varphi$ con $\varphi' > 0$, da lo mismo (C4-014.T1).
2. *Gravedad.* Sea $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ C^1 por tramos de p a q. En el tramo i, $F(\gamma) \cdot \gamma' = -mg\,\gamma_3'$, y por Barrow (C2-009.C1)

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} -mg\,\gamma_3'(t)\,dt = -mg\big(\gamma_3(t_i) - \gamma_3(t_{i-1})\big).$$

3. La suma es telescópica (C2-001.T1 (a)): $\int_\gamma F \cdot d\gamma = -mg(q_3 - p_3)$. Solo depende de las alturas inicial y final.

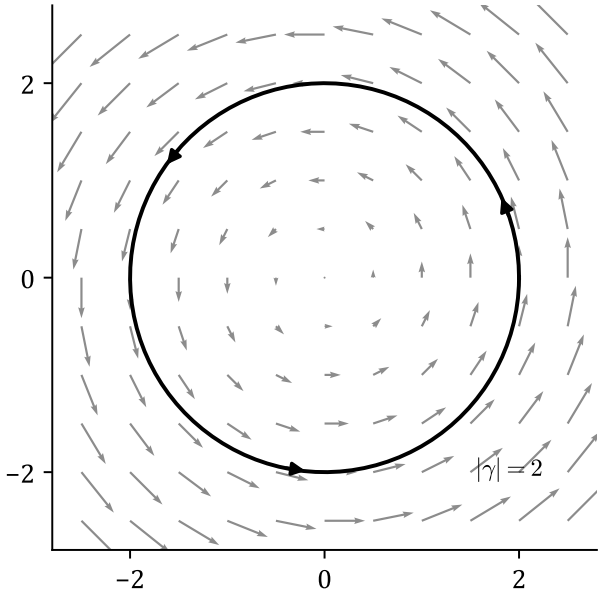


Figura 14: El campo $(-y, x)$ es tangente a las circunferencias centradas en el origen: a lo largo de ellas, $F \cdot \gamma' = |F||\gamma'|$ y el trabajo no se cancela.

Con los números del gancho: la mochila ($m = 5$, $g = 9.8$, $q_3 - p_3 = 9$) recibe -441 J por cualquier camino; el remolino con $r = 2$ da $8\pi \approx 25.13$, y la cota de C4-014.T1 se alcanza: $|F| = 2$ en la traza y $\ell = 4\pi$, así que $|\oint| \le 8\pi$, con igualdad porque F es paralelo a γ'.

Por qué cada hipótesis

- *F continua.* Sin continuidad, el integrando de un tramo puede no ser integrable: con $F = (\chi_{\mathbb{Q}}, 0)$ en el segmento $\gamma(t) = (t, 0)$, $t \in [0,1]$, el integrando es la función de Dirichlet (C2-002).
- *$\varphi' \neq 0$ con signo constante.* $\varphi(s) = \operatorname{sen}(\pi s)$ en $[0,1]$ lleva $[0,1]$ sobre $[0,1]$ ida y vuelta: $\int_{\gamma\circ\varphi} = 0$ aunque $\int_\gamma$ no lo sea.

Ejercicios

1. Calcula $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$ a lo largo de la parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$, y a lo largo del segmento de $(0,0)$ a $(1,1)$. ¿Coinciden? ¿Por qué podría ser?
2. Calcula $\oint x\,dy$ por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ recorrido en ese orden.
3. Demuestra que si $F(x) \cdot \gamma'(t) = 0$ siempre que $x = \gamma(t)$ (el campo es perpendicular al camino), el trabajo es 0. Da un ejemplo físico.
4. Sea F continuo con $|F| \leq 3$ en la circunferencia unitaria. ¿Qué valores puede tomar $\oint F \cdot d\gamma$?
5. Calcula el trabajo de $F(x,y,z) = (y,z,x)$ a lo largo de la hélice $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Respuestas

1. Parábola: $\int_0^1 (t^2 + 2t^2)\,dt = 1$. Segmento: $\int_0^1 2t\,dt = 1$. Coinciden porque $(y,x) = \nabla(xy)$ (lo veremos en C4-015).
2. Solo los lados verticales aportan $x\,dy$: el derecho da $\int_0^1 1\,dt = 1$ y el izquierdo ($x = 0$) da 0. Total 1, el área (C4-016.C3).
3. Cada integrando es 0. Ejemplo: la fuerza normal sobre una cuenta que se desliza por un alambre.
4. Por la cota, $|\oint| \leq 3 \cdot 2\pi = 6\pi$; todo valor de $[-6\pi, 6\pi]$ se alcanza con $F = cJ\gamma$, $|c| \leq 3$.
5. $F(\gamma) \cdot \gamma' = -\operatorname{sen}^2 t + t\cos t + \cos t$; integral $-\pi + 0 + 0 = -\pi$.

C4-015 · Campos conservativos y lema de Poincaré

Motivación

> **Senderos de montaña y la escalera de Penrose**
> Dos senderos suben del campamento a la cima. Uno es corto y empinado, el otro largo y suave. El desnivel que ganas es el mismo: solo depende de la altura del campamento y de la cima. La altura es un **potencial**: el «trabajo» de subir es la diferencia de alturas.
> La escalera de Penrose es un dibujo imposible: cuatro tramos de escalones, siempre hacia arriba, que regresan al punto de partida. Cada pedazo, mirado de cerca, parece una escalera honesta; pero al dar la vuelta completa «subiste» y estás donde empezaste. En el plano existe un campo así: localmente es un gradiente, pero alrededor del origen su circulación vale 2π.
> Dónde falla la analogía: una montaña real tiene altura en todos lados; el campo del ángulo tiene un «agujero» en el origen, y es ese agujero el que permite la escalera imposible.

Parte 1 · El teorema fundamental y las equivalencias

Teorema C4-015.T1 (teorema fundamental para integrales de línea)
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(U)$ y γ C^1 por tramos en U de p a q. Entonces $\int_\gamma \nabla f \cdot d\gamma = f(q) - f(p)$.

Demostración. Sea $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ la partición de γ y γ_i la curva C^1 del tramo i, en un intervalo abierto J_i.

1. El conjunto $\{t \in J_i : \gamma_i(t) \in U\}$ es abierto (C3-012.T4) y contiene a $[t_{i-1}, t_i]$; como en el paso 6 de C4-013.T1, contiene un intervalo abierto $J_i' \supset [t_{i-1}, t_i]$.
2. f es diferenciable en U (C3-017.C2), así que por la regla de la cadena con una variable (C3-016.T4

(a)), $f \circ \gamma_i$ es derivable en J_i' con $(f \circ \gamma_i)'(t) = \nabla f(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)$.

3. Esa derivada es continua en J_i' (C3-012.T2), y por Barrow (C2-009.C1)

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \nabla f(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)\, dt = f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1})).$$

4. Sumando en i (C4-014.D1) la suma es telescópica (C2-001.T1 (a)): $\int_\gamma \nabla f \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(q) - f(p)$. ■

Definición C4-015.D1 (campo conservativo)

Un campo F continuo en un abierto U es **conservativo** (un campo gradiente) si $F = \nabla f$ para alguna $f \in C^1(U)$, un **potencial** de F.

Teorema C4-015.T2 (equivalencias)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ una región (abierto conexo) y F continuo en U. Son equivalentes: (i) F es conservativo; (ii) $\oint_\gamma F \cdot d\gamma = 0$ para todo camino cerrado C^1 por tramos en U; (iii) $\int_\gamma F \cdot d\gamma$ solo depende de los extremos de γ.

Idea de la demostración

(I) ⇒ (iii) es el teorema fundamental. Para (iii) ⇒ (i) se fabrica el potencial: $f(x)$ es el trabajo desde un punto fijo hasta x, y para derivarlo en la dirección e_i basta agregar al final un segmento corto en esa dirección.

Demostración.

1. *(i) ⇒ (iii).* Si $F = \nabla f$ y γ va de p a q, $\int_\gamma F \cdot d\gamma = f(q) - f(p)$ (C4-015.T1), que solo depende de p y q.
2. *(iii) ⇒ (ii).* Si γ es cerrado, de p a p, entonces γ^- también va de p a p, y por (iii) y C4-014.T1, $\oint_\gamma F \cdot d\gamma = \oint_{\gamma^-} F \cdot d\gamma = -\oint_\gamma F \cdot d\gamma$; así vale 0.
3. *(ii) ⇒ (iii).* Si γ y η van de p a q, $\gamma \oplus \eta^-$ es cerrado (C4-013.D1), y por (ii) y C4-014.T1, $0 = \int_\gamma F \cdot d\gamma - \int_\eta F \cdot d\gamma$.
4. *(iii) ⇒ (i): el potencial.* Fijemos $x_0 \in U$. Como U es abierto y conexo, para cada $x \in U$ hay una poligonal en U de x_0 a x (C3-011.T3), que es un camino C^1 por tramos (C4-013.D1). Sea $f(x) :=$

$\int_\gamma F \cdot d\gamma$ para cualquier camino C^1 por tramos γ en U de x_0 a x; por (iii) no depende de γ.

5. Fijemos $x \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $r > 0$ con $B(x,r) \subset U$ (C3-008.D1). Para $0 < |t| < r$ el segmento de x a $x + te_i$ está en $B(x,r)$ (la bola es convexa, C3-011.T2). Si γ va de x_0 a x y σ es ese segmento, $\gamma \oplus \sigma$ va de x_0 a $x + te_i$, y por C4-014.T1

$$f(x + te_i) - f(x) = \int_\sigma F \cdot d\sigma.$$

6. Si $t > 0$, con $\sigma(s) = x + se_i$, $s \in [0,t]$: $\int_\sigma F \cdot d\sigma = \int_0^t F_i(x + se_i)\, ds$ ($F \cdot e_i = F_i$, C3-001.D2). Si $t < 0$, con $\sigma(s) = x - se_i$, $s \in [0,-t]$, y el cambio $u = -s$ (C2-015.T1, C2-004.D1): $\int_\sigma F \cdot d\sigma = -\int_0^{-t} F_i(x - se_i)\, ds = \int_0^t F_i(x + ue_i)\, du$.
7. Sea $\psi(u) := F_i(x + ue_i)$, continua en $(-r,r)$ (C3-012.T2). Por el paso 6, $f(x + te_i) - f(x) = \int_0^t \psi$ para $|t| < r$, y por el primer teorema fundamental (C2-008.T1, aplicado a $t \mapsto \int_{-r/2}^t \psi$ en $[-r/2, r/2]$ y C2-004.C1 (b)), $t \mapsto f(x + te_i)$ es derivable en 0 con derivada $\psi(0) = F_i(x)$.
8. Por C3-015.T1, $\partial_i f(x) = F_i(x)$. Así las parciales de f existen y son las F_i, continuas: $f \in C^1(U)$ (C3-017.D1) y $\nabla f = F$ (C3-016.D1). F es conservativo. ■

Teorema C4-015.T3 (condición necesaria)

Si $F = \nabla f$ con $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, entonces $\partial_j F_i = \partial_i F_j$ para todos i, j; para $n = 3$, $\operatorname{rot} F = 0$, y para $n = 2$, $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0$.

Demostración.

1. $\partial_i f = F_i$ y $F_i \in C^1(U)$, así que todas las parciales de orden ≤ 2 de f existen y son continuas: $f \in C^2(U)$ (C3-018.D1).
2. Por Schwarz (C3-018.T1), $\partial_j F_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i F_j$.
3. Para $n = 3$ cada componente de $\operatorname{rot} F$ (C3-027.D1) es una diferencia $\partial_j F_i - \partial_i F_j$, y vale 0 (también es C3-027.T1: $\operatorname{rot} \nabla f = 0$). Para $n = 2$ es el caso $i = 1, j = 2$. ■

⚠ Necesaria, no suficiente

$\partial_j F_i = \partial_i F_j$ no basta en cualquier abierto: el campo del ángulo (C4-015.E1) la cumple en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y no es conservativo. Lo que falta es una condición sobre la forma de U.

Parte 2 · Abiertos estrellados y el lema de Poincaré

Definición C4-015.D2 (abierto estrellado)

U es **estrellado** respecto de $p \in U$ si $[p, x] \subset U$ para todo $x \in U$. Los abiertos convexos (bolas, interiores de cajas, $\mathbb{R}^n$) son estrellados respecto de cualquiera de sus puntos; el interior $\prod(a_i, b_i)$ de una caja es convexo coordenada a coordenada.

Un convexo contiene el segmento entre dos puntos cualesquiera (C3-011.D1), en particular $[p, x]$. Las bolas y $\mathbb{R}^n$ son convexos (C3-011.T2); el interior $\prod(a_i, b_i)$ de una caja también: si x, y tienen cada coordenada en (a_i, b_i), también $x_i + t(y_i - x_i)$ para $t \in [0, 1]$.

Teorema C4-015.T4 (lema de Poincaré)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto estrellado respecto de p y $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ con $\partial_j F_i = \partial_i F_j$. Entonces $F = \nabla f$ con $f(x) := \int_0^1 F(p + t(x - p)) \cdot (x - p)\, dt$.

Idea de la demostración
$f(x)$ es el trabajo a lo largo del segmento de p a x. Para derivar en x se deriva bajo la integral (Leibniz), y la simetría $\partial_j F_i = \partial_i F_j$ convierte el integrando en una derivada exacta en t.

Demostración. Como U es estrellado, $p + t(x - p) \in U$ para $t \in [0, 1]$ y el integrando es continuo en t (C3-012.T2): f está bien definida. Fijemos $x \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\eta > 0$ con $B(x, \eta) \subset U$.

1. Para $|s| < \eta$, $x + se_i \in U$ y $f(x + se_i) = \int_0^1 g(s, t)\, dt$ con

$$g(s,t) := F\big(p + t(x + se_i - p)\big) \cdot (x + se_i - p) = \sum_k F_k\big(y(s,t)\big)\,(x_k - p_k + s\delta_{ki}),$$

   donde $y(s,t) := p + t(x + se_i - p) \in U$ y δ_{ki} vale 1 si $k = i$ y 0 si no.
2. g es continua en $(-\eta, \eta) \times [0, 1]$ (C3-012.T2). Para t fijo, $s \mapsto y(s,t)$ es afín con derivada te_i, y como F_k es diferenciable (C3-017.C2), por la cadena (C3-016.T4) y la regla del producto (C1-029.T2)

$$\partial_s g(s,t) = \sum_k t\, \partial_i F_k(y(s,t))\,(x_k - p_k + s\delta_{ki}) + F_i(y(s,t)),$$

que es continua en $(-\eta,\eta)\times[0,1]$ (C3-012.T2).

3. Por la regla de Leibniz (C4-012.T3, con $J=(-\eta,\eta)$, $K=[0,1]$ y C4-001.C1), $s\mapsto f(x+se_i)$ es derivable en 0, y por C3-015.T1

$$\partial_i f(x)=\int_0^1 \partial_s g(0,t)\,dt=\int_0^1 \Big(t\sum_k \partial_i F_k(p+t(x-p))(x_k-p_k)+F_i(p+t(x-p))\Big)dt.$$

4. Por la hipótesis, $\partial_i F_k=\partial_k F_i$. Sea $\beta(t):=t\,F_i(p+t(x-p))$, definida en un intervalo abierto que contiene a $[0,1]$ (el conjunto de los t con $p+t(x-p)\in U$ es abierto, C3-012.T4). Por la cadena (C3-016.T4) y el producto (C1-029.T2),

$$\beta'(t)=F_i(p+t(x-p))+t\sum_k \partial_k F_i(p+t(x-p))(x_k-p_k),$$

que es exactamente el integrando del paso 3.

5. β' es continua, y por Barrow (C2-009.C1), $\partial_i f(x)=\beta(1)-\beta(0)=F_i(x)-0$.
6. Así $\partial_i f=F_i$ en U para cada i, continuas: $f\in C^1(U)$ (C3-017.D1) y $\nabla f=F$ (C3-016.D1). ■

Corolario C4-015.C1

En una bola, en el interior de una caja o en todo $\mathbb{R}^3$, un campo $F\in C^1$ es conservativo $\iff$ $\operatorname{rot}F=0$.

Demostración. Esos abiertos son convexos, luego estrellados (C4-015.D2). Si $\operatorname{rot}F=0$, las tres componentes de C3-027.D1 dan $\partial_j F_i=\partial_i F_j$ para todos $i\neq j$ (y para $i=j$ no hay nada que pedir), y por el lema de Poincaré (C4-015.T4) F es conservativo. Si F es conservativo, $\operatorname{rot}F=0$ por C4-015.T3. ■

Ejemplos

Ejemplo C4-015.E1 (el campo del ángulo)
$F(x,y):=(-y,x)/(x^2+y^2)$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ cumple $\partial_1F_2=\partial_2F_1$, pero $\oint F\cdot d\gamma=2\pi$ en la circunferencia unitaria: no es conservativo en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ (que no es estrellado). En el plano cortado D de C3-016.E2, $F=\nabla\arg$.

1. Por la regla del cociente (C3-016.T3, C3-015.T1), con $\rho := x^2 + y^2 > 0$:

$$\partial_1 F_2 = \frac{\rho - 2x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 - x^2}{\rho^2}, \qquad \partial_2 F_1 = -\frac{\rho - 2y^2}{\rho^2} = \frac{y^2 - x^2}{\rho^2}.$$

   Son iguales, y continuas: $F \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.
2. En $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi]$: $\rho = 1$ y $F(\gamma)\cdot\gamma' = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ (C2-014.T6, C2-014.T5), así que $\oint F \cdot d\gamma = 2\pi$ (C2-009.C1).
3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es una región (abierto, y conexo por C3-011.E1), y por C4-015.T2 (ii) F no es conservativo ahí.
4. No es estrellado: si lo fuera respecto de $p \neq 0$, el segmento $[p, -p]$ estaría en él, pero contiene a 0 ($t = 1/2$). (Si lo fuera, el lema de Poincaré daría un potencial.)
5. En $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : t \leq 0\}$, arg es diferenciable con $\nabla \arg = (-x_2, x_1)/|x|^2 = F$ (C3-016.E2); como F es continuo, $\arg \in C^1(D)$ y F es conservativo en D. La circunferencia unitaria no está en D: cruza el corte.

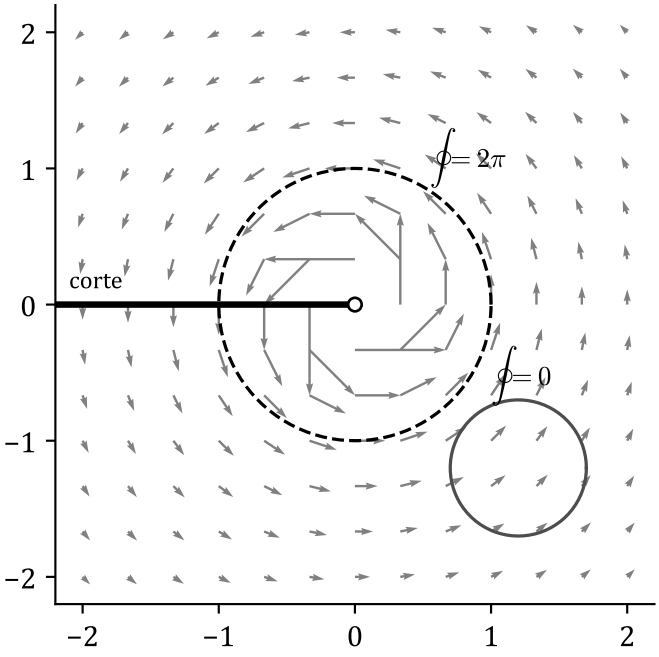


Figura 15: El campo del ángulo: sin rotacional fuera del origen, con circulación 2π en una curva que rodea el origen y 0 en una que no lo rodea. En el plano cortado es $\nabla \arg$.

Ejemplo C4-015.E2
$F(x,y,z) = (2xy + z, x^2, x)$ tiene rot $F = 0$ y potencial $f = x^2y + xz$.

1. Por C3-027.D1 y C3-015.T1: rot $F = (\partial_y x - \partial_z x^2,\ \partial_z(2xy + z) - \partial_x x,\ \partial_x x^2 - \partial_y(2xy + z)) = (0, 1 - 1, 2x - 2x) = 0$.
2. $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ (polinomios, C3-018.T2), y por C4-015.C1 es conservativo.
3. La fórmula de Poincaré con $p = 0$: $F(tx, ty, tz) \cdot (x, y, z) = (2t^2xy + tz)x + t^2x^2y + txz = 3t^2x^2y + 2txz$, y $f = \int_0^1 (3t^2x^2y + 2txz)\,dt = x^2y + xz$ (C2-009.E1).
4. Comprobación: $\nabla(x^2y+xz) = (2xy+z, x^2, x)$. Por C4-015.T1, el trabajo de F de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$ por cualquier camino es $f(1,2,3) = 5$.

Ejercicios

1. Decide si $F(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y, si lo es, halla un potencial.
2. Demuestra que el campo del ángulo es conservativo en el semiplano $\{x > 0\}$ con un potencial explícito.
3. Sea F conservativo en una región U. Demuestra que dos potenciales de F difieren en una constante.
4. Calcula $\oint F \cdot d\gamma$ para el campo del ángulo y la circunferencia de radio 3 centrada en $(5, 0)$.
5. ¿Es estrellado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : t \leq 0\}$? ¿Respecto de qué puntos?

Respuestas

1. $\partial_1 F_2 = -e^x \operatorname{sen} y = \partial_2 F_1$ y $\mathbb{R}^2$ es convexo: sí; $f = e^x \cos y$.
2. $\{x > 0\}$ es convexo; $f = \arctan(y/x)$ cumple $\nabla f = F$ (C2-014.T11 y la cadena).
3. Si $\nabla f = \nabla g$, $\nabla(f - g) = 0$ en un conexo: $f - g$ es constante (C3-017.C1).
4. 0: esa circunferencia está en el semiplano $\{x > 0\}$, donde F es conservativo (ejercicio 2, C4-015.T2).
5. Sí, respecto de cualquier $p = (a, 0)$ con $a > 0$: el segmento de p a un punto $x \in D$ no cruza la semirrecta cortada (si $x_2 \neq 0$, solo toca el eje en p; si $x_2 = 0$, $x_1 > 0$). Respecto de un punto con $p_2 \neq 0$, no.

C4-016 · Teorema de Green

Motivación

> **El planímetro: medir un terreno caminando su orilla**
> Un planímetro es un aparato de agrimensor: recorres con una aguja la orilla de un terreno dibujado en un mapa y, al regresar al punto de partida, una ruedita marca el área. No mide nada adentro: solo la orilla.
> Con números: la elipse $x^2/9 + y^2/4 \le 1$ tiene área $6\pi \approx 18.850$. Si caminas su orilla y apuntas 12 puntos igualmente espaciados en el ángulo, la fórmula del cordón $\frac{1}{2}\sum(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$ da 18.000; con 100 puntos, 18.837. Esa suma es una versión discreta de $\frac{1}{2}\oint(x\,dy - y\,dx)$, y el teorema de Green dice que la integral exacta es el área.
> Dónde falla la analogía: un planímetro real tiene brazos y ruedas con fricción; aquí la orilla es un camino C^1 por tramos y la cuenta es exacta.

Parte 1 · Green en un rectángulo y el campo jalado

Para un rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$ fijamos sus cuatro lados como caminos:

$$\lambda_1(t) = (t,c),\ \lambda_3(t) = (t,d)\ \ (t \in [a,b]), \qquad \lambda_2(t) = (b,t),\ \lambda_4(t) = (a,t)\ \ (t \in [c,d]),$$

y $\partial Q := \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3^- \oplus \lambda_4^-$ (C4-013.D1), que recorre $(a,c) \to (b,c) \to (b,d) \to (a,d) \to (a,c)$. Por C4-014.T1,

$$\oint_{\partial Q} F \cdot d\gamma = \int_{\lambda_1} F \cdot d\gamma + \int_{\lambda_2} F \cdot d\gamma - \int_{\lambda_3} F \cdot d\gamma - \int_{\lambda_4} F \cdot d\gamma. \qquad (*)$$

Cualquier otra parametrización de los lados por funciones lineales crecientes da lo mismo (C4-014.T1).

Teorema C4-016.T1 (Green en un rectángulo)

Sean $Q = [a,b] \times [c,d]$ y $F = (F_1, F_2) \in C^1$ en un abierto que contiene a Q. Con $\lambda_1(t) = (t,c)$, $\lambda_3(t) = (t,d)$ $(t \in [a,b])$ y $\lambda_2(t) = (b,t)$, $\lambda_4(t) = (a,t)$ $(t \in [c,d])$, sea $\partial Q := \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3^- \oplus \lambda_4^-$, el camino cerrado que recorre $(a,c) \to (b,c) \to (b,d) \to (a,d) \to (a,c)$, con $\oint_{\partial Q} F \cdot d\gamma = \int_{\lambda_1} F \cdot d\gamma + \int_{\lambda_2} F \cdot d\gamma - \int_{\lambda_3} F \cdot d\gamma - \int_{\lambda_4} F \cdot d\gamma$. Entonces $\int_Q (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \oint_{\partial Q} F \cdot d\gamma$.

Idea de la demostración

Cada término del lado izquierdo es una integral doble de una derivada parcial: Fubini la convierte en una integral iterada, y Barrow evalúa la integral de adentro en dos lados opuestos.

Demostración.

1. $\partial_1 F_2$ y $\partial_2 F_1$ son continuas en Q (C3-017.D1), así que se puede usar Fubini en cualquier orden (C4-006.C1, C4-006.T2) y la linealidad (C4-001.T5).
2. Integrando primero en x y usando Barrow (C2-009.C1) para $x \mapsto F_2(x,y)$, cuya derivada es $\partial_1 F_2$ (C3-015.T1):

$$\int_Q \partial_1 F_2 = \int_c^d \Big(\int_a^b \partial_1 F_2(x,y)\, dx \Big) dy = \int_c^d \big(F_2(b,y) - F_2(a,y) \big)\, dy.$$

3. Integrando primero en y:

$$\int_Q \partial_2 F_1 = \int_a^b \big(F_1(x,d) - F_1(x,c) \big)\, dx.$$

4. En los lados: $\lambda_1' = (1,0)$, $\lambda_2' = (0,1)$, $\lambda_3' = (1,0)$, $\lambda_4' = (0,1)$, así que

$$\int_{\lambda_1} F \cdot d\gamma = \int_a^b F_1(t,c)\, dt, \quad \int_{\lambda_2} F \cdot d\gamma = \int_c^d F_2(b,t)\, dt,$$

$$\int_{\lambda_3} F \cdot d\gamma = \int_a^b F_1(t,d)\, dt, \quad \int_{\lambda_4} F \cdot d\gamma = \int_c^d F_2(a,t)\, dt.$$

5. Con $(*)$ y la linealidad de la integral (C2-004.T2),

$$\oint_{\partial Q} F \cdot d\gamma = \int_c^d \big(F_2(b,t) - F_2(a,t) \big) dt - \int_a^b \big(F_1(t,d) - F_1(t,c) \big) dt,$$

que por los pasos 2 y 3 es $\int_Q \partial_1 F_2 - \int_Q \partial_2 F_1$. ■

Para pasar del rectángulo a regiones curvas se «jala» el campo al rectángulo.

Definición C4-016.D1 (campo jalado)

Sean $W \subset \mathbb{R}^k$ abierto, $\sigma \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ y F continuo en un abierto que contiene a $\sigma(W)$. El campo $\sigma^* F : W \to \mathbb{R}^k$ es $(\sigma^* F)_j := (F \circ \sigma) \cdot \partial_j \sigma$.

$\sigma^* F$ es continuo (C3-012.T2). Si $\sigma(W)$ no cabe en el abierto donde está F, se reemplaza W por $W \cap \sigma^{-1}(V)$, que es abierto (C3-012.T4).

Teorema C4-016.T2 (cambio de variable en integrales de línea)

Si γ es C^1 por tramos en W, $\sigma \circ \gamma$ es C^1 por tramos y $\int_{\sigma\circ\gamma} F \cdot d(\sigma \circ \gamma) = \int_\gamma \sigma^* F \cdot d\gamma$.

Demostración. Sea γ_i la curva C^1 del tramo i; como en el paso 1 de C4-015.T1, podemos suponer que γ_i está en W en un intervalo abierto $J_i \supset [t_{i-1}, t_i]$.

1. $\sigma \circ \gamma$ es continua (C3-012.T2), y $\sigma \circ \gamma_i$ es C^1 en J_i (C3-023.C1): $\sigma \circ \gamma$ es C^1 por tramos con la misma partición.
2. Por la regla de la cadena (C3-023.T1), $(\sigma \circ \gamma_i)'(t) = D\sigma(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)$, y como las columnas de $D\sigma$ son los $\partial_j \sigma$ (C3-022.T1, AL.1),

$$(\sigma \circ \gamma_i)'(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i,j}'(t)\, \partial_j \sigma(\gamma_i(t)).$$

3. Por la linealidad del producto punto (C3-001.T2),

$$F(\sigma(\gamma_i)) \cdot (\sigma \circ \gamma_i)' = \sum_j \big(F(\sigma(\gamma_i)) \cdot \partial_j \sigma(\gamma_i)\big)\gamma_{i,j}' = \sigma^* F(\gamma_i) \cdot \gamma_i'.$$

4. Se integra en cada tramo y se suma (C4-014.D1). ■

Teorema C4-016.T3 (el rotacional del campo jalado)

Sean $k = 2$, $\sigma \in C^2(W, \mathbb{R}^n)$ y $F \in C^1$ en un abierto que contiene a $\sigma(W)$. Entonces $\sigma^* F \in C^1(W, \mathbb{R}^2)$ y

$$\partial_1(\sigma^* F)_2 - \partial_2(\sigma^* F)_1 = \sum_{k<l} \big[(\partial_k F_l - \partial_l F_k) \circ \sigma\big] \cdot (\partial_1 \sigma_k \, \partial_2 \sigma_l - \partial_1 \sigma_l \, \partial_2 \sigma_k).$$

Para $n = 2$ vale $[(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \circ \sigma] \cdot \det D\sigma$; para $n = 3$, $(\operatorname{rot} F \circ \sigma) \cdot (\partial_1 \sigma \times \partial_2 \sigma)$.

Idea de la demostración

Regla del producto y de la cadena. Aparecen segundas derivadas de σ, que se cancelan por Schwarz; lo que queda es antisimétrico en (k, l) y se agrupa en pares.

Demostración. Escribimos $M_{kl} := \partial_1 \sigma_k \, \partial_2 \sigma_l - \partial_1 \sigma_l \, \partial_2 \sigma_k$ y $a_{kl} := \partial_k F_l \circ \sigma$; los índices k, l van de 1 a n.

1. $(\sigma^* F)_j = \sum_l (F_l \circ \sigma) \, \partial_j \sigma_l$. Cada $F_l \circ \sigma$ es C^1 (C3-023.C1) y cada $\partial_j \sigma_l$ es C^1 porque $\sigma \in C^2$; productos y sumas de C^1 son C^1 (C3-018.T2). Así $\sigma^* F \in C^1(W, \mathbb{R}^2)$.
2. Por la cadena en entradas (C3-023.T1), $\partial_1(F_l \circ \sigma) = \sum_k a_{kl} \, \partial_1 \sigma_k$ y $\partial_2(F_l \circ \sigma) = \sum_k a_{kl} \, \partial_2 \sigma_k$.
3. Por la regla del producto (C3-016.T3),

$$\partial_1(\sigma^* F)_2 = \sum_l \Big(\sum_k a_{kl} \, \partial_1 \sigma_k \, \partial_2 \sigma_l + (F_l \circ \sigma) \, \partial_1 \partial_2 \sigma_l \Big),$$

$$\partial_2(\sigma^* F)_1 = \sum_l \Big(\sum_k a_{kl} \, \partial_2 \sigma_k \, \partial_1 \sigma_l + (F_l \circ \sigma) \, \partial_2 \partial_1 \sigma_l \Big).$$

4. Como $\sigma_l \in C^2$, $\partial_1 \partial_2 \sigma_l = \partial_2 \partial_1 \sigma_l$ (Schwarz, C3-018.T1): al restar, esos términos se cancelan y queda (C1-005.T12)

$$\partial_1(\sigma^* F)_2 - \partial_2(\sigma^* F)_1 = \sum_{k,l} a_{kl} M_{kl}.$$

5. $M_{lk} = -M_{kl}$ y $M_{kk} = 0$. Partiendo la suma en $k < l$ y $k > l$, y cambiando el nombre de los índices en la segunda:

$$\sum_{k,l} a_{kl} M_{kl} = \sum_{k<l} a_{kl} M_{kl} + \sum_{k<l} a_{lk} M_{lk} = \sum_{k<l} (a_{kl} - a_{lk}) M_{kl},$$

que es la fórmula del enunciado.

6. $n = 2$. Solo está el par $(1, 2)$, y $M_{12} = \partial_1\sigma_1\partial_2\sigma_2 - \partial_1\sigma_2\partial_2\sigma_1 = \det D\sigma$ (AL.4, determinante 2×2).
7. $n = 3$. Con $u := \partial_1\sigma$ y $v := \partial_2\sigma$, por C3-006.D1, $u \times v = (M_{23}, -M_{13}, M_{12})$, y por C3-027.D1, $\operatorname{rot} F = (\partial_2F_3 - \partial_3F_2, \partial_3F_1 - \partial_1F_3, \partial_1F_2 - \partial_2F_1)$. El producto punto

$$(\partial_2F_3 - \partial_3F_2)M_{23} + (\partial_1F_3 - \partial_3F_1)M_{13} + (\partial_1F_2 - \partial_2F_1)M_{12}$$

es la suma de los tres pares $k < l$. ■

Parte 2 · El teorema de Green para parches

Definición C4-016.D2 (parche plano y su borde orientado)

Sean Q un rectángulo y $\sigma : Q \to \mathbb{R}^2$ la restricción de una función C^2 en un abierto que contiene a Q, inyectiva en $\operatorname{int} Q$ y con $\det D\sigma > 0$ en $\operatorname{int} Q$ (en ∂Q puede repetir puntos). $D := \sigma(Q)$ es un **parche plano** y su **borde orientado** es el camino cerrado $\partial_\sigma D := \sigma \circ \partial Q$. Sus cuatro lados son $\sigma \circ \lambda_1, \dots, \sigma \circ \lambda_4$ y

$$\oint_{\partial_\sigma D} F \cdot d\gamma = \int_{\sigma\circ\lambda_1} F \cdot d\gamma + \int_{\sigma\circ\lambda_2} F \cdot d\gamma - \int_{\sigma\circ\lambda_3} F \cdot d\gamma - \int_{\sigma\circ\lambda_4} F \cdot d\gamma. \qquad (**)$$

La fórmula $(**)$ sale de C4-014.T1, porque $\sigma \circ (\gamma \oplus \eta) = (\sigma \circ \gamma) \oplus (\sigma \circ \eta)$ y $\sigma \circ \gamma^- = (\sigma \circ \gamma)^-$ (directo de C4-013.D1). En los ejemplos, dos lados pueden ser el mismo camino (y se cancelan) o un lado puede ser constante (y no aporta).

Teorema C4-016.T4 (teorema de Green)

Si $D = \sigma(Q)$ es un parche plano y $F = (F_1, F_2) \in C^1$ en un abierto que contiene a D, entonces D es de Jordan y $\int_D (\partial_1F_2 - \partial_2F_1) = \oint_{\partial_\sigma D} F \cdot d\gamma$.

Idea de la demostración

Se jala todo al rectángulo: la integral de línea por el cambio de variable (T2), el rotacional por T3, Green en el rectángulo (T1), y se regresa a D con el cambio de variables con un conjunto excepcional: el borde ∂Q, donde σ puede no ser inyectiva. La inyectividad solo se usa en este último paso.

Demostración. Sean W el abierto donde σ es C^2 y V el abierto donde F es C^1, con $D \subset V$.

1. $W' := W \cap \sigma^{-1}(V)$ es abierto (C3-012.T4) y contiene a Q (porque $\sigma(Q) = D \subset V$). En W', $\sigma \in C^2$ y $\sigma(W') \subset V$.
2. Por C4-016.T2 aplicado a ∂Q (un camino C^1 por tramos en W'): $\oint_{\partial_\sigma D} F \cdot d\gamma = \oint_{\sigma\circ\partial Q} F \cdot d\gamma = \oint_{\partial Q} \sigma^* F \cdot d\gamma$.
3. Por C4-016.T3, $\sigma^* F \in C^1(W', \mathbb{R}^2)$, y por Green en el rectángulo (C4-016.T1) y T3 con $n = 2$:

$$\oint_{\partial Q} \sigma^* F \cdot d\gamma = \int_Q \left(\partial_1(\sigma^* F)_2 - \partial_2(\sigma^* F)_1\right) = \int_Q (h \circ \sigma) \det D\sigma,$$

   donde $h := \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$, continua en V.
4. *El signo del jacobiano en ∂Q.* $\det D\sigma$ es continua en W' (polinomio en las parciales, AL.4, y C3-012.T2), así que $\{y \in W' : \det D\sigma(y) \geq 0\}$ es cerrado en W' (C3-012.T4). Contiene a $\operatorname{int} Q$, y cada punto de Q es límite de puntos de $\operatorname{int} Q$ (la cerradura del rectángulo abierto es Q, C3-008.T3). Así $\det D\sigma \geq 0$ en todo Q y $|\det D\sigma| = \det D\sigma$ en Q.
5. *El cambio de variables con excepciones* (C4-011.T1) con $U = W'$, $g = \sigma$, $A = Q$ (de Jordan, $\bar{A} = Q \subset W'$) y $U_0 = \operatorname{int} Q$: ahí σ es inyectiva y $\det D\sigma > 0$. El conjunto excepcional $Z = Q \setminus \operatorname{int} Q = \partial Q$ tiene contenido cero (C4-003.T4). Por lo tanto $D = \sigma(Q)$ es de Jordan.
6. D es compacto (C3-014.T1) y h es continua en D, luego acotada (C3-014.C1) e integrable en D (C4-005.T4 (a)). C4-011.T1 da $\int_D h = \int_Q (h \circ \sigma)|\det D\sigma|$, y por el paso 4 eso es $\int_Q (h \circ \sigma) \det D\sigma$.
7. Juntando los pasos 2, 3 y 6: $\int_D (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \oint_{\partial_\sigma D} F \cdot d\gamma$. ■

⚠ **Qué es $\partial_\sigma D$**

El borde orientado **se define** como $\sigma \circ \partial Q$; no es «la frontera de D recorrida con D a la izquierda». En cada ejemplo hay que ver qué curva es: puede tener lados repetidos en sentidos opuestos, que se cancelan, o lados constantes. El teorema no necesita saberlo de antemano; los corolarios lo calculan.

Corolario C4-016.C1 (regiones de tipo I)

Sean $a < b$ y $\varphi_1 \leq \varphi_2$ de clase C^2 en un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$, con $\varphi_1 < \varphi_2$ en (a, b). $D := \{a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ es el parche $\sigma(s, t) := (s, \varphi_1(s) + t(\varphi_2(s) - \varphi_1(s)))$ en $[a, b] \times [0, 1]$, y $\partial_\sigma D$ es, salvo reparametrizaciones lineales crecientes de cada lado, el lazo: gráfica de φ_1 de izquierda a derecha, lado vertical derecho hacia arriba, gráfica de φ_2 de derecha

a izquierda, lado izquierdo hacia abajo (los lados verticales pueden ser un punto).

Demostración. Sea I el intervalo abierto donde las φ_i son C^2 y $Q := [a,b]\times[0,1]$.

1. σ está definida en el abierto $I\times\mathbb{R}$ y es C^2 (sumas y productos de funciones C^2, C3-018.T2).
2. Su jacobiana (C3-022.T1) es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_1' + t(\varphi_2' - \varphi_1') & \varphi_2 - \varphi_1 \end{pmatrix}$, con $\det D\sigma = \varphi_2(s) - \varphi_1(s)$ (AL.4), que es > 0 en $\operatorname{int} Q = (a,b)\times(0,1)$.
3. *Inyectiva en* $\operatorname{int} Q$. Si $\sigma(s,t) = \sigma(s',t')$, la primera coordenada da $s = s'$, y la segunda, $t(\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) = t'(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))$ con $\varphi_2(s) - \varphi_1(s) > 0$: $t = t'$.
4. $\sigma(Q) = D$. Si $(s,t)\in Q$, $y = \varphi_1(s) + t(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))$ está entre $\varphi_1(s)$ y $\varphi_2(s)$. Recíprocamente, si $(x,y)\in D$: con $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ se toma $t = (y - \varphi_1(x))/(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) \in [0,1]$; con $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ (solo puede pasar en $x = a$ o $x = b$), $y = \varphi_1(x)$ y $t = 0$. Así D es un parche plano.
5. *Los lados.* Con la notación de la parte 1 ($[a,b]$ en la primera coordenada, $[0,1]$ en la segunda):
   - $\sigma\circ\lambda_1(u) = (u, \varphi_1(u))$, $u\in[a,b]$: la gráfica de φ_1 de izquierda a derecha; entra con $+$.
   - $\sigma\circ\lambda_2(u) = (b, \varphi_1(b) + u(\varphi_2(b) - \varphi_1(b)))$, $u\in[0,1]$: el lado vertical derecho hacia arriba (un punto si $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$); entra con $+$.
   - $\sigma\circ\lambda_3(u) = (u, \varphi_2(u))$: la gráfica de φ_2 de izquierda a derecha; entra con $-$ en $(**)$, es decir, recorrida de derecha a izquierda.
   - $\sigma\circ\lambda_4(u) = (a, \varphi_1(a) + u(\varphi_2(a) - \varphi_1(a)))$: el lado izquierdo hacia arriba; entra con $-$: hacia abajo.
6. Si $L := \varphi_2(b) - \varphi_1(b) > 0$, el lado derecho parametrizado por la altura, $y \mapsto (b,y)$ en $[\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$, es $\sigma\circ\lambda_2\circ\psi^{-1}$ con $\psi(u) = \varphi_1(b) + uL$ lineal creciente, y por C4-014.T1 da la misma integral; igual con el izquierdo. Si $L = 0$, el lado es constante y su integral es 0 ($\gamma' = 0$). ■

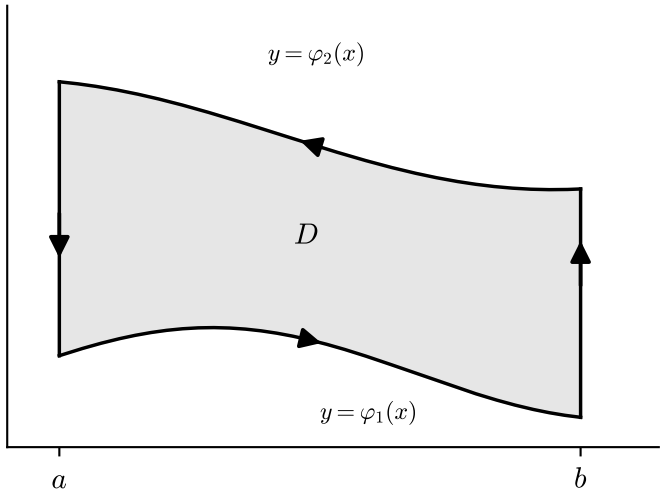


Figura 16: Una región de tipo I y su borde orientado: abajo de izquierda a derecha, arriba de derecha a izquierda.

Corolario C4-016.C2 (disco y corona)

Para $p \in \mathbb{R}^2$ y $0 \le r_1 < r_2$, $\sigma(r,\theta) := p + (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ en $[r_1, r_2] \times [-\pi, \pi]$ es un parche, y la integral sobre $\partial_\sigma D$ es la de la circunferencia de radio r_2 en sentido positivo menos la de radio r_1 en sentido positivo: los lados $\theta = \pm\pi$ son el mismo segmento recorrido en sentidos opuestos y se cancelan, y si $r_1 = 0$ el lado interior es constante.

Demostración. Sea $Q := [r_1, r_2] \times [-\pi, \pi]$ (r en la primera coordenada, θ en la segunda).

1. σ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (C2-014.T6). Por C3-022.E1, $\det D\sigma = r$, que es > 0 en $\operatorname{int} Q = (r_1, r_2) \times (-\pi, \pi)$ porque $r > r_1 \ge 0$.
2. *Inyectiva en* $\operatorname{int} Q$. Si $\sigma(r,\theta) = \sigma(r',\theta')$ con $r, r' > 0$ y $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi)$, entonces $P(r,\theta) = P(r',\theta')$ y por la unicidad de C3-013.T1 (b), $(r,\theta) = (r',\theta')$. Así es un parche. Su imagen es la corona $D = \{r_1 \le |x - p| \le r_2\}$ (el disco cerrado si $r_1 = 0$): $|P(r,\theta)| = r$ y todo punto no nulo es $P(|x|, \arg x)$ (C3-013.T1).
3. *Los lados* (figura):
   - $\sigma \circ \lambda_1(t) = \sigma(t, -\pi) = p + (-t, 0)$, $t \in [r_1, r_2]$ (C2-014.C1: $\cos(-\pi) = -1$, $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$).
   - $\sigma \circ \lambda_3(t) = \sigma(t, \pi) = p + (-t, 0)$: **el mismo camino** que $\sigma \circ \lambda_1$.
   - $\sigma \circ \lambda_2(t) = p + r_2(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [-\pi, \pi]$: la circunferencia de radio r_2 en sentido positivo.
   - $\sigma \circ \lambda_4(t) = p + r_1(\cos t, \operatorname{sen} t)$: la de radio r_1; si $r_1 = 0$ es el camino constante p.

4. En (**), $\int_{\sigma\circ\lambda_1} - \int_{\sigma\circ\lambda_3} = 0$, y queda $\oint_{\partial_\sigma D} F\cdot d\gamma = \oint_{C_{r_2}} F\cdot d\gamma - \oint_{C_{r_1}} F\cdot d\gamma$, con C_r la circunferencia de radio r alrededor de p en sentido positivo. Si $r_1 = 0$, el camino constante tiene derivada 0 y $\oint_{C_0} = 0$. ■

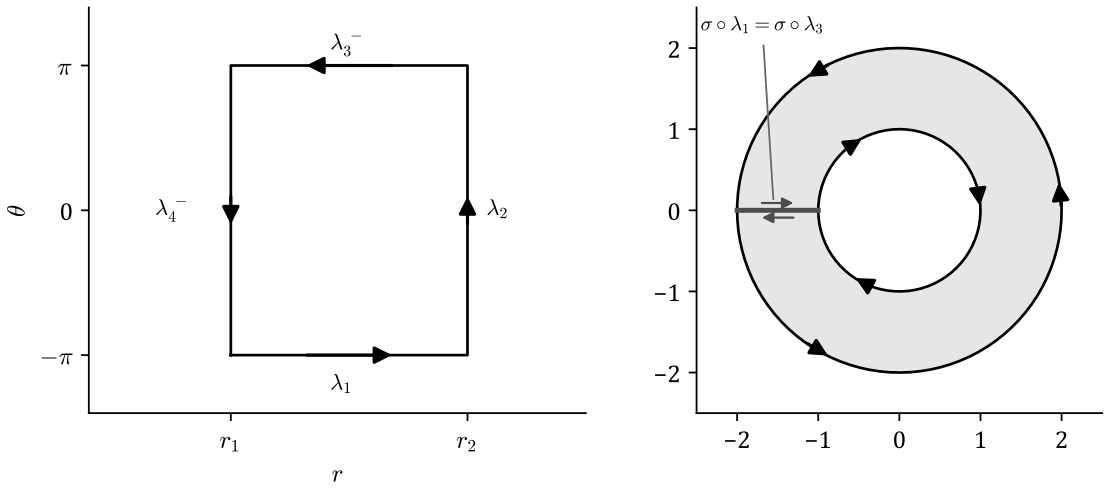


Figura 17: El rectángulo $Q = [r_1, r_2]\times[-\pi,\pi]$ con ∂Q y su imagen, la corona: el borde exterior en sentido positivo, el interior en sentido negativo y el segmento $\theta = \pm\pi$ recorrido dos veces en sentidos opuestos.

⚠ Dónde empieza la circunferencia

C_r empieza en $\theta = -\pi$. Si se parametriza en $[0, 2\pi]$, la integral es la misma: se parte $[-\pi,\pi]$ en $[-\pi, 0]$ y $[0,\pi]$, se traslada el primer pedazo en 2π (periodicidad, C2-014.T5) y se usa la aditividad y la invariancia por traslaciones del parámetro (C4-014.T1).

Corolario C4-016.C3 (área por una integral de línea)

Si $D = \sigma(Q)$ es un parche plano, $c(D) = \oint_{\partial_\sigma D} x\,dy = -\oint_{\partial_\sigma D} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\partial_\sigma D}(x\,dy - y\,dx)$.

Demostración.

1. $c(D) = \int_D 1$ (C4-005.D1), y D es de Jordan (C4-016.T4).
2. $F = (0, x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ con $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 1$ (C3-015.T1); Green da $c(D) = \oint x\,dy$.
3. $F = (-y, 0)$ da $0 - (-1) = 1$: $c(D) = -\oint y\,dx$.
4. El promedio, por la linealidad de C4-014.T1. ■

Ejemplo C4-016.E1
La elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ (parche $\sigma(r,\theta) = (ar\cos\theta, br\,\mathrm{sen}\,\theta)$) tiene área πab por C4-016.C3 (los lados $\theta = \pm\pi$ se cancelan y el lado $r = 0$ es constante, como en C4-016.C2).

1. En $Q = [0,1]\times[-\pi,\pi]$, σ es C^∞ y $\det D\sigma = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\,\mathrm{sen}\,\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = abr$ (AL.4, C2-014.T5), positivo en $\mathrm{int}\,Q$.
2. Inyectiva en $\mathrm{int}\,Q$: si $\sigma(r,\theta) = \sigma(r',\theta')$, dividiendo las coordenadas entre a y b, $P(r,\theta) = P(r',\theta')$, y se usa C3-013.T1 (b). Su imagen es la elipse: (x,y) está en ella si y solo si $(x/a, y/b)$ está en el disco unitario cerrado, que es $P(Q)$ (C3-013.T1).
3. Lados: $\sigma(t,\pm\pi) = (-at, 0)$ son el mismo camino y se cancelan en $(**)$; $\sigma(0,t) = (0,0)$ es constante; queda $\sigma(1,t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[-\pi,\pi]$.
4. Por C4-016.C3, con $x\,dy - y\,dx = (a\cos t)(b\cos t) - (b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t) = ab$ (C2-014.T6, C2-014.T5): $c(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} ab\,dt = \pi ab$ (C2-009.C1).

Con $a = 3, b = 2$: $6\pi \approx 18.850$. La fórmula del cordón del gancho es $\frac{1}{2}\oint(x\,dy - y\,dx)$ sobre la poligonal inscrita, que es el área del polígono: $\frac{N}{2}ab\,\mathrm{sen}(2\pi/N)$, que vale 18 con $N = 12$ y tiende a 6π.

Ejemplo C4-016.E2 (la hipótesis C^1 en D hace falta)
Para el campo del ángulo y el disco unitario, $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0$ fuera del origen y $\oint F\cdot d\gamma = 2\pi$: no hay contradicción, porque F no es C^1 en un abierto que contenga al disco.

1. Por C4-015.E1, $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ y $\oint_{C_1} F\cdot d\gamma = 2\pi$.
2. Por C4-016.C2 con $r_1 = 0, r_2 = 1, p = 0$, el borde orientado del disco da $\oint_{C_1} F\cdot d\gamma = 2\pi$.
3. Si existiera $G\in C^1$ en un abierto $V\supset \bar B(0,1)$ con $G = F$ en $\bar B(0,1)\setminus\{0\}$, G sería continua en 0 y acotada cerca de 0; pero $|F(x)| = 1/|x|$ no está acotada. Así la hipótesis de Green falla y $2\pi \neq 0$ no contradice nada.

Por qué cada hipótesis

- *$F\in C^1$ en un abierto que contiene a D:* C4-016.E2.
- $\det D\sigma > 0$ *en* $\mathrm{int}\,Q$. Con $\sigma(s,t) = (s,-t)$ en $[0,1]^2$ ($\det = -1$), $D = [0,1]\times[-1,0]$ y $\partial_\sigma D$ recorre el cuadrado en sentido horario: para $F = (0,x)$, $\oint_{\partial_\sigma D} x\,dy = -1 = -c(D)$. El signo del jacobiano

es la orientación.

– *Inyectiva en* $\operatorname{int} Q$. Con $\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ en $[0,1]\times[-\pi,3\pi]$ (dos vueltas), $\oint x\,dy = 2\pi$, el doble del área del disco: el lado izquierdo de Green sería $\int_Q (h\circ\sigma)\det D\sigma$, que cuenta el disco dos veces.

Ejercicios

1. Comprueba Green en el cuadrado $[0,1]^2$ para $F = (xy, x^2)$ calculando los dos lados.
2. Usa C4-016.C1 para calcular el área entre $y = x^2$ y $y = x$ en $[0,1]$ como $\oint x\,dy$.
3. Calcula $\oint_{\partial_\sigma D}(-y^3\,dx + x^3\,dy)$ para el disco unitario.
4. Sea D la corona $1 \le |x| \le 2$. Calcula $\oint_{\partial_\sigma D} F\cdot d\gamma$ para el campo del ángulo, usando C4-016.C2. ¿Por qué aquí sí se puede usar Green?
5. Demuestra que si D es un parche plano y $f \in C^2$ cerca de D, $\oint_{\partial_\sigma D}\nabla f\cdot d\gamma = 0$ de dos maneras: con Green y con C4-015.T1.

Respuestas

1. $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 2x - x = x$, integral $1/2$. Lados: abajo 0; derecha $\int_0^1 1\,dt = 1$; arriba $-\int_0^1 t\,dt = -1/2$; izquierda 0. Total $1/2$.
2. $\varphi_1 = x^2, \varphi_2 = x$. Abajo: $\int_0^1 t\cdot 2t\,dt = 2/3$; arriba (al revés): $-\int_0^1 t\,dt = -1/2$; los lados verticales son puntos. Área $1/6$.
3. Green: $\int_D 3(x^2+y^2) = 3\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta = 3\pi/2$.
4. F es C^1 en $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, que contiene a la corona: Green da $\int_D 0 = 0$, y C4-016.C2 dice que es $2\pi - 2\pi = 0$ (cada circunferencia alrededor del origen da 2π).
5. Green: $\partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f = 0$ (Schwarz). C4-015.T1: el camino es cerrado, $f(q) - f(p) = 0$.

C4-017 · Índice de una curva

Motivación

> **El perro, la correa y el poste**
> Atas a tu perro a un poste con una correa larga y lo dejas correr. Al final del día regresa al lugar donde empezó. ¿Cuántas vueltas quedó enrollada la correa en el poste? No importa por dónde corrió: solo cuenta cuántas veces rodeó el poste, con signo (una vuelta en sentido contrario desenrolla una).
> Con números: si el perro recorre el caracol $r = \frac{1}{2} + \cos t$ (una curva con un lazo interior), la correa queda con **2** vueltas si el poste está en el lazo chico, con **1** si está entre los dos lazos y con **0** si está afuera. Ese número es el índice de la curva respecto del poste, y lo calcula una integral de línea: el campo del ángulo de C4-015.E1, centrado en el poste.
> Dónde falla la analogía: una correa real tiene grosor y se atora; aquí el perro es un punto, la correa una recta y el poste un punto que la curva nunca toca.

Definiciones

Definición C4-017.D1 (índice)

Sean γ un camino cerrado C^1 por tramos en $\mathbb{R}^2$ y p fuera de su traza. Con $J(w_1, w_2) := (-w_2, w_1)$ (C3-005.D2) y $F_p(x) := J(x-p)/|x-p|^2$, el **índice** de γ respecto de p es $n(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma F_p \cdot d\gamma$.

F_p es el campo del ángulo de C4-015.E1 trasladado a p: $F_p(x) = F(x-p)$, continuo (y C^1) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, que contiene a la traza; así la integral existe (C4-014.D1).

Dos hechos de J que se usan abajo, todos de la fórmula $J(w_1, w_2) = (-w_2, w_1)$ y C3-001.D2: $Jw \cdot w = 0$, $Jw \cdot Jz = w \cdot z$, $J(Jw) = -w$; y si $|v| = 1$, todo $z \in \mathbb{R}^2$ cumple

$$z = (z \cdot v)\, v + (z \cdot Jv)\, Jv \qquad (\dagger)$$

(con $v = (c, s)$, $c^2 + s^2 = 1$: $(z_1 c + z_2 s)(c, s) + (-z_1 s + z_2 c)(-s, c) = z$).

Resultados

Teorema C4-017.T1 (el ángulo a lo largo de la curva)

Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ C^1 por tramos y θ_0 con $\gamma(a) - p = |\gamma(a) - p|(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$ (C3-013.T1). $\theta(t) := \theta_0 + \int_a^t F_p(\gamma) \cdot \gamma'$ es continua y $\gamma(t) - p = |\gamma(t) - p|(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$ para todo $t \in [a, b]$.

Aquí $\int_a^t F_p(\gamma)\cdot\gamma'$ es la integral de línea de $\gamma|[a,t]$: si $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $\theta(t) = \theta(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t F_p(\gamma_i(s))\cdot\gamma_i'(s)\,ds$ (C4-014.T1, aditividad).

> **Idea de la demostración**
> Hay dos vectores unitarios que giran: la dirección real $v(t)$ de $\gamma(t) - p$ y el candidato $u(t) = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$. Los dos giran con la misma velocidad angular θ', así que el ángulo entre ellos no cambia; como empiezan iguales, son iguales siempre.

Demostración. Sean $w(t) := \gamma(t) - p \neq 0$, $\rho(t) := |w(t)| > 0$, $v := w/\rho$ y $u(t) := (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$.

1. *θ es continua.* En cada tramo es una constante más una integral indefinida de una función continua, y es continua (C2-007.T1); en los t_i los valores de los dos tramos coinciden por su definición.
2. *Derivadas en el interior de un tramo.* En (t_{i-1}, t_i), por el primer teorema fundamental (C2-008.T1), $\theta' = F_p(\gamma) \cdot \gamma' = Jw \cdot w'/\rho^2 = Jv \cdot w'/\rho$.
3. $\rho = \sqrt{w \cdot w}$ es derivable con $\rho' = (w \cdot w')/\rho = v \cdot w'$ (C2-014.T1, C3-002.T4), y por el cociente (C3-002.T4)
$$v' = \frac{w'}{\rho} - \frac{w\rho'}{\rho^2} = \frac{w' - (w' \cdot v)\, v}{\rho} = \frac{(w' \cdot Jv)\, Jv}{\rho} = \theta' Jv,$$
usando (†) con $z = w'$.
4. Por la cadena (C1-030.T1) y C2-014.T6, $u' = \theta'(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = \theta' Ju$, y como J es lineal, $(Ju)' = J(u') = \theta' J(Ju) = -\theta' u$.
5. Por la regla del producto punto (C3-002.T4):
$$(v \cdot u)' = \theta'(Jv \cdot u + v \cdot Ju) = 0, \qquad (v \cdot Ju)' = \theta'(Jv \cdot Ju - v \cdot u) = 0,$$

porque $Jv \cdot u = -v_2u_1 + v_1u_2 = -(v \cdot Ju)$ y $Jv \cdot Ju = v \cdot u$.

6. *Valores iniciales.* Por la elección de θ_0, $u(a) = v(a)$; así $(v \cdot u)(a) = |v(a)|^2 = 1$ y $(v \cdot Ju)(a) = v(a) \cdot Jv(a) = 0$.
7. *Tramo por tramo.* $v \cdot u$ y $v \cdot Ju$ son continuas en $[a, b]$ (pasos 1 y C3-012.T2) y tienen derivada 0 en el interior de cada tramo, así que son constantes en cada $[t_{i-1}, t_i]$ (C1-034.T1). Por inducción sobre i (C1-005.T1) y el paso 6, $v \cdot u \equiv 1$ y $v \cdot Ju \equiv 0$ en $[a, b]$.
8. Por (†) con el unitario u (C2-014.T5) y $z = v$: $v = (v \cdot u)u + (v \cdot Ju)Ju = u$. Así $\gamma(t) - p = \rho(t)v(t) = |\gamma(t) - p|(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$. ■

Corolario C4-017.C1

$n(\gamma, p)$ es un entero.

Demostración. Sea γ cerrado en $[a, b]$ y θ como en C4-017.T1, de modo que $\theta(b) - \theta_0 = \oint_\gamma F_p \cdot d\gamma = 2\pi n(\gamma, p)$.

1. Como $\gamma(b) = \gamma(a)$, C4-017.T1 en $t = a$ y en $t = b$ da $(\cos\theta(b), \operatorname{sen}\theta(b)) = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0) =: e$, un unitario.
2. Para $x \in \mathbb{R}$ sea $m(x) := -\lfloor(\pi - x)/(2\pi)\rfloor \in \mathbb{Z}$ (C1-007.T2). De $\lfloor y\rfloor \le y < \lfloor y\rfloor + 1$ con $y = (\pi - x)/(2\pi)$ sale $-\pi < x - 2\pi m(x) \le \pi$.
3. Por la periodicidad (C2-014.T5, aplicada $|m|$ veces), $(\cos(x - 2\pi m), \operatorname{sen}(x - 2\pi m)) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. Así $\alpha := \theta_0 - 2\pi m(\theta_0)$ y $\beta := \theta(b) - 2\pi m(\theta(b))$ están en $(-\pi, \pi]$ y $P(1, \alpha) = e = P(1, \beta)$.
4. Por la unicidad de C3-013.T1 (b), $\alpha = \beta$. Entonces $\theta(b) - \theta_0 = 2\pi(m(\theta(b)) - m(\theta_0))$ y $n(\gamma, p) = m(\theta(b)) - m(\theta_0) \in \mathbb{Z}$. ■

Teorema C4-017.T2 (constancia del índice)

$p \mapsto n(\gamma, p)$ es continua en el abierto $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{traza}\gamma$, constante en cada subconjunto conexo de él, y $n(\gamma, p) = 0$ si la distancia de p a la traza es mayor que $\ell(\gamma)/(2\pi)$.

> **Idea de la demostración**
> Una función continua con valores enteros en un conexo no puede saltar. Y muy lejos de la curva el campo F_p es tan pequeño que la integral no alcanza ni una vuelta.

Demostración. Sea $T := \gamma([a,b])$ la traza y $V := \mathbb{R}^2 \setminus T$.

1. *V es abierto.* T es compacta (C3-014.T1), luego cerrada (C3-010.T4), y su complemento es abierto (C3-008.D1).
2. *Continuidad.* En el tramo i, $g_i(p,t) := J(\gamma_i(t)-p)\cdot\gamma_i'(t)/|\gamma_i(t)-p|^2$ es continua en $V \times [t_{i-1}, t_i]$ (C3-012.T2: el denominador no se anula). Por C4-012.T2 (con $P = V$ y $K = [t_{i-1}, t_i]$), $p \mapsto \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(p,t)\,dt$ es continua en V, y la suma de esas funciones, dividida entre 2π, es $n(\gamma,\cdot)$ (C4-014.D1).
3. *Constancia.* Sea $S \subset V$ conexo. $n(\gamma, S)$ es conexo (C3-014.T4), luego un intervalo de $\mathbb{R}$ (C3-011.T1), y sus elementos son enteros (C4-017.C1). Si tuviera dos enteros $m < m'$, contendría a $m + \frac{1}{2}$, que no es entero. Así $n(\gamma,\cdot)$ es constante en S.
4. *Lejos de la curva.* Sea $d := \min_{x\in T} |x-p|$ (existe: $x \mapsto |x-p|$ es continua en el compacto T, C3-014.C1). Para $x \in T$, $|F_p(x)| = |x-p|/|x-p|^2 = 1/|x-p| \le 1/d$ ($|Jw| = |w|$).
5. Por la cota de C4-014.T1, $|\oint_\gamma F_p \cdot d\gamma| \le \ell(\gamma)/d$. Si $d > \ell(\gamma)/(2\pi)$, eso es $< 2\pi$, y $|n(\gamma,p)| < 1$; como es entero, $n(\gamma,p) = 0$. ■

> **Ejemplo C4-017.E1**
> Para la circunferencia de radio r alrededor del origen recorrida k veces, $\gamma(t) = r(\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi k]$ ($k \in \mathbb{N}$): $n(\gamma,p) = k$ si $|p| < r$ y $n(\gamma,p) = 0$ si $|p| > r$.

Sea $\gamma(t) = r(\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi k]$ ($k \in \mathbb{N}$); su traza es la circunferencia $|x| = r$ y $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi k} r\,dt = 2\pi k r$ (C4-013.T2).

1. *En el centro.* $F_0(\gamma)\cdot\gamma' = J\gamma\cdot\gamma'/r^2 = (r^2\operatorname{sen}^2 t + r^2\cos^2 t)/r^2 = 1$ (como en C4-015.E1), así que $n(\gamma,0) = 2\pi k/(2\pi) = k$ (C4-014.D1).
2. *Adentro.* La bola $B(0,r)$ es convexa, luego conexa (C3-011.T2), no toca la traza y contiene a 0. Por C4-017.T2, $n(\gamma,p) = k$ para $|p| < r$.
3. *Muy afuera.* Si $|p| > (k+1)r$, para x en la traza $|x-p| \ge |p| - r > kr = \ell(\gamma)/(2\pi)$ (C3-001.T4), y $n(\gamma,p) = 0$ por C4-017.T2.
4. *Afuera, cerca.* Si $r < |p| \le (k+1)r$, sea $q := \frac{(k+2)r}{|p|}p$. Los puntos del segmento $[p,q]$ son λp con $1 \le \lambda \le (k+2)r/|p|$, de norma $\ge |p| > r$: el segmento no toca la traza y es conexo (C3-011.T2). Por C4-017.T2 y el paso 3 ($|q| = (k+2)r$), $n(\gamma,p) = n(\gamma,q) = 0$.

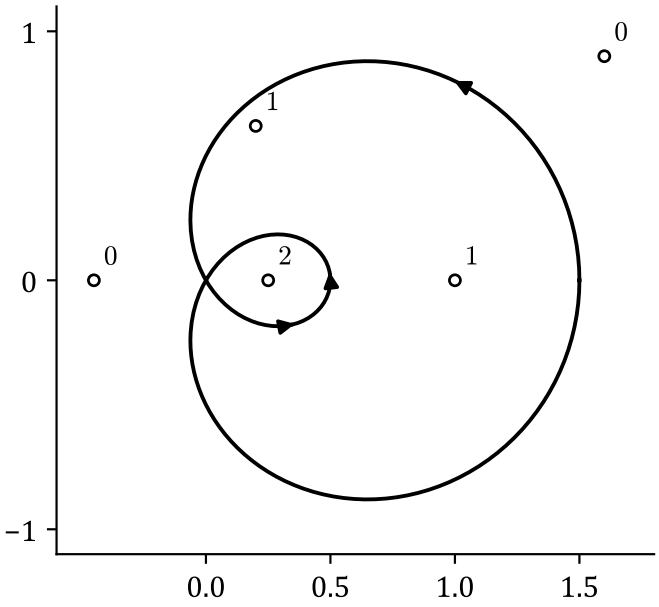


Figura 18: El caracol $r = \frac{1}{2} + \cos t$ y el índice de cada región: 2 en el lazo interior, 1 entre los lazos, 0 afuera.

Para el caracol del gancho, $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \cos t)(\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi]$, la integral numérica da $n = 2$ en $(0.25, 0)$, $n = 1$ en $(1, 0)$ y en $(0.2, 0.62)$, y $n = 0$ en $(-0.3, 0)$ y en $(2, 1)$ (`tools/checks/C4-017.py`). Por C4-017.T2 basta un punto por región.

Corolario C4-017.C2 (Green y el índice)

Si $D = \sigma(Q)$ es un parche plano y $p \notin D$, $n(\partial_\sigma D, p) = 0$.

Demostración.

1. La traza de $\partial_\sigma D$ es $\sigma(\partial Q) \subset D$, así que p no está en ella y $n(\partial_\sigma D, p)$ está definido.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ es abierto (si $x \neq p$, la bola $B(x, |x - p|)$ no contiene a p, C3-008.D1) y contiene a D. Ahí $F_p(x) = F(x - p)$ es C^1 (C3-023.C1, con F el campo del ángulo, C4-015.E1), y por la cadena $\partial_1 (F_p)_2 - \partial_2 (F_p)_1 = (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x - p) = 0$.
3. Por Green (C4-016.T4), $\oint_{\partial_\sigma D} F_p \cdot d\gamma = \int_D 0 = 0$, y $n(\partial_\sigma D, p) = 0$. ■

⚠ Con p dentro, Green no se aplica

Si $p \in D$, F_p no es C^1 en un abierto que contenga a D (C4-016.E2), y el índice puede ser $\neq 0$: el disco de C4-016.C2 tiene $n(\partial_\sigma D, p) = 1$ para $|p| < r$ (por C4-016.C2 el borde orientado da lo mismo que la circunferencia, y C4-017.E1 con $k = 1$).

Definición C4-017.D2 (índice de un campo sobre una curva)

Si γ es cerrado C^1 por tramos y F es C^1 en un abierto que contiene a la traza, sin ceros en ella, $\operatorname{ind}_\gamma(F) := n(F \circ \gamma, 0)$.

$F \circ \gamma$ es cerrado ($F(\gamma(a)) = F(\gamma(b))$), C^1 por tramos (C3-023.C1 en cada tramo, achicando el intervalo como en C4-015.T1) y no pasa por 0. Mide cuántas vueltas da el vector F mientras su punto de apoyo recorre γ.

Ejemplo C4-017.E2
En la circunferencia unitaria, $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ tiene índice 2 y $F(x, y) = (x, -y)$ índice -1.

Sea $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi]$.

1. Por las fórmulas de suma (C2-014.T8), $F(\gamma(t)) = (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, 2 \cos t \operatorname{sen} t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) =: \eta(t)$, unitario y nunca 0. $\eta' = 2(-\operatorname{sen} 2t, \cos 2t) = 2J\eta$ (C2-014.T6, C1-030.T1), así que $F_0(\eta) \cdot \eta' = J\eta \cdot 2J\eta = 2$, y $\operatorname{ind}_\gamma(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\, dt = 2$ (C2-009.C1).
2. $F(\gamma(t)) = (\cos t, -\operatorname{sen} t) =: \zeta(t)$, con $\zeta' = (-\operatorname{sen} t, -\cos t)$ y $J\zeta = (\operatorname{sen} t, \cos t)$: $F_0(\zeta) \cdot \zeta' = -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t = -1$, y el índice es -1.
3. Los dos son enteros, como dice C4-017.C1.

Por qué cada hipótesis

- *p fuera de la traza.* Si p está en la traza, F_p no está definido en un punto del camino y la integral no tiene sentido; cerca de ese punto el índice salta (en la circunferencia, de 1 adentro a 0 afuera).
- *γ cerrado en C4-017.C1.* Para el arco $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), t \in [0, \pi/2]$, la misma integral da $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$: sin cerrar, el ángulo recorrido no es múltiplo de 2π.

– *Conexo en C4-017.T2.* $\mathbb{R}^2 \setminus \{|x| = 1\}$ no es conexo, y el índice de la circunferencia vale 1 en una parte y 0 en la otra.

Ejercicios

1. Calcula $n(\gamma, p)$ para el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$ recorrido en sentido positivo y $p = 0$, usando C4-017.T2 y una circunferencia.
2. Demuestra que $n(\gamma^-, p) = -n(\gamma, p)$ y que $n(\gamma \oplus \eta, p) = n(\gamma, p) + n(\eta, p)$ si γ y η son cerrados con el mismo punto inicial.
3. Calcula el índice de $F(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ en la circunferencia unitaria.
4. Sea γ cerrado y p, q fuera de la traza con el segmento $[p, q]$ también fuera. Demuestra que $n(\gamma, p) = n(\gamma, q)$.
5. Demuestra que si F no tiene ceros en el disco unitario cerrado (y es C^1 cerca de él), su índice en la circunferencia unitaria es 0. (Sugerencia: el índice de $F \circ \gamma_s$, con $\gamma_s(t) = s(\cos t, \operatorname{sen} t)$, es continuo en $s \in [0, 1]$.)

Respuestas

1. 1. En el lado derecho $(1, t)$, $t \in [-1, 1]$: $F_0 \cdot \gamma' = (-t, 1) \cdot (0, 1)/(1 + t^2) = 1/(1 + t^2)$, con integral 2 arctan $1 = \pi/2$ (C2-014.T12); los otros tres lados dan lo mismo por simetría: $4 \cdot \frac{\pi}{2}/(2\pi) = 1$.
2. C4-014.T1 (camino inverso y concatenación).
3. $F(\gamma(t)) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t)$ (fórmulas de suma): índice 3.
4. El segmento es conexo y está en $\mathbb{R}^2 \setminus$ traza: C4-017.T2.
5. $h(s) := n(F \circ \gamma_s, 0)$ es continua en $[0, 1]$ (C4-012.T2 con parámetro s) y entera, luego constante; $h(0) = n(\text{camino constante}, 0) = 0$ (la derivada es 0). Así $h(1) = 0$.

C4-018 · Superficies parametrizadas y área

Motivación

> **Rodajas de naranja**
> Rebanas una naranja de radio 4 cm en rodajas de 1 cm de grosor, con cortes paralelos. Las rodajas del centro son grandes y las de las puntas son casi solo cáscara. ¿Cuál tiene más cáscara?
> Todas tienen la misma: $2\pi\cdot 4\cdot 1 \approx 25.13$ cm^2. Lo descubrió Arquímedes: el área de la zona de una esfera entre dos planos paralelos solo depende de la distancia entre los planos. Los volúmenes sí cambian (la rodaja central tiene $47\pi/3 \approx 49.2$ cm^3 y la de la punta $11\pi/3 \approx 11.5$ cm^3), pero la cáscara no. Para demostrarlo hay que decir qué es el área de una superficie curva.
> Dónde falla la analogía: la cáscara real tiene grosor y la naranja no es una esfera perfecta.

Parte 1 · Superficies parametrizadas

Definición C4-018.D1 (superficie parametrizada)

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ compacto de Jordan y $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ la restricción de una función C^1 en un abierto $W \supset D$, con puntos (u, v). $\Phi_u := \partial_1\Phi$, $\Phi_v := \partial_2\Phi$ y $N := \Phi_u \times \Phi_v$ (**vector normal**); Φ es **regular** en (u, v) si $N(u, v) \neq 0$, y es un **parche** si es inyectiva y regular en $\operatorname{int} D$. $S := \Phi(D)$.

Teorema C4-018.T1 (plano tangente)

Si Φ es regular en (u_0, v_0): Φ_u, Φ_v son linealmente independientes; $w \in \mathbb{R}^3$ es ortogonal a $N \iff w = \alpha\Phi_u + \beta\Phi_v$ (con α, β únicos); y para toda curva c de clase C^1 en W, $(\Phi \circ c)' = c_1'\Phi_u + c_2'\Phi_v$. El **plano tangente** es $\Phi(u_0, v_0) + \{\alpha\Phi_u + \beta\Phi_v\}$.

Demostración. Todo en el punto (u_0, v_0); escribimos $a := \Phi_u$, $b := \Phi_v$, $N = a \times b \neq 0$.

1. *Independencia.* Si $\alpha a + \beta b = 0$, por la bilinealidad, $a \times a = 0$ y $b \times a = -a \times b$ (C3-006.T1): $0 = (\alpha a + \beta b) \times b = \alpha N$ y $0 = a \times (\alpha a + \beta b) = \beta N$. Como $N \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$.
2. *(⇐)* $(\alpha a + \beta b) \cdot N = \alpha(a \times b) \cdot a + \beta(a \times b) \cdot b = 0$ (C3-006.T1).
3. *(⇒), un marco.* $a \neq 0$ (si no, $N = 0$). Sean $e := a/|a|$, $b_\perp := b - (b \cdot e)e$ y $f := b_\perp/|b_\perp|$: $b_\perp \neq 0$ porque a, b son independientes (paso 1). e y f son unitarios y $e \cdot f = 0$ (C3-001.T2).
4. Sea $B := e \times f$. Por la bilinealidad y $e \times e = 0$, $B = \frac{1}{|a|\,|b_\perp|}\, a \times b = \lambda N$ con $\lambda > 0$.
5. Por el marco ortonormal (C3-006.T2), $w = (w \cdot e)e + (w \cdot f)f + (w \cdot B)B$. Si $w \cdot N = 0$, entonces $w \cdot B = 0$ y w es combinación de e y f, que son combinaciones de a y b. La unicidad de α, β es el paso 1.
6. *Curvas.* Si c es C^1 en un intervalo con valores en W, por la regla de la cadena (C3-023.T1) y porque las columnas de $D\Phi$ son Φ_u, Φ_v (C3-022.T1), $(\Phi \circ c)'(t) = D\Phi(c(t))c'(t) = c_1'(t)\Phi_u + c_2'(t)\Phi_v$. ■

Ejemplo C4-018.E1 (parametrizaciones usuales)
Gráfica $z = h(x,y)$ sobre K: $\Phi(x,y) = (x,y,h)$, $N = (-\partial_1 h, -\partial_2 h, 1)$. Esfera de radio R y centro c: $\Phi(\varphi,\theta) = c + R\omega(\varphi,\theta)$ en $[0,\pi] \times [-\pi,\pi]$, $\omega := (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$, $N = R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega$. Toro: $\Phi(\varphi,\theta) = ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta, b\operatorname{sen}\varphi)$ en $[-\pi,\pi]^2$ $(0 < b < a)$, $|N| = b(a + b\cos\varphi)$. Las gráficas y la esfera son parches (la esfera es inyectiva y regular en $(0,\pi) \times (-\pi,\pi)$).

1. *Gráfica* (h de clase C^1 en un abierto que contiene al compacto de Jordan K). $\Phi_x = (1, 0, \partial_1 h)$ y $\Phi_y = (0, 1, \partial_2 h)$ (C3-015.T1). Por C3-006.D1,

$$N = (0 \cdot \partial_2 h - \partial_1 h \cdot 1,\ \partial_1 h \cdot 0 - 1 \cdot \partial_2 h,\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-\partial_1 h, -\partial_2 h, 1).$$

   Nunca se anula, y Φ es inyectiva (sus dos primeras coordenadas son (x,y)): toda gráfica es un parche.
2. *Esfera.* Por C2-014.T6, $\Phi_\varphi = R(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi)$ y $\Phi_\theta = R(-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, 0)$. Por C3-006.D1 y $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$ (C2-014.T5),

$$\begin{aligned} N &= R^2\big(\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta,\ \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\big) \\ &= R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega. \end{aligned}$$

   $|\omega| = 1$ (C2-014.T5), así que $|N| = R^2|\operatorname{sen}\varphi|$: Φ es regular en $(0,\pi) \times \mathbb{R}$ y no en los polos $\varphi = 0, \pi$.
3. *La esfera es un parche.* En $\operatorname{int} D = (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$, si $\omega(\varphi,\theta) = \omega(\varphi',\theta')$, la tercera coordenada

da $\cos\varphi = \cos\varphi'$ y, como cos es inyectiva en $[0,\pi]$ (C2-014.D6), $\varphi = \varphi'$; con $\operatorname{sen}\varphi > 0$ queda $P(1,\theta) = P(1,\theta')$ y $\theta = \theta'$ (C3-013.T1 (b)).

4. *Toro.* Con $s := a + b\cos\varphi > 0$: $\Phi_\varphi = (-b\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, -b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, b\cos\varphi)$ y $\Phi_\theta = (-s\operatorname{sen}\theta, s\cos\theta, 0)$. Por C3-006.D1,

$$N = -bs\,(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\varphi),$$

y el vector entre paréntesis es unitario (C2-014.T5): $|N| = bs = b(a + b\cos\varphi)$.

Parte 2 · Área

Definición C4-018.D2 (área)

$A(\Phi) := \int_D |\Phi_u \times \Phi_v|$.

$|N|$ es continua en el compacto D (C3-012.T2), luego acotada e integrable en D (C3-014.C1, C4-005.T4 (a)). Para una superficie plana, $\Phi(u,v) = (u,v,0)$, $N = e_3$ y $A(\Phi) = c(D)$.

Teorema C4-018.T2 (producto cruz de combinaciones)

$(\alpha a + \beta b)\times(\gamma a + \delta b) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(a\times b)$. Por lo tanto, si $\Psi := \Phi\circ h$ con h de clase C^1, $\Psi_s \times \Psi_t = (\det Dh)\cdot(\Phi_u\times\Phi_v)\circ h$.

Demostración.

1. Por la bilinealidad (C3-006.T1):

$$(\alpha a + \beta b)\times(\gamma a + \delta b) = \alpha\gamma\, a\times a + \alpha\delta\, a\times b + \beta\gamma\, b\times a + \beta\delta\, b\times b.$$

2. Con $a\times a = b\times b = 0$ y $b\times a = -a\times b$ (C3-006.T1) queda $(\alpha\delta - \beta\gamma)\, a\times b$.
3. Para $\Psi = \Phi\circ h$ (en un abierto donde h cae en W), la cadena (C3-023.T1, C3-022.T1) da $\Psi_s = (\partial_s h_1)\Phi_u\circ h + (\partial_s h_2)\Phi_v\circ h$ y $\Psi_t = (\partial_t h_1)\Phi_u\circ h + (\partial_t h_2)\Phi_v\circ h$.
4. Por el paso 2 con $\alpha = \partial_s h_1$, $\beta = \partial_s h_2$, $\gamma = \partial_t h_1$, $\delta = \partial_t h_2$: $\alpha\delta - \beta\gamma = \det Dh$ (AL.4) y $\Psi_s\times\Psi_t = (\det Dh)\,(\Phi_u\times\Phi_v)\circ h$. ■

Teorema C4-018.T3 (invariancia por reparametrización)

Sean Φ como en C4-018.D1, $D' \subset \mathbb{R}^2$ compacto de Jordan y $h : D' \to D$ la restricción de una función C^1 en un abierto que contiene a D', con $h(D') = D$, y U_0 abierto tal que h es inyectiva con $\det Dh \neq 0$ en U_0 y $D' \setminus U_0$ tiene contenido cero. Para $\Psi := \Phi \circ h$ y f continua en S: $\int_{D'} f(\Psi)|\Psi_s \times \Psi_t| = \int_D f(\Phi)|\Phi_u \times \Phi_v|$; en particular $A(\Psi) = A(\Phi)$.

Nota: es la independencia de la parametrización del programa (tema 3.3), para parametrizaciones relacionadas por un cambio h; no se enuncia para dos parametrizaciones cualesquiera de un mismo conjunto.

Idea de la demostración
Por T2, el normal de Ψ es el de Φ multiplicado por $\det Dh$; su norma trae $|\det Dh|$, que es justo el jacobiano del cambio de variables con un conjunto excepcional.

Demostración. Sea U' el abierto que contiene a D' donde h es C^1; achicándolo a $U' \cap h^{-1}(W)$ (C3-012.T4) podemos suponer $h(U') \subset W$, así que $\Psi = \Phi \circ h$ es C^1 en U' (C3-023.C1) y es una superficie parametrizada sobre D'.

1. Sea $g := f(\Phi)\,|\Phi_u \times \Phi_v|$ en D: continua (C3-012.T2) en el compacto D, luego acotada e integrable en D (C3-014.C1, C4-005.T4 (a)).
2. Por C4-018.T2, $|\Psi_s \times \Psi_t| = |\det Dh|\,|\Phi_u \times \Phi_v| \circ h$ (C3-001.T2), así que en D'

$$f(\Psi)\,|\Psi_s \times \Psi_t| = (g \circ h)\,|\det Dh|.$$

3. El cambio de variables con un conjunto excepcional (C4-011.T1) con $U = U'$, $g \to h$, $A = D'$ ($\bar{A} = D'$ porque D' es compacto), el U_0 del enunciado y $Z = D' \setminus U_0$ (contenido cero) da $\int_{h(D')} g = \int_{D'} (g \circ h)|\det Dh|$.
4. Como $h(D') = D$, los pasos 2 y 3 dan la igualdad. Con $f = 1$, $A(\Psi) = A(\Phi)$. ■

Corolario C4-018.C1 (gráficas)

Si h es C^1 en un abierto que contiene a K, el área de la gráfica es $\int_K \sqrt{1 + (\partial_1 h)^2 + (\partial_2 h)^2}$.

Demostración. Por C4-018.E1, $N = (-\partial_1 h, -\partial_2 h, 1)$, y $|N| = \sqrt{(\partial_1 h)^2 + (\partial_2 h)^2 + 1}$ (C3-001.D2). Se sustituye en C4-018.D2. ■

Ejemplo C4-018.E2

La esfera de radio R tiene área $4\pi R^2$; para la esfera centrada en 0, la zona $\{a \le z \le b\}$ $(-R \le a < b \le R)$ tiene área $2\pi R(b-a)$ (Arquímedes).

1. Por C4-018.E1, $|N| = R^2 \operatorname{sen}\varphi$ en $[0,\pi] \times [-\pi,\pi]$ ($\operatorname{sen}\varphi \ge 0$ ahí, C2-014.C1). Por Fubini (C4-006.C1) y Barrow (C2-009.C1, C2-014.T6),

$$A = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} R^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi R^2[-\cos\varphi]_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

2. *Zona* (esfera centrada en 0). $z = R\cos\varphi$ está en $[a,b]$ si y solo si $\varphi \in [\varphi_b, \varphi_a]$ con $\varphi_a := \arccos(a/R)$, $\varphi_b := \arccos(b/R)$ (C2-014.D6: cos es decreciente en $[0,\pi]$, así que $\varphi_b < \varphi_a$). La zona es la superficie Φ restringida a $[\varphi_b, \varphi_a] \times [-\pi,\pi]$.
3. $A = 2\pi R^2 \int_{\varphi_b}^{\varphi_a} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = 2\pi R^2(\cos\varphi_b - \cos\varphi_a) = 2\pi R^2\left(\frac{b}{R} - \frac{a}{R}\right) = 2\pi R(b-a)$ (C2-014.D6: $\cos(\arccos x) = x$).

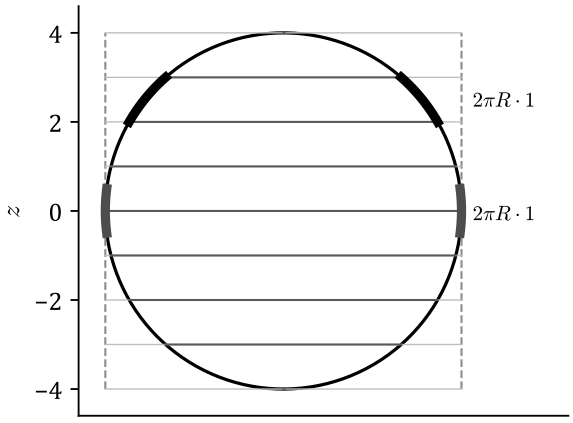


Figura 19: Una esfera de radio 4 rebanada en zonas de grosor 1: todas tienen área $2\pi R \cdot 1$, como la franja del cilindro que la envuelve.

Corolario C4-018.C2 (cierra C2-021.D2)

Si $f \ge 0$ es C^1 en un intervalo abierto que contiene a $[a,b]$, $\Phi(x,\theta) := (x, f(x)\cos\theta, f(x)\operatorname{sen}\theta)$ en $[a,b] \times [-\pi,\pi]$ tiene $A(\Phi) = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$: el área de superficie de revolución definida en C2-021.D2 es el área de esta superficie parametrizada.

Demostración.

1. $\Phi_x = (1, f'\cos\theta, f'\operatorname{sen}\theta)$, $\Phi_\theta = (0, -f\operatorname{sen}\theta, f\cos\theta)$ (C2-014.T6). Por C3-006.D1,

$$N = \big(ff'(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta),\ -f\cos\theta,\ -f\operatorname{sen}\theta\big) = (ff', -f\cos\theta, -f\operatorname{sen}\theta).$$

2. $|N| = \sqrt{f^2f'^2 + f^2} = f\sqrt{1+f'^2}$ (C3-001.D2, C2-014.T5, C2-014.T1; $f \geq 0$).
3. Por Fubini (C4-006.C1), $A(\Phi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}\,dx\,d\theta = 2\pi\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$ (C2-009.C1), que es la expresión de C2-021.D2. ■

> **Ejemplo C4-018.E3**
> El toro de C4-018.E1 tiene área $4\pi^2ab$.

Por C4-018.E1 y Fubini, $A = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b(a + b\cos\varphi)\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\,b\,(2\pi a + b[\operatorname{sen}\varphi]_{-\pi}^{\pi}) = 4\pi^2ab$ (C2-009.C1, C2-014.T6, C2-014.C1). Es la longitud de la circunferencia generadora ($2\pi b$) por la que recorre su centro ($2\pi a$), como en Pappus.

Por qué cada hipótesis

- *h inyectiva fuera de contenido cero (T3).* $h(s,t) = (s, 2t)$ en $[0,\pi]\times[-\pi/2, \pi/2]$ es inyectiva sobre $D = [0,\pi]\times[-\pi,\pi]$ y da otra vez $4\pi R^2$. En cambio, $\Psi(s,t) := c + R\omega(s,2t)$ en $[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$ recorre la esfera dos veces y tiene $A(\Psi) = 8\pi R^2$: aquí $h(s,t) = (s,2t)$ cae en $[0,\pi]\times[-2\pi, 2\pi]$, donde la fórmula de Φ no es inyectiva. La inyectividad es la que impide contar la superficie dos veces.
- *Regular.* En los polos $N = 0$, pero forman un conjunto de contenido cero de D (dos segmentos) y no afectan el área. Una superficie que no es regular en ningún punto, como $\Phi(u,v) = (u+v, 0, 0)$, tiene área 0 aunque D sea grande: su imagen es un segmento.

Ejercicios

1. Calcula el área del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sobre el disco unitario, con C4-018.C1 y con C4-018.C2.
2. Calcula el área de la gráfica de $h(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el disco unitario.
3. Demuestra que el área de la esfera no cambia si se usa $\Phi(s^2, \theta)$ con $s \in [0, \sqrt{\pi}]$.
4. Halla el plano tangente a la esfera unitaria en $\omega(\pi/4, 0)$ con C4-018.T1.
5. Un helicoide $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: calcula $|N|$ y su área.

Respuestas

1. $|\nabla h| = 1$ fuera del origen: $\int_{\bar{B}} \sqrt{2} = \pi\sqrt{2}$; con $f(x) = x$ en $[0,1]$ girando alrededor del eje, $2\pi \int_0^1 x\sqrt{2} = \pi\sqrt{2}$. (En C4-018.C1 h no es C^1 en el origen: se agota con discos sin el centro o se usa C4-018.C2.)
2. $\int_{\bar{B}} \sqrt{1+4r^2} = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.
3. C4-018.T3 con $h(s,\theta) = (s^2, \theta)$, $\det Dh = 2s > 0$ para $s > 0$, inyectiva en $(0, \sqrt{\pi}) \times (-\pi, \pi)$.
4. N es paralelo a ω; el plano es $\{x : (x-\omega)\cdot\omega = 0\}$, con $\omega = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$: $x + z = \sqrt{2}$.
5. $N = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$, $|N| = \sqrt{1+r^2}$; área $2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr = \pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$.

C4-019 · Integrales de superficie, flujo y orientación

Motivación

> **La sombrilla bajo la lluvia**
> Llueve de manera pareja y vertical. Una sombrilla en forma de semiesfera de radio 0.5 m y un disco plano del mismo borde: ¿cuál intercepta más agua? La sombrilla tiene el doble de superficie ($2\pi R^2$ contra πR^2), pero las dos interceptan lo mismo: el flujo de la lluvia por cada una es $\pi R^2 \approx 0.785$ m^2 por la intensidad de la lluvia. Lo que cuenta no es el área sino cuánta superficie queda **de frente** al flujo.
> Y una sorpresa: una banda de papel con medio giro (la banda de Möbius) tiene un solo lado. Una hormiga que la recorre por el centro regresa al punto de partida «del otro lado». En esa superficie no se puede decir de qué lado entra el agua.
> Dónde falla la analogía: la lluvia real no es uniforme y la sombrilla tiene grosor; aquí el flujo es un campo constante y la superficie no tiene espesor.

Definiciones

Definición C4-019.D1 (integral de superficie)

Para f continua en $S = \Phi(D)$: $\iint_\Phi f\, dS := \int_D f(\Phi)|\Phi_u \times \Phi_v|$.

Definición C4-019.D2 (flujo)

Para F continuo en S con valores en $\mathbb{R}^3$: $\iint_\Phi F \cdot dS := \int_D F(\Phi) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)$. Si Φ es un parche, $n := N/|N|$ (normal unitario) en $\operatorname{int} D$ y el flujo es $\iint_\Phi F \cdot n\, dS$: como ∂D tiene contenido cero, $\int_D F(\Phi) \cdot N$ y $\int_D (F(\Phi) \cdot n)|N|$ coinciden aunque n solo esté definido en $\operatorname{int} D$ (C4-005.T4 (d)).

Los dos integrandos son continuos en el compacto D (C3-012.T2), luego acotados e integrables (C3-014.C1, C4-005.T4). Para un parche, $F(\Phi)\cdot N = (F(\Phi)\cdot n)|N|$ en int D; como ∂D tiene contenido cero (C4-005.D1), los dos integrandos difieren a lo más ahí y dan la misma integral (C4-005.T4 (d)), aunque n no esté definido en ∂D (se extiende por 0, por ejemplo).

Resultados

Teorema C4-019.T1 (reparametrización y orientación)

Con h y U_0 como en C4-018.T3: $\iint_\Psi f\,dS = \iint_\Phi f\,dS$; si $\det Dh > 0$ en U_0, los flujos de F por Ψ y por Φ son iguales, y si $\det Dh < 0$ en U_0, son opuestos.

Idea de la demostración
El normal de $\Psi = \Phi \circ h$ es $\det Dh$ por el normal de Φ (C4-018.T2). En la integral de superficie entra $|\det Dh|$; en el flujo entra $\det Dh$ con su signo.

Demostración. Como en C4-018.T3, podemos suponer que h es C^1 en un abierto $U' \supset D'$ con $h(U') \subset W$.

1. La primera igualdad es C4-018.T3 con la f dada.
2. Sea $g := F(\Phi)\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)$ en D: continua, acotada e integrable en D (C3-012.T2, C3-014.C1, C4-005.T4).
3. Por C4-018.T2, en D': $F(\Psi)\cdot(\Psi_s \times \Psi_t) = (\det Dh)\,(g \circ h)$ (C3-001.T2).
4. *Si* $\det Dh > 0$ *en* U_0. En $D' \cap U_0$, $\det Dh = |\det Dh|$, así que $(\det Dh)(g\circ h)$ y $|\det Dh|(g\circ h)$ coinciden salvo en $D' \setminus U_0$, de contenido cero; por C4-005.T4 (d) tienen la misma integral en D'.
5. Por el cambio de variables con un conjunto excepcional (C4-011.T1, con los mismos datos que en C4-018.T3), $\int_{D'} |\det Dh|(g\circ h) = \int_{h(D')} g = \int_D g$. Con los pasos 3 y 4, $\iint_\Psi F\cdot dS = \iint_\Phi F\cdot dS$.
6. *Si* $\det Dh < 0$ *en* U_0. Ahora $\det Dh = -|\det Dh|$ en $D' \cap U_0$, y los pasos 4 y 5 dan $\iint_\Psi F\cdot dS = -\int_D g = -\iint_\Phi F\cdot dS$. ■

Definición C4-019.D3 (orientable)

Φ es **orientable** si existe $n : S \to \mathbb{R}^3$ continua con $|n| = 1$ y $n(\Phi(u,v))$ paralelo a $N(u,v)$ en todo punto regular. Una **orientación** es una tal n.

Lo importante es que n es una función **en** S, de los puntos de la superficie, no de los parámetros: si dos parámetros distintos dan el mismo punto, n tiene un solo valor ahí. «Paralelo» quiere decir $n(\Phi(u,v)) = \mu N(u,v)$ para algún real μ; como $|n| = 1$, $\mu = \pm 1/|N|$.

> **Ejemplo C4-019.E1 (banda de Möbius)**
> $\Phi(\theta, t) := ((2 + t\cos(\theta/2))\cos\theta, (2 + t\cos(\theta/2))\operatorname{sen}\theta, t\operatorname{sen}(\theta/2))$ en $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$ no es orientable: a lo largo de $t = 0$, $n = \lambda N/|N|$ con λ continua de valores ± 1 (constante), pero $\Phi(0,0) = \Phi(2\pi, 0)$ y $N(2\pi, 0) = -N(0,0)$.

Demostración. Φ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (C2-014.T6), así que es una superficie parametrizada sobre la caja $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$.

1. *El normal en $t = 0$.* Todas las partes de Φ que dependen de t llevan el factor t, así que en $t = 0$: $\Phi_\theta(\theta, 0) = (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)$ y $\Phi_t(\theta, 0) = (\cos(\theta/2)\cos\theta, \cos(\theta/2)\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}(\theta/2))$ (C2-014.T6, C1-030.T1).
2. Por C3-006.D1,

   $$N(\theta, 0) = \big(2\cos\theta\operatorname{sen}(\theta/2),\ 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta/2),\ -2\cos(\theta/2)\big)$$

   (la tercera coordenada es $-2\operatorname{sen}^2\theta\cos(\theta/2) - 2\cos^2\theta\cos(\theta/2)$, C2-014.T5). Su norma es $2\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2)} = 2$: todos los puntos $(\theta, 0)$ son regulares.
3. *Los extremos.* $\Phi(0,0) = (2,0,0) = \Phi(2\pi, 0)$ (C2-014.C1), mientras que $N(0,0) = (0,0,-2)$ y $N(2\pi, 0) = (2\operatorname{sen}\pi, 0, -2\cos\pi) = (0,0,2) = -N(0,0)$ (C2-014.C1: $\cos\pi = -1$, $\operatorname{sen}\pi = 0$).
4. *Supongamos que n es una orientación.* Sea $\lambda(\theta) := n(\Phi(\theta, 0)) \cdot N(\theta, 0)/2$ en $[0, 2\pi]$. Es continua (composición y producto punto de continuas, C3-012.T2).
5. Como $n(\Phi(\theta, 0))$ es paralelo a $N(\theta, 0)$ y los dos tienen norma 1 y 2, $n(\Phi(\theta, 0)) = \pm N(\theta, 0)/2$, y $\lambda(\theta) = \pm|N|^2/4 = \pm 1$.
6. Una función continua en $[0, 2\pi]$ con valores en $\{-1, 1\}$ es constante: si tomara los dos valores, por el valor intermedio (C1-023.C1) tomaría el 0.
7. Pero $n(\Phi(2\pi, 0)) = n(\Phi(0,0))$, porque es el mismo punto de S, y $N(2\pi, 0) = -N(0,0)$: $\lambda(2\pi) = -\lambda(0)$. Esto contradice el paso 6. Ninguna n es una orientación. ■

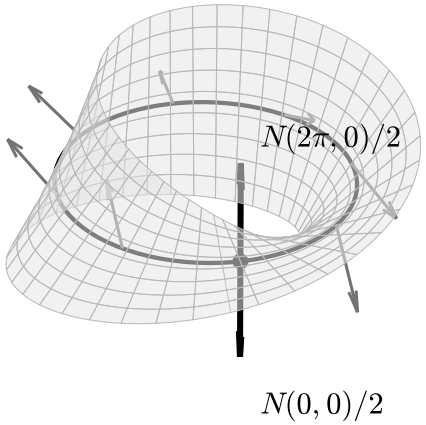


Figura 20: La banda de Möbius y el normal $N(\theta,0)$ a lo largo de la circunferencia central: gira media vuelta, y al regresar al punto $(2,0,0)$ apunta al revés.

⚠ Los parámetros no son la superficie

En el rectángulo de parámetros, $N(\theta,0)/2$ es una función continua y unitaria: no hay ningún problema «en el mapa». El problema aparece al exigir que n sea una función de los **puntos** de la banda: los parámetros $(0,0)$ y $(2\pi,0)$ son el mismo punto, y ahí las dos elecciones chocan.

Ejemplo C4-019.E2

La esfera es orientable ($n(x) = (x-c)/R$); el flujo de $F(x) = x$ por la esfera de radio R y centro 0 es $4\pi R^3$; el flujo de e_3 por la semiesfera superior es πR^2; el flujo por una gráfica es $\int_K F(\Phi)\cdot(-\partial_1 h, -\partial_2 h, 1)$.

1. *Orientable.* $n(x) := (x-c)/R$ es continua y unitaria en la esfera $S = \{|x-c| = R\}$ (C3-012.T2). En $\Phi(\varphi,\theta) = c + R\omega$, $n(\Phi) = \omega$, y por C4-018.E1, $N = R^2 \operatorname{sen}\varphi\ \omega$: paralelos.
2. *Flujo de x.* Con $c = 0$: $F(\Phi)\cdot N = R\omega\cdot R^2 \operatorname{sen}\varphi\ \omega = R^3 \operatorname{sen}\varphi$ ($|\omega| = 1$). Por Fubini (C4-006.C1) y Barrow (C2-009.C1, C2-014.T6), $\iint F\cdot dS = R^3\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4\pi R^3$.

3. *Lluvia en la semiesfera.* En $[0,\pi/2]\times[-\pi,\pi]$, $e_3\cdot N = R^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, y

$$\iint e_3\cdot dS = 2\pi R^2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 2\pi R^2\Big[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \pi R^2$$

   (C2-009.C1, C1-030.T1, C2-014.C1).
4. *Gráfica.* Por C4-018.E1, $N = (-\partial_1 h, -\partial_2 h, 1)$; se sustituye en C4-019.D2. El disco plano del gancho es la gráfica de $h = 0$ sobre el disco: flujo de e_3 igual a $\int_{\bar B} 1 = \pi R^2$.

Con $R = 0.5$: $\pi/4 \approx 0.785$ para la sombrilla y para el disco. Las dos tienen el mismo borde; en C4-021 veremos que eso no es casualidad, porque e_3 es un rotacional ($e_3 = \operatorname{rot}\frac{1}{2}(-y, x, 0)$).

Por qué cada hipótesis

- *El signo de* $\det Dh$ *en T1.* $h(\varphi,\theta) = (\varphi,-\theta)$ en la esfera ($\det Dh = -1$): el flujo de x por $\Phi\circ h$ es $-4\pi R^3$; la normal apunta hacia adentro.
- *n definida en S (D3).* Si se permitiera que n dependiera de los parámetros, la banda de Möbius sería «orientable» con $n = N/|N|$: la definición perdería su sentido.

Ejercicios

1. Calcula $\iint z^2\,dS$ en la esfera unitaria.
2. Calcula el flujo de $F = (0,0,z)$ por la gráfica de $z = 1 - x^2 - y^2$ sobre $[0,1]^2$ (normal hacia arriba).
3. Demuestra que el cilindro $\Phi(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$, $[-\pi,\pi]\times[0,1]$, es orientable, y calcula el flujo de $F(x) = (x_1, x_2, 0)$ por él.
4. ¿Es orientable la banda $\Phi(\theta,t) = ((2+t)\cos\theta, (2+t)\operatorname{sen}\theta, 0)$ en $[0,2\pi]\times[-1,1]$ (una corona plana)? Compara con la banda de Möbius.
5. Explica por qué el flujo de un campo constante v por la semiesfera superior de radio R es $\pi R^2\,v_3$.

Respuestas

1. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi = 2\pi\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$.
2. $\int_{[0,1]^2}(1-x^2-y^2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
3. $N = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$; $n(x) := (x_1, x_2, 0)$ es continua, unitaria y paralela. Flujo: $\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 1 = 2\pi$.
4. Sí: es plana, $N = (0,0,-(2+t))$ y $n := -e_3$ sirve. Aquí $\Phi(0,t) = \Phi(2\pi,t)$ y $N(0,t) = N(2\pi,t)$:

no hay choque.

5. $v \cdot N = R^2 \operatorname{sen} \varphi \, (v \cdot \omega)$; las partes con $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ integran 0 en $[-\pi, \pi]$, y queda v_3 por el paso 3 de C4-019.E2.

C4-020 · Divergencia y rotacional en el plano

Motivación

> **El desagüe de la tina**
> Quitas el tapón de una tina. Cerca del desagüe el agua hace dos cosas a la vez: se va hacia el centro y gira. Un modelo sencillo de la velocidad del agua en la superficie es $v(x, y) = (-x - y, x - y)$. Si pones un aro de radio $r = 10$ cm alrededor del desagüe, cada segundo **sale** por el aro -0.0628 m^2/s de agua (es decir, entra), y la **circulación** alrededor del aro es $+0.0628$ m^2/s. Divide entre el área del aro, πr^2: salen -2 y $+2$, y con un aro de cualquier tamaño, o alrededor de cualquier punto, salen los mismos números. Son la divergencia y el rotacional escalar de v: lo que la tina «traga» y lo que la tina «gira» por unidad de área. Este capítulo demuestra que ese es su significado.
> Dónde falla la analogía: el agua real de una tina se va hacia abajo (es tridimensional); aquí el desagüe es un sumidero en el plano y la velocidad es exactamente v.

Definiciones

Definición C4-020.D1 (flujo por una curva plana)

Para γ C^1 por tramos en $\mathbb{R}^2$ y F continuo en la traza:

$$\oint_\gamma F \cdot n \, ds := \sum_i \int \left(F_1(\gamma)\gamma_2' - F_2(\gamma)\gamma_1'\right) dt$$

($n := (\gamma_2', -\gamma_1')/|\gamma'|$ es γ' girado un cuarto de vuelta a la derecha). Es la integral de línea del campo $(-F_2, F_1)$: $\oint_\gamma F \cdot n \, ds = \oint_\gamma (-F_2, F_1) \cdot d\gamma$, y hereda C4-014.T1.

Es la integral de línea (C4-014.D1) del campo $G := (-F_2, F_1) = JF$: $G(\gamma) \cdot \gamma' = -F_2(\gamma)\gamma_1' + F_1(\gamma)\gamma_2'$. Por

eso hereda las propiedades de C4-014.T1: no depende de la partición, cambia de signo con el camino inverso y los lados repetidos en sentidos opuestos se cancelan. Si γ es regular, $(\gamma_2', -\gamma_1') = |\gamma'|\, n$ y la suma es $\sum \int (F \cdot n)|\gamma'|\, dt$, el flujo «hacia la derecha del avance». En una circunferencia en sentido positivo, la derecha es afuera.

Resultados

Teorema C4-020.T1 (teorema de la divergencia en el plano)

Si $D = \sigma(Q)$ es un parche plano y $F \in C^1$ en un abierto que contiene a D, $\int_D \operatorname{div} F = \oint_{\partial_\sigma D} F \cdot n\, ds$.

Demostración.

1. $G := (-F_2, F_1)$ es C^1 en el mismo abierto, con $\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1 = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 = \operatorname{div} F$ (C3-027.D1).
2. Por Green (C4-016.T4), $\int_D \operatorname{div} F = \oint_{\partial_\sigma D} G \cdot d\gamma$.
3. Por C4-014.D1 y la observación tras C4-020.D1, $\oint_{\partial_\sigma D} G \cdot d\gamma = \oint_{\partial_\sigma D} F \cdot n\, ds$. ■

Teorema C4-020.T2 (significado de div y rot en el plano)

Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, $p \in U$ y C_r el borde orientado del disco de radio r alrededor de p (C4-016.C2 con $r_1 = 0$). Entonces $\operatorname{div} F(p) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{C_r} F \cdot n\, ds$ y $(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(p) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{C_r} F \cdot d\gamma$.

> **Idea de la demostración**
> Por Green y por T1, los dos cocientes son promedios de $\operatorname{div} F$ y de $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$ en el disco; el promedio de una función continua en discos que se encogen tiende a su valor en el centro.

Demostración. Sea $r_0 > 0$ con $B(p, r_0) \subset U$ (C3-008.D1). Para $0 < r < r_0$, el disco cerrado $\bar{B}(p, r) \subset B(p, r_0)$.

1. Por C4-016.C2, $\bar{B}(p, r) = \sigma([0, r] \times [-\pi, \pi])$ es un parche plano, con borde orientado C_r; F es C^1 en el abierto $U \supset \bar{B}(p, r)$.

2. Por T1 y por Green (C4-016.T4):

$$\oint_{C_r} F \cdot n\, ds = \int_{\bar{B}(p,r)} \operatorname{div} F, \qquad \oint_{C_r} F \cdot d\gamma = \int_{\bar{B}(p,r)} (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

3. $c(\bar{B}(p,r)) = \pi r^2$ (C4-007.E1, y las traslaciones conservan el contenido, C4-005.T3).
4. $\operatorname{div} F$ y $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$ son continuas en U (C3-022.D2). Por el lema de los promedios (C4-007.C2), $\frac{1}{\pi r^2} \int_{\bar{B}(p,r)} \operatorname{div} F \to \operatorname{div} F(p)$, y lo mismo con el rotacional escalar. Con los pasos 2 y 3 se obtienen los dos límites. ■

⚠ Qué curva es C_r

C_r es $\sigma \circ \partial Q$, con el radio $\theta = \pm\pi$ recorrido dos veces y el centro como lado constante. Por C4-016.C2 (aplicado a F y a $G = (-F_2, F_1)$), las dos integrales son las de la circunferencia de radio r en sentido positivo: el radio repetido se cancela y el lado constante no aporta.

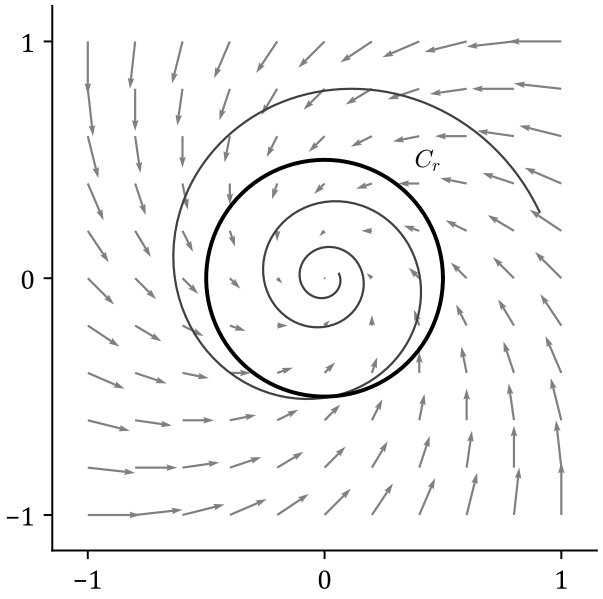


Figura 21: El desagüe $v = (-x - y, x - y)$ y el aro C_r: el flujo por el aro es negativo (el agua entra) y la circulación positiva (gira en sentido positivo).

El desagüe con números

Para $v = (-x - y, x - y)$: $\operatorname{div} v = -1 - 1 = -2$ y $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 1 - (-1) = 2$, constantes. Por el paso 2, para todo disco de radio r, $\oint_{C_r} v \cdot n\, ds = -2\pi r^2$ y $\oint_{C_r} v \cdot d\gamma = 2\pi r^2$: con $r = 0.1$,

∓ 0.0628, y los cocientes valen -2 y 2 sin necesidad de límite. Para un campo no afín, como $(x^2y, \operatorname{sen} x + y^3)$ en $(1,2)$, los cocientes se acercan a $\operatorname{div} = 4 + 12 = 16$ y a $\cos 1 - 1$ cuando $r \to 0$ (`tools/checks/C4-020.py`).

Teorema C4-020.T3 (identidades de Green en el plano)

Si D es un parche plano, $f \in C^1$ y $g \in C^2$ en un abierto que contiene a D: $\int_D (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) = \oint_{\partial_\sigma D} f \nabla g \cdot n \, ds$; si $f, g \in C^2$, $\int_D (f\Delta g - g\Delta f) = \oint_{\partial_\sigma D} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot n \, ds$. Si u es armónica, $\oint_{\partial_\sigma D} \nabla u \cdot n \, ds = 0$.

Demostración.

1. $F := f\nabla g$ es C^1: ∇g es C^1 porque $g \in C^2$, y los productos de C^1 son C^1 (C3-018.T2).
2. Por la regla del producto (C3-016.T3) en cada coordenada, $\partial_i(f\,\partial_i g) = \partial_i f\,\partial_i g + f\,\partial_i\partial_i g$, y sumando (C3-027.D1): $\operatorname{div}(f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$.
3. Por T1, $\int_D (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) = \oint f \nabla g \cdot n \, ds$: la primera identidad.
4. Si $f, g \in C^2$, la misma identidad con f y g intercambiados, restada de la primera (la integral de C4-020.D1 es lineal en F), da la segunda: los términos $\nabla f \cdot \nabla g$ se cancelan.
5. Si u es armónica ($u \in C^2$, $\Delta u = 0$, C3-027.D1), la primera identidad con $f = 1$, $g = u$ da $\oint \nabla u \cdot n \, ds = \int_D 0 = 0$. ■

Ejemplo C4-020.E1 (conservación de la masa en el plano)
Sean $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y ρ, v de clase C^1 en $J \times U$. Si para todo $t \in J$ y todo disco cerrado $D = \bar{B}(p,r) \subset U$, con su borde orientado ∂D de C4-016.C2, $\frac{d}{dt}\int_D \rho = -\oint_{\partial D} \rho v \cdot n \, ds$, entonces $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ en $J \times U$ (div en x).

1. Fijemos $t \in J$. Por la regla de Leibniz (C4-012.T3, con $K = \bar{B}(p,r)$, compacto de Jordan por C4-016.C2 y C4-016.T4), $\frac{d}{dt}\int_{\bar{B}(p,r)} \rho = \int_{\bar{B}(p,r)} \partial_t \rho(t,\cdot)$.
2. $x \mapsto \rho(t,x)v(t,x)$ es C^1 en U, y por T1, $\oint \rho v \cdot n \, ds = \int_{\bar{B}(p,r)} \operatorname{div}(\rho v)(t,\cdot)$.
3. La hipótesis da $\int_{\bar{B}(p,r)} \big(\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v)\big)(t,\cdot) = 0$ para todo disco cerrado en U (linealidad, C4-005.T4).
4. $w := \big(\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v)\big)(t,\cdot)$ es continua en U, y su integral en todo disco pequeño $\bar{B}(p,r)$ es 0; por la segunda parte de C4-007.C2, $w = 0$ en U. Como t era cualquiera, $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ en $J \times U$.

Por qué cada hipótesis

- $F \in C^1$ *cerca de p (T2).* Para el campo radial $F(x) = x/|x|^2$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\operatorname{div} F = 0$ fuera del origen, pero en la circunferencia de radio r alrededor de 0, $F \cdot n = 1/r$ y $\oint F \cdot n \, ds = 2\pi$: el cociente $2\pi/(\pi r^2) \to \infty$. El campo no está definido (ni es C^1) en $p = 0$.
- *Discos que se encogen (T2).* Para r fijo, el cociente es el **promedio** en el disco, no el valor en el centro: para $(x^2 y, \operatorname{sen} x + y^3)$ en $(1, 2)$ con $r = 0.1$ el cociente de flujo difiere de 16 en una cantidad del orden de r^2.

Ejercicios

1. Comprueba T1 para $F(x, y) = (x^3, y^3)$ en el disco unitario.
2. Calcula el flujo de $F(x, y) = (x, y)$ hacia afuera por la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ sin parametrizar el flujo.
3. Demuestra que si u es armónica en un abierto que contiene a un parche D y $u = 0$ en la traza de $\partial_\sigma D$, entonces $\int_D |\nabla u|^2 = 0$.
4. Para $F = (-y, x)/(x^2 + y^2)$, calcula $\oint_{C_r} F \cdot n \, ds$ alrededor del origen. ¿Qué dice T2?
5. En E1, ¿qué ecuación queda si la velocidad v es constante? Interprétala.

Respuestas

1. $\operatorname{div} F = 3(x^2 + y^2)$, integral $3\pi/2$; flujo: $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t)\, dt = 3\pi/2$.
2. $\operatorname{div} F = 2$: flujo $2 \cdot 6\pi = 12\pi$ (área de la elipse, C4-016.E1; la elipse es un parche).
3. Primera identidad con $f = g = u$: $\int_D |\nabla u|^2 = \oint u \nabla u \cdot n \, ds - \int_D u \Delta u = 0$ (el integrando de la línea tiene el factor $u(\gamma) = 0$).
4. $F \cdot n = 0$ en esas circunferencias (F es tangente): 0. T2 no se aplica en 0 (F no está ahí), pero el cociente da 0, consistente con $\operatorname{div} F = 0$ fuera del origen.
5. $\operatorname{div}(\rho v) = v \cdot \nabla \rho$, así que $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0$: a lo largo de cada recta $x + tv$, $\frac{d}{dt} \rho(t, x + tv) = 0$ (cadena). La densidad se transporta sin cambiar, con velocidad v.

C4-021 · Teorema de Stokes

Motivación

La red para mariposas

Una red para mariposas tiene un aro rígido y una red de tela. Puedes estirar la red plana, como un tambor, o dejarla colgar honda, como una bolsa. El aro es el mismo. Si un viento que gira, $F = (-y, x, 0)$, sopla a través de la red, ¿el «flujo del giro» por la red depende de su forma?

No depende. Con un aro de radio $R = 0.2$ m, el flujo de $\operatorname{rot} F = (0, 0, 2)$ por la red plana es $2\pi R^2 \approx 0.2513$; por la red semiesférica, también 0.2513; por un casquete más hondo de radio 0.3, otra vez 0.2513; y la circulación del viento alrededor del aro es 0.2513. El teorema de Stokes dice que el flujo del rotacional por una superficie solo depende de su borde.

Dónde falla la analogía: una red real deja pasar el aire por sus agujeros y se mueve con el viento; aquí la superficie es fija y el campo está dado.

Parte 1 · El teorema de Stokes para parches

Definición C4-021.D1 (parche para Stokes y su borde)

Sean Q un rectángulo y $\Phi : Q \to \mathbb{R}^3$ la restricción de una función C^2 en un abierto $W \supset Q$. $S := \Phi(Q)$ y su **borde orientado** es $\partial_\Phi S := \Phi \circ \partial Q$. Sus cuatro lados son $\Phi \circ \lambda_1, \dots, \Phi \circ \lambda_4$ (los lados de Q de C4-016.T1) y

$$\oint_{\partial_\Phi S} F \cdot d\gamma = \int_{\Phi\circ\lambda_1} F \cdot d\gamma + \int_{\Phi\circ\lambda_2} F \cdot d\gamma - \int_{\Phi\circ\lambda_3} F \cdot d\gamma - \int_{\Phi\circ\lambda_4} F \cdot d\gamma. \qquad (*)$$

La fórmula $(*)$ sale de C4-014.T1, como en C4-016.D2. No se pide que Φ sea inyectiva ni regular.

Teorema C4-021.T1 (teorema de Stokes)

Si $F \in C^1$ en un abierto que contiene a $\Phi(Q)$, entonces $\iint_\Phi \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\partial_\Phi S} F \cdot d\gamma$.

Idea de la demostración

La misma de Green, sin regresar: se jala la integral de línea al rectángulo, se usa Green ahí, y el rotacional del campo jalado es justo el integrando del flujo de rot F. Como no hay que volver a una región del plano, no hace falta el cambio de variables, ni inyectividad, ni regularidad.

Demostración. Sea V el abierto donde F es C^1.

1. $W' := W \cap \Phi^{-1}(V)$ es abierto (C3-012.T4) y contiene a Q; en él Φ es C^2 y $\Phi(W') \subset V$.
2. Por el cambio de variable en integrales de línea (C4-016.T2, con $k = 2, n = 3$): $\oint_{\partial_\Phi S} F \cdot d\gamma = \oint_{\Phi \circ \partial Q} F \cdot d\gamma = \oint_{\partial Q} \Phi^* F \cdot d\gamma$.
3. Por C4-016.T3, $\Phi^* F \in C^1(W', \mathbb{R}^2)$, y por Green en el rectángulo (C4-016.T1):
$$\oint_{\partial Q} \Phi^* F \cdot d\gamma = \int_Q \left(\partial_1 (\Phi^* F)_2 - \partial_2 (\Phi^* F)_1\right).$$
4. Por C4-016.T3 con $n = 3$, el integrando es $(\operatorname{rot} F \circ \Phi) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)$.
5. Φ es una superficie parametrizada sobre el compacto de Jordan Q (C4-018.D1, C4-005.T3) y rot F es continuo en $\Phi(Q)$ (C3-027.D1), así que por C4-019.D2 la integral del paso 3 es $\iint_\Phi \operatorname{rot} F \cdot dS$. ■

⚠ La orientación viene del orden de las variables

El borde $\Phi \circ \partial Q$ y la normal $\Phi_u \times \Phi_v$ están amarrados: si intercambias u y v, el normal cambia de signo (C3-006.T1) y el borde se recorre al revés, y los dos lados de Stokes cambian de signo juntos. Es la «regla de la mano derecha»: con el pulgar en la dirección de N, los dedos recorren el borde.

Parte 2 · Dominios más generales, ejemplos y el significado del rotacional

Corolario C4-021.C1 (dominios de parámetros más generales)

Si $\sigma : Q \to \mathbb{R}^2$ es C^2 (por ejemplo un parche plano de C4-016.C1 o C4-016.C2) y Φ es C^2 en un abierto que contiene a $\sigma(Q)$, Stokes vale para $\Phi \circ \sigma$, y si σ es un parche plano el flujo por $\Phi \circ \sigma$ es el flujo por $\Phi|_{\sigma(Q)}$ (C4-019.T1). En particular, para la gráfica $\Phi(x,y) = (x,y,h(x,y))$ sobre un disco $\bar{B}(p,r)$ (σ de C4-016.C2 con $r_1 = 0$), la circulación por el borde es la de la circunferencia levantada $t \mapsto \Phi(p + r(\cos t, \operatorname{sen} t))$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Demostración.

1. Sean $W_\sigma \supset Q$ el abierto donde σ es C^2 y $W_\Phi \supset \sigma(Q)$ el de Φ. $W_\sigma \cap \sigma^{-1}(W_\Phi)$ es abierto (C3-012.T4), contiene a Q, y ahí $\Phi \circ \sigma$ es C^2 (C3-023.C1). Por C4-021.T1, $\iint_{\Phi\circ\sigma} \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\Phi\circ\sigma\circ\partial Q} F \cdot d\gamma$, y $\Phi \circ \sigma \circ \partial Q = \Phi \circ (\partial_\sigma D)$.
2. Si σ es un parche plano, $D := \sigma(Q)$ es de Jordan (C4-016.T4) y compacto (C3-014.T1), y $\Phi|_D$ es una superficie parametrizada (C4-018.D1). C4-019.T1 con $h = \sigma$, $D' = Q$, $U_0 = \operatorname{int} Q$ (σ inyectiva con $\det D\sigma > 0$ ahí, C4-016.D2) y $Q \setminus U_0 = \partial Q$ de contenido cero (C4-003.T4) da $\iint_{\Phi\circ\sigma} \operatorname{rot} F \cdot dS = \iint_{\Phi|_D} \operatorname{rot} F \cdot dS$.
3. *Gráficas sobre un disco.* Sea $\Phi(x,y) = (x,y,h(x,y))$ con h de clase C^2 cerca de $\bar{B}(p,r)$ y σ el parche del disco de C4-016.C2 ($r_1 = 0$). Por el paso 2, $\iint_{\Phi|_{\bar{B}(p,r)}} \operatorname{rot} F \cdot dS = \oint_{\Phi\circ\partial_\sigma D} F \cdot d\gamma$. En $(*)$, $\Phi \circ \sigma \circ \lambda_1 = \Phi \circ \sigma \circ \lambda_3$ se cancelan, $\Phi \circ \sigma \circ \lambda_4$ es constante y queda la circunferencia levantada $t \mapsto \Phi(p + r(\cos t, \operatorname{sen} t))$, $t \in [-\pi, \pi]$. ■

> **Ejemplo C4-021.E1 (semiesfera)**
> Con $\Phi(\varphi, \theta) = R\omega$ en $[0, \pi/2] \times [-\pi, \pi]$, $\partial_\Phi S$ es el ecuador en sentido positivo (los lados $\theta = \pm\pi$ se cancelan y el lado $\varphi = 0$ es constante); para $F = (-y, x, 0)$, los dos lados de Stokes valen $2\pi R^2$.

Sea $Q := [0, \pi/2] \times [-\pi, \pi]$ (φ en la primera coordenada, θ en la segunda); Φ es C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

1. *Los lados* (figura). Por C2-014.C1 ($\cos(\pm\pi) = -1$, $\operatorname{sen}(\pm\pi) = 0$):
   - $\Phi \circ \lambda_1(t) = \Phi(t, -\pi) = R(-\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$: el meridiano del polo norte al

ecuador en el plano $y = 0, x \leq 0$.

- $\Phi \circ \lambda_3(t) = \Phi(t, \pi) = R(-\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$: **el mismo camino**.
- $\Phi \circ \lambda_2(t) = \Phi(\pi/2, t) = R(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [-\pi, \pi]$: el ecuador en sentido positivo.
- $\Phi \circ \lambda_4(t) = \Phi(0, t) = (0, 0, R)$: constante.

2. En $(*)$ el meridiano se cancela y el lado constante da 0 (C4-014.T1): $\oint_{\partial_\Phi S} F \cdot d\gamma = \oint_{\text{ecuador}} F \cdot d\gamma$.
3. En el ecuador, $F(\gamma) \cdot \gamma' = (-R \operatorname{sen} t)(-R \operatorname{sen} t) + (R \cos t)(R \cos t) = R^2$, y la integral vale $2\pi R^2$ (como en C4-014.E1).
4. *El flujo.* $\operatorname{rot} F = (0, 0, 2)$ (C3-027.E1) y $N = R^2 \operatorname{sen} \varphi \, \omega$ (C4-018.E1), así que $\operatorname{rot} F \cdot N = 2R^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$ y, por Fubini (C4-006.C1) y Barrow (C2-009.C1),

$$\iint_\Phi \operatorname{rot} F \cdot dS = 2\pi \cdot 2R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{2} = 2\pi R^2.$$

Los dos lados coinciden, como dice C4-021.T1.

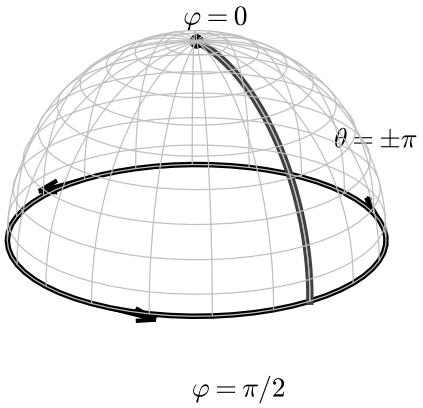


Figura 22: La semiesfera y su borde orientado: el ecuador en sentido positivo, el meridiano $\theta = \pm\pi$ recorrido dos veces en sentidos opuestos y el polo, un lado constante.

El disco plano del mismo borde (la gráfica de $h = 0$ sobre $\bar{B}(0, R)$) da por C4-021.C1 la misma circunferencia, y su flujo es $\int_{\bar{B}(0,R)} 2 = 2\pi R^2$: la red plana y la honda del gancho coinciden.

Corolario C4-021.C2 (superficies cerradas)

Para la esfera completa ($\Phi = c + R\omega$ en $[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$) la integral sobre $\partial_\Phi S$ es 0; así $\iint \operatorname{rot} F \cdot dS = 0$ para todo $F \in C^1$ cerca de la esfera.

Demostración. Con $Q = [0,\pi]\times[-\pi,\pi]$:

1. $\Phi \circ \lambda_1(t) = c + R(-\operatorname{sen} t, 0, \cos t) = \Phi \circ \lambda_3(t)$, $t \in [0,\pi]$ (C2-014.C1): se cancelan en $(*)$.
2. $\Phi\circ\lambda_2(t) = \Phi(\pi,t) = c - Re_3$ y $\Phi\circ\lambda_4(t) = \Phi(0,t) = c + Re_3$ (C2-014.T5, C2-014.C1): constantes, con integral 0.
3. Así $\oint_{\partial_\Phi S} F \cdot d\gamma = 0$, y por C4-021.T1 $\iint_\Phi \operatorname{rot} F \cdot dS = 0$. ■

Teorema C4-021.T2 (significado del rotacional; cierra C3-027, rot)

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $F \in C^1(U)$, $p \in U$, n unitario y u, w con (u, w, n) ortonormal y $u \times w = n$ (C3-006.T2). Para el disco $\Phi_r(\rho,\theta) := p + \rho\cos\theta\, u + \rho \operatorname{sen}\theta\, w$ ($0 \le \rho \le r$, $|\theta| \le \pi$) con borde C_r: $\operatorname{rot} F(p)\cdot n = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{C_r} F \cdot d\gamma$.

Idea de la demostración

Por Stokes, la circulación por C_r es el flujo de rot F por el disco, y en polares ese flujo es la integral de rot $F \cdot n$ sobre un disco del plano: el cociente es un promedio, y tiende al valor en el centro.

Demostración. Sea $r_0 > 0$ con $B(p, r_0) \subset U$ (C3-008.D1) y $0 < r < r_0$.

1. *El disco está en U.* Como (u, w) son ortonormales, $|y_1 u + y_2 w|^2 = y_1^2 + y_2^2$ (C3-001.T2), así que $|\Phi_r(\rho,\theta) - p| = \rho \le r < r_0$ (C2-014.T5). Φ_r es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y F es C^1 en $U \supset \Phi_r(Q)$, con $Q := [0,r]\times[-\pi,\pi]$.
2. *El normal.* $\partial_\rho \Phi_r = \cos\theta\, u + \operatorname{sen}\theta\, w$ y $\partial_\theta \Phi_r = -\rho \operatorname{sen}\theta\, u + \rho\cos\theta\, w$. Por la bilinealidad y la antisimetría del producto cruz (C3-006.T1) y $u \times w = n$:

$$\partial_\rho \Phi_r \times \partial_\theta \Phi_r = \rho(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, u \times w = \rho\, n.$$

3. *El borde.* Por C2-014.C1, $\Phi_r(t, \pm\pi) = p - tu$: los lados λ_1, λ_3 dan el mismo camino y se cancelan en $(*)$; $\Phi_r(0,t) = p$ es constante; queda la circunferencia $t \mapsto p + r\cos t\, u + r \operatorname{sen} t\, w$ (C4-014.T1). Así $\oint_{C_r} F \cdot d\gamma$ es la circulación por esa circunferencia.

4. *Stokes.* Por C4-021.T1 y el paso 2,
$$\oint_{C_r} F \cdot d\gamma = \int_Q \operatorname{rot} F(\Phi_r(\rho,\theta)) \cdot n \; \rho \, d\rho \, d\theta.$$
5. *En polares.* Sea $O := \{y \in \mathbb{R}^2 : p + y_1 u + y_2 w \in U\}$, abierto (C3-012.T4) con $\bar{B}(0,r) \subset O$ (paso 1), y $g(y) := \operatorname{rot} F(p+y_1u+y_2w)\cdot n$, continua en O (C3-012.T2). Como $\Phi_r(\rho,\theta) = p+y_1u+y_2w$ con $y = P(\rho,\theta)$, el integrando del paso 4 es $g(P(\rho,\theta))\,\rho$, y por las integrales en polares (C4-011.T2 con $\rho(\theta) \equiv r$ en $[-\pi,\pi]$, cuya región polar es $\bar{B}(0,r)$):
$$\oint_{C_r} F \cdot d\gamma = \int_{\bar{B}(0,r)} g.$$
6. *El límite.* $c(\bar{B}(0,r)) = \pi r^2$ (C4-007.E1), y por el lema de los promedios (C4-007.C2) en O, $\frac{1}{\pi r^2}\int_{\bar{B}(0,r)} g \to g(0) = \operatorname{rot} F(p)\cdot n$. ■

Así se cobra la promesa de C3-027: la componente de rot F en la dirección n es la circulación por unidad de área en un disco perpendicular a n, que se encoge.

> **Ejemplo C4-021.E2 (vorticidad)**
> Para la rotación rígida $v(x) = \omega \times x$, $\operatorname{rot} v = 2\omega$: la circulación por unidad de área alrededor de n es $2\omega \cdot n$.

1. $v = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2,\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3,\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)$ (C3-006.D1), con ω constante.
2. Por C3-027.D1 y C3-015.T1: $\operatorname{rot} v = (\omega_1 + \omega_1,\ \omega_2 + \omega_2,\ \omega_3 + \omega_3) = 2\omega$.
3. Por C4-021.T2, la circulación por unidad de área en discos perpendiculares a n tiende a $2\omega \cdot n$ (aquí es exactamente $2\omega \cdot n$ para todo r, porque g es constante). Un molinillo con eje en la dirección ω gira; con eje perpendicular a ω, no.

Por qué cada hipótesis

- $F \in C^1$ *cerca de* $\Phi(Q)$. El campo $F = (-y, x, 0)/(x^2+y^2)$ en $\mathbb{R}^3$ sin el eje z tiene $\operatorname{rot} F = 0$ ahí, pero su circulación por el ecuador de la esfera unitaria es 2π. La semiesfera corta al eje z en el polo, donde F no está definido: Stokes no se aplica y no hay contradicción.
- Φ *de clase* C^2. La prueba usa C4-016.T3, cuya cancelación de segundas derivadas pide Schwarz para Φ.
- *Inyectividad y regularidad: no hacen falta.* En C4-021.E1 la semiesfera no es regular en el polo y

pega los lados $\theta = \pm\pi$; el teorema vale igual.

Ejercicios

1. Verifica Stokes para $F = (z, x, y)$ en la semiesfera superior de radio 1 (los dos lados valen π).
2. Calcula $\oint F \cdot d\gamma$ para $F = (y^2, z^2, x^2)$ alrededor del triángulo de vértices e_1, e_2, e_3 (orientado por $\Phi(u, v) = e_1 + u(e_2 - e_1) + v(e_3 - e_1)$ sobre el triángulo de parámetros $\{u, v \geq 0,\ u + v \leq 1\}$, que es una región de tipo I con $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 1 - u$), con C4-021.C1.
3. Demuestra que si $F = \nabla f$ con $f \in C^2$, ambos lados de Stokes son 0 para toda Φ.
4. Con C4-021.T2, calcula la circulación por unidad de área de $v = (0, 0, x)$ alrededor de $n = e_2$ y de $n = e_3$.
5. ¿Por qué C4-021.C2 no contradice que el flujo de $F(x) = x$ por la esfera sea $4\pi R^3$?

Respuestas

1. $\operatorname{rot} F = (1, 1, 1)$; flujo $\int \operatorname{sen}\varphi\, \omega \cdot (1, 1, 1) = \pi$ (las partes en $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ se anulan); ecuador: $\int R^2 \cos^2 t = \pi$.
2. $\operatorname{rot} F = (-2z, -2x, -2y)$, $N = (1, 1, 1)$; en el plano $x + y + z = 1$, $\operatorname{rot} F \cdot N = -2$, y el flujo sobre el triángulo de parámetros (área $1/2$) es -1. La circulación $e_1 \to e_2 \to e_3 \to e_1$ es -1.
3. $\operatorname{rot} \nabla f = 0$ (C3-027.T1) y $\oint \nabla f \cdot d\gamma = 0$ en un camino cerrado (C4-015.T1).
4. $\operatorname{rot} v = (0, -1, 0)$: -1 alrededor de e_2 y 0 alrededor de e_3.
5. $F(x) = x$ no es un rotacional: $\operatorname{div} x = 3 \neq 0$, y $\operatorname{div}\operatorname{rot} G = 0$ para todo $G \in C^2$ (C3-027.T1).

C4-022 · Teorema de Gauss

Motivación

> **Una masa de pan que se esponja**
> Una bola de masa de radio $R = 5$ cm se esponja: en un instante, cada punto se aleja del centro con velocidad $v(x) = kx$, con $k = 0.01$ por minuto. ¿Cuánto volumen cruza la piel de la bola por minuto?
> Hay dos maneras de contarlo. Por fuera: en la esfera, v apunta hacia afuera con rapidez kR, y el flujo por la esfera es $kR \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3 k \approx 15.71$ cm^3/min. Por dentro: cada centímetro cúbico de masa «produce» $\operatorname{div} v = 3k = 0.03$ cm^3/min, y la bola tiene 523.6 cm^3; el total es otra vez 15.71 cm^3/min.
> Que las dos cuentas coincidan siempre es el teorema de Gauss: el flujo por la frontera es la integral de la divergencia. La prueba es la de Green y Stokes con una dimensión más: jalar el campo a una caja, usar el teorema fundamental en cada variable y regresar con el cambio de variables. Dónde falla la analogía: una masa real no es una bola, no se esponja igual en todas partes y su piel se mueve; aquí miramos un instante y un campo fijo.

Parte 1 · Dos identidades algebraicas

Para jalar un campo a una caja hace falta saber qué le pasa a la divergencia. La respuesta es la identidad de Piola, y su corazón es una identidad de determinantes.

Teorema C4-022.T1 (identidad de la traza)

Para A 3×3 y $a, b, c \in \mathbb{R}^3$: $a \cdot (b \times c) = \det[a\ b\ c]$ y

$$(Aa) \cdot (b \times c) + a \cdot ((Ab) \times c) + a \cdot (b \times (Ac)) = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cdot a \cdot (b \times c).$$

Idea de la demostración

El lado izquierdo es una función de (a, b, c) lineal en cada lugar y que se anula si dos vectores se repiten, igual que el determinante. Por la unicidad del determinante (AL.4 ⚠ Álgebra Lineal), es un múltiplo de él; el múltiplo se lee en la base canónica y es la traza.

Demostración. Escribimos $\det[a\ b\ c]$ para el determinante de la matriz de columnas a, b, c.

1. El desarrollo 3×3 por la primera columna (AL.4) da

$$\begin{aligned}\det[a\ b\ c] &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\\ &= a \cdot (b \times c)\end{aligned}$$

   (C3-006.D1, C3-001.D2). Es la primera afirmación.
2. Sea $L(a, b, c) := (Aa) \cdot (b \times c) + a \cdot ((Ab) \times c) + a \cdot (b \times (Ac))$. Por el paso 1,

$$L(a, b, c) = \det[Aa\ b\ c] + \det[a\ Ab\ c] + \det[a\ b\ Ac].$$

3. L es lineal en cada uno de sus tres argumentos: $x \mapsto Ax$ es lineal (AL.1) y det es lineal en cada columna (AL.4); cada sumando es lineal en a, en b y en c, y una suma de lineales es lineal.
4. Intercambiar dos columnas cambia el signo de det: como det se anula si dos columnas son iguales (AL.4),

$$0 = \det[x + y\ \ x + y\ \ z] = \det[x\ y\ z] + \det[y\ x\ z]$$

   (multilinealidad y $\det[x\ x\ z] = \det[y\ y\ z] = 0$), y lo mismo con cualquier par de columnas.
5. L se anula si dos argumentos son iguales. Si $a = b$, el último sumando repite columna y, por el paso 4, $\det[Aa\ a\ c] + \det[a\ Aa\ c] = 0$. Si $b = c$, el primer sumando repite columna y $\det[a\ Ab\ b] + \det[a\ b\ Ab] = 0$. Si $a = c$, el segundo repite columna y $\det[Aa\ b\ a] + \det[a\ b\ Aa] = 0$ (intercambio de las columnas 1 y 3).
6. Sea $\lambda := L(e_1, e_2, e_3)$. Como $Ae_j = \sum_i a_{ij}e_i$ (AL.1), por la linealidad en una columna $\det[Ae_1\ e_2\ e_3] = \sum_i a_{i1} \det[e_i\ e_2\ e_3] = a_{11} \det I_3 = a_{11}$ (los otros sumandos repiten columna; AL.4). Igual $\det[e_1\ Ae_2\ e_3] = a_{22}$ y $\det[e_1\ e_2\ Ae_3] = a_{33}$. Así $\lambda = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.
7. Si $\lambda \neq 0$, L/λ es multilineal (paso 3), se anula con columnas repetidas (paso 5) y vale 1 en (e_1, e_2, e_3); por la unicidad de AL.4, $L/\lambda = \det$, es decir, $L = \lambda \det$.
8. Si $\lambda = 0$, $\det + L$ es multilineal, se anula con columnas repetidas y vale $1 + 0 = 1$ en (e_1, e_2, e_3); por la unicidad, $\det + L = \det$, así que $L = 0 = \lambda \det$.
9. En los dos casos $L(a, b, c) = \lambda \det[a\ b\ c] = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\ a \cdot (b \times c)$ (paso 1). ■

⚠ Por qué el caso $\lambda = 0$ va aparte

La unicidad de AL.4 habla de funciones que valen 1 en la identidad. Si la traza es 0 no se puede dividir entre ella; por eso se suma det y se usa la unicidad para la suma.

Teorema C4-022.T2 (identidad de Piola)

Sean $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\Psi \in C^2(W, \mathbb{R}^3)$ con variables (u, v, w) y $F \in C^1$ en un abierto que contiene a $\Psi(W)$.

$$G := \big((F \circ \Psi) \cdot (\Psi_v \times \Psi_w),\ (F \circ \Psi) \cdot (\Psi_w \times \Psi_u),\ (F \circ \Psi) \cdot (\Psi_u \times \Psi_v)\big)$$

es C^1 y $\operatorname{div} G = (\operatorname{div} F \circ \Psi) \cdot \det D\Psi$.

Idea de la demostración

Se deriva con la regla del producto y la de la cadena. Los términos con segundas derivadas de Ψ se cancelan por Schwarz y la antisimetría del producto cruz; lo que queda es la identidad de la traza con $A = DF(\Psi)$.

Demostración. Escribimos Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 por Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w, $\Psi_{ij} := \partial_i \partial_j \Psi$ (componente a componente), $\hat{F} := F \circ \Psi$ y $A := DF \circ \Psi$ (una matriz en cada punto de W). Así $G_1 = \hat{F} \cdot (\Psi_2 \times \Psi_3)$, $G_2 = \hat{F} \cdot (\Psi_3 \times \Psi_1)$, $G_3 = \hat{F} \cdot (\Psi_1 \times \Psi_2)$.

1. $\hat{F}$ es C^1 en W (C3-023.C1) y cada Ψ_i es C^1 porque Ψ es C^2 (C3-018.D1). Cada G_k es una suma de productos de componentes de estas funciones (C3-006.D1, C3-001.D2), así que $G \in C^1(W)$ (C3-018.T2).
2. Por la regla de la cadena, $\partial_j \hat{F} = A\,\Psi_j$ (C3-023.T1, C3-022.T1).
3. Para campos a, b de clase C^1 en W: $\partial_j(a \cdot b) = \partial_j a \cdot b + a \cdot \partial_j b$ y $\partial_j(a \times b) = \partial_j a \times b + a \times \partial_j b$. En efecto, $a \cdot b$ y las componentes de $a \times b$ son sumas de productos de componentes, y basta la regla del producto (C3-016.T3) en cada una (C3-006.T1 da lo mismo para el producto cruz).
4. Con los pasos 2 y 3, $\partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3 = P + S$, donde

$$P := (A\Psi_1) \cdot (\Psi_2 \times \Psi_3) + (A\Psi_2) \cdot (\Psi_3 \times \Psi_1) + (A\Psi_3) \cdot (\Psi_1 \times \Psi_2)$$

y S es la suma de los seis términos con segundas derivadas:

$$S = \hat{F} \cdot \big[\Psi_{12} \times \Psi_3 + \Psi_2 \times \Psi_{13} + \Psi_{23} \times \Psi_1 + \Psi_3 \times \Psi_{21} + \Psi_{31} \times \Psi_2 + \Psi_1 \times \Psi_{32}\big]$$

(C3-001.T2 para sacar $\hat{F}$ como factor común).

5. Por Schwarz, $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$ en W (C3-018.T1 en cada componente, $\Psi \in C^2$). Con $b \times a = -(a \times b)$ (C3-006.T1) los seis términos se cancelan por pares: $\Psi_{12} \times \Psi_3 + \Psi_3 \times \Psi_{12} = 0$, $\Psi_2 \times \Psi_{13} + \Psi_{13} \times \Psi_2 = 0$ y $\Psi_{23} \times \Psi_1 + \Psi_1 \times \Psi_{23} = 0$. Así $S = 0$.
6. Por el paso 1 de C4-022.T1 y el paso 4 de su prueba (dos intercambios de columnas no cambian el signo):

$$(A\Psi_2) \cdot (\Psi_3 \times \Psi_1) = \det[A\Psi_2\ \Psi_3\ \Psi_1] = \det[\Psi_1\ A\Psi_2\ \Psi_3] = \Psi_1 \cdot ((A\Psi_2) \times \Psi_3),$$
$$(A\Psi_3) \cdot (\Psi_1 \times \Psi_2) = \det[A\Psi_3\ \Psi_1\ \Psi_2] = \det[\Psi_1\ \Psi_2\ A\Psi_3] = \Psi_1 \cdot (\Psi_2 \times (A\Psi_3)).$$

7. Entonces P es el lado izquierdo de C4-022.T1 con $(a, b, c) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, y

$$P = (\operatorname{tr} A)\, \Psi_1 \cdot (\Psi_2 \times \Psi_3) = (\operatorname{tr} A) \det[\Psi_1\ \Psi_2\ \Psi_3].$$

8. Las entradas diagonales de $A = DF \circ \Psi$ son $\partial_i F_i \circ \Psi$ (C3-022.T1), así que $\operatorname{tr} A = \operatorname{div} F \circ \Psi$ (C3-027.D1); las columnas de $D\Psi$ son Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 (C3-022.T1), así que $\det[\Psi_1\ \Psi_2\ \Psi_3] = \det D\Psi$.
9. Por lo tanto $\operatorname{div} G = P + S = (\operatorname{div} F \circ \Psi) \det D\Psi$ (C1-005.T12 para reagrupar). ■

> ⚠ **La hipótesis C^2**
>
> Las cancelaciones del paso 5 son la igualdad de las derivadas cruzadas. Con Ψ solo C^1, G ni siquiera tiene por qué ser derivable: los vectores $\Psi_v \times \Psi_w$ solo serían continuos.

Parte 2 · El teorema de Gauss

En una caja

Teorema C4-022.T3 (Gauss en una caja)

Sean $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ y $G \in C^1$ en un abierto que contiene a B. Entonces

$$\int_B \operatorname{div} G = \sum_i \Big[\int_{B_i} G_i\big|_{x_i = b_i} - \int_{B_i} G_i\big|_{x_i = a_i} \Big],$$

con B_i la caja de las otras dos variables.

Idea de la demostración
Cada $\int_B \partial_i G_i$ se calcula integrando primero en x_i (Fubini) y usando Barrow en esa variable.

Demostración. Sea O un abierto con $B \subset O$ y $G \in C^1(O)$.

1. Cada $\partial_i G_i$ es continua en B (C3-017.D1), así que por C4-006.C2 su integral sobre B es una integral iterada en cualquier orden; tomamos x_i como la variable de adentro y las otras dos, en su orden, afuera.
2. Fijemos $i = 3$ y $(x_1, x_2) \in B_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. El conjunto $\{t : (x_1, x_2, t) \in O\}$ es abierto (C3-012.T4, preimagen de O por $t \mapsto (x_1, x_2, t)$) y contiene a $[a_3, b_3]$. En él, $t \mapsto G_3(x_1, x_2, t)$ es derivable con derivada $\partial_3 G_3(x_1, x_2, t)$ (C3-015.T1), continua.
3. Por Barrow (C2-009.C1),
$$\int_{a_3}^{b_3} \partial_3 G_3(x_1, x_2, t)\, dt = G_3(x_1, x_2, b_3) - G_3(x_1, x_2, a_3).$$
4. La función de (x_1, x_2) así obtenida es continua en B_3, y por C4-006.C2 en $\mathbb{R}^2$ y la linealidad (C4-001.T5),
$$\int_B \partial_3 G_3 = \int_{B_3} G_3\big|_{x_3 = b_3} - \int_{B_3} G_3\big|_{x_3 = a_3}.$$
5. Para $i = 1, 2$ se repiten los pasos 2-4 con x_i adentro (C4-006.C2 permite cualquier orden, y C4-006.T2 dice que el orden de las dos variables de B_i no cambia la integral).
6. Como $\operatorname{div} G = \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3$ (C3-027.D1), la linealidad de la integral (C4-001.T5) da la fórmula. ■

Sólidos parametrizados

Definición C4-022.D1 (sólido parametrizado y flujo por su frontera)

Sean B una caja y $\Psi : B \to \mathbb{R}^3$ la restricción de una función C^2 en un abierto que contiene a B, inyectiva en $\operatorname{int} B$ y con $\det D\Psi > 0$ en $\operatorname{int} B$; $V := \Psi(B)$. Sus seis caras son las superficies parametrizadas (C4-018.D1; pueden degenerar y no ser parches, como en la bola)

$$\Phi_1^{\pm}(v,w) := \Psi(b_1 \circ a_1, v, w), \quad \Phi_2^{\pm}(w,u) := \Psi(u, b_2 \circ a_2, w), \quad \Phi_3^{\pm}(u,v) := \Psi(u, v, b_3 \circ a_3),$$

y el **flujo por la frontera orientada** es

$$\Phi_{\partial V}(F) := \sum_i \Big[\iint_{\Phi_i^+} F \cdot dS - \iint_{\Phi_i^-} F \cdot dS \Big].$$

El orden de los parámetros de cada cara es cíclico: (v,w), (w,u), (u,v). Así la normal de la cara $\Phi_i^{\pm}$ es el vector que aparece en la componente G_i del campo de Piola: $\Psi_v \times \Psi_w$, $\Psi_w \times \Psi_u$, $\Psi_u \times \Psi_v$. El signo $-$ en las caras Φ_i^- voltea esa normal; en la caja y en la bola el resultado es la normal exterior (C4-022.C1, C4-022.C2).

Teorema C4-022.T4 (teorema de Gauss)

Si $V = \Psi(B)$ es un sólido parametrizado y $F \in C^1$ en un abierto que contiene a V, entonces V es de Jordan y

$$\int_V \operatorname{div} F = \Phi_{\partial V}(F).$$

Idea de la demostración

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_B (\operatorname{div} F \circ \Psi) \det D\Psi = \int_B \operatorname{div} G = (\text{caras}),$$

por el cambio de variables con un conjunto excepcional, Piola y Gauss en la caja; cada término de cara es un flujo.

Demostración. Sean O un abierto con $V \subset O$ y $F \in C^1(O)$, y W un abierto con $B \subset W$ y Ψ de clase C^2 en W.

1. $W' := \{y \in W : \Psi(y) \in O\}$ es abierto (C3-012.T4) y contiene a B (porque $\Psi(B) = V \subset O$); en W', Ψ es C^2 y $\Psi(W') \subset O$.
2. *Cambio de variables.* Aplicamos C4-011.T1 con $U := W'$, $g := \Psi$, $A := B$ (de Jordan y cerrado, C4-005.T3), $U_0 := \operatorname{int} B$ (ahí Ψ es inyectiva y $\det D\Psi > 0$) y $Z := B \setminus \operatorname{int} B = \partial B$ (C3-008.T3), que tiene contenido cero (C4-003.T4). Así $V = \Psi(B)$ es de Jordan.
3. V es compacto (C3-014.T1) y $\operatorname{div} F$ es continua en V (C3-027.D1), luego acotada (C3-014.C1) e integrable en V (C4-005.T4 a). C4-011.T1 da
$$\int_V \operatorname{div} F = \int_B (\operatorname{div} F \circ \Psi)\,|\det D\Psi|.$$
4. En $\operatorname{int} B$, $|\det D\Psi| = \det D\Psi$; las dos funciones continuas $(\operatorname{div} F \circ \Psi)|\det D\Psi|$ y $(\operatorname{div} F \circ \Psi)\det D\Psi$ difieren a lo más en ∂B, de contenido cero, así que tienen la misma integral sobre B (C4-005.T4 d).
5. *Piola.* Con el campo G de C4-022.T2 en W': $G \in C^1(W')$ y $\operatorname{div} G = (\operatorname{div} F \circ \Psi)\det D\Psi$. Por los pasos 3-4, $\int_V \operatorname{div} F = \int_B \operatorname{div} G$.
6. *Gauss en la caja.* Por C4-022.T3,
$$\int_B \operatorname{div} G = \sum_i \Big[\int_{B_i} G_i\big|_{x_i=b_i} - \int_{B_i} G_i\big|_{x_i=a_i} \Big].$$
7. *Las caras.* $\Phi_1^+(v,w) = \Psi(b_1,v,w)$ es la restricción a $B_1 = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ de una función C^2 en el abierto $\{(v,w) : (b_1,v,w) \in W'\}$ (C3-012.T4), que contiene a B_1: es una superficie parametrizada (C4-018.D1). Sus parciales son $\Psi_v(b_1,v,w)$ y $\Psi_w(b_1,v,w)$ (C3-015.T1), así que su normal es $(\Psi_v \times \Psi_w)(b_1,v,w)$ y, por C4-019.D2,
$$\iint_{\Phi_1^+} F\cdot dS = \int_{B_1} F(\Psi(b_1,v,w))\cdot(\Psi_v\times\Psi_w)(b_1,v,w) = \int_{B_1} G_1\big|_{u=b_1}.$$
8. Igual, Φ_1^- da $\int_{B_1} G_1|_{u=a_1}$; $\Phi_2^{\pm}(w,u)$ tiene normal $\Psi_w\times\Psi_u$ y da $\int G_2|_{v=b_2\,\circ\,a_2}$ sobre $[a_3,b_3]\times[a_1,b_1]$, que es la integral sobre B_2 (C4-006.T2); $\Phi_3^{\pm}(u,v)$ tiene normal $\Psi_u\times\Psi_v$ y da $\int_{B_3} G_3|_{w=b_3\,\circ\,a_3}$.
9. Sustituyendo en el paso 6 (C4-022.D1): $\int_V \operatorname{div} F = \Phi_{\partial V}(F)$. ■

⚠ La frontera se define, no se adivina

$\Phi_{\partial V}$ es una suma de seis flujos por las caras de la caja transportadas por Ψ. Qué superficie es «la frontera de V» se comprueba en cada ejemplo: en la bola, cuatro de las seis caras no aportan nada.

Bolas, cajas y sólidos entre gráficas

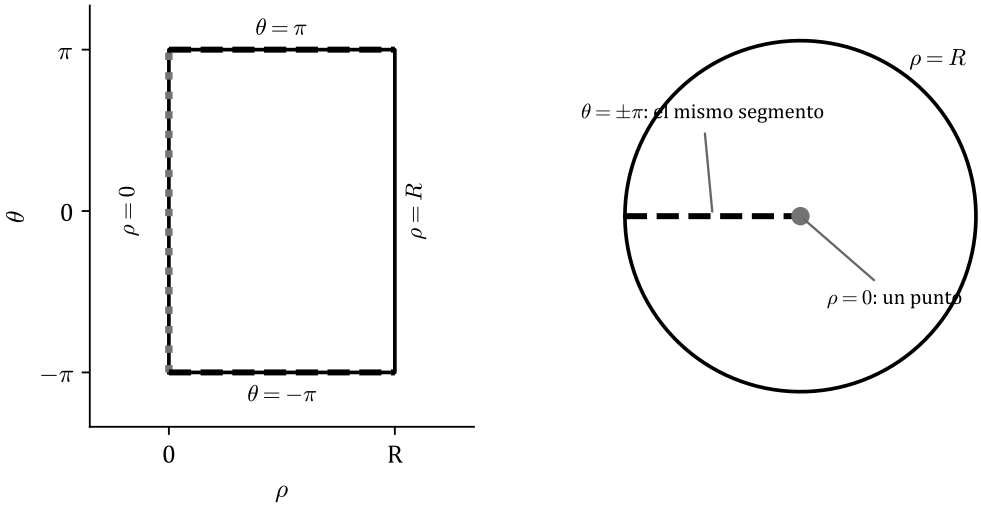


Figura 23: Corte $\varphi = \pi/2$ de la parametrización de la bola. A la izquierda, el rectángulo de parámetros (ρ, θ); a la derecha, su imagen. El lado $\rho = 0$ se colapsa en el centro y los lados $\theta = \pm\pi$ caen sobre el mismo segmento, recorrido con orientaciones opuestas.

Corolario C4-022.C1 (bolas)

Para $V = \bar{B}(c, R)$ con $\Psi(\rho, \varphi, \theta) = c + \rho\,\omega(\varphi, \theta)$ en $[0, R] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$, $\Phi_{\partial V}(F)$ es el flujo por la esfera de C4-018.E1 (normal exterior $R^2 \operatorname{sen}\varphi\,\omega$): las caras $\rho = 0$, $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$ tienen normal 0 y las caras $\theta = \pm\pi$ son el mismo parche con orientaciones opuestas. Así

$$\int_{\bar{B}(c,R)} \operatorname{div} F = \iint_{S_R(c)} F \cdot dS.$$

Demostración. Sea $B := [0, R] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$, con $(u, v, w) = (\rho, \varphi, \theta)$.

1. $\Psi = c + E$, con E las esféricas (C3-013.D1), es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$: sus componentes son productos de ρ con senos y cosenos (C2-014.T6, C3-018.T2, C3-023.C1).
2. $D\Psi = DE$, así que $\det D\Psi = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ (C3-022.E1), que es > 0 en $\operatorname{int} B = (0, R) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$ porque $\operatorname{sen}\varphi > 0$ si $0 < \varphi < \pi$ (C2-014.T4).
3. *Inyectiva en* $\operatorname{int} B$. Las dos primeras coordenadas de $E(\rho, \varphi, \theta)$ son $\rho \operatorname{sen}\varphi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, de norma $\rho \operatorname{sen}\varphi > 0$ en $\operatorname{int} B$ (C2-014.T5). Si $\Psi(q) = \Psi(q')$ con $q, q' \in \operatorname{int} B$, el punto $E(q) = E(q')$ está fuera del eje, y por la unicidad de C3-013.T2 (con $\theta \in (-\pi, \pi]$), $q = q'$.
4. $\Psi(B) = \bar{B}(c, R)$. Por C3-013.T2, $|\Psi - c| = |E| = |\rho| \leq R$. Recíprocamente, sea $|x - c| \leq R$

y $y := x - c$. Si $(y_1, y_2) \neq (0,0)$, C3-013.T2 da $y = E(\rho, \varphi, \theta)$ con $\rho = |y| \leq R$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$. Si $y = (0,0,t)$: para $t \geq 0$, $y = E(t,0,0)$, y para $t < 0$, $y = E(-t, \pi, 0)$ (C2-014.C1). Así $V := \Psi(B) = \bar{B}(c, R)$ es un sólido parametrizado (C4-022.D1).

5. *Parciales.* Por C3-015.T1 y C2-014.T6: $\Psi_\rho = \omega$, $\Psi_\varphi = \rho\, \omega_\varphi$ y $\Psi_\theta = \rho\, \omega_\theta$, con

$$\omega_\varphi = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi), \qquad \omega_\theta = (-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, 0).$$

6. *Cara $\rho = R$.* $\Phi_1^+(\varphi, \theta) = c + R\omega(\varphi, \theta)$ en $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ es la parametrización de la esfera $S_R(c)$ de C4-018.E1, con normal $R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega$. Su término es $+\iint_{S_R(c)} F \cdot dS$.
7. *Cara $\rho = 0$.* $\Phi_1^-(\varphi, \theta) = \Psi(0, \varphi, \theta) = c$; sus parciales son $\Psi_\varphi(0, \cdot) = \Psi_\theta(0, \cdot) = 0$, su normal es $0 \times 0 = 0$ (C3-006.T1) y su flujo es 0 (C4-019.D2).
8. *Caras $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$.* $\Phi_2^\pm(\theta, \rho) = \Psi(\rho, \pi \text{ o } 0, \theta)$. Como $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = 0$ (C2-014.C1), $\omega_\theta = 0$ ahí, así que $\partial_\theta \Phi_2^\pm = 0$ y la normal $\partial_\theta \Phi_2^\pm \times \partial_\rho \Phi_2^\pm$ es 0 (C3-006.T1): flujo 0.
9. *Caras $\theta = \pm\pi$.* Como $\cos\pi = \cos(-\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pm\pi) = 0$ (C2-014.C1, C2-014.T5), $\omega(\varphi, \pi) = \omega(\varphi, -\pi)$ para todo φ. Las funciones $(\rho, \varphi) \mapsto \Psi(\rho, \varphi, \pi)$ y $(\rho, \varphi) \mapsto \Psi(\rho, \varphi, -\pi)$ son la misma en todo $\mathbb{R}^2$, así que Φ_3^+ y Φ_3^- tienen las mismas parciales, la misma normal y el mismo flujo: su término $\iint_{\Phi_3^+} - \iint_{\Phi_3^-}$ es 0.
10. Por los pasos 6-9, $\Phi_{\partial V}(F) = \iint_{S_R(c)} F \cdot dS$, y C4-022.T4 da la fórmula. La normal $R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega$ es exterior: $\omega = (x - c)/R$ apunta de c hacia el punto x de la esfera. ■

Corolario C4-022.C2 (cajas y sólidos entre gráficas)

Para una caja ($\Psi =$ identidad) $\Phi_{\partial V}$ es la suma de los flujos por las seis caras con normal exterior; si $h_1 < h_2$ son C^2 en un abierto que contiene a un rectángulo K, el sólido entre sus gráficas es $\Psi(K \times [0,1])$ con $\Psi(u, v, t) := (u, v, h_1 + t(h_2 - h_1))$.

Demostración.

1. *La caja.* La identidad es C^∞, inyectiva y $\det I_3 = 1 > 0$ (AL.4): B es un sólido parametrizado con $V = B$.
2. Sus caras: $\Phi_1^\pm(v, w) = (b_1 \text{ o } a_1, v, w)$ tiene normal $e_2 \times e_3 = e_1$; $\Phi_2^\pm(w, u) = (u, b_2 \text{ o } a_2, w)$, normal $e_3 \times e_1 = e_2$; $\Phi_3^\pm(u, v)$, normal $e_1 \times e_2 = e_3$ (C3-006.D1). En la cara $x_i = b_i$ la normal e_i apunta hacia afuera de B; en $x_i = a_i$ el signo $-$ de C4-022.D1 la cambia por $-e_i$, que también apunta hacia afuera. Así $\Phi_{\partial V}(F)$ es la suma de los seis flujos con normal exterior (y C4-022.T4 es C4-022.T3 con $G = F$).
3. *Entre dos gráficas.* Sean $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y $O_K \supset K$ abierto donde h_1, h_2 son C^2. $\Psi(u, v, t) :=$

$(u, v, h_1(u,v) + t(h_2 - h_1)(u,v))$ es C^2 en $O_K \times \mathbb{R}$ (C3-018.T2).

4. La última columna de $D\Psi$ es $(0, 0, h_2 - h_1)$ y las dos primeras son $(1, 0, *)$ y $(0, 1, *)$; desarrollando por la última columna (AL.4), $\det D\Psi = h_2 - h_1 > 0$ en $K \times [0,1]$.
5. Ψ es inyectiva en $K \times [0,1]$: si $\Psi(u,v,t) = \Psi(u',v',t')$, entonces $u = u'$, $v = v'$ y $t(h_2 - h_1) = t'(h_2 - h_1)$ con $h_2 - h_1 > 0$, luego $t = t'$. Su imagen es $\{(u,v,z) : (u,v) \in K,\ h_1 \le z \le h_2\}$: dado z entre h_1 y h_2, $t := (z - h_1)/(h_2 - h_1) \in [0,1]$.
6. Las caras: $\Phi_3^+(u,v) = (u, v, h_2(u,v))$ es la gráfica de h_2 con normal $(-\partial_1 h_2, -\partial_2 h_2, 1)$ (C4-018.E1), hacia arriba; Φ_3^- es la gráfica de h_1 con normal hacia arriba, que el signo $-$ convierte en hacia abajo. En la pared $u = b_1$, $\Psi_v = (0, 1, *)$ y $\Psi_t = (0, 0, h_2 - h_1)$ dan $\Psi_v \times \Psi_t = ((h_2 - h_1), 0, 0)$ (C3-006.D1), hacia afuera; en $u = a_1$ el signo la voltea. En $v = b_2$, $\Psi_t \times \Psi_u = (0, h_2 - h_1, 0)$, y lo mismo. Todas las normales resultan exteriores. ■

El significado de la divergencia

Teorema C4-022.T5 (significado de la divergencia; cierra C3-027, div)

Si $F \in C^1$ cerca de p,

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{c(\bar{B}(p,r))} \iint_{S_r(p)} F \cdot dS.$$

Demostración.

1. Sea O un abierto con $p \in O$ y $F \in C^1(O)$. Hay $r_0 > 0$ con $B(p, r_0) \subset O$ (C3-008.D1), y para $0 < r < r_0$, $\bar{B}(p,r) \subset O$.
2. Por C4-022.C1, $\iint_{S_r(p)} F \cdot dS = \int_{\bar{B}(p,r)} \operatorname{div} F$ para esos r.
3. $c(\bar{B}(p,r)) = 4\pi r^3/3 > 0$ (C4-011.E1, C4-005.E1), así que

$$\frac{1}{c(\bar{B}(p,r))} \iint_{S_r(p)} F \cdot dS = \frac{1}{c(\bar{B}(p,r))} \int_{\bar{B}(p,r)} \operatorname{div} F.$$

4. $\operatorname{div} F$ es continua en O (C3-027.D1), y por el lema de los promedios (C4-007.C2) el lado derecho tiende a $\operatorname{div} F(p)$ cuando $r \to 0^+$. ■

La divergencia es el flujo hacia afuera por unidad de volumen: lo que Cálculo III prometió en C3-027.

Ejemplo C4-022.E1

Para $F(x) = x$ y la bola de radio R: $\int \operatorname{div} F = 3 \cdot (4\pi R^3/3) = 4\pi R^3$, el flujo de C4-019.E2. *Verificación.* $\operatorname{div} F = 3$ (C3-027.E1), y por la linealidad y C4-011.E1, $\int_{\bar{B}(0,R)} 3 = 3 \cdot 4\pi R^3/3 = 4\pi R^3$. C4-019.E2 calculó el flujo por la esfera directamente: $4\pi R^3$. Coinciden, como dice C4-022.C1. Es la masa de pan de la motivación con $k = 1$.

Por qué cada hipótesis

⚠ F de clase C^1 en un abierto que contiene a V

$E(x) := x/|x|^3$ es C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y ahí $\operatorname{div} E = \sum_i (|x|^{-3} - 3x_i^2|x|^{-5}) = 0$ (C3-015.T1, C1-029.T3). Pero su flujo por la esfera unitaria, con la parametrización de C4-018.E1, es $\int_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} \omega \cdot \operatorname{sen}\varphi\, \omega = 4\pi \neq 0$. No hay contradicción: E no es C^1 cerca del origen, que está en la bola.

⚠ $\det D\Psi > 0$

Con $\Psi(u, v, w) = (-u, v, w)$ en $B = [0,1]^3$ (inyectiva, $\det D\Psi = -1$) y $F(x) = x$, las normales de C4-022.D1 apuntan hacia adentro de $V = [-1,0] \times [0,1]^2$: $\Phi_{\partial V}(F) = -3$, mientras que $\int_V \operatorname{div} F = 3$. El signo del jacobiano es la orientación.

⚠ Inyectiva en el interior

Con la bola y $\theta \in [-\pi, 3\pi]$ (la esfera recorrida dos veces), $\det D\Psi > 0$ en el interior, las caras $\theta = -\pi$ y $\theta = 3\pi$ todavía se cancelan, y para $F(x) = x$ el lado de las caras vale $8\pi R^3$; pero $\int_V \operatorname{div} F = 4\pi R^3$. Sin inyectividad, $\int_B (\operatorname{div} F \circ \Psi) \det D\Psi$ cuenta V dos veces.

Ejercicios

1. Verifica Gauss para $F = (x^3, y^3, z^3)$ en la bola unitaria calculando los dos lados.
2. Calcula $\Phi_{\partial V}(F)$ para $F = (xy, yz, zx)$ y $V = [0,1]^3$ con C4-022.T4.
3. Demuestra que si $H \in C^2$ cerca de $\bar{B}(c, R)$, el flujo de $\operatorname{rot} H$ por $S_R(c)$ es 0.
4. Para el sólido entre $h_1 = 0$ y $h_2 = 1 + x^2$ sobre $[0,1]^2$, calcula su volumen como $\Phi_{\partial V}(z\, e_3)$.
5. En la prueba de C4-022.C1, ¿qué pasaría si se usara $\theta \in [0, 2\pi]$? ¿Siguen cancelándose las caras?

Respuestas

1. $\operatorname{div} F = 3|x|^2$ y $\int 3|x|^2 = 3 \cdot 4\pi/5 = 12\pi/5$ (C4-011.E1). En la esfera, $F(\omega) \cdot \omega \operatorname{sen}\varphi = (\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4) \operatorname{sen}\varphi$, cuya integral es $3 \cdot 4\pi/5$.
2. $\operatorname{div} F = y + z + x$, y $\int_{[0,1]^3} (x + y + z) = 3/2$.
3. $\operatorname{div}\operatorname{rot} H = 0$ (C3-027) y C4-022.C1.
4. $\operatorname{div}(z\, e_3) = 1$, así que $\Phi_{\partial V}(z\, e_3) = c(V) = \int_{[0,1]^2} (1 + x^2) = 4/3$; en las caras solo aporta la de arriba (en la de abajo $z = 0$; en las paredes la normal es horizontal).
5. Sí: $\omega(\varphi, 0) = \omega(\varphi, 2\pi)$ por periodicidad (C2-014.T5), las caras $\theta = 0, 2\pi$ coinciden y se cancelan; la inyectividad vale en $(0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

C4-023 · Flujos, presión y ley de Gauss

Motivación

> **Una boya de 10 cm de radio**
> Una boya esférica de radio 0.1 m está sumergida en agua, con su centro a 2 m de profundidad. El agua empuja cada pedazo de su superficie hacia adentro con la presión $p = p_0 - \rho_0 g\, x_3$ ($x_3 < 0$ bajo la superficie), que es mayor abajo que arriba. ¿Cuánto vale la fuerza total?
> Sumar a mano las fuerzas sobre la esfera es una integral de superficie de un vector. Con el teorema de Gauss se vuelve una integral de volumen de $\nabla p = (0, 0, -\rho_0 g)$: la fuerza es $\rho_0 g$ por el volumen, hacia arriba, unos 41.09 N, sin importar la profundidad ni la presión atmosférica p_0. Es el principio de Arquímedes.
> Dónde falla la analogía: el agua real tiene oleaje y la presión no es exactamente lineal en la profundidad; aquí el fluido está en reposo y la densidad es constante.

Este capítulo es de técnica: tres usos del teorema de Gauss (C4-022.T4) y una herramienta, la extensión radial C^2, que reemplaza a las regiones con hueco.

El resultado que justifica el método

Corolario C4-023.C1 (formas vectoriales)

Si $V = \Psi(B)$ es un sólido parametrizado y $f \in C^1$ en un abierto que contiene a V, $\int_V \partial_i f = \Phi_{\partial V}(f\, e_i)$ para $i = 1, 2, 3$ («$\int_V \nabla f = \iint_{\partial V} f\, n\, dS$»).

Demostración.

1. Sea O un abierto con $V \subset O$ y $f \in C^1(O)$. El campo $F := f\, e_i$ tiene componentes f (en el lugar i) y 0, así que $F \in C^1(O)$ (C3-017.D1).
2. $\operatorname{div} F = \partial_i f$ (C3-027.D1; las constantes tienen parciales 0, C3-015.T1).

3. Por el teorema de Gauss (C4-022.T4), $\int_V \partial_i f = \int_V \operatorname{div} F = \Phi_{\partial V}(f\, e_i)$. ■

La fórmula entre comillas se lee componente a componente: en una cara con normal N, $f\, e_i \cdot N = f\, N_i$.

Ejemplo resuelto: el principio de Arquímedes

> **Ejemplo C4-023.E1 (principio de Arquímedes)**
> En un fluido de densidad ρ_0 con presión $p(x) = p_0 - \rho_0 g\, x_3$, la fuerza de presión sobre un cuerpo sumergido V,
>
> $$-\big(\Phi_{\partial V}(p\, e_1), \Phi_{\partial V}(p\, e_2), \Phi_{\partial V}(p\, e_3)\big),$$
>
> es $\rho_0 g \cdot c(V) \cdot e_3$.

Verificación. $V = \Psi(B)$ es un sólido parametrizado (la fuerza sobre la cara con normal N es $-p\, N$: la presión empuja hacia adentro).

1. p es un polinomio en x, de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$, con $\partial_1 p = \partial_2 p = 0$ y $\partial_3 p = -\rho_0 g$ (C3-015.T1).
2. Por C4-023.C1, $\Phi_{\partial V}(p\, e_1) = \int_V \partial_1 p = 0$ y $\Phi_{\partial V}(p\, e_2) = 0$.
3. Por C4-023.C1 y la linealidad (C4-005.T4 b), $\Phi_{\partial V}(p\, e_3) = \int_V (-\rho_0 g) = -\rho_0 g\, c(V)$.
4. La fuerza es $-(0, 0, -\rho_0 g\, c(V)) = \rho_0 g\, c(V)\, e_3$: hacia arriba, igual al peso del fluido desalojado. ■

Para la boya, $c(V) = 4\pi(0.1)^3/3$ m^3 y la fuerza es $1000 \cdot 9.81 \cdot 0.0041888 \approx 41.09$ N (la cuadratura numérica de la integral de superficie en `tools/checks/C4-023.py` da lo mismo).

> ⚠ **p_0 no aparece**
>
> La presión atmosférica es constante: su gradiente es 0 y no empuja. Lo que empuja es la *diferencia* de presión entre abajo y arriba.

Una herramienta: la extensión radial

Para campos con una singularidad, como $x/|x|^3$, Gauss no se aplica en una bola que contenga al origen. En lugar de demostrar Gauss para regiones con hueco, se modifica el campo cerca del origen sin

cambiarlo lejos.

Teorema C4-023.T1 (extensión radial C^2)

Sean g de clase C^2 en $(0,\infty)$ y $\varepsilon > 0$. Existe $H \in C^2(\mathbb{R}^3)$ con $H(x) = g(|x|)$ para $|x| \geq \varepsilon$.

Idea de la demostración

En $[0, \varepsilon/2]$ se pega a g un polinomio par $A + Br^2 + Cr^4$ con el mismo valor, la misma derivada y la misma segunda derivada en $\varepsilon/2$. Un polinomio par en $|x|$ es un polinomio en las coordenadas.

Demostración. Sean $s := \varepsilon/2$ y $g_0 := g(s)$, $g_1 := g'(s)$, $g_2 := g''(s)$.

1. Sean
$$C := \frac{s\,g_2 - g_1}{8s^3}, \qquad B := \frac{g_2 - 12Cs^2}{2}, \qquad A := g_0 - Bs^2 - Cs^4,$$
y $h(r) := A + Br^2 + Cr^4$. Entonces $h'(r) = 2Br + 4Cr^3$ y $h''(r) = 2B + 12Cr^2$ (C1-028.T2, C1-029.T1).
2. $h(s) = g_0$ por la definición de A; $h''(s) = 2B + 12Cs^2 = g_2$ por la de B; y
$$h'(s) = 2Bs + 4Cs^3 = s(g_2 - 12Cs^2) + 4Cs^3 = s\,g_2 - 8Cs^3 = g_1.$$
3. Sea $k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ con $k := h$ en $(0, s]$ y $k := g$ en (s,∞). En $(0,s)$ y en (s,∞), k es C^2. En s: k es continua ($h(s) = g(s)$, y las dos son continuas), y en $(0,s) \cup (s,\infty)$ su derivada es h' o g', que tienden a $h'(s) = g'(s)$ cuando $r \to s$. Por el límite de la derivada (C2-014.T2), k es derivable en s con $k'(s) = g_1$, y k' es continua en s.
4. El mismo argumento con k' (continua en s, derivable fuera de s con $k'' \to g_2$) da $k''(s) = g_2$ y k'' continua: $k \in C^2((0,\infty))$.
5. Sea $H(x) := A + B|x|^2 + C|x|^4$ si $|x| < s$ y $H(x) := k(|x|)$ si $|x| > 0$. Las dos fórmulas coinciden en $0 < |x| < s$ (ahí $k(|x|) = h(|x|)$), así que H está bien definida en $\mathbb{R}^3$.
6. En la bola abierta $B(0,s)$, H es un polinomio en x_1, x_2, x_3 (porque $|x|^2 = \sum x_i^2$), de clase C^∞ (C3-018.T2).
7. En $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $x \mapsto |x|$ es C^2: es $\sqrt{\cdot}$ compuesta con el polinomio positivo $\sum x_i^2$, y $\sqrt{\cdot}$ es C^2 en $(0,\infty)$, porque su derivada $1/(2\sqrt{t})$ (C2-014.T1) es derivable con derivada $-1/(4t\sqrt{t})$, continua (C1-029.T3, C1-030.T1, C3-002.T6). Como k es C^2, por C3-023.C1 $H = k \circ |\cdot|$ es C^2 ahí (C3-016.E1 da su gradiente).

8. Ser C^2 es una propiedad local: las parciales de H en un punto solo dependen de H en una bola alrededor de él (C3-015.T1). Todo punto está en uno de los dos abiertos de los pasos 6 y 7, así que $H \in C^2(\mathbb{R}^3)$.
9. Para $|x| \geq \varepsilon > s$, $H(x) = k(|x|) = g(|x|)$. ■

Ejemplo a medias: la ley de Gauss

> **Ejemplo C4-023.E2 (ley de Gauss)**
> $E(x) := x/|x|^3$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tiene $\operatorname{div} E = 0$, y su flujo por la esfera $S_R(c)$ es 4π si $|c| < R$ y 0 si $|c| > R$.

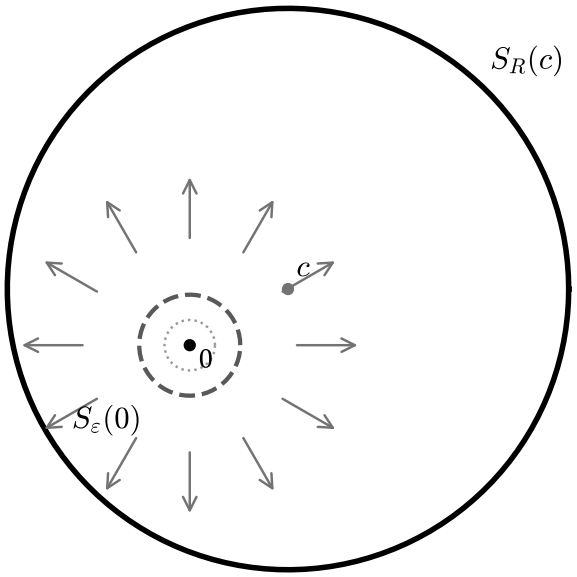


Figura 24: Si la esfera $S_R(c)$ encierra al origen, se compara con una esfera chica $S_\varepsilon(0)$. El campo se reemplaza dentro de $|x| < \varepsilon/2$ (línea punteada) por uno de clase C^1; fuera de ahí no cambia.

Verificación.

1. *Divergencia.* En $x \neq 0$, por C3-015.T1 y la regla del cociente (C1-029.T3, C1-030.T1), $\partial_i(x_i|x|^{-3}) = |x|^{-3} - 3x_i^2|x|^{-5}$, y sumando, $\operatorname{div} E = 3|x|^{-3} - 3|x|^2|x|^{-5} = 0$.

2. *Centro fuera* ($|c| > R$). Si $|x - c| \le R$, entonces $|x| \ge |c| - R > 0$ (C3-001.T4): la bola $\bar{B}(c, R)$ está dentro del abierto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, donde E es C^1. Por C4-022.C1, el flujo es $\int_{\bar{B}(c,R)} \operatorname{div} E = 0$.
3. *Centro dentro* ($|c| < R$). Sea $0 < \varepsilon < R - |c|$; entonces $\bar{B}(0, \varepsilon) \subset B(c, R)$ y la esfera $S_R(c)$ está en $\{|x| > \varepsilon\}$ (C3-001.T4).
4. Por C4-023.T1 con $g(r) := 1/r$ y $\varepsilon/2$, hay $H \in C^2(\mathbb{R}^3)$ con $H(x) = 1/|x|$ si $|x| \ge \varepsilon/2$. Sea $\tilde{E} := -\nabla H$, de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. En el abierto $\{|x| > \varepsilon/2\}$, $\nabla(1/|x|) = -x/|x|^3$ (C3-016.E1, C3-016.T4 b), así que $\tilde{E} = E$ ahí y $\operatorname{div} \tilde{E} = \operatorname{div} E = 0$ ahí.
5. Gauss para $\tilde{E}$ en las dos bolas (C4-022.C1):

$$\int_{\bar{B}(c,R)} \operatorname{div} \tilde{E} = \iint_{S_R(c)} E \cdot dS, \qquad \int_{\bar{B}(0,\varepsilon)} \operatorname{div} \tilde{E} = \iint_{S_\varepsilon(0)} E \cdot dS$$

   (en las dos esferas $|x| > \varepsilon/2$ y $\tilde{E} = E$).
6. $\bar{B}(c, R)$ es la unión disjunta de $\bar{B}(0, \varepsilon)$ y $\bar{B}(c, R) \setminus \bar{B}(0, \varepsilon)$, ambos de Jordan (C4-005.E1, C4-005.T3); en el segundo $|x| > \varepsilon$ y $\operatorname{div} \tilde{E} = 0$. Por la aditividad (C4-005.T4 c), las dos integrales del paso 5 son iguales, y por lo tanto también los dos flujos.
7. *Lo que termina el alumno:* el flujo por la esfera chica. Con $\Phi(\varphi, \theta) = \varepsilon\, \omega$, $N = \varepsilon^2 \operatorname{sen} \varphi\, \omega$ (C4-018.E1) y $E(\varepsilon\omega) = \omega/\varepsilon^2$, así que $E \cdot N = \operatorname{sen} \varphi$ ($|\omega| = 1$) y, por Fubini y Barrow (C4-006.C1, C2-009.C1),

$$\iint_{S_\varepsilon(0)} E \cdot dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

   ($\cos 0 - \cos \pi = 2$, C2-014.C1, C2-014.T6). ■

El flujo no depende del radio ni del centro, solo de si la carga está dentro o fuera. Es la ley de Gauss de la electrostática (E es el campo de una carga puntual, salvo constantes).

Conservación de la masa

> **Ejemplo C4-023.E3 (conservación de la masa)**
> Si ρ y v son C^1 y para toda bola $\bar{B}$ del dominio $\frac{d}{dt} \int_{\bar{B}} \rho = -\iint_{\partial \bar{B}} \rho v \cdot dS$, entonces $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$; un flujo con $\operatorname{div} v = 0$ (incompresible) tiene flujo neto 0 por toda esfera.

Verificación. Sean J un intervalo abierto de tiempos y $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, con $\rho : J \times U \to \mathbb{R}$ y $v : J \times U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1; «$\partial \bar{B}$» es la esfera de C4-022.C1.

1. Sea $\bar{B} = \bar{B}(p,r) \subset U$. Por la regla de Leibniz (C4-012.T3, con $K = \bar{B}$ compacto de Jordan y $\partial_t \rho$ continua), $\frac{d}{dt}\int_{\bar{B}} \rho = \int_{\bar{B}} \partial_t \rho$.
2. Para t fijo, $x \mapsto \rho(t,x)v(t,x)$ es C^1 en U (C3-018.T2). Por C4-022.C1, $\iint_{\partial \bar{B}} \rho v \cdot dS = \int_{\bar{B}} \operatorname{div}_x(\rho v)$.
3. La hipótesis da $\int_{\bar{B}(p,r)} (\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho v)) = 0$ para todo $p \in U$ y todo $r > 0$ con $\bar{B}(p,r) \subset U$ (C4-005.T4 b).
4. La función $\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho v)$ es continua en U para cada t; por el lema de los promedios (C4-007.C2) es 0 en U.
5. Si $\operatorname{div} v = 0$ y $\bar{B}(p,r) \subset U$, por C4-022.C1 el flujo de v por $S_r(p)$ es $\int_{\bar{B}(p,r)} \operatorname{div} v = 0$: lo que entra sale. Por C4-022.T5, el recíproco también vale: flujo 0 por todas las esferas chicas da $\operatorname{div} v = 0$. ■

Ejercicios

1. Un cubo de arista a flota con la mitad sumergida en un líquido de densidad ρ_0. ¿Cuánto pesa?
2. Demuestra que $\Phi_{\partial V}$ es lineal en F y deduce de C4-023.C1 que $\int_V \nabla(fg)$ se escribe con $\Phi_{\partial V}(fg\, e_i)$.
3. Calcula el flujo de $E(x) = x/|x|^3$ por la esfera $S_2((1,0,0))$ y por $S_1((3,0,0))$.
4. Para $g(r) = r^{-2}$ y $\varepsilon = 2$, encuentra el polinomio h de C4-023.T1.
5. Sea $v(x) = (-x_2, x_1, 0)$. Comprueba que es incompresible y calcula su flujo por cualquier esfera.

Respuestas

1. El empuje es $\rho_0 g \cdot a^3/2$ (Arquímedes para la parte sumergida), así que el peso es $\rho_0 g a^3/2$.
2. Cada flujo $\iint_\Phi F \cdot dS$ es lineal en F (C4-005.T4 b), y $\Phi_{\partial V}$ es una suma de ellos. $\int_V \partial_i(fg) = \Phi_{\partial V}(fg\, e_i)$.
3. $|c| = 1 < 2$: flujo 4π. $|c| = 3 > 1$: flujo 0.
4. $s = 1$, $g_0 = 1$, $g_1 = -2$, $g_2 = 6$: $C = (6+2)/8 = 1$, $B = (6-12)/2 = -3$, $A = 1 + 3 - 1 = 3$: $h(r) = 3 - 3r^2 + r^4$.
5. $\operatorname{div} v = 0$, así que el flujo por toda esfera es 0 (C4-023.E3).

C4-024 · Identidades de Green y unicidad

Motivación

> **Un melón en el refrigerador**
> Un melón de radio 1 (en unidades convenientes) madura y produce calor de manera uniforme; su cáscara está a la temperatura del refrigerador, que llamamos 0. Después de un rato la temperatura u ya no cambia: el calor que se produce dentro sale por la cáscara. En ese estado, $\Delta u = -6$ dentro y $u = 0$ en la cáscara.
> $u = 1 - |x|^2$ cumple las dos cosas: vale 1 en el centro y $3/4$ a media distancia. ¿Es la única? Si hubiera otra, su diferencia w tendría $\Delta w = 0$ dentro y $w = 0$ en la cáscara. La identidad de Green dice que entonces la «energía» $\int |\nabla w|^2$ es 0, y w no puede ser más que 0.
> Dónde falla la analogía: un melón no es una bola perfecta ni de material homogéneo, y su temperatura nunca es exactamente estacionaria.

Resultados

Teorema C4-024.T1 (identidades de Green)

Si $V = \Psi(B)$ es un sólido parametrizado, $f \in C^1$ y $g \in C^2$ en un abierto que contiene a V:

$$\int_V (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) = \Phi_{\partial V}(f\nabla g);$$

si $f, g \in C^2$,

$$\int_V (f\Delta g - g\Delta f) = \Phi_{\partial V}(f\nabla g - g\nabla f).$$

Idea de la demostración

Es Gauss para el campo $f\nabla g$, cuya divergencia es $\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$ por la regla del producto. La segunda identidad es la resta de la primera con los papeles de f y g intercambiados.

Demostración. Sea O un abierto con $V \subset O$, $f \in C^1(O)$ y $g \in C^2(O)$.

1. $\nabla g = (\partial_1 g, \partial_2 g, \partial_3 g)$ es C^1 en O (C3-018.D1), y $F := f\nabla g$ también (C3-018.T2, producto de funciones C^1).
2. Por la regla del producto (C3-016.T3), $\partial_i(f\,\partial_i g) = \partial_i f\,\partial_i g + f\,\partial_i\partial_i g$. Sumando en i (C3-027.D1, C1-005.T12):

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g.$$

3. Por el teorema de Gauss (C4-022.T4), $\int_V (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) = \Phi_{\partial V}(f\nabla g)$: la primera identidad.
4. Si $f, g \in C^2(O)$, la primera identidad vale también con f y g intercambiados: $\int_V (g\Delta f + \nabla g \cdot \nabla f) = \Phi_{\partial V}(g\nabla f)$.
5. Restamos. Como $\nabla f \cdot \nabla g = \nabla g \cdot \nabla f$ (C3-001.T2), la integral es lineal (C4-005.T4 b) y $\Phi_{\partial V}$ también (cada flujo $\iint_\Phi F \cdot dS = \int_D F(\Phi) \cdot N$ es lineal en F, C4-019.D2 y C4-005.T4 b):

$$\int_V (f\Delta g - g\Delta f) = \Phi_{\partial V}(f\nabla g) - \Phi_{\partial V}(g\nabla f) = \Phi_{\partial V}(f\nabla g - g\nabla f). \blacksquare$$

Teorema C4-024.T2 (unicidad)

Sean $V = \Psi(B)$ un sólido parametrizado y $u_1, u_2 \in C^2$ en un abierto que contiene a V con $\Delta u_1 = \Delta u_2$ en V.

(a) (Dirichlet) Si $u_1 = u_2$ en $\Psi(\partial B)$, $u_1 = u_2$ en V.

(b) (Neumann) Si $\nabla(u_1 - u_2)$ es ortogonal a la normal de cada cara en todos sus puntos, $u_1 - u_2$ es constante en V.

Nota: la prueba solo usa que $\Phi_{\partial V}(w\nabla w) = 0$. En la bola, $\Psi(\partial B)$ contiene el semidisco $\theta = \pm\pi$, que es interior; por eso la bola se trata aparte en C4-024.C1, con datos solo en la esfera.

Idea de la demostración
$w := u_1 - u_2$ es armónica en V y su flujo $\Phi_{\partial V}(w\nabla w)$ es 0 por la hipótesis. La primera identidad con $f = g = w$ da $\int_V |\nabla w|^2 = 0$: el gradiente se anula y w es constante.

Demostración. Sea O abierto con $V \subset O$ y $u_1, u_2 \in C^2(O)$; $w := u_1 - u_2 \in C^2(O)$, con $\Delta w = 0$ en V (C3-027.D1, linealidad).

1. *El flujo es 0.* Cada cara $\Phi_i^{\pm}$ es Ψ restringida a una cara de B, así que su imagen está en $\Psi(\partial B)$. En (a), $w(\Phi_i^{\pm}) = 0$, y el integrando $w(\Phi_i^{\pm})\nabla w(\Phi_i^{\pm}) \cdot N$ de cada flujo es 0. En (b), $\nabla w(\Phi_i^{\pm}) \cdot N = 0$ y el integrando también es 0. En los dos casos $\Phi_{\partial V}(w\nabla w) = 0$ (C4-022.D1, C4-019.D2).
2. *Energía 0.* Por la primera identidad (C4-024.T1) con $f = g = w$:
$$\int_V |\nabla w|^2 = \int_V (w\Delta w + \nabla w \cdot \nabla w) = \Phi_{\partial V}(w\nabla w) = 0.$$
3. $|\nabla w|^2$ es continua y ≥ 0 en V, con integral 0; por la positividad (C4-005.T6), $\nabla w = 0$ en $\operatorname{int} V$.
4. $\Psi(\operatorname{int} B)$ *es abierto.* Para $a \in \operatorname{int} B$, $D\Psi(a)$ es invertible ($\det D\Psi(a) > 0$, AL.4), y por la función inversa (C3-025.T1 b) hay una bola $W_a \subset \operatorname{int} B$ alrededor de a con $\Psi(W_a)$ abierto. $\Psi(\operatorname{int} B)$ es la unión de esos abiertos, así que es abierto y está en $\operatorname{int} V$ (C3-008.T3).
5. *Es conexo.* $\operatorname{int} B$ es convexo, luego conexo (C3-011.T2), y su imagen por la función continua Ψ es conexa (C3-014.T4).
6. Por los pasos 3-5, $\nabla w = 0$ en el abierto conexo $\Psi(\operatorname{int} B)$, y w es constante ahí, igual a un $k \in \mathbb{R}$ (C3-017.C1).
7. *En todo V.* Sean $y \in B$ y m el centro de B. Los puntos $y_j := y + (m - y)/j$ ($j \geq 2$) están en $\operatorname{int} B$ (cada coordenada queda estrictamente entre los extremos) y $y_j \to y$. Por la continuidad de $w \circ \Psi$ (C3-012.T1), $w(\Psi(y)) = \lim w(\Psi(y_j)) = k$. Así $w = k$ en $V = \Psi(B)$; es (b).
8. En (a), $w = 0$ en $\Psi(\partial B) \neq \emptyset$, luego $k = 0$ y $u_1 = u_2$ en V. ■

En la bola, $\Psi(\partial B)$ incluye el semidisco $\{\theta = \pi\}$ (las caras $\theta = \pm\pi$) y el eje (las caras $\varphi = 0, \pi$): pedir $u_1 = u_2$ ahí es pedir datos *dentro* de la bola. La versión útil pide datos solo en la esfera.

Corolario C4-024.C1 (unicidad en una bola)

Sean $\bar{B} := \bar{B}(c, R)$ y $u_1, u_2 \in C^2$ en un abierto que contiene a $\bar{B}$ con $\Delta u_1 = \Delta u_2$ en $\bar{B}$.

(a) Si $u_1 = u_2$ en $S_R(c)$, $u_1 = u_2$ en $\bar{B}$.

(b) Si $\nabla(u_1 - u_2)(x) \cdot (x - c) = 0$ para todo $x \in S_R(c)$, $u_1 - u_2$ es constante en $\bar{B}$.

Demostración. Sea $w := u_1 - u_2$, de clase C^2 cerca de $\bar{B}$ con $\Delta w = 0$ en $\bar{B}$.

1. Por la primera identidad (C4-024.T1) en la bola, que es un sólido parametrizado con $\Phi_{\partial V}$ igual al flujo por $S_R(c)$ (C4-022.C1):

$$\int_{\bar{B}} |\nabla w|^2 = \iint_{S_R(c)} w \nabla w \cdot dS = \int_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} w(x)\, \nabla w(x) \cdot R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega,$$

   con $x = c + R\omega(\varphi, \theta)$ (C4-019.D2, C4-018.E1).
2. En (a), $w(x) = 0$ en la esfera y el integrando es 0. En (b), $R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega = R \operatorname{sen}\varphi\, (x - c)$, así que $\nabla w(x) \cdot R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega = R \operatorname{sen}\varphi\, \nabla w(x) \cdot (x - c) = 0$. En los dos casos $\int_{\bar{B}} |\nabla w|^2 = 0$.
3. Por la positividad (C4-005.T6), $\nabla w = 0$ en $\operatorname{int}\bar{B}$, que contiene a la bola abierta $B(c, R)$ (abierta, C3-008.T1; C3-008.T3).
4. $B(c, R)$ es convexa, luego conexa (C3-011.T2); por C3-017.C1, $w = k$ constante en $B(c, R)$.
5. Si $|x - c| = R$, los puntos $x_j := c + (1 - 1/j)(x - c)$ están en $B(c, R)$ y tienden a x; por continuidad (C3-012.T1), $w(x) = k$. Así $w = k$ en $\bar{B}$: es (b).
6. En (a), $w = 0$ en la esfera, así que $k = 0$. ■

Ejemplo C4-024.E1
En la bola unitaria, $u = 1 - |x|^2$ es la única función C^2 cerca de la bola con $\Delta u = -6$ y $u = 0$ en la esfera.

Verificación.

1. u es un polinomio, de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$. $\partial_i \partial_i u = -2$ para cada i (C3-015.T1), así que $\Delta u = -6$ (C3-027.D1). Si $|x| = 1$, $u(x) = 0$.
2. Si u_2 es C^2 cerca de la bola, con $\Delta u_2 = -6$ en la bola y $u_2 = 0$ en la esfera, entonces u y u_2 cumplen C4-024.C1 (a), y $u_2 = u$. ■

Comprobación de la primera identidad (con $f = g = u$, $u = 0$ en la esfera): $|\nabla u|^2 = 4|x|^2$ y, por C4-011.E1,

$$\int (u\Delta u + |\nabla u|^2) = \int (-6 + 10|x|^2) = -6 \cdot \frac{4\pi}{3} + 10 \cdot \frac{4\pi}{5} = -8\pi + 8\pi = 0.$$

La «energía» del melón es $\int |\nabla u|^2 = 16\pi/5 \approx 10.05$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Los mismos laplacianos

$u_1 = 1 - |x|^2$ y $u_2 = 0$ coinciden en la esfera unitaria, pero $\Delta u_1 = -6 \neq 0 = \Delta u_2$: son distintas. La fuente de calor también es un dato.

⚠ Neumann solo determina hasta una constante

u y $u + 1$ tienen el mismo laplaciano y el mismo gradiente en todas partes: la condición de Neumann no las distingue. Por eso (b) concluye «constante», no «igual».

⚠ Datos en toda la frontera

En (a) los datos deben estar en toda la esfera. $u_1 = 0$ y $u_2 = x_3$ son armónicas y coinciden en el ecuador $\{x_3 = 0\} \cap S_1(0)$, pero son distintas dentro de la bola. Con datos en una parte de la frontera no hay unicidad.

Ejercicios

1. Demuestra la segunda identidad de Green directamente como Gauss para el campo $f\nabla g - g\nabla f$.
2. Sea $u \in C^2$ cerca de $\bar{B}(0, R)$, armónica. Demuestra que $\iint_{S_R(0)} \nabla u \cdot dS = 0$.
3. Encuentra la única u de clase C^2 cerca de la bola $\bar{B}(0, 2)$ con $\Delta u = 1$ en la bola y $u = 0$ en la esfera.
4. ¿Hay una u de clase C^2 cerca de la bola unitaria con $\Delta u = 1$ en la bola y $\nabla u(x) \cdot x = 0$ en la esfera? (Integra Δu.)
5. En la prueba de C4-024.T2, ¿dónde se usa que $\det D\Psi > 0$ en $\operatorname{int} B$?

Respuestas

1. $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f$ (los términos $\nabla f \cdot \nabla g$ se cancelan) y C4-022.T4.
2. Segunda identidad con $f = 1$, $g = u$, o Gauss: $\iint \nabla u \cdot dS = \int \Delta u = 0$.
3. $u = (|x|^2 - 4)/6$: $\Delta u = 6/6 = 1$ y $u = 0$ si $|x| = 2$; es única por C4-024.C1 (a).

4. No: por Gauss, $\int_{\bar{B}} \Delta u = \iint \nabla u \cdot dS = \int R \operatorname{sen} \varphi \, \nabla u(x) \cdot x = 0$, pero $\int_{\bar{B}} 1 = 4\pi/3$.
5. En el paso 4: para que $D\Psi(a)$ sea invertible y la función inversa dé que $\Psi(\operatorname{int} B)$ es abierto.

C4-025 · El laplaciano en coordenadas curvilíneas y funciones armónicas

Motivación

> **Una parrilla de anillo y un termómetro que promedia**
> Una cazuela plana descansa sobre una parrilla en forma de anillo de radio 1, que la mantiene a 100 °C; el borde de la cazuela, de radio 2, está a 20 °C. En el estado estacionario y sin otras fuentes, la temperatura entre el anillo y el borde solo depende de la distancia r al centro. ¿Cuál es? No es lineal en r: es $a + b\log r$, y vale $100 - 80\log r/\log 2$, unos 53.2 °C en $r = 1.5$ (no los 60 °C del promedio).
> Para encontrarla hace falta escribir el laplaciano en polares; la primera parte de este capítulo lo escribe en cualquier sistema de coordenadas ortogonales, con la identidad de Piola. La segunda parte demuestra que una temperatura estacionaria sin fuentes es, en cada punto, el promedio de sus valores en cualquier esfera alrededor: un termómetro en el centro marca lo mismo que el promedio de muchos termómetros en una esfera.
> Dónde falla la analogía: una cazuela real pierde calor por arriba y por abajo; aquí todo el calor se mueve en el plano y no hay pérdidas.

Parte 1 · El laplaciano en coordenadas ortogonales

Teorema C4-025.T0 (máximo interior)

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $w \in C^2(U)$ y w tiene un máximo local en $x_0 \in U$, entonces $\nabla w(x_0) = 0$ y $\partial_i \partial_i w(x_0) \leq 0$ para cada i; en particular $\Delta w(x_0) \leq 0$.

Demostración.

1. Por la condición necesaria (C3-028.T1), $\nabla w(x_0) = 0$.

2. Por la condición de segundo orden para un máximo (C3-028.T2), la hessiana $H_w(x_0)$ es semidefinida negativa: $h \cdot H_w(x_0)h \leq 0$ para todo h (C3-021.D1).
3. Con $h = e_i$, $e_i \cdot H_w(x_0)e_i = \partial_i\partial_i w(x_0) \leq 0$ (C3-015.T1 para las entradas de la hessiana).
4. Sumando en i, $\Delta w(x_0) = \sum_i \partial_i\partial_i w(x_0) \leq 0$ (C3-027.D1). ■

Definición C4-025.D1 (coordenadas ortogonales)

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $g \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ inyectiva con $\det Dg > 0$ y columnas $g_i := \partial_i g$ ortogonales dos a dos. **Factores de escala** $h_i := |g_i|$, $\hat{e}_i := g_i/h_i$, $H := h_1h_2h_3$. Cilíndricas: $h = (1, r, 1)$ en $r > 0$; esféricas: $h = (1, \rho, \rho \operatorname{sen}\varphi)$ en $\rho > 0$, $0 < \varphi < \pi$.

Las h_i son > 0: si una columna fuera 0, $\det Dg = 0$ (AL.4). Los dos ejemplos:

- **Cilíndricas**, $C(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ en $U_C := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$: las columnas son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $(-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ y $(0, 0, 1)$, ortogonales, de normas $1, r, 1$ (C2-014.T5); $\det DC = r > 0$ y C es inyectiva en U_C por la unicidad del ángulo polar (C3-013.T1 b).
- **Esféricas**, $E(\rho, \varphi, \theta) = \rho\,\omega(\varphi, \theta)$ en $U_E := (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$: las columnas son ω, $\rho\,\omega_\varphi$ y $\rho\,\omega_\theta$ (los vectores del paso 5 de C4-022.C1), con $|\omega_\varphi| = 1$, $|\omega_\theta| = \operatorname{sen}\varphi$ y productos punto $\omega \cdot \omega_\varphi = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi = 0$, $\omega \cdot \omega_\theta = 0$, $\omega_\varphi \cdot \omega_\theta = 0$ (C2-014.T5, C2-014.T6); $\det DE = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi > 0$ (C3-022.E1) y E es inyectiva en U_E (C3-013.T2, como en C4-022.C1).

Teorema C4-025.T1 (gradiente, divergencia y laplaciano en coordenadas ortogonales)

Con C4-025.D1: $\det Dg = H$ y $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$ (y cíclicos). Para $u \in C^1$ cerca de $g(U)$ y $v := u \circ g$,

$$\nabla u \circ g = \sum_i \frac{\partial_i v}{h_i}\,\hat{e}_i.$$

Para $F \in C^1$ con $F_i := (F \circ g) \cdot \hat{e}_i$,

$$(\operatorname{div} F) \circ g = \frac{1}{H}\big[\partial_1(h_2h_3F_1) + \partial_2(h_3h_1F_2) + \partial_3(h_1h_2F_3)\big].$$

Para $u \in C^2$,

$$(\Delta u) \circ g = \frac{1}{H}\sum_i \partial_i\Big(\frac{H}{h_i^2}\,\partial_i v\Big).$$

Idea de la demostración

$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3$ es unitario y perpendicular a $\hat{e}_2, \hat{e}_3$, así que es $\pm\hat{e}_1$; el signo lo fija $\det Dg > 0$. El gradiente sale de la regla de la cadena; la divergencia, de Piola, porque $(F \circ g) \cdot (g_2 \times g_3) = h_2 h_3 F_1$; el laplaciano es la divergencia del gradiente.

Demostración. Las $\hat{e}_i$ son unitarias y ortogonales dos a dos (C3-001.D3).

1. Por la identidad de Lagrange (C3-006.T1), $|\hat{e}_2 \times \hat{e}_3|^2 = |\hat{e}_2|^2|\hat{e}_3|^2 - (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3)^2 = 1$, y $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3$ es ortogonal a $\hat{e}_2$ y a $\hat{e}_3$ (C3-006.T1).
2. Por el marco ortonormal (C3-006.T2) con $T = \hat{e}_2$, $N = \hat{e}_3$ y $B = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3$: $\hat{e}_1 = (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2)\hat{e}_2 + (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3)\hat{e}_3 + (\hat{e}_1 \cdot B)B = (\hat{e}_1 \cdot B)B$. Tomando normas, $|\hat{e}_1 \cdot B| = 1$, así que $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \pm\hat{e}_1$.
3. Por C4-022.T1 y la bilinealidad (C3-006.T1),

$$\det Dg = g_1 \cdot (g_2 \times g_3) = h_1 h_2 h_3\, \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \pm H.$$

   Como $\det Dg > 0$ y $H > 0$, el signo es $+$: $\det Dg = H$ y $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$.
4. Dos intercambios de columnas no cambian el determinante (AL.4, como en el paso 4 de la prueba de C4-022.T1): $\det[g_2\ g_3\ g_1] = \det[g_3\ g_1\ g_2] = H > 0$. Los pasos 1-3 con los índices rotados dan $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$ y $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$.
5. *Gradiente.* Por la regla de la cadena (C3-023.T1), $\partial_i v = \nabla u(g) \cdot g_i = h_i\, \nabla u(g) \cdot \hat{e}_i$. Por C3-006.T2 con $(T, N, B) = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ (paso 4), $\nabla u \circ g = \sum_i (\nabla u(g) \cdot \hat{e}_i)\hat{e}_i = \sum_i (\partial_i v / h_i)\hat{e}_i$.
6. *Divergencia.* Aplicamos Piola (C4-022.T2) con $\Psi = g$ en $W = U$. Por los pasos 3-4, $g_2 \times g_3 = h_2 h_3 \hat{e}_1$, $g_3 \times g_1 = h_3 h_1 \hat{e}_2$ y $g_1 \times g_2 = h_1 h_2 \hat{e}_3$, así que el campo de Piola es $G = (h_2 h_3 F_1, h_3 h_1 F_2, h_1 h_2 F_3)$, de clase C^1, y

$$\partial_1(h_2 h_3 F_1) + \partial_2(h_3 h_1 F_2) + \partial_3(h_1 h_2 F_3) = \operatorname{div} G = (\operatorname{div} F \circ g)\, H.$$

   Dividimos entre $H > 0$.
7. *Laplaciano.* Si $u \in C^2$, $F := \nabla u$ es C^1 y $\operatorname{div} F = \Delta u$ (C3-027.D1). Por el paso 5, $F_i = (\nabla u \circ g) \cdot \hat{e}_i = \partial_i v / h_i$, y $h_2 h_3 F_1 = (H/h_1)(\partial_1 v / h_1) = (H/h_1^2)\partial_1 v$ (igual los otros). El paso 6 da la fórmula. ■

Corolario C4-025.C1 (cilíndricas, polares y esféricas)

En cilíndricas, $\Delta u \circ C = v_{rr} + v_r/r + v_{\theta\theta}/r^2 + v_{zz}$; en polares ($u$ independiente de z), $v_{rr} +$

$v_r/r + v_{\theta\theta}/r^2$; en esféricas,

$$\Delta u \circ E = v_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho^2}\Big(v_{\varphi\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}v_\varphi + \frac{v_{\theta\theta}}{\operatorname{sen}^2\varphi}\Big).$$

Demostración. En cada caso $v = u \circ g$ es C^2 (C3-023.C1) y se usa C4-025.T1 con los factores de C4-025.D1.

1. *Cilíndricas* (U_C): $H = r, H/h_1^2 = r, H/h_2^2 = 1/r, H/h_3^2 = r$. Con la regla del producto (C1-029.T2; r no depende de θ ni de z, C3-015.T1):

$$\Delta u \circ C = \frac{1}{r}\big[(rv_r)_r + (v_\theta/r)_\theta + (rv_z)_z\big] = \frac{1}{r}\big[v_r + rv_{rr} + v_{\theta\theta}/r + rv_{zz}\big].$$

2. *Polares.* Para u de clase C^2 en un abierto $U' \subset \mathbb{R}^2$, $\tilde{u}(x,y,z) := u(x,y)$ es C^2 en $U' \times \mathbb{R}$ con $\Delta\tilde{u}(x,y,z) = \Delta u(x,y)$ y $\tilde{v}_{zz} = 0$; el paso 1 da la fórmula en $(0,\infty) \times (-\pi,\pi)$.
3. *Esféricas* (U_E): $H = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi, H/h_1^2 = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi, H/h_2^2 = \operatorname{sen}\varphi, H/h_3^2 = 1/\operatorname{sen}\varphi$. Con la regla del producto y $(\operatorname{sen})' = \cos$ (C2-014.T6):

$$\begin{aligned}\Delta u \circ E &= \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\big[(\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, v_\rho)_\rho + (\operatorname{sen}\varphi\, v_\varphi)_\varphi + (v_\theta/\operatorname{sen}\varphi)_\theta\big] \\ &= \frac{2\rho v_\rho + \rho^2 v_{\rho\rho}}{\rho^2} + \frac{\cos\varphi\, v_\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, v_{\varphi\varphi}}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi} + \frac{v_{\theta\theta}}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi},\end{aligned}$$

que es la fórmula (C1-029.T3 para el cociente). ■

Corolario C4-025.C2 (armónicas radiales)

Si $u(x) = k(|x|)$ con k de clase C^2 en un intervalo de $(0,\infty)$: en $\mathbb{R}^3$, $\Delta u = k'' + 2k'/r$, y las radiales armónicas son $a + b/r$; en $\mathbb{R}^2$, $\Delta u = k'' + k'/r$, y son $a + b\log r$.

Demostración. Sea I el intervalo (abierto) y $\Omega := \{x : |x| \in I\}$, abierto (C3-012.T4); $u = k \circ |\cdot|$ es C^2 en Ω (como en el paso 7 de C4-023.T1). Sea $r := |x|$.

1. *Fuera del semiplano.* Sea $P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0,\ x_1 \le 0\}$. Todo $x \in \Omega \setminus P$ es $E(\rho,\varphi,\theta)$ con $(\rho,\varphi,\theta) \in U_E$: $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ y su ángulo polar no es π (C3-013.T1 b, C3-013.T2). Ahí $v(\rho,\varphi,\theta) = k(\rho)$ ($|E| = \rho$), con $v_\rho = k'$, $v_{\rho\rho} = k''$ y las demás parciales 0. C4-025.C1 da $\Delta u(x) = k''(r) + 2k'(r)/r$.
2. *En el semiplano.* Si $x_0 \in \Omega \cap P$, los puntos $x_j := x_0 + (0, 1/j, 0)$ están fuera de P y, para j grande,

en Ω (abierto). Las dos funciones Δu y $k''(|x|) + 2k'(|x|)/|x|$ son continuas en Ω (C3-012.T2) y coinciden en los x_j; por la unicidad del límite (C3-012.T1), coinciden en x_0 (C3-008.T3).

3. *Las armónicas.* Si $\Delta u = 0$ en Ω, para cada $r \in I$ el punto $(r, 0, 0)$ está en Ω, así que $k'' + 2k'/r = 0$ en I y $(r^2 k')' = r^2(k'' + 2k'/r) = 0$ (C1-029.T2). Por C1-034.T1, $r^2 k' = -b$ constante, y $(k - b/r)' = k' + b/r^2 = 0$ (C1-029.C1), así que $k = a + b/r$ (C1-034.T1). Recíprocamente, para $k = a + b/r$, $k'' + 2k'/r = 2b/r^3 - 2b/r^3 = 0$.
4. *En $\mathbb{R}^2$.* Igual con polares y la semirrecta $\{x_2 = 0,\ x_1 \le 0\}$: $\Delta u = k'' + k'/r$. Si es 0, $(rk')' = rk'' + k' = 0, rk' = b$, y $(k - b\log r)' = 0$ (C2-011.T1, C1-030.T1): $k = a + b\log r$. Recíprocamente, $(a + b\log r)'' + (a + b\log r)'/r = -b/r^2 + b/r^2 = 0$. ■

En la cazuela de la motivación, $k(1) = 100$ y $k(2) = 20$ dan $a = 100$ y $b = -80/\log 2$.

Parte 2 · Valor medio y principio del máximo

Teorema C4-025.T2 (propiedad del valor medio)

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in C^2(U)$ armónica y $\bar{B}(p, R) \subset U$. Para $0 < r \le R$,

$$u(p) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(p)} u\, dS, \qquad u(p) = \frac{1}{c(\bar{B}(p,R))} \int_{\bar{B}(p,R)} u.$$

Lo mismo en $\mathbb{R}^2$ con circunferencias y discos.

> **Idea de la demostración**
> El promedio $M(r)$ de u en la esfera de radio r vale $u(p)$ en $r = 0$, y por Leibniz su derivada es el flujo de ∇u por la esfera dividido entre su área, que por Gauss es $\int \Delta u = 0$. El promedio en la bola se obtiene integrando en esféricas.

Demostración (en $\mathbb{R}^3$). Sea $K := [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ (compacto de Jordan) y $\omega = \omega(\varphi, \theta)$.

1. $\bar{B}(p, R)$ es compacto y está en U; por C3-014.T3 (b) hay $\eta > 0$ con $B(x, \eta) \subset U$ para todo $x \in \bar{B}(p, R)$. Si $|r| < R + \eta$, entonces $p + r\omega \in U$ (está a distancia $< \eta$ de un punto de $\bar{B}(p, R)$). Sea $J := (-R - \eta, R + \eta)$.
2. $f(r, (\varphi, \theta)) := u(p + r\omega)\,\mathrm{sen}\,\varphi$ es continua en $J \times K$, y por la cadena (C3-016.T4) $\partial_r f = \nabla u(p + r\omega) \cdot \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi$, también continua.

3. Sea $M(r) := \frac{1}{4\pi}\int_K f(r,\cdot)$. Por la regla de Leibniz (C4-012.T3, que incluye la continuidad C4-012.T2), $M \in C^1(J)$ y $M'(r) = \frac{1}{4\pi}\int_K \nabla u(p+r\omega)\cdot\omega \operatorname{sen}\varphi$.
4. $M(0) = \frac{u(p)}{4\pi}\int_K \operatorname{sen}\varphi = u(p)$, porque $\int_K \operatorname{sen}\varphi = 2\cdot 2\pi = 4\pi$ (C4-006.C2, C2-009.C1).
5. Para $0 < r \le R$, el flujo de ∇u por $S_r(p)$ (normal $r^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega$, C4-018.E1) es

$$\int_K \nabla u(p+r\omega)\cdot r^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega = 4\pi r^2 M'(r).$$

   Por C4-022.C1 (∇u es C^1 en $U \supset \bar B(p,r)$), ese flujo es $\int_{\bar B(p,r)} \Delta u = 0$. Así $M' = 0$ en $(0,R]$.
6. M es continua en $[0,R]$ y derivable en $(0,R)$ con $M' = 0$; por C1-034.T1, $M(r) = M(0) = u(p)$ para $0 \le r \le R$.
7. *Esferas.* Como $|N| = r^2 \operatorname{sen}\varphi$ ($\operatorname{sen}\varphi \ge 0$ en $[0,\pi]$), $\iint_{S_r(p)} u\, dS = \int_K u(p+r\omega) r^2 \operatorname{sen}\varphi = 4\pi r^2 M(r) = 4\pi r^2 u(p)$ (C4-019.D1).
8. *Bolas.* Por la traslación (C4-010.C1, $|\det I| = 1$) y las esféricas (C4-011.T3 con $A = [0,R]\times K$, cuya imagen es $\bar B(0,R)$ como en C4-022.C1), y después Fubini (C4-006.C2):

$$\int_{\bar B(p,R)} u = \int_{[0,R]\times K} u(p+\rho\omega)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \int_0^R \rho^2\, 4\pi M(\rho)\, d\rho = \frac{4\pi R^3}{3} u(p),$$

   y $c(\bar B(p,R)) = 4\pi R^3/3$ (C4-011.E1, C4-010.C1). ■

En $\mathbb{R}^2$. Con $e(\theta) := (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(p + r\, e(\theta))\, d\theta$, los pasos 1-4 son iguales ($M(0) = u(p)$). Para el paso 5, el disco $\bar D(p,r)$ es el parche de C4-016.C2 (con $r_1 = 0$), y por el teorema de la divergencia en el plano (C4-020.T1), $\int_{\bar D(p,r)} \Delta u = \oint \nabla u \cdot n\, ds$. Por C4-020.D1 y C4-014.D1, $\oint F\cdot n\, ds = \oint (-F_2, F_1)\cdot d\gamma$, y por C4-016.C2 esta integral sobre el borde del parche es la de la circunferencia $\gamma(\theta) = p + r\, e(\theta)$, con $\gamma' = r(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ y $(-F_2, F_1)\cdot\gamma' = r\, F\cdot e(\theta)$. Así $0 = 2\pi r\, M'(r)$, M es constante, y $\oint_{C_r} u\, ds = \int u(\gamma)|\gamma'| = 2\pi r\, u(p)$ (C4-013.D2). Para el disco, con polares (C4-011.T2) y la traslación, $\int_{\bar D(p,R)} u = \int_0^R s\, 2\pi M(s)\, ds = \pi R^2 u(p)$.

Teorema C4-025.T3 (principio del máximo para funciones armónicas)

(a) (fuerte) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) es abierto y conexo, $u \in C^2(U)$ es armónica y alcanza su máximo en un punto de U, u es constante.

(b) (débil) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, $u \in C^2(U)$ es armónica y continua en $\bar U$, entonces $\max_{\bar U} u = \max_{\partial U} u$ (y lo mismo con el mínimo).

Idea de la demostración

(a) Donde se alcanza el máximo, el promedio en una bola también es el máximo, así que u es el máximo en toda la bola: el conjunto donde se alcanza es abierto y cerrado. (b) $u + \varepsilon|x|^2$ tiene laplaciano positivo y por C4-025.T0 no tiene máximo dentro; se hace $\varepsilon \to 0$.

Demostración.

1. *(a)* Sea $M := u(x_0) = \max_U u$ y $A := \{x \in U : u(x) = M\}$, no vacío. A es cerrado en U: es la preimagen del cerrado $\{M\}$ por la continua u (C3-012.T4).
2. A es abierto: si $x \in A$, hay $r > 0$ con $\bar{B}(x,r) \subset U$ (C3-008.D1). Por el valor medio en bolas (C4-025.T2), $\int_{\bar{B}(x,r)} (M - u) = M\,c - u(x)\,c = 0$ con $c := c(\bar{B}(x,r))$. Como $M - u$ es continua y ≥ 0, por la positividad (C4-005.T6) $M - u = 0$ en $\operatorname{int} \bar{B}(x,r) \supset B(x,r)$, y $B(x,r) \subset A$.
3. Si $A \neq U$, A y $U \setminus A$ serían abiertos en U, disjuntos, no vacíos y con unión U: U sería disconexo (C3-011.D1). Así $A = U$ y $u \equiv M$.
4. *(b)* $\bar{U}$ es cerrado (C3-008.T3) y acotado, luego compacto (C3-010.T4); $\partial U \neq \emptyset$ si $U \neq \emptyset$ (si no, $U = \bar{U}$ sería abierto y cerrado en el conexo $\mathbb{R}^n$, C3-011.T2), y es compacto ($\partial U \subset \bar{U}$, cerrado). Así existen $\max_{\bar{U}} u$ y $\max_{\partial U} u$ (C3-014.C1), y $\max_{\partial U} u \leq \max_{\bar{U}} u$.
5. Sea $\varepsilon > 0$ y $v := u + \varepsilon|x|^2$, continua en $\bar{U}$ y C^2 en U con $\Delta v = 0 + 2n\varepsilon > 0$ (C3-018.T2, C3-015.T1). Sea x^* un punto de máximo de v en $\bar{U}$ (C3-014.C1).
6. Si $x^* \in U$, sería un máximo local de v en el abierto U y $\Delta v(x^*) \leq 0$ (C4-025.T0): imposible. Así $x^* \in \bar{U} \setminus U \subset \partial U$ (C3-008.T3).
7. Sea $L := \max_{\bar{U}} |x|^2$ (C3-014.C1). Para $x \in \bar{U}$: $u(x) \leq v(x) \leq v(x^*) = u(x^*) + \varepsilon|x^*|^2 \leq \max_{\partial U} u + \varepsilon L$.
8. Como vale para todo $\varepsilon > 0$, $u(x) \leq \max_{\partial U} u$ (C1-003.T9), y $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$. Para el mínimo, se aplica lo anterior a $-u$. ■

⚠ Acotado

En (b) hace falta que U sea acotado: $u(x) = x_1$ es armónica en el semiespacio $\{x_1 > 0\}$, vale 0 en su frontera y no está acotada. Y hace falta la continuidad en $\bar{U}$: sin ella, el máximo en ∂U ni siquiera tiene sentido.

Por qué cada hipótesis

⚠ Armónica

$u = |x|^2$ en $\mathbb{R}^3$ tiene $\Delta u = 6$; su promedio en $S_r(0)$ es $r^2 \neq 0 = u(0)$. El valor medio es una propiedad de las armónicas: un laplaciano positivo empuja los promedios hacia arriba.

⚠ La bola dentro del abierto

$u = 1/|x|$ es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, pero en $p = (2,0,0)$ la esfera $S_3(p)$ rodea al origen y el promedio de u en ella es $1/3 \neq 1/2$ (para $|p| < r$, el promedio de $1/|x|$ en $S_r(p)$ es $1/r$). La bola cerrada debe estar en U.

Ejercicios

1. Escribe el gradiente en esféricas: $\nabla u \circ E = v_\rho\, \hat{e}_1 + (v_\varphi/\rho)\hat{e}_2 + (v_\theta/(\rho \operatorname{sen}\varphi))\hat{e}_3$.
2. Encuentra todas las $u(x) = k(|x|)$ en $\{1 < |x| < 2\} \subset \mathbb{R}^3$ con $\Delta u = 0$, $u = 1$ en $|x| = 1$ y $u = 0$ en $|x| = 2$.
3. Calcula $\Delta(|x|^\alpha)$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y di para qué α es armónica.
4. Sea u armónica en $\mathbb{R}^3$ y acotada por arriba y por abajo. Usa el valor medio en bolas grandes para demostrar que $u(p) = u(q)$ para todos p, q (Liouville). *Sugerencia:* compara las bolas $\bar{B}(p,R)$ y $\bar{B}(q,R)$.
5. ¿Por qué el principio del máximo fuerte pide U conexo?

Respuestas

1. Paso 5 de C4-025.T1 con $h = (1, \rho, \rho \operatorname{sen}\varphi)$.
2. $u = a + b/r$ con $a + b = 1$ y $a + b/2 = 0$: $b = 2$, $a = -1$, $u = 2/|x| - 1$.
3. $k'' + 2k'/r = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + 2\alpha r^{\alpha-2} = \alpha(\alpha+1)r^{\alpha-2}$: armónica si $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$.
4. $|u(p) - u(q)| \leq \frac{1}{c}\int_{\bar{B}(p,R)\triangle\bar{B}(q,R)} |u|$, y la diferencia simétrica está en una corona de volumen $O(R^2|p-q|)$, mientras $c = 4\pi R^3/3$; con $|u| \leq M$, el cociente tiende a 0.
5. En dos componentes disjuntas, u puede ser constante en una (con el máximo) y no en la otra.

C4-026 · Principio del máximo para la ecuación del calor

Motivación

> **Una varilla con los extremos en hielo**
> Una varilla de longitud π empieza con la temperatura sen x (1 en el centro, 0 en los extremos) y sus extremos se meten en agua con hielo, a 0. La temperatura evoluciona según la ecuación del calor $\partial_t u = \partial_{xx} u$, y la solución es $u = e^{-t}\,\text{sen}\,x$: en $t = 1$ el centro ya está a $e^{-1} \approx 0.368$.
> ¿Puede la varilla calentarse en algún punto por encima de 1, la temperatura más alta que tuvo al principio o en los extremos? La intuición dice que no: el calor se reparte, no se concentra. El principio del máximo lo demuestra para cualquier región y cualquier dato inicial.
> Dónde falla la analogía: una varilla real pierde calor por los lados; aquí el calor solo se mueve a lo largo de ella.

Definiciones

Definición C4-026.D1 (subsolución de la ecuación del calor)

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y no vacío, $T > 0$, $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ (abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$) y

$$\Gamma_T := (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

(**frontera parabólica**). u es una **subsolución** si $u \in C^2(\Omega_T)$, u es continua en $\bar{\Omega} \times [0, T]$ y $\partial_t u - \Delta_x u \leq 0$ en Ω_T; **solución** si vale la igualdad.

La frontera parabólica es el fondo y los lados del cilindro $\bar{\Omega} \times [0, T]$, sin la tapa $t = T$: los datos que se conocen son la temperatura inicial y la de las paredes.

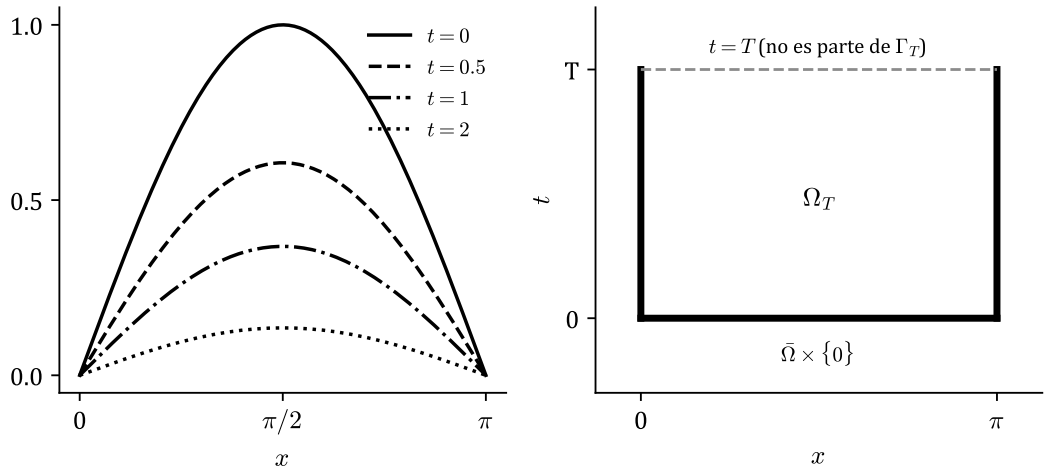


Figura 25: Izquierda: $u = e^{-t}\operatorname{sen} x$ en $t = 0, 0.5, 1, 2$. Derecha: la frontera parabólica (trazo grueso) del rectángulo $[0,\pi] \times [0,T]$; la tapa $t = T$ no forma parte de ella.

Resultados

Teorema C4-026.T1 (principio del máximo)

Para una subsolución, $\max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u = \max_{\Gamma_T} u$.

Idea de la demostración

$v := u - \varepsilon t$ cumple $\partial_t v - \Delta v < 0$. En un máximo interior de v (o en la tapa) sería $\Delta_x v \leq 0$ y $\partial_t v \geq 0$, y entonces $\partial_t v - \Delta v \geq 0$: imposible. Para no derivar en $t = T$ (no hay derivadas laterales) se trabaja hasta $T' < T$ y se pasa al límite.

Demostración. Sea u una subsolución y $K := \bar{\Omega} \times [0,T]$. Suponemos $\Omega \neq \emptyset$.

1. *Los máximos existen.* $\bar{\Omega}$ es cerrado y acotado (C3-008.T3), luego compacto (C3-010.T4), y K es compacto (C3-010.C1). Γ_T es cerrado (unión de dos productos de cerrados, C3-008.T3) y está en K, así que es compacto, y no es vacío. Como u es continua en K, existen $\max_K u$ y $M_0 := \max_{\Gamma_T} u$ (C3-014.C1), con $M_0 \leq \max_K u$.

2. Sean $\varepsilon > 0$ y $v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t$. En Ω_T, $\partial_t v = \partial_t u - \varepsilon$ y $\Delta_x v = \Delta_x u$, así que

$$\partial_t v - \Delta_x v = \partial_t u - \Delta_x u - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0.$$

3. Sea $0 < T' < T$ y $K' := \bar{\Omega} \times [0, T']$, compacto. v es continua en K' (C3-012.T2) y alcanza su máximo en algún $(x_0, t_0) \in K'$ (C3-014.C1).
4. Supongamos que $(x_0, t_0) \notin \Gamma_T$. Entonces $t_0 > 0$ y $x_0 \notin \partial\Omega$; como $x_0 \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ (C3-008.T3, Ω abierto), $x_0 \in \Omega$. Así $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ con $0 < t_0 \leq T' < T$.
5. *En x.* $w(x) := v(x, t_0)$ es C^2 en el abierto Ω y tiene un máximo (local) en x_0, porque $w(x) \leq v(x_0, t_0)$ para todo $x \in \Omega$. Por el máximo interior (C4-025.T0), $\Delta_x v(x_0, t_0) \leq 0$.
6. *En t.* La función $\tau(t) := v(x_0, t)$ es derivable en $(0, T)$, con $\tau'(t_0) = \partial_t v(x_0, t_0)$ (C3-015.T1). Si $t_0 < T'$, t_0 es un máximo de τ en el intervalo abierto $(0, T')$ y $\tau'(t_0) = 0$ (Fermat, C1-032.T1). Si $t_0 = T'$, para $0 < h < t_0$ se tiene $\tau(t_0 - h) \leq \tau(t_0)$, así que

$$\frac{\tau(t_0 - h) - \tau(t_0)}{-h} \geq 0;$$

   como $t_0 = T' < T$ es interior a $(0, T)$, la derivada $\tau'(t_0)$ existe y es el límite de esos cocientes cuando $h \to 0^+$ (C1-027.D1), que es ≥ 0 (C1-019.T3). En los dos casos $\partial_t v(x_0, t_0) \geq 0$.
7. Por los pasos 5 y 6, $\partial_t v - \Delta_x v \geq 0$ en (x_0, t_0), contra el paso 2. Así $(x_0, t_0) \in \Gamma_T$.
8. Para $(x,t) \in K'$: $u(x,t) - \varepsilon t = v(x,t) \leq v(x_0, t_0) \leq u(x_0, t_0) \leq M_0$ (porque $\varepsilon t_0 \geq 0$ y $(x_0, t_0) \in \Gamma_T$). Así $u(x,t) \leq M_0 + \varepsilon T$.
9. Como el paso 8 vale para todo $\varepsilon > 0$, $u \leq M_0$ en K' (C1-003.T9), y esto para todo $T' < T$: $u \leq M_0$ en $\bar{\Omega} \times [0, T)$.
10. *La tapa.* Si $x \in \bar{\Omega}$, $(x, T - 1/k) \to (x, T)$ y, por la continuidad de u en K (C3-012.T1), $u(x,T) = \lim u(x, T - 1/k) \leq M_0$ (C1-013.T3). Así $\max_K u \leq M_0$, y con el paso 1, $\max_K u = M_0$. ■

> ⚠ **Por qué no se deriva en $t = T$**
>
> La convención del curso es derivar solo en abiertos: $u \in C^2(\Omega_T)$ no dice nada de $\partial_t u$ en $t = T$. Por eso se trabaja en $[0, T']$ con $T' < T$, donde la tapa $t = T'$ está dentro de Ω_T y la derivada existe.

Corolario C4-026.C1 (unicidad y comparación)

Dos soluciones con los mismos valores en Γ_T coinciden; si $u_1 \leq u_2$ en Γ_T, $u_1 \leq u_2$ en $\bar{\Omega} \times [0, T]$.

Demostración.

1. Si u_1, u_2 son soluciones, $w := u_1 - u_2$ también lo es: es C^2 en Ω_T, continua en K y $\partial_t w - \Delta_x w = 0$ (linealidad de las derivadas, C3-015.T1). En particular w y $-w$ son subsoluciones (C4-026.D1).
2. *Comparación.* Si $u_1 \leq u_2$ en Γ_T, entonces $w \leq 0$ en Γ_T y, por C4-026.T1, $\max_K w = \max_{\Gamma_T} w \leq 0$: $u_1 \leq u_2$ en K.
3. *Unicidad.* Si $u_1 = u_2$ en Γ_T, el paso 2 aplicado a (u_1, u_2) y a (u_2, u_1) da $u_1 \leq u_2$ y $u_2 \leq u_1$ en K. ■

> **Ejemplo C4-026.E1**
> $u(x,t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$ en $(0,\pi) \times (0,T)$ es solución y su máximo, 1, está en $t = 0, x = \pi/2$.

Verificación. Aquí $n = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $\bar{\Omega} = [0,\pi]$ y $\partial\Omega = \{0,\pi\}$.

1. u es C^∞ (C2-012.T1, C2-014.T6). $\partial_t u = -e^{-t} \operatorname{sen} x$ y $\partial_{xx} u = -e^{-t} \operatorname{sen} x$ (C3-015.T1): $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$, es solución.
2. En Γ_T: $u(x,0) = \operatorname{sen} x \leq 1$ (C2-014.T5), con $u(\pi/2, 0) = 1$ (C2-014.C1); y $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Así $\max_{\Gamma_T} u = 1$, alcanzado en $(\pi/2, 0)$.
3. Por C4-026.T1, $\max_{[0,\pi]\times[0,T]} u = 1$. Además, para $t > 0$, $u(x,t) \leq e^{-t} < 1$: el máximo solo se alcanza en $(\pi/2, 0)$. ■

Por qué cada hipótesis

> **⚠ Las paredes cuentan**
>
> El teorema no dice que el máximo esté en $t = 0$: puede estar en una pared, incluso en $t = T$. $u = x^2 + 2t$ es solución ($\partial_t u = 2 = \partial_{xx} u$) y en $[0,1] \times [0,T]$ su máximo, $1 + 2T$, está en $(1,T)$: en la pared $x = 1$, que es parte de Γ_T. Lo que el teorema prohíbe es un máximo nuevo *dentro*.

> **⚠ Subsolución, no supersolución**
>
> Para $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ (una fuente de calor), el máximo puede estar fuera de Γ_T: en $(0,1) \times (0,T)$, $u = t(1 + x(1-x))$ tiene $\partial_t u - \partial_{xx} u = 1 + x(1-x) + 2t > 0$; en Γ_T vale 0 (si $t = 0$) o $t \leq T$ (en los lados), pero $u(1/2, T) = \frac{5}{4} T > T$. Con una fuente, lo más caliente puede estar en el centro.

Ejercicios

1. Demuestra que si u es solución con $u = 0$ en $\partial\Omega \times [0,T]$ y $|u(x,0)| \leq M$, entonces $|u| \leq M$ en todo el cilindro.
2. Sea u solución en $(0,\pi) \times (0,T)$ con $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y $u(x,0) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x$. Verifica que $u = e^{-t}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}e^{-9t}\operatorname{sen} 3x$ y acota su máximo.
3. ¿Dónde se usa que Ω es acotado?
4. Demuestra el principio del mínimo: para una supersolución ($\partial_t u - \Delta u \geq 0$), $\min_K u = \min_{\Gamma_T} u$.

Respuestas

1. Comparación (C4-026.C1) con las soluciones constantes $\pm M$.
2. Cada término es solución (como en C4-026.E1, con $\partial_{xx} \operatorname{sen} 3x = -9 \operatorname{sen} 3x$); el máximo es $\max_{[0,\pi]}(\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x)$, alcanzado en $t = 0$.
3. Para que $\bar{\Omega}$ sea compacto y existan los máximos (paso 1).
4. $-u$ es subsolución.

C4-027 · Función de Green y fórmula de Poisson

Motivación

> **Termómetros en la cáscara**
> Una esfera hueca de radio 1 está en estado estacionario y sin fuentes de calor dentro; conocemos la temperatura en toda su superficie. ¿Cuánto marca un termómetro en el punto $p = (0.5, 0, 0)$? El valor medio (C4-025.T2) responde solo en el centro: allí es el promedio de la superficie. Fuera del centro hace falta un promedio *ponderado*: los puntos de la superficie cercanos a p pesan más. La fórmula de Poisson da el peso exacto, $(R^2 - |p|^2)/(4\pi R|x-p|^3)$: para $p = (0.5, 0, 0)$, el punto más cercano de la esfera pesa $((1 + 0.5)/(1 - 0.5))^3 = 27$ veces más que el más lejano.
> Dónde falla la analogía: los termómetros miden en puntos, no en toda la superficie; y aquí la temperatura ya existe y es armónica: la fórmula la *representa*, no demuestra que exista para datos cualesquiera.

Parte 1 · Solución fundamental y fórmula de representación

Definición C4-027.D1 (solución fundamental)

$\Gamma(x) := -1/(4\pi|x|)$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $\Gamma_p(x) := \Gamma(x - p)$. Γ_p es armónica y

$$\nabla\Gamma_p(x) = \frac{x - p}{4\pi|x - p|^3}.$$

Verificación. $1/|x|$ es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (C3-027.E1), y también $-1/(4\pi|x|)$ (linealidad). Por la cadena con una variable (C3-016.T4 b) y $\nabla|x| = x/|x|$ (C3-016.E1), $\nabla(1/|x|) = -|x|^{-2}\, x/|x| = -x/|x|^3$, así que $\nabla\Gamma(x) = x/(4\pi|x|^3)$. Para $\Gamma_p = \Gamma \circ \tau$ con $\tau(x) = x - p$ ($D\tau = I$), la cadena (C3-023.T1) da $\nabla\Gamma_p(x) = \nabla\Gamma(x - p)$ y $\partial_i\partial_i\Gamma_p(x) = (\partial_i\partial_i\Gamma)(x - p)$, así que $\Delta\Gamma_p = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$.

Teorema C4-027.T1 (fórmula de representación)

Sean $\bar{B} := \bar{B}(c,R)$, $u \in C^2$ en un abierto que contiene a $\bar{B}$ y $p \in B(c,R)$. El límite

$$\int_{\bar{B}} \Gamma_p \Delta u := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\bar{B}\setminus B(p,\varepsilon)} \Gamma_p \Delta u$$

existe y

$$u(p) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla\Gamma_p - \Gamma_p \nabla u) + \int_{\bar{B}} \Gamma_p \Delta u,$$

con el flujo por la esfera $S_R(c)$ de C4-022.C1. Si u es armónica, $u(p) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla\Gamma_p - \Gamma_p\nabla u)$.

Idea de la demostración

La segunda identidad de Green no se puede usar con Γ_p, que explota en p. Se reemplaza Γ_p cerca de p por una extensión radial C^2 (C4-023.T1), se usa Green en la bola grande y en una bola chica alrededor de p, y se restan: queda la identidad en la bola sin un hueco, con un término en la esfera chica. Ese término tiende a $u(p)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Demostración. Sea O un abierto con $\bar{B} \subset O$ y $u \in C^2(O)$; sea $\delta := R - |p-c| > 0$.

1. *Geometría.* Si $0 < \varepsilon < \delta$ y $|x-p| \le \varepsilon$, entonces $|x-c| \le |x-p| + |p-c| < R$ (C3-001.T4): $\bar{B}(p,\varepsilon) \subset B(c,R)$. Y si $|x-c| = R$, entonces $|x-p| \ge R - |p-c| = \delta$.
2. *La extensión.* Fijemos $0 < \varepsilon < \delta$. Por C4-023.T1 con $g(r) := -1/(4\pi r)$ y $\varepsilon/2$, hay $H \in C^2(\mathbb{R}^3)$ con $H(y) = \Gamma(y)$ si $|y| \ge \varepsilon/2$. Sea $\tilde{\Gamma}(x) := H(x-p)$, de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ (C3-023.C1). En el abierto $\{|x-p| > \varepsilon/2\}$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma_p$, y por lo tanto también $\nabla\tilde{\Gamma} = \nabla\Gamma_p$ y $\Delta\tilde{\Gamma} = \Delta\Gamma_p = 0$ ahí (las derivadas en un punto solo dependen de la función cerca de él, C3-015.T1).
3. *Green dos veces.* Por la segunda identidad (C4-024.T1) con $f = u$ y $g = \tilde{\Gamma}$, en las bolas $\bar{B}$ y $\bar{B}(p,\varepsilon)$ (sólidos parametrizados cuyo flujo de frontera es el de la esfera, C4-022.C1):

$$\int_{\bar{B}} (u\Delta\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}\Delta u) = \Phi_R, \qquad \int_{\bar{B}(p,\varepsilon)} (u\Delta\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}\Delta u) = \Phi_\varepsilon,$$

   donde Φ_R y Φ_ε son los flujos de $u\nabla\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}\nabla u$ por $S_R(c)$ y por $S_\varepsilon(p)$. En las dos esferas $|x-p| \ge \varepsilon > \varepsilon/2$ (paso 1), así que en Φ_R y Φ_ε se puede escribir Γ_p en lugar de $\tilde{\Gamma}$ (el flujo solo usa los valores en la superficie, C4-019.D2).
4. *Restar.* $\bar{B}$ es la unión disjunta de $\bar{B}(p,\varepsilon)$ y $A_\varepsilon := \bar{B} \setminus \bar{B}(p,\varepsilon)$, ambos de Jordan (C4-005.E1, C4-

005.T3). En A_ε, $|x-p|>\varepsilon$, así que $\Delta\tilde{\Gamma}=0$ y $\tilde{\Gamma}=\Gamma_p$. Por la aditividad (C4-005.T4 c):

$$\Phi_R-\Phi_\varepsilon=\int_{A_\varepsilon}(-\Gamma_p\Delta u).$$

5. $\bar{B}\setminus B(p,\varepsilon)$ y A_ε difieren en la esfera $S_\varepsilon(p)$, de contenido cero (C4-003.T4), y $\Gamma_p\Delta u$ es continua y acotada en $\bar{B}\setminus B(p,\varepsilon)$ ($|\Gamma_p|\le 1/(4\pi\varepsilon)$). Por C4-005.T4 (c) y (d):

$$\int_{\bar{B}\setminus B(p,\varepsilon)}\Gamma_p\Delta u=\Phi_\varepsilon-\Phi_R. \qquad (*)$$

6. *La esfera chica.* Con $x=p+\varepsilon\omega$ y $N=\varepsilon^2\operatorname{sen}\varphi\,\omega$ (C4-018.E1): $\nabla\Gamma_p(x)=\varepsilon\omega/(4\pi\varepsilon^3)=\omega/(4\pi\varepsilon^2)$ y $\Gamma_p(x)=-1/(4\pi\varepsilon)$. Así

$$u(x)\nabla\Gamma_p(x)\cdot N=\tfrac{1}{4\pi}u(p+\varepsilon\omega)\operatorname{sen}\varphi,$$
$$-\Gamma_p(x)\nabla u(x)\cdot N=\tfrac{\varepsilon}{4\pi}\nabla u(p+\varepsilon\omega)\cdot\omega\operatorname{sen}\varphi,$$

y, con $K:=[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$ (C4-019.D2), $\Phi_\varepsilon=A(\varepsilon)+\varepsilon\,b(\varepsilon)$, donde

$$A(\varepsilon):=\frac{1}{4\pi}\int_K u(p+\varepsilon\omega)\operatorname{sen}\varphi,\qquad b(\varepsilon):=\frac{1}{4\pi}\int_K\nabla u(p+\varepsilon\omega)\cdot\omega\operatorname{sen}\varphi.$$

7. $A(\varepsilon)\to u(p)$. La función $(\varepsilon,(\varphi,\theta))\mapsto u(p+\varepsilon\omega)\operatorname{sen}\varphi$ es continua en $(-\delta,\delta)\times K$ (los puntos $p+\varepsilon\omega$ están en $B(c,R)$ por el paso 1). Por C4-012.T2, A es continua en $(-\delta,\delta)$, y $A(0)=u(p)\frac{1}{4\pi}\int_K\operatorname{sen}\varphi=u(p)$ ($\int_K\operatorname{sen}\varphi=4\pi$, C4-006.C1, C2-009.C1). Así $A(\varepsilon)\to u(p)$ cuando $\varepsilon\to 0^+$.
8. $\varepsilon\,b(\varepsilon)\to 0$. $|\nabla u|$ es continua en el compacto $\bar{B}$ y tiene un máximo M_1 (C3-014.C1). Por Cauchy–Schwarz, $|\nabla u\cdot\omega|\le M_1$, y como $\operatorname{sen}\varphi\ge 0$, $|b(\varepsilon)|\le\frac{M_1}{4\pi}\int_K\operatorname{sen}\varphi=M_1$ (C4-005.T4 b). Así $|\varepsilon\,b(\varepsilon)|\le M_1\varepsilon\to 0$: este es el término $O(\varepsilon)$.
9. *El límite existe.* Φ_R no depende de ε (solo usa Γ_p en la esfera grande). Por $(*)$ y los pasos 6-8,

$$\int_{\bar{B}\setminus B(p,\varepsilon)}\Gamma_p\Delta u=A(\varepsilon)+\varepsilon\,b(\varepsilon)-\Phi_R\longrightarrow u(p)-\Phi_R$$

cuando $\varepsilon\to 0^+$. El límite existe y vale $u(p)-\Phi_R$, es decir, $u(p)=\Phi_R+\int_{\bar{B}}\Gamma_p\Delta u$, con $\Phi_R=\Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla\Gamma_p-\Gamma_p\nabla u)$.
10. Si u es armónica, cada integral de $(*)$ es 0 y el límite es 0. ■

⚠ Dónde está la sutileza

La extensión $\tilde{\Gamma}$ depende de ε, pero no importa: en la identidad $(*)$ solo aparecen Γ_p en A_ε y en las dos esferas, donde no se modificó. Y el término de la esfera chica tiene dos partes de naturaleza

distinta: $u\nabla\Gamma_p \cdot N$ es de orden 1 (el ε^{-2} de $\nabla\Gamma_p$ se cancela con el ε^2 del área) y da $u(p)$; $\Gamma_p\nabla u \cdot N$ es de orden ε (ε^{-1} por ε^2).

Parte 2 · Función de Green y fórmula de Poisson

Definición C4-027.D2 (función de Green de una bola)

Para $p \in B(c,R)$, una **función de Green** es $G_p := \Gamma_p - k_p$ con $k_p \in C^2$ armónica en un abierto que contiene a $\bar{B}(c,R)$ y $G_p = 0$ en $S_R(c)$.

Teorema C4-027.T2 (representación con la función de Green)

Si existe G_p y $u \in C^2$ cerca de $\bar{B}(c,R)$ es armónica, $u(p) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla G_p)$.

Demostración.

1. u y k_p son C^2 y armónicas cerca de $\bar{B}$. Por la segunda identidad de Green (C4-024.T1) en la bola (C4-022.C1): $0 = \int_{\bar{B}}(u\Delta k_p - k_p\Delta u) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla k_p - k_p\nabla u)$.
2. Por C4-027.T1 con u armónica: $u(p) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla\Gamma_p - \Gamma_p\nabla u)$.
3. El flujo por la esfera es lineal en el campo (C4-019.D2, C4-005.T4 b). Restando el paso 1 del paso 2: $u(p) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla G_p - G_p\nabla u)$.
4. En la esfera $G_p = 0$, así que el integrando del segundo término es 0: $u(p) = \Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla G_p)$. ■

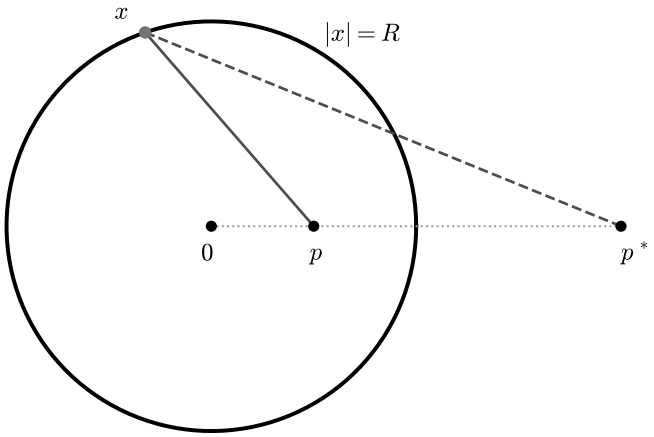


Figura 26: Reflexión de Kelvin: para p dentro de la esfera, $p^* = R^2 p/|p|^2$ está fuera, en la misma semirrecta; para todo x de la esfera, $|x - p^*| = (R/|p|)|x - p|$.

Ejemplo C4-027.E1 (reflexión de Kelvin; fórmula de Poisson)
Para $c = 0$ y $0 \neq p \in B(0, R)$, con $p^* := R^2 p/|p|^2$,

$$G_p(x) := \Gamma(x - p) - \frac{R}{|p|}\Gamma(x - p^*)$$

es una función de Green ($|x - p^*| = (R/|p|)|x - p|$ si $|x| = R$), y $G_0 := \Gamma + 1/(4\pi R)$. En la esfera,

$$\nabla G_p(x) \cdot \frac{x}{R} = \frac{R^2 - |p|^2}{4\pi R|x - p|^3},$$

de donde, para u armónica cerca de $\bar{B}(0, R)$,

$$u(p) = \frac{R^2 - |p|^2}{4\pi R} \iint_{S_R} \frac{u(x)}{|x - p|^3}\, dS.$$

Nota: no se enuncia que la fórmula de Poisson resuelva el problema de Dirichlet (existencia de la solución con datos continuos): su prueba no cabe en el curso. Aquí solo representa a las armónicas que ya existen.

Verificación. Sea $0 < |p| < R$.

1. *k_p es admisible.* $|p^*| = R^2/|p| > R$, así que $\bar{B}(0, R)$ está en el abierto $\mathbb{R}^3 \setminus \{p^*\}$ (C3-001.T4), donde $k_p(x) := (R/|p|)\Gamma(x - p^*)$ es C^2 y armónica (C4-027.D1).

2. *La distancia.* Si $|x| = R$, por C3-001.T2,

$$|x - p^*|^2 = |x|^2 - 2x \cdot p^* + |p^*|^2 = R^2 - \frac{2R^2}{|p|^2} x \cdot p + \frac{R^4}{|p|^2}$$
$$= \frac{R^2}{|p|^2}\big(|p|^2 - 2x \cdot p + R^2\big) = \frac{R^2}{|p|^2}|x - p|^2,$$

   y $|x - p^*| = (R/|p|)|x - p|$.
3. $G_p = 0$ *en la esfera.* $k_p(x) = -\frac{R}{|p|} \cdot \frac{1}{4\pi|x-p^*|} = -\frac{R}{|p|} \cdot \frac{|p|}{4\pi R|x-p|} = \Gamma(x - p)$.
4. G_0. $k_0 := -1/(4\pi R)$ es constante, luego armónica, y si $|x| = R$, $\Gamma(x) = -1/(4\pi R)$: $G_0 = 0$ en la esfera.
5. *El gradiente.* Sea $d := |x - p|$ con $|x| = R$. Por C4-027.D1 y el paso 2,

$$\nabla G_p(x) = \frac{x - p}{4\pi d^3} - \frac{R}{|p|} \cdot \frac{x - p^*}{4\pi(R/|p|)^3 d^3} = \frac{1}{4\pi d^3}\Big[(x - p) - \frac{|p|^2}{R^2}(x - p^*)\Big].$$

6. Con $x \cdot x = R^2$ y $x \cdot p^* = (R^2/|p|^2)\, x \cdot p$:

$$(x - p) \cdot x - \frac{|p|^2}{R^2}(x - p^*) \cdot x = (R^2 - p \cdot x) - (|p|^2 - p \cdot x) = R^2 - |p|^2,$$

   y dividiendo entre R se obtiene la fórmula del gradiente. Para $p = 0$, $\nabla G_0(x) \cdot x/R = (x \cdot x)/(4\pi R^3 \cdot R) = 1/(4\pi R^2)$, que es la fórmula con $p = 0$.
7. *Poisson.* Por C4-027.T2, con la parametrización de la esfera ($x = R\omega$, $N = R^2 \operatorname{sen}\varphi\, \omega = R \operatorname{sen}\varphi\, x$, $|N| = R^2 \operatorname{sen}\varphi$; C4-018.E1):

$$u(p) = \int_K u(x) \nabla G_p(x) \cdot N = \int_K u(x) \frac{R^2 - |p|^2}{4\pi R|x - p|^3} R^2 \operatorname{sen}\varphi = \frac{R^2 - |p|^2}{4\pi R} \iint_{S_R} \frac{u}{|x - p|^3}\, dS$$

   (C4-019.D1, C4-019.D2). ■

Con $u \equiv 1$ la fórmula dice que los pesos suman 1. En el centro ($p = 0$) es el valor medio de C4-025.T2. Para $R = 1$ y $|p| = 1/2$, el peso varía entre $(R^2 - |p|^2)/(4\pi R(R - |p|)^3)$ y $(R^2 - |p|^2)/(4\pi R(R + |p|)^3)$, una razón de 27.

Por qué cada hipótesis

⚠ p dentro de la bola

Si $|p-c|>R$, Γ_p es armónica y C^2 cerca de $\bar{B}$, y la segunda identidad de Green con u armónica da $\Phi_{\partial\bar{B}}(u\nabla\Gamma_p-\Gamma_p\nabla u)=0$, no $u(p)$. La esfera chica, que produce $u(p)$, solo aparece si p está dentro.

⚠ u de clase C^2 cerca de la bola cerrada

La fórmula de Poisson se demostró para armónicas que son C^2 en un abierto que contiene a la bola cerrada. Para una función solo continua en la esfera, que la fórmula defina una armónica con esos valores en el borde es el problema de Dirichlet, que este curso no demuestra.

Ejercicios

1. Comprueba la fórmula de Poisson con $u(x)=x_1$ y $p=(a,0,0)$ calculando la integral en el caso $R=1$, $a=0$.
2. Usa C4-027.T1 con $u(x)=|x|^2$ en $\bar{B}(0,1)$ y $p=0$: calcula los dos lados.
3. Demuestra que $G_p(x)<0$ para x en la bola abierta, $x\neq p$ (usa el principio del máximo en la bola sin un entorno de p).
4. ¿Por qué p^* y no otro punto? Demuestra que si q es un múltiplo positivo de p y $|x-q|/|x-p|$ es constante en la esfera, entonces $q=p$ o $q=p^*$.

Respuestas

1. Con $p=0$ la fórmula es el valor medio: $\frac{1}{4\pi}\int_K \omega_1 \operatorname{sen}\varphi = 0 = u(0)$.
2. $\Delta u=6$. $\int_{\bar{B}}\Gamma_0\cdot 6 = -\frac{6}{4\pi}\int\frac{1}{|x|} = -\frac{6}{4\pi}\cdot 2\pi = -3$ (en esféricas, $\int_0^1 \rho\,d\rho\cdot 4\pi = 2\pi$). El flujo: en $|x|=1$, $u=1$, $\nabla\Gamma_0\cdot N=\operatorname{sen}\varphi/(4\pi)$, $\Gamma_0=-1/(4\pi)$, $\nabla u\cdot N=2\operatorname{sen}\varphi$: $\Phi=1+2=3$. Suma: $0=u(0)$.
3. G_p es armónica en $\bar{B}\setminus B(p,\eta)$, vale 0 en la esfera y es muy negativa en $S_\eta(p)$; por el principio del máximo débil (C4-025.T3 b), $G_p\leq 0$, y por el fuerte, <0.
4. Si $q=tp$, $|x-q|^2=R^2-2t\,x\cdot p+t^2|p|^2$ y $|x-p|^2=R^2-2x\cdot p+|p|^2$; que el cociente λ^2 no dependa de $x\cdot p$ pide $t=\lambda^2$ y $R^2+t^2|p|^2=t(R^2+|p|^2)$, es decir, $t=1$ o $t=R^2/|p|^2$.

C4-028 · Convergencia uniforme

Motivación

> **Una impresora que corrige en pasadas**
> Una impresora 3D corrige la altura de una pieza en pasadas sucesivas; en la pasada k la altura en la posición $x \in [0, 1]$ es x^k. Cada pasada deja una superficie suave (continua), y en cada posición la altura se estabiliza: tiende a 0 si $x < 1$ y a 1 si $x = 1$. La pieza final tiene un escalón.
> ¿Cómo puede un límite de funciones continuas ser discontinuo? Porque la convergencia es lenta cerca de $x = 1$: en $x = 0.99$, la pasada 100 todavía está en 0.366, y para cada pasada hay posiciones que siguen lejos del límite. La convergencia **uniforme** pide que todas las posiciones estén cerca del límite a partir de la misma pasada. Con ella, el límite de continuas es continuo, y se puede integrar (y, con cuidado, derivar) término a término.
> Dónde falla la analogía: una impresora hace un número finito de pasadas; aquí lo que importa es el límite.

Definiciones

Definición C4-028.D1 (convergencia puntual y uniforme)

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f_k, f : A \to \mathbb{R}^m$. $f_k \to f$ **puntualmente** si $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in A$; **uniformemente** en A si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \; \forall k \geq K \; \forall x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La diferencia está en el orden de los cuantificadores: en la puntual, K puede depender de x; en la uniforme, un solo K sirve para todos los x. Uniforme implica puntual.

Ejemplo C4-028.E1
x^k converge puntualmente en $[0,1]$ a la función que vale 0 en $[0,1)$ y 1 en 1, no uniformemente; en $[0,a]$ con $a<1$ converge uniformemente a 0.

Verificación. Sea $f(x):=0$ si $0\le x<1$ y $f(1):=1$.

1. *Puntual.* Si $0\le x<1$, $x^k\to 0$ (C1-014.T3); en $x=1$, $1^k=1\to 1$ (C1-012.T2).
2. *No uniforme.* Sea $\varepsilon=1/2$ y K cualquiera. $x\mapsto x^K$ es continua en 1 con valor 1 (C1-022.T2), así que hay $x\in(0,1)$ con $x^K>1/2$, es decir, $|x^K-f(x)|>1/2$. Ningún K sirve.
3. *Uniforme en* $[0,a]$. Si $0\le x\le a<1$, $|x^k-0|\le a^k$ (C1-005.T1), y $a^k\to 0$ (C1-014.T3): dado ε, el K con $a^k<\varepsilon$ para $k\ge K$ (C1-012.D1) sirve para todos los x. ■

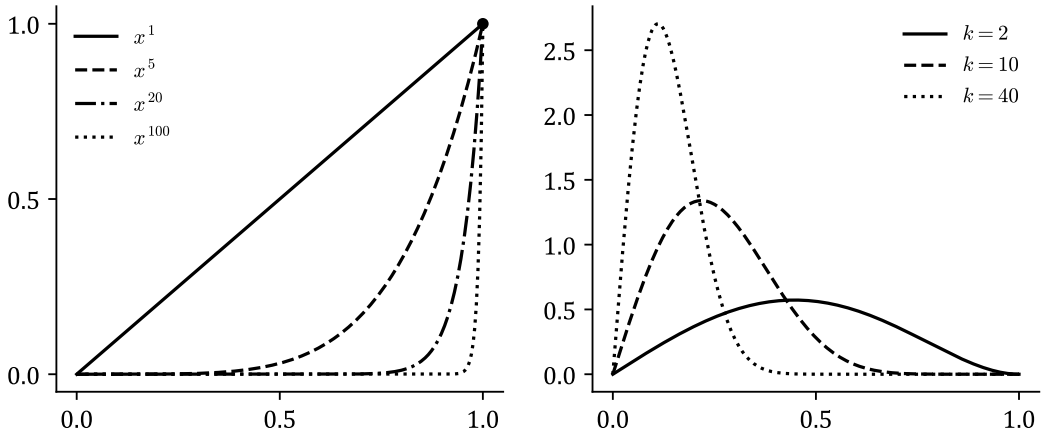


Figura 27: Izquierda: x^k para $k=1,5,20,100$; el límite tiene un salto en 1. Derecha: $kx(1-x^2)^k$ para $k=2,10,40$: tiende a 0 en cada punto, pero el área bajo la curva tiende a $1/2$.

Resultados

Teorema C4-028.T1 (criterio de Cauchy uniforme)

(f_k) converge uniformemente en $A \iff \forall\varepsilon>0\ \exists K\ \forall k,l\ge K\ \forall x\in A: |f_k(x)-f_l(x)|<\varepsilon$.

Demostración.

1. (⇒) Si $f_k \to f$ uniformemente y $\varepsilon > 0$, hay K con $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ para $k \geq K$ y todo x. Para $k, l \geq K$, por el triángulo (C3-001.T4), $|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < \varepsilon$.
2. (⇐) Para cada $x \in A$, la sucesión $(f_k(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^m$ (C3-009.D1), luego converge (C3-009.T2); sea $f(x)$ su límite.
3. Dado $\varepsilon > 0$, sea K el de la hipótesis con $\varepsilon/2$. Para $k \geq K$ y $x \in A$ fijos, $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon/2$ para todo $l \geq K$. Cuando $l \to \infty$, $f_k(x) - f_l(x) \to f_k(x) - f(x)$ y su norma también (C3-009.T1), así que $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ (C1-013.T3).
4. Como K no depende de x, $f_k \to f$ uniformemente. ■

Teorema C4-028.T2 (límite uniforme de continuas)

Si cada f_k es continua en $a \in A$ y $f_k \to f$ uniformemente, f es continua en a.

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, hay k con $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in A$ (C4-028.D1).
2. f_k es continua en a: hay $\delta > 0$ con $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon/3$ si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$ (C3-012.D2).
3. Para esos x, por el triángulo (C3-001.T4),

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| < \varepsilon. \blacksquare$$

El mismo k sirve en x y en a: eso es lo que da la uniformidad. Por eso x^k no converge uniformemente en $[0, 1]$: su límite no es continuo.

Teorema C4-028.T3 (integral del límite)

Sean C de Jordan, $f_k : C \to \mathbb{R}$ integrables y $f_k \to f$ uniformemente en C. Entonces f es integrable en C y $\int_C f_k \to \int_C f$.

Demostración. Sea R una caja con $C \subset R$, y $\tilde{g}$ la extensión por cero de cada $g : C \to \mathbb{R}$ (C4-005.D1).

1. *f es acotada.* Hay K con $|f_K - f| < 1$ en C; como f_K es acotada ($\tilde{f_K}$ es integrable, C4-005.D1), f también.
2. Sea $\varepsilon > 0$ y k con $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in C$. Entonces $\tilde{f_k} - \varepsilon \leq \tilde{f} \leq \tilde{f_k} + \varepsilon$ en todo R (fuera de C las tres extensiones valen 0).

3. Por la monotonía y la subaditividad de las integrales superior e inferior (C4-001.T5 a, c),

$$U(\tilde{f}) \le U(\tilde{f}_k + \varepsilon) \le U(\tilde{f}_k) + \varepsilon\, v(R), \qquad L(\tilde{f}) \ge L(\tilde{f}_k) - \varepsilon\, v(R).$$

4. Como $\tilde{f}_k$ es integrable, $U(\tilde{f}_k) = L(\tilde{f}_k)$, y $0 \le U(\tilde{f}) - L(\tilde{f}) \le 2\varepsilon\, v(R)$ (C4-001.T4). Como ε es arbitrario, $U(\tilde{f}) = L(\tilde{f})$ (C1-003.T9): f es integrable en C.
5. Para k como en el paso 2, por la linealidad y la cota de C4-005.T4 (b),

$$\left| \int_C f_k - \int_C f \right| \le \int_C |f_k - f| \le \varepsilon\, c(C).$$

Así $\int_C f_k \to \int_C f$. ■

Ejemplo C4-028.E2 (sin uniformidad)
$f_k(x) := kx(1-x^2)^k \to 0$ puntualmente en $[0,1]$, pero $\int_0^1 f_k = k/(2(k+1)) \to \frac{1}{2}$.

Verificación.

1. *Puntual.* $f_k(0) = f_k(1) = 0$. Si $0 < x < 1$, sea $q := 1 - x^2 \in (0,1)$. La serie $\sum kq^k$ converge por el criterio del cociente ($(k+1)q^{k+1}/(kq^k) = (1+1/k)q \to q < 1$; C2-025.T3, C1-013.T2), así que su término general tiende a 0 (C2-024.T2): $f_k(x) = x \cdot kq^k \to 0$.
2. *Integral.* Con el cambio $t = 1 - x^2$ (C2-015.T1, $dt = -2x\,dx$) y C2-009.E1:

$$\int_0^1 kx(1-x^2)^k\,dx = \frac{k}{2}\int_0^1 t^k\,dt = \frac{k}{2(k+1)} \to \frac{1}{2}$$

(C1-013.T2).
3. Si la convergencia fuera uniforme, C4-028.T3 daría $\int_0^1 f_k \to 0$. No lo es: el máximo de f_k, en $x = 1/\sqrt{2k+1}$, crece como $\sqrt{k}$. ■

Teorema C4-028.T4 (derivadas)

Sean J un intervalo abierto acotado, $f_k \in C^1(J)$, $f_k' \to g$ uniformemente en J y $(f_k(x_0))$ convergente para algún $x_0 \in J$. Entonces f_k converge uniformemente en J a una $f \in C^1(J)$ con $f' = g$.

Idea de la demostración
Por Barrow, $f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_k'$. Las integrales convergen uniformemente porque J es acotado, y el límite es una primitiva de g.

Demostración. Sean $L := \lim f_k(x_0)$ y \$$\ell$:= \$ la longitud de J.

1. Cada f_k' es continua en J, y por C4-028.T2, g también.
2. Para $x \in J$, $[x_0, x]$ (o $[x, x_0]$) está en J, y por Barrow (C2-009.C1, C2-004.D1), $f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_k'$. Sea $f(x) := L + \int_{x_0}^{x} g$.
3. Dado $\varepsilon > 0$, hay K con $|f_k(x_0) - L| < \varepsilon$ y $|f_k' - g| < \varepsilon$ en J para $k \geq K$. Por la linealidad y la cota de C2-004.C2,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x_0) - L| + \left| \int_{x_0}^{x} (f_k' - g) \right| < \varepsilon + \varepsilon|x - x_0| \leq \varepsilon(1 + \ell)$$

   para todo $x \in J$ y $k \geq K$: $f_k \to f$ uniformemente en J (C4-028.D1).
4. Como g es continua en el intervalo abierto J, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} g$ es derivable con derivada g (C2-008.C2). Así $f' = g$, continua: $f \in C^1(J)$. ■

Ejemplo C4-028.E3 (la hipótesis sobre f_k' hace falta)
$f_k(x) := \operatorname{sen}(kx)/\sqrt{k} \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}$, pero $f_k'(0) = \sqrt{k} \to \infty$.

Verificación.

1. $|f_k(x)| \leq 1/\sqrt{k}$ para todo x ($|\operatorname{sen}| \leq 1$, C2-014.T5). Dado $\varepsilon > 0$, si $k > 1/\varepsilon^2$ (C1-007.C1), $1/\sqrt{k} < \varepsilon$ (C2-014.T1): la convergencia a 0 es uniforme en $\mathbb{R}$.
2. Por la cadena (C1-030.T1, C2-014.T6), $f_k'(x) = \sqrt{k}\cos(kx)$, y $f_k'(0) = \sqrt{k}$ ($\cos 0 = 1$, C2-014.C1), que no está acotada.
3. El límite $f = 0$ tiene $f' = 0$, pero $f_k'(0)$ no tiende a 0: sin la convergencia uniforme de las derivadas, C4-028.T4 no se aplica. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ J acotado en C4-028.T4

En $J = \mathbb{R}$, $f_k(x) := x/k$ cumple $f_k' = 1/k \to 0$ uniformemente y $f_k(0) = 0$, pero $f_k \to 0$ solo puntualmente: $\sup_{\mathbb{R}} |x/k| = \infty$. La cota $\varepsilon|x - x_0| \leq \varepsilon\ell$ necesita la longitud finita.

⚠ Un punto donde f_k converge

$f_k := k$ (constantes) tiene $f_k' = 0 \to 0$ uniformemente y $(f_k(x_0))$ no converge en ningún punto. Las derivadas solo determinan las funciones salvo constantes.

Ejercicios

1. ¿Converge uniformemente $x/(1 + kx^2)$ en $\mathbb{R}$? (Busca su máximo.)
2. Demuestra que si $f_k \to f$ uniformemente en A y cada f_k es acotada, f es acotada.
3. Sea $f_k(x) := x^k(1 - x)$ en $[0, 1]$. Demuestra que converge uniformemente a 0.
4. Demuestra que $\sqrt{x^2 + 1/k} \to |x|$ uniformemente en $\mathbb{R}$, y que las derivadas no convergen uniformemente en $(-1, 1)$.
5. ¿Qué parte de C4-028.T3 falla si C no es de Jordan?

Respuestas

1. Sí: el máximo de $|x/(1 + kx^2)|$ es $1/(2\sqrt{k})$, en $x = 1/\sqrt{k}$; tiende a 0.
2. Hay K con $|f_K - f| < 1$; $|f| \leq \sup |f_K| + 1$.
3. Su máximo, en $x = k/(k + 1)$, es $\frac{1}{k+1}(k/(k + 1))^k \leq 1/(k + 1) \to 0$.
4. $0 \leq \sqrt{x^2 + 1/k} - |x| = \frac{1/k}{\sqrt{x^2+1/k}+|x|} \leq 1/\sqrt{k}$. Las derivadas $x/\sqrt{x^2 + 1/k}$ tienden a signo(x), discontinuo: no hay convergencia uniforme (C4-028.T2).
5. Nada en la prueba, pero la integral sobre C no está definida (C4-005.D1).

C4-029 · M de Weierstrass y series de potencias

Motivación

> **Una calculadora que suma términos**
> Una calculadora calcula arctan(1/2) sumando $\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} - \cdots$. Con cinco términos obtiene 0.4636843; el valor es 0.4636476. ¿Por qué esa serie da el arcotangente? En Cálculo II la obtuvimos con la suma geométrica finita; la idea natural, integrar término a término $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots$, quedó pendiente (C2-028.T5).
> Hoy la justificamos. El criterio M de Weierstrass compara una serie de funciones con una serie de números: si en todo un intervalo el término k está acotado por M_k y $\sum M_k$ converge, la convergencia es uniforme, y se puede integrar y derivar término a término. Además da una cota del error que sirve para todo el intervalo a la vez.
> Dónde falla la analogía: una calculadora real redondea en cada suma; aquí los términos son exactos.

Definiciones

Definición C4-029.D1 (series de funciones)
$\sum u_k$ converge uniformemente en A si la sucesión de sumas parciales lo hace.

Resultados

Teorema C4-029.T1 (criterio M de Weierstrass)

Si $|u_k(x)| \le M_k$ para todo $x \in A$ y $\sum M_k$ converge, $\sum u_k$ converge absoluta y uniformemente en A.

> **Idea de la demostración**
> Las colas de $\sum u_k(x)$ están acotadas por las de $\sum M_k$, que no dependen de x: las sumas parciales son de Cauchy uniformemente.

Demostración. Sea $s_N(x) := \sum_{k=1}^{N} u_k(x)$.

1. *Absoluta.* Para cada x, $0 \le |u_k(x)| \le M_k$, y por comparación (C2-025.T1) $\sum |u_k(x)|$ converge.
2. Dado $\varepsilon > 0$, por el criterio de Cauchy para $\sum M_k$ (C2-024.T4) hay N con $\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$ para $m > n \ge N$.
3. Para esos m, n y todo $x \in A$, por el triángulo (C2-001.T1 c),

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \Big| \le \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon.$$

4. Como N no depende de x, por el criterio de Cauchy uniforme (C4-028.T1) (s_N) converge uniformemente en A (C4-029.D1); su límite es la suma $\sum u_k(x)$, que existe también por C2-026.T2. ■

Del paso 3, con $m \to \infty$: $|\sum_k u_k(x) - s_n(x)| \le \sum_{k>n} M_k$ para todo x. Es la cota uniforme del error.

Corolario C4-029.C1 (continuidad, integración y derivación término a término)

Si las u_k son continuas y $\sum u_k$ converge uniformemente, la suma es continua y $\int_C \sum u_k = \sum \int_C u_k$ en todo compacto de Jordan $C \subset A$ (en un C no compacto una u_k continua puede no ser acotada); si $u_k \in C^1(J)$ (J abierto acotado), $\sum u_k'$ converge uniformemente en J y $\sum u_k(x_0)$ converge, entonces $(\sum u_k)' = \sum u_k'$.

Demostración. Sea $s_N := \sum_{k \le N} u_k$ y $s := \sum u_k$.

1. *Continuidad.* Cada s_N es continua (suma finita de continuas, C3-012.T2 y C1-005.T1), y $s_N \to s$ uniformemente; por C4-028.T2, s es continua.
2. *Integración.* Si $C \subset A$ es compacto de Jordan, cada u_k es continua en C, luego acotada (C3-014.C1) e integrable (C4-005.T4 a), y $\int_C s_N = \sum_{k\le N} \int_C u_k$ (linealidad, C4-005.T4 b, e inducción, C1-005.T1). Por C4-028.T3, $\int_C s_N \to \int_C s$: la serie $\sum \int_C u_k$ converge a $\int_C s$.
3. *Derivación.* $s_N \in C^1(J)$ con $s_N' = \sum_{k\le N} u_k'$ (C1-029.T1); por hipótesis $s_N' \to \sum u_k'$ uniformemente en J y $(s_N(x_0))$ converge. Por C4-028.T4, s_N converge uniformemente a una función C^1 cuya derivada es $\sum u_k'$; ese límite es s. ■

Teorema C4-029.T2 (convergencia uniforme de las series de potencias)

Si $\sum a_n(x-c)^n$ tiene radio $R > 0$ y $0 < r < R$, converge uniformemente en $[c-r, c+r]$.

Demostración.

1. El punto $x = c + r$ cumple $|x - c| = r < R$, así que $\sum a_n r^n$ converge absolutamente (C2-028.T2): $\sum |a_n| r^n$ converge.
2. Si $|x-c| \le r$, $|a_n(x-c)^n| \le |a_n| r^n =: M_n$ (C1-005.T1 para las potencias).
3. Por el criterio M (C4-029.T1), $\sum a_n(x-c)^n$ converge uniformemente en $[c-r, c+r]$. ■

⚠ **En $(c-R, c+R)$ no siempre**

$\sum x^n$ (radio 1) no converge uniformemente en $(-1, 1)$: cada suma parcial s_N es un polinomio, acotado en $(-1, 1)$, y un límite uniforme de funciones acotadas es acotado; pero la suma $1/(1-x)$ no lo es. La uniformidad es en cada $[c-r, c+r]$ con $r < R$.

Teorema C4-029.T3 (cierra C2-028.T5)

Si $R > 0$, $f(x) := \sum a_n(x-c)^n$ es continua y derivable en $(c-R, c+R)$, con

$$f'(x) = \sum n a_n (x-c)^{n-1} \qquad \text{y} \qquad \int_c^x f = \sum a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}.$$

Demostración. Sea $x \in (c-R, c+R)$ y r con $|x-c| < r < R$ (por ejemplo $r := (|x-c| + R)/2$, o $|x-c| + 1$ si $R = \infty$); $J := (c-r, c+r)$, abierto acotado, contiene a x.

1. *Continuidad.* Los términos $a_n(t-c)^n$ son polinomios, continuos (C1-028.T2). Por C4-029.T2 la serie converge uniformemente en $[c-r, c+r]$, y por C4-029.C1 f es continua ahí; como J es un abierto alrededor de x, f es continua en x.
2. *Derivada.* La serie derivada $\sum n a_n (t-c)^{n-1}$ tiene el mismo radio R (C2-028.T4), así que converge uniformemente en $[c-r, c+r] \supset J$ (C4-029.T2). Los términos son C^1 en J con derivadas $n a_n (t-c)^{n-1}$ (C1-028.T2, C1-029.T1), y la serie converge en $x_0 = c$. Por C4-029.C1, $f'(t) = \sum n a_n (t-c)^{n-1}$ en J, en particular en x.
3. *Integral.* El intervalo cerrado de extremos c y x es un compacto de Jordan dentro de $[c-r, c+r]$. Por C4-029.C1 (y la coherencia con Cálculo II, C4-001.C1), $\int_c^x f = \sum a_n \int_c^x (t-c)^n \, dt$, y por C2-009.E1 (con C2-004.D1 si $x < c$) $\int_c^x (t-c)^n \, dt = (x-c)^{n+1}/(n+1)$. ■

Es el enunciado de C2-028.T5, que Cálculo II dejó marcado para Cálculo IV.

Corolario C4-029.C2 (la serie es la de Taylor)

La suma f es C^∞ en $(c-R, c+R)$ y $a_n = f^{(n)}(c)/n!$; en particular los coeficientes de una serie de potencias están determinados por su suma.

Demostración.

1. Por C4-029.T3, f' es otra serie de potencias, $\sum_{n\geq 1} n a_n (x-c)^{n-1}$, con el mismo radio (C2-028.T4).
2. Por inducción en k (C1-005.T1): $f^{(k)}$ existe en $(c-R, c+R)$ y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-c)^{n-k},$$

   con radio R; el paso de k a $k+1$ es C4-029.T3 aplicado a esta serie (C1-031.D1).
3. Cada $f^{(k)}$ es continua (C4-029.T3, continuidad de la suma), así que $f \in C^\infty$.
4. En $x = c$ solo sobrevive el término $n = k$: $f^{(k)}(c) = k!\, a_k$ (C1-028.T2, con $(x-c)^0 = 1$).
5. Si dos series de potencias en c con radio positivo tienen la misma suma cerca de c, sus derivadas en c son iguales y, por el paso 4, sus coeficientes también. La serie es la de Taylor de f (C1-038.D1). ■

Ejemplo C4-029.E1 (log y arctan por integración)

Para $|x| < 1$, integrando la serie geométrica término a término,

$$\log(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad \text{y} \qquad \arctan x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

(otra prueba de C2-028.T7 en el abierto).

Verificación. Sea $|x| < 1$.

1. *Logaritmo.* Para $|t| < 1$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n\geq 0}(-t)^n$ (C2-028.E1 en $-t$), una serie de potencias de radio 1. Por C4-029.T3, $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.
2. $t \mapsto \log(1+t)$ es derivable en $(-1,\infty)$ con derivada $1/(1+t)$ (C2-011.T1, C1-030.T1), y $\log 1 = 0$ (C2-011.D1); por Barrow (C2-009.C1), $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x)$.
3. *Arcotangente.* $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}$ para $|t| < 1$ (C2-028.E1 en $-t^2$), con radio 1 (C2-028.C1). Por C4-029.T3, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
4. arctan es la inversa de tan en $(-\pi/2, \pi/2)$ (C2-014.D6), con $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$ (C2-014.T9); por la derivada de la inversa (C1-031.T1), $\arctan'(y) = 1/(1+\tan^2(\arctan y)) = 1/(1+y^2)$, y $\arctan 0 = 0$. Por Barrow, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$. ■

En la calculadora de la motivación, con $|x| \leq 1/2$, la cota uniforme del error después de N términos es $\sum_{n\geq N}(1/2)^{2n+1}/(2n+1)$: con $N = 5$, menos de 10^{-4} en todo $[-1/2, 1/2]$.

Ejemplo C4-029.E2
$\sum x^n/n^2$ converge uniformemente en $[-1,1]$ y $\sum \cos(nx)/n^2$ en $\mathbb{R}$ (criterio M): sus sumas son continuas.

Verificación. En $[-1,1]$, $|x^n/n^2| \leq 1/n^2$; en $\mathbb{R}$, $|\cos(nx)/n^2| \leq 1/n^2$ (C2-014.T5). $\sum 1/n^2$ converge (C2-025.C1, $p = 2$). Por el criterio M (C4-029.T1) las dos convergen uniformemente, y como los términos son continuos (C1-028.T2, C2-014.T5), por C4-029.C1 las sumas son continuas. ■

La primera es continua también en los extremos ± 1, que están en la frontera del intervalo de convergencia: C4-029.T2 no lo daba, el criterio M sí.

Por qué cada hipótesis

⚠ Convergencia uniforme de las derivadas

$\sum \operatorname{sen}(n^2x)/n^2$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ (criterio M con $1/n^2$), pero la serie derivada $\sum \cos(n^2x)$ no converge en $x = 0$ (su término general es 1). La derivación término a término pide la convergencia uniforme de $\sum u_k'$.

⚠ $\sum M_k$ convergente

En $[0, 1]$, $u_k(x) := x^k(1 - x)$ cumple $\sup |u_k| \leq 1/(k + 1)$, y $\sum 1/(k + 1)$ diverge; el criterio M no se aplica, aunque $\sum u_k = x$ en $[0, 1)$ y 0 en 1: no es continua, así que la convergencia no es uniforme.

Ejercicios

1. Demuestra que $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$ converge uniformemente en $[1, \infty)$ y no en $(0, \infty)$.
2. Usa C4-029.T3 para calcular $\sum_{n\geq 1} nx^n$ si $|x| < 1$.
3. Demuestra que $\sum x^n/n^2$ es derivable en $(-1, 1)$ y calcula la derivada como serie.
4. ¿Cuántos términos de la serie de $\log(1 + x)$ garantizan error $< 10^{-6}$ en $[-1/2, 1/2]$?
5. Demuestra que si $\sum a_n x^n = 0$ para todo $x \in (-r, r)$, todos los a_n son 0.

Respuestas

1. En $[1, \infty)$, $|e^{-nx}| \leq e^{-n}$, y $\sum e^{-n}$ es geométrica. En $(0, \infty)$, la suma $1/(e^x - 1)$ no está acotada y las sumas parciales sí.
2. Derivando la geométrica: $\sum nx^{n-1} = 1/(1 - x)^2$, así que $\sum nx^n = x/(1 - x)^2$.
3. C4-029.T3 con $a_n = 1/n^2$ (radio 1): $\sum x^{n-1}/n$.
4. El resto después de N términos es $\leq \sum_{n>N} (1/2)^n/n \leq (1/2)^N/(N + 1)$: basta $N = 16$.
5. C4-029.C2: $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$.

C4-030 · Una función continua sin derivada en ningún punto

Motivación

Regla y lupa

En Cálculo I, derivar era mirar una curva con una lupa cada vez más fuerte: si la curva es derivable en un punto, con suficiente aumento se ve como una recta, y la regla mide su pendiente. ¿Hay curvas continuas (sin saltos) que nunca se vean rectas, en ningún punto y con ningún aumento? Sí. Se construye apilando zigzags: la distancia al entero más cercano, $\varphi(x)$, es un zigzag de altura $1/2$; se le suma un zigzag la mitad de alto y el doble de rápido, $\varphi(2x)/2$, luego $\varphi(4x)/4$, y así. La suma, la función de Takagi, es continua por el criterio M, pero cada aumento de la lupa descubre un zigzag nuevo. La pendiente de las cuerdas sobre los intervalos diádicos que contienen a un punto salta de uno en uno y nunca se estabiliza.

Dónde falla la analogía: una lupa real tiene un aumento máximo; la no derivabilidad es una propiedad de todas las escalas a la vez.

Definiciones

Definición C4-030.D1 (función de Takagi)

$\varphi(x) := \operatorname{mın}(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$ (distancia al entero más cercano) y

$$\mathcal{T}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x).$$

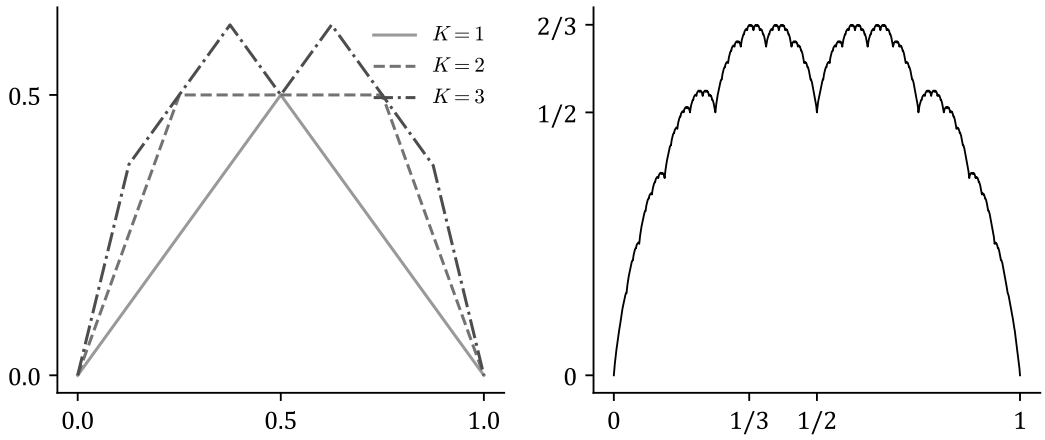


Figura 28: Izquierda: las sumas parciales $\sum_{k<K} 2^{-k}\varphi(2^k x)$ para $K = 1, 2, 3$. Derecha: la función de Takagi en $[0, 1]$; su máximo, $2/3$, se alcanza en $1/3$.

Resultados

Teorema C4-030.T1 (propiedades de φ)

φ es continua y 1-periódica, $0 \le \varphi \le \frac{1}{2}$, $\varphi(m) = 0$ para $m \in \mathbb{Z}$, y en cada intervalo $[m/2, (m+1)/2]$ ($m \in \mathbb{Z}$) es afín con pendiente 1 o -1.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $j := \lfloor x \rfloor$ (C1-007.T2), con $f := x - j \in [0, 1)$.

1. *Rango.* $\varphi(x) = \min(f, 1-f)$, con $f \ge 0$ y $1 - f > 0$, así que $\varphi(x) \ge 0$; como $f + (1-f) = 1$, el menor de los dos es $\le 1/2$: si los dos fueran $> 1/2$, sumarían más de 1 (C1-003.T9).
2. *Enteros.* Si $x = m \in \mathbb{Z}$, $\lfloor m \rfloor = m$ y $\varphi(m) = \min(0, 1) = 0$.
3. *Periodicidad.* $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ (C1-007.T4), así que $x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = x - \lfloor x \rfloor$ y $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.
4. *Pendientes.* Si $m = 2j$ y $x \in [j, j + \frac{1}{2}]$: $\lfloor x \rfloor = j$, $f = x - j \le \frac{1}{2} \le 1 - f$, y $\varphi(x) = x - j$, afín de pendiente 1. Si $m = 2j + 1$ y $x \in [j + \frac{1}{2}, j + 1]$: para $x < j + 1$, $\lfloor x \rfloor = j$ y $f \ge \frac{1}{2} \ge 1 - f$, así que $\varphi(x) = j + 1 - x$; para $x = j + 1$, $\varphi(x) = 0 = j + 1 - x$. En los dos casos, afín de pendiente -1. Todo $m \in \mathbb{Z}$ es par o impar (C1-005.T1).
5. *Continuidad.* En el interior de cada $[m/2, (m+1)/2]$, φ es afín, luego continua (C1-022.T2). En un punto $m/2$, φ coincide en $[m/2 - \frac{1}{2}, m/2]$ y en $[m/2, m/2 + \frac{1}{2}]$ con dos funciones afines que valen $\varphi(m/2)$ en $m/2$; dado $\varepsilon > 0$, el menor de los dos δ (y $\le 1/2$) sirve para los dos lados. ■

Teorema C4-030.T2

$\mathcal{T}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Demostración.

1. Cada $u_k(x) := 2^{-k}\varphi(2^k x)$ es continua (C4-030.T1 y C1-022.T3: composición con $x \mapsto 2^k x$).
2. $|u_k(x)| \le 2^{-k} \cdot \frac{1}{2}$ para todo x (C4-030.T1), y $\sum_k 2^{-k-1}$ converge (geométrica, C2-024.T3).
3. Por el criterio M (C4-029.T1), $\sum u_k$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, y por C4-029.C1 su suma $\mathcal{T}$ es continua. ■

Teorema C4-030.T3 (cuerdas que abrazan al punto)

Si f es derivable en x y $u_k \le x \le v_k$ con $u_k < v_k$ y $v_k - u_k \to 0$, entonces

$$\frac{f(v_k) - f(u_k)}{v_k - u_k} \to f'(x).$$

> **Idea de la demostración**
> La pendiente de la cuerda es un promedio ponderado de las pendientes de x a cada extremo, y las dos están cerca de $f'(x)$.

Demostración. Sea Q_k el cociente del enunciado.

1. Sea $\varepsilon > 0$. Por la derivabilidad (C1-027.D1, C1-017.D1), hay $\delta > 0$ con $|(f(x+h) - f(x))/h - f'(x)| < \varepsilon$ si $0 < |h| < \delta$. Hay K con $v_k - u_k < \delta$ para $k \ge K$ (C1-012.D1).
2. Fijo $k \ge K$. Si $u_k < x < v_k$, sean $\lambda := (v_k - x)/(v_k - u_k) \in (0,1)$, $A := (f(v_k) - f(x))/(v_k - x)$ y $B := (f(u_k) - f(x))/(u_k - x)$. Entonces

$$\lambda A + (1-\lambda)B = \frac{f(v_k) - f(x)}{v_k - u_k} + \frac{f(x) - f(u_k)}{v_k - u_k} = Q_k$$

   (álgebra de los axiomas K1-K9).
3. Como $0 < v_k - x < \delta$ y $0 < x - u_k < \delta$, $|A - f'(x)| < \varepsilon$ y $|B - f'(x)| < \varepsilon$ (paso 1 con $h = v_k - x$ y $h = u_k - x$). Por el triángulo (C1-004.T4),

$$|Q_k - f'(x)| = |\lambda(A - f'(x)) + (1-\lambda)(B - f'(x))| < \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon.$$

4. Si $x = u_k$, $Q_k = A$, y si $x = v_k$, $Q_k = B$: en los dos casos $|Q_k - f'(x)| < \varepsilon$ por el paso 1. Así $Q_k \to f'(x)$. ■

⚠ Las cuerdas deben abrazar al punto

Para $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ ($f(0) := 0$), derivable en 0 con $f'(0) = 0$, las cuerdas entre $u_k = 1/(2\pi k + \pi/2)$ y $v_k = 1/(2\pi k)$, que tienden a 0 pero no contienen al 0, tienen pendientes $-u_k^2/(v_k - u_k) \to -2/\pi \neq 0$. Que $u_k \leq x \leq v_k$ es esencial.

Teorema C4-030.T4 ($\mathcal{T}$ no es derivable en ningún punto)

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ no es derivable en x.

Idea de la demostración (Billingsley, 1982)
Se encierra x en el intervalo diádico $[u_n, v_n]$ de longitud 2^{-n}. Los zigzags de frecuencia $2^k \geq 2^n$ valen 0 en los dos extremos, y los de frecuencia menor son rectos en el intervalo. La pendiente de la cuerda es una suma de n números ± 1: al pasar de n a $n+1$ cambia exactamente en ± 1, y no puede converger.

Demostración. Fijemos x. Para $n \in \mathbb{N}$ sean $m_n := \lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ (C1-007.T2), $u_n := m_n/2^n$ y $v_n := u_n + 2^{-n}$.

1. *Encierran a x.* $m_n \leq 2^n x < m_n + 1$ da $u_n \leq x < v_n$, y $v_n - u_n = 2^{-n} \to 0$ (C1-014.T3).
2. *Están encajados.* $2m_n \leq 2^{n+1}x$ es un entero, así que $2m_n \leq m_{n+1}$ (C1-007.T4) y $u_n \leq u_{n+1}$. Y $m_{n+1} \leq 2^{n+1}x < 2m_n + 2$ con m_{n+1} entero da $m_{n+1} \leq 2m_n + 1$, de donde $v_{n+1} \leq v_n$.
3. *Frecuencias altas.* Si $k \geq n$, $2^k u_n = 2^{k-n} m_n$ y $2^k v_n = 2^{k-n}(m_n + 1)$ son enteros, y $\varphi(2^k u_n) = \varphi(2^k v_n) = 0$ (C4-030.T1).
4. *Frecuencias bajas.* Sea $k < n$ y $d := n - k \geq 1$. Por la división entera (C1-007.T2 con $m_n/2^{d-1}$), $m_n = q\,2^{d-1} + s$ con $q \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq s < 2^{d-1}$. Entonces

$$2^k u_n = \frac{m_n}{2^d} = \frac{q}{2} + \frac{s}{2^d} \geq \frac{q}{2}, \qquad 2^k v_n = \frac{q}{2} + \frac{s+1}{2^d} \leq \frac{q}{2} + \frac{2^{d-1}}{2^d} = \frac{q+1}{2},$$

así que $2^k[u_n, v_n] \subset [q/2, (q+1)/2]$, donde φ es afín con pendiente $\varepsilon_{k,n} \in \{1, -1\}$ (C4-030.T1). Por lo tanto

$$2^{-k}\big(\varphi(2^k v_n) - \varphi(2^k u_n)\big) = 2^{-k}\varepsilon_{k,n}\,2^k(v_n - u_n) = \varepsilon_{k,n} 2^{-n}.$$

5. *La pendiente de la cuerda.* Por la linealidad de las series convergentes (C2-024.T1) y los pasos 3-4,

$$s_n := \frac{\mathcal{T}(v_n) - \mathcal{T}(u_n)}{v_n - u_n} = 2^n \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k,n} 2^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k,n}.$$

6. *Las pendientes no dependen de n.* Para $k < n$, $2^k[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset 2^k[u_n, v_n]$ (paso 2) está en el mismo intervalo $[q/2, (q+1)/2]$, donde φ tiene una sola pendiente: $\varepsilon_{k,n+1} = \varepsilon_{k,n} =: \varepsilon_k$. Así $s_n = \sum_{k<n} \varepsilon_k$ y $s_{n+1} - s_n = \varepsilon_n \in \{1, -1\}$.
7. *No converge.* Si (s_n) convergiera, sería de Cauchy (C1-016.T1): con $\varepsilon = 1/2$ habría N con $|s_{n+1} - s_n| < 1/2$ para $n \geq N$ (C1-016.D1), contra el paso 6.
8. Si $\mathcal{T}$ fuera derivable en x (es continua, C4-030.T2, y está definida en todo $\mathbb{R}$), por C4-030.T3 con los $u_n \leq x \leq v_n$ del paso 1, $s_n \to \mathcal{T}'(x)$: contradicción con el paso 7. ■

> **Ejemplo:** $x = 1/3$
> $1/3 = 0.010101\ldots$ en base 2. Las pendientes ε_k alternan, $+1, -1, +1, \ldots$, y s_n alterna entre 1 y 0 (lo verifica `tools/checks/C4-030.py` con fracciones exactas). Además $\mathcal{T}(1/3) = 2/3$, el máximo de $\mathcal{T}$.

Por qué cada hipótesis

> ⚠ **Factores 2^{-k} y frecuencias 2^k**
>
> Con $\sum 2^{-k}\varphi(x)$ (sin acelerar la frecuencia) la suma es 2φ, derivable salvo en los múltiplos de $1/2$. Con $\sum 4^{-k}\varphi(2^k x)$, las pendientes de los términos son $\pm 2^{-k}$, la serie de derivadas converge uniformemente fuera de los puntos diádicos, y la cuerda tiene pendiente $\sum \pm 2^{-k}$, que sí converge. El equilibrio entre altura 2^{-k} y frecuencia 2^k es lo que hace que cada término aporte pendiente ± 1.

Ejercicios

1. Calcula $\mathcal{T}(1/2)$, $\mathcal{T}(1/4)$ y $\mathcal{T}(3/4)$.
2. Demuestra que $\mathcal{T}(x+1) = \mathcal{T}(x)$ y $\mathcal{T}(1-x) = \mathcal{T}(x)$.
3. Demuestra que $\mathcal{T}(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\mathcal{T}(2x)$.

4. Demuestra que $0 \leq \mathcal{T} \leq 1$ (en realidad $\leq 2/3$, pero eso es más difícil).
5. ¿Es $\mathcal{T}$ lipschitziana? (Mira la cuerda sobre $[u_n, v_n]$ con $x = 1/3$ y con $x = 0$.)

Respuestas

1. $\mathcal{T}(1/2) = 1/2$ (solo el término $k = 0$); $\mathcal{T}(1/4) = 1/4 + 1/4 = 1/2$; $\mathcal{T}(3/4) = 1/2$ por simetría.
2. Periodicidad de cada término; $\varphi(1 - y) = \varphi(y)$ y $2^k(1 - x) = 2^k - 2^k x$.
3. Separar el término $k = 0$ y reindexar (C2-024.T1).
4. $0 \leq \mathcal{T} \leq \sum 2^{-k-1} = 1$.
5. No: para $x = 0$, $u_n = 0$ y la cuerda sobre $[0, 2^{-n}]$ tiene pendiente $s_n = n$ (todas las $\varepsilon_k = +1$), que no está acotada.

C4-031 · Teorema de Dirichlet y convergencia uniforme

Motivación

Un sintetizador que suma tonos puros

Un sintetizador imita un sonido sumando tonos puros $a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$. Para la onda cuadrada (un sonido «de videojuego») hacen falta muchos tonos y, cerca de los saltos, la suma se pasa de la raya: es el fenómeno de Gibbs, que en Cálculo II solo se vio en una gráfica. Para la onda triangular $|x|$ bastan pocos: con dos tonos (y la constante) el error ya es menor que 0.16 en todas partes.

En Cálculo II calculamos coeficientes y vimos converger la serie de la onda cuadrada en $x = \pi/2$; el teorema de Dirichlet, que dice en qué puntos converge y a qué, quedó enunciado (C2-029.T5). Hoy lo demostramos. Después vemos por qué la onda triangular converge uniformemente, la igualdad de Parseval y, de paso, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \pi^2/6$.

Dónde falla la analogía: un sintetizador suma un número finito de tonos y el oído no distingue errores pequeños; aquí hablamos del límite.

Parte 1 · El teorema de Dirichlet

Teorema C4-031.T1 (núcleo de Dirichlet)

$D_N(t) := \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt)$ es par, 2π-periódica, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 1$, $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_N = \frac{1}{2}$, y para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$D_N(t) = \frac{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})t)}{2\operatorname{sen}(t/2)}.$$

Demostración.

1. cos es par y 2π-periódica (C2-014.T5), y también cada $\cos(nt)$: D_N es par y 2π-periódica.
2. Para $n \geq 1$, $\operatorname{sen}(nt)/n$ es primitiva de $\cos(nt)$ (C2-014.T6, C1-030.T1), y por Barrow (C2-009.C1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\,dt = (\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi))/n = 0$ (C2-014.C1). Con la linealidad (C2-004.T2) y $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} = \pi$ (C2-002.E1): $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 1$.
3. Como D_N es par, $\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 2\int_0^{\pi} D_N$ (C2-015.C1), y $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N = \frac{1}{2}$.
4. Por C2-029.T1 con $a = t/2$ y $b = nt$: $2\operatorname{sen}(t/2)\cos(nt) = \operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t) + \operatorname{sen}((\frac{1}{2}-n)t) = \operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t) - \operatorname{sen}((n-\frac{1}{2})t)$ (C2-014.T5, sen es impar).
5. Sumando de $n = 1$ a N, la suma es telescópica (C2-001.T1 a, C1-005.T12):

$$2\operatorname{sen}(t/2)D_N(t) = \operatorname{sen}(t/2) + \operatorname{sen}((N+\tfrac{1}{2})t) - \operatorname{sen}(t/2) = \operatorname{sen}((N+\tfrac{1}{2})t).$$

6. $\operatorname{sen}(t/2) \neq 0$ *si* $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Sea $y := t/2 \notin \pi\mathbb{Z}$ y $j := \lfloor y/\pi \rfloor$ (C1-007.T2), con $0 < y - j\pi < \pi$. Por $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ (C2-014.C1) aplicado $|j|$ veces (C1-005.T1), $|\operatorname{sen} y| = \operatorname{sen}(y - j\pi) > 0$ (C2-014.T4). Dividimos entre $2\operatorname{sen}(t/2)$. ■

Teorema C4-031.T2 (sumas parciales como integral)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$,

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t)\big]D_N(t)\,dt.$$

Demostración. Fijemos x.

1. Por la definición de los coeficientes (C2-029.D1) y la linealidad (C2-004.T2),

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\cos ny\cos nx + \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} nx)\Big]dy.$$

2. Por la fórmula de la suma (C2-014.T8) y la paridad (C2-014.T5), $\cos ny\cos nx + \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} nx = \cos(n(y-x))$, así que el corchete es $D_N(y-x)$.
3. El producto $f(y)D_N(y-x)$ es integrable (C2-004.T5; D_N es continua). Con el cambio lineal $y = x + t$ (C2-015.T2), $S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)D_N(t)\,dt$.
4. $t \mapsto f(x+t)D_N(t)$ es 2π-periódica e integrable en todo intervalo cerrado (C2-015.C1), y su integral sobre un intervalo de longitud 2π no depende del intervalo (C2-015.C1): es la primera fórmula.
5. Partimos en $[-\pi, 0]$ y $[0, \pi]$ (C2-004.T1). En $[-\pi, 0]$, con $t \mapsto -t$ (C2-015.T2, $r = -1$) y la paridad de D_N: $\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_N(t)\,dt = \int_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt$. Sumando, la segunda fórmula. ■

Teorema C4-031.T3 (teorema de Dirichlet; cierra C2-029.T5)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$. Si en x existen los límites laterales $f(x^+)$, $f(x^-)$ y los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{h},$$

entonces $S_N(x) \to (f(x^+) + f(x^-))/2$.

Idea de la demostración

Restando $\ell := (f(x^+) + f(x^-))/2$ escrito con el núcleo, la diferencia es una integral de $g(t)\,\mathrm{sen}((N+\frac{1}{2})t)$ con g integrable: la hipótesis sobre los cocientes compensa el $1/\,\mathrm{sen}(t/2)$ cerca de 0. Al abrir el seno, quedan coeficientes de Fourier de dos funciones integrables, que tienden a 0 por Riemann–Lebesgue.

Demostración. Sea $\ell := (f(x^+) + f(x^-))/2$.

1. Por C4-031.T1, $\ell = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x^+) + f(x^-)]D_N(t)\,dt$, y por C4-031.T2 y la linealidad,

$$S_N(x) - \ell = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)\big]D_N(t)\,dt.$$

2. Para $t \in (0, \pi]$ sean

$$g_+(t) := \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\,\mathrm{sen}(t/2)}, \qquad g_-(t) := \frac{f(x-t) - f(x^-)}{2\,\mathrm{sen}(t/2)},$$

y $g_\pm(0) := 0$. Para $t \in (0, \pi]$, $t/2 \in (0, \pi/2]$ y $\mathrm{sen}(t/2) > 0$ (C2-014.T4). Por la forma cerrada de C4-031.T1, el integrando del paso 1 es $[g_+(t) + g_-(t)]\,\mathrm{sen}((N+\frac{1}{2})t)$ salvo en $t = 0$, que no cambia la integral (C2-005.T2).

3. *g_+ es acotada cerca de 0.* Sea L_+ el primer límite de la hipótesis. Como $\mathrm{sen}'(0) = \cos 0 = 1$ (C2-014.T6, C2-014.C1), $\mathrm{sen}(s)/s \to 1$ cuando $s \to 0$ (C1-027.D1), así que $t/(2\,\mathrm{sen}(t/2)) \to 1$ cuando $t \to 0^+$. Por el producto de límites laterales (C1-020.D1),

$$g_+(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \cdot \frac{t}{2\,\mathrm{sen}(t/2)} \to L_+.$$

Hay $\eta \in (0, \pi)$ con $|g_+| \le |L_+| + 1$ en $(0, \eta]$.

4. *g_+ es acotada en $[0, \pi]$.* f es acotada (integrable en $[-\pi, \pi]$ y periódica); en $[\eta, \pi]$, $\mathrm{sen}(t/2) \ge$

$\operatorname{sen}(\eta/2) > 0$ (sen es creciente en $[0,\pi/2]$, C2-014.T6, C1-034.T2), así que $|g_+| \le (2\sup|f|)/(2\operatorname{sen}(\eta/2))$.

5. g_+ *es integrable en* $[0,\pi]$. Si $0 < c < d < \pi$, $t \mapsto f(x+t) - f(x^+)$ es integrable en $[c,d]$ (C2-015.C1, C2-015.T2) y $1/(2\operatorname{sen}(t/2))$ es continua ahí (C1-022.T2, C1-022.T3); su producto es integrable (C2-004.T5). Con el paso 4, C2-005.T1 da la integrabilidad en $[0,\pi]$. Igual para g_-.
6. Sea $h := g_+ + g_-$ en $[0,\pi]$ y $h := 0$ en $[-\pi,0)$, integrable en $[-\pi,\pi]$ (C2-004.T1). Por C2-014.T8, $\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})t) = \operatorname{sen}(Nt)\cos(t/2) + \cos(Nt)\operatorname{sen}(t/2)$, y

$$S_N(x) - \ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos(t/2)\operatorname{sen}(Nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\operatorname{sen}(t/2)\cos(Nt)\,dt.$$

7. Las funciones $H_1 := h\cos(\cdot/2)$ y $H_2 := h\operatorname{sen}(\cdot/2)$ son integrables en $[-\pi,\pi]$ (C2-004.T5), y los dos sumandos son el coeficiente b_N de H_1 y el a_N de H_2 (C2-029.D1). Por Riemann–Lebesgue (C2-029.C1), tienden a 0 cuando $N \to \infty$. Así $S_N(x) \to \ell$. ■

⚠ Qué pide la hipótesis

No pide que f sea continua ni derivable en x: basta que existan los límites laterales y los dos «cocientes laterales». En un salto, la serie converge al promedio de los dos lados.

Parte 2 · Convergencia uniforme y Parseval

Definición C4-031.D1 (periódica C^1 por tramos)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica y continua con una partición $-\pi = t_0 < \cdots < t_k = \pi$ tal que f en cada $[t_{i-1}, t_i]$ es la restricción de una función C^1 en un intervalo abierto que lo contiene; f' es la derivada de cada tramo (en los nodos se le da cualquier valor).

Teorema C4-031.T4 (convergencia uniforme)

Si f es como en C4-031.D1, $\sum(|a_n| + |b_n|)$ converge y $S_N \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

Idea de la demostración

Integrando por partes, los coeficientes de f' son nb_n y $-na_n$; Bessel para f' acota $\sum n^2(a_n^2 + b_n^2)$, y Cauchy–Schwarz convierte esa cota en la convergencia de $\sum(|a_n| + |b_n|)$. El criterio M da

> convergencia uniforme a algo continuo, y Dirichlet dice que ese algo es f.

Demostración. Sean f_i las funciones C^1 de C4-031.D1 ($f = f_i$ en $[t_{i-1}, t_i]$).

1. f' *es integrable.* En cada $[t_{i-1}, t_i]$, f' coincide con la continua f_i' salvo quizá en los extremos, así que es integrable ahí (C2-005.T2); por la aditividad (C2-004.T1), en $[-\pi, \pi]$.
2. *Por partes.* Para $n \geq 1$, con C2-016.T1 en cada tramo (f_i y $\cos(n\cdot)$ son C^1 en un intervalo abierto que lo contiene):

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(x)\cos(nx)\,dx = \big[f(x)\cos(nx)\big]_{t_{i-1}}^{t_i} + n\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

   (con C2-005.T2 para el valor de f' en los nodos, y $f_i = f$ en el tramo).
3. Sumando en i (C2-004.T1), los términos de frontera son telescópicos (C2-001.T1 a) y dan $f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi) = 0$, porque $f(\pi) = f(-\pi)$ (periódica) y cos es par (C2-014.T5). Así $\alpha_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'\cos(nx) = nb_n$. Igual, $\beta_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'\operatorname{sen}(nx) = -na_n$ (los términos de frontera son $f(\pm\pi)\operatorname{sen}(\pm n\pi) = 0$).
4. *Bessel para* f' (C2-029.T4): para todo N, $\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f')^2 =: B$, es decir, $\sum_{n=1}^{N} n^2(a_n^2+b_n^2) \leq B$.
5. *Cauchy–Schwarz* en $\mathbb{R}^{2N}$ (C3-001.T3) con los vectores $(n|a_n|, n|b_n|)_n$ y $(1/n, 1/n)_n$:

$$\sum_{n=1}^{N}(|a_n|+|b_n|) \leq \Big(\sum_{n=1}^{N} n^2(a_n^2+b_n^2)\Big)^{1/2}\Big(2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} \leq \sqrt{B}\,\Big(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2},$$

   finito porque $\sum 1/n^2$ converge (C2-025.C1). Las sumas parciales de $\sum(|a_n|+|b_n|)$ están acotadas, y la serie converge (C2-024.T6).
6. *Criterio M.* $|a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx| \leq |a_n|+|b_n|$ para todo x (C2-014.T5), así que la serie de Fourier converge uniformemente en $\mathbb{R}$ (C4-029.T1) a una función g, continua (C4-029.C1; los términos lo son).
7. *Dirichlet.* Sea $x \in \mathbb{R}$; por la periodicidad podemos suponer $x \in [-\pi, \pi)$. f es continua, así que $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$. Si $x \in [t_{i-1}, t_i)$, $f = f_i$ en $[x, t_i]$ y $(f(x+h)-f(x))/h \to f_i'(x)$; si $x \in (t_{i-1}, t_i]$, $(f(x-h)-f(x))/h \to -f_i'(x)$; si $x = t_0 = -\pi$, a la izquierda se usa $f(x-h) = f(\pi-h)$ y el tramo f_k (C1-027.D1). Por C4-031.T3, $S_N(x) \to f(x)$.
8. Por la unicidad del límite (C1-012.D1), $g(x) = f(x)$ para todo x, y $S_N \to f$ uniformemente. ■

Corolario C4-031.C1 (Parseval)

Si f es como en C4-031.D1,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Demostración.

1. Por la definición de los coeficientes (C2-029.D1) y la linealidad (C2-004.T2),

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f S_N = \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int f + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\frac{1}{\pi}\int f\cos nx + b_n\frac{1}{\pi}\int f \operatorname{sen} nx\right) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2).$$

2. f es continua en $[-\pi,\pi]$, luego acotada por un M (C3-014.C1), y $|fS_N - f^2| \le M|S_N - f|$: por C4-031.T4, $fS_N \to f^2$ uniformemente en $[-\pi,\pi]$.
3. Por la integral del límite (C4-028.T3, con C4-001.C1), $\frac{1}{\pi}\int fS_N \to \frac{1}{\pi}\int f^2$. Por el paso 1, las sumas parciales de la serie convergen a ese número (C2-024.D1). ■

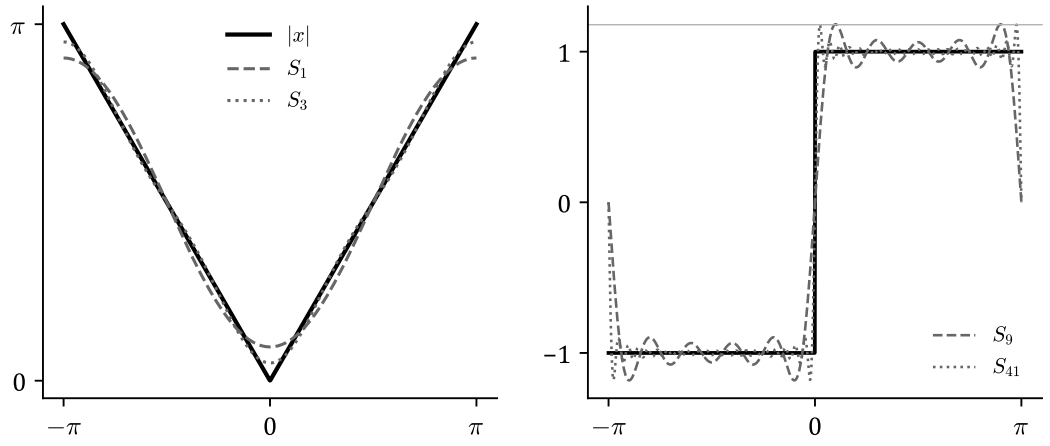


Figura 29: Izquierda: $|x|$ y sus sumas S_1, S_3: la convergencia es uniforme. Derecha: la onda cuadrada con S_9 y S_{41}: la convergencia es puntual y, cerca de los saltos, el pico se acerca a 1.179 (Gibbs, solo imagen).

Ejemplo C4-031.E1 ($\sum 1/n^2 = \pi^2/6$)
Para $f(x) = |x|$ en $[-\pi,\pi]$ (extendida periódicamente): $a_0 = \pi$, $a_n = -4/(\pi n^2)$ si n es

impar, 0 si $n \geq 2$ es par, y $b_n = 0$. C4-031.T4 en $x = 0$ da $\sum_{n\text{ impar}} 1/n^2 = \pi^2/8$ y, con $s_{2N} = (\text{impares hasta } 2N) + \frac{1}{4}s_N$, $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$.

Verificación.

1. *Es de C4-031.D1.* $|x|$ es continua, $|-\pi| = |\pi|$, y con la partición $-\pi < 0 < \pi$ es $-x$ y x en los dos tramos (C^1 en $\mathbb{R}$). Su extensión periódica es continua.
2. *Coeficientes.* $|x|\operatorname{sen}(nx)$ es impar: $b_n = 0$ (C2-015.C1). $|x|\cos(nx)$ es par, así que $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx$. Para $n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$ (C2-009.E1). Para $n \geq 1$, por partes (C2-016.T1, C2-014.T6),

$$\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \Big[\frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \operatorname{sen}(nx)\,dx = 0 + \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

   (C2-009.C1, C2-014.C1). Así $a_n = -4/(\pi n^2)$ si n es impar y 0 si $n \geq 2$ es par.
3. *En $x = 0$.* Por C4-031.T4, $S_{2N}(0) \to f(0) = 0$, y $S_{2N}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}o_N$ con $o_N := \sum_{m=1}^N 1/(2m-1)^2$. Así $o_N \to \pi^2/8$ (C1-013.T2).
4. *Todas.* Sea $s_N := \sum_{n=1}^N 1/n^2$, convergente a S (C2-025.C1). Separando impares y pares (C1-005.T12), $s_{2N} = o_N + \sum_{m=1}^N \frac{1}{4m^2} = o_N + \frac{1}{4}s_N$. Cuando $N \to \infty$: $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$ (C1-013.T2, C2-024.T1), de donde $S = \pi^2/6$. ■

Parseval para $|x|$ da otra suma: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 = \frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n\text{ impar}}\frac{1}{n^4}$, así que $\sum_{n\text{ impar}} 1/n^4 = \pi^4/96$.

Ejemplo C4-031.E2 (onda cuadrada)
Para la onda de C2-029.E1, $S_N(x) \to f(x)$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ y $S_N(k\pi) \to 0$ (C4-031.T3); el fenómeno de Gibbs sigue siendo solo imagen.

Verificación. La onda vale -1 en $(-\pi, 0)$, 1 en $(0, \pi)$, 0 en 0 y $\pm\pi$, extendida con período 2π.

1. Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, f es constante en un intervalo abierto alrededor de x: $f(x^\pm) = f(x)$ y los dos cocientes de la hipótesis valen 0 para h pequeño. Por C4-031.T3, $S_N(x) \to f(x)$.
2. Si $x = k\pi$, f es constante a cada lado cerca de x, con valores 1 y -1 (en algún orden): los límites laterales existen, su promedio es 0, y los cocientes $(f(x \pm h) - f(x^\pm))/h$ valen 0 para h pequeño. Por C4-031.T3, $S_N(k\pi) \to 0$ (de hecho $S_N(k\pi) = \sum b_n \operatorname{sen}(nk\pi) = 0$ para todo N). ■

La onda cuadrada no es continua, así que C4-031.T4 no se aplica: la convergencia no es uniforme (si lo fuera, el límite sería continuo, C4-028.T2).

Por qué cada hipótesis

⚠ La continuidad en C4-031.T4

La onda cuadrada es C^1 por tramos pero no continua: $\sum(|a_n| + |b_n|) = \sum_{n \text{ impar}} 4/(n\pi)$ diverge, y la convergencia no es uniforme. En la prueba, la continuidad (y la periodicidad) cancelan los términos de frontera de la integración por partes.

⚠ Los cocientes laterales en C4-031.T3

La hipótesis no se puede quitar del todo: hay funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en un punto (du Bois-Reymond, 1873). No las construimos aquí; la hipótesis de Dirichlet es una condición suficiente sencilla.

Ejercicios

1. Calcula la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$ y deduce de nuevo $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ (en $x = \pi$).
2. Con Parseval para la onda cuadrada (que vale aunque no sea continua, por otro argumento), ¿qué suma se obtiene? Compruébala con $\sum_{n \text{ impar}} 1/n^2 = \pi^2/8$.
3. Demuestra que si f es como en C4-031.D1, $|f(x) - S_N(x)| \le \sum_{n>N}(|a_n| + |b_n|)$ para todo x.
4. ¿A qué converge la serie de Fourier del diente de sierra $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$, $f(\pi) := 0$, en $x = \pi$?

Respuestas

1. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$; en $x = \pi$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum \frac{1}{n^2}$.
2. $\frac{1}{\pi}\int f^2 = 2 = \sum_{n \text{ impar}} \frac{16}{\pi^2 n^2}$, es decir, $\sum_{n \text{ impar}} 1/n^2 = \pi^2/8$.
3. $f - S_N = \sum_{n>N}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ por C4-031.T4, y el triángulo.
4. A $(f(\pi^-) + f(\pi^+))/2 = (\pi - \pi)/2 = 0$ (C4-031.T3).

C4-032 · Cierre de Cálculo IV

Motivación

> **La última estación**
> En este curso hubo cajas que se partían en rejillas, mapas que se deformaban con un cambio de variables, alambres, fuerzas a lo largo de caminos, superficies que se inflaban, una masa de pan que se esponjaba, una boya, un melón en el refrigerador, una varilla en hielo, una impresora que corregía en pasadas, una lupa que nunca veía una recta y un sintetizador. Detrás de todo hubo una lista de 216 piezas, cada una demostrada con las anteriores.
> Con Cálculo I, II y III, la serie de Cálculo suma 819 piezas. Solo cinco de ellas se citaron de otra materia (Álgebra Lineal I), y Cálculo IV no agregó ninguna: usó dos de las cinco.
> Este capítulo es el mapa de Cálculo IV, la lista de lo que cerró de los cursos anteriores y el patrón que comparten Green, Stokes y Gauss.
> Dónde falla la analogía: en un mapa de metro se puede ir y volver; aquí las vías tienen un solo sentido (una pieza solo usa piezas anteriores), y eso evita los círculos viciosos.

Los cuatro cursos en números

Curso	Piezas	Notas
Cálculo I	167	axiomas de los reales, límites, continuidad, derivada
Cálculo II	231	integral, funciones elementales, series
Cálculo III	205	200 con id C3 y 5 del bloque AL (AL.1, AL.3-AL.6)
Cálculo IV	216	40 definiciones, 98 teoremas, 33 corolarios, 45 ejemplos; ninguna AL nueva

Curso	Piezas	Notas
Total	**819**	5 citadas de Álgebra Lineal I; el resto, demostradas

(Las cifras las cuenta `tools/checks/C4-032.py` sobre los cuatro archivos TEOREMAS.)

Lo que se demostró en Cálculo IV

1. **Integrales múltiples (C4-001 a C4-012).** Darboux en cajas y el criterio de Riemann; rejillas finas (C4-002.T2); medida cero y contenido cero; el criterio de Lebesgue (C4-004.T2); conjuntos de Jordan; Fubini en la forma de Spivak (C4-006.T1); regiones elementales, Cavalieri y el valor medio; Gauss–Jordan y $c(T(A)) = |\det T|\, c(A)$ (C4-008.T7); imágenes por funciones C^1; el cambio de variables por la ruta de Lang (C4-010.T3) y con un conjunto excepcional (C4-011.T1); polares, cilíndricas y esféricas; impropias y la integral de Gauss; la regla de Leibniz (C4-012.T3).
2. **Integral de línea (C4-013 a C4-017).** Caminos, longitud y trabajo; el teorema fundamental para integrales de línea y el lema de Poincaré (C4-015.T4); el teorema de Green para parches (C4-016.T4); el índice de una curva, que es entero (C4-017.C1).
3. **Integral de superficie (C4-018, C4-019).** Superficies parametrizadas, área e invariancia por reparametrización; flujo y orientación; la banda de Möbius no es orientable (C4-019.E1).
4. **Teoremas integrales (C4-020 a C4-027).** Divergencia en el plano; Stokes (C4-021.T1); Piola y Gauss (C4-022.T2, C4-022.T4); Arquímedes y la ley de Gauss; identidades de Green y unicidad; el laplaciano en coordenadas ortogonales; el valor medio y el principio del máximo para armónicas (C4-025.T2, C4-025.T3) y para el calor (C4-026.T1); la fórmula de representación y la de Poisson (C4-027.T1, C4-027.E1).
5. **Convergencia uniforme (C4-028 a C4-030).** Límites uniformes, el criterio M (C4-029.T1), las series de potencias se derivan e integran término a término (C4-029.T3); una función continua sin derivada en ningún punto (C4-030.T4).
6. **Series de Fourier (C4-031).** Teorema de Dirichlet (C4-031.T3), convergencia uniforme (C4-031.T4), Parseval y $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$.

La ruta principal

Cada flecha es un «usa:» de TEOREMAS-C4.

1. Rejillas finas (C4-002.T2) → criterio de Lebesgue (C4-004.T2) → conjuntos de Jordan e integral sobre ellos (C4-005).
2. Lebesgue y Jordan → Fubini (C4-006.T1) → regiones elementales (C4-007.T1).
3. Gauss–Jordan (C4-008.T2) y el determinante de las elementales (C4-008.T3) → contenido y determinante (C4-008.T7).
4. Función inversa (C3-025) y C4-008.T7 → imágenes de cubos (C4-009.T5) → cambio de variables (C4-010.T3) → con conjunto excepcional (C4-011.T1).
5. C4-011.T1 + Fubini + Barrow → Green (C4-016.T4), Stokes (C4-021.T1) y Gauss (C4-022.T4).
6. Gauss → identidades de Green (C4-024.T1) → unicidad, valor medio, principio del máximo y representación.
7. Criterio de Cauchy uniforme (C4-028.T1) → criterio M (C4-029.T1) → término a término (C4-029.T3), Takagi (C4-030.T2) y la convergencia uniforme de Fourier (C4-031.T4).

El patrón de Green, Stokes y Gauss

Los tres teoremas integrales se demostraron con la misma idea, en tres pasos:

1. **Jalar** el campo al rectángulo Q o a la caja B: el campo jalado $\sigma^* F$ (C4-016.D1) en Green y Stokes, el campo de Piola G (C4-022.T2) en Gauss. Las segundas derivadas se cancelan por Schwarz.
2. **Integrar** en el rectángulo o en la caja con el teorema fundamental en cada variable: Fubini y Barrow (C4-016.T1, C4-022.T3).
3. **Regresar** con el cambio de variables con conjunto excepcional (C4-011.T1): la frontera de Q o de B tiene contenido cero.

En los tres, «la frontera orientada» se **definió** como la imagen de la frontera del rectángulo o de las caras de la caja, y en cada ejemplo se comprobó qué lados se cancelan o degeneran (el disco, la corona, la semiesfera, la esfera, la bola). Fue la decisión de rigor del curso (TEMARIO, decisión 13): no se enunció un teorema para «regiones con frontera regular» en general.

> **Un puente informal**
> Las tres fórmulas tienen la misma forma: la integral de una «derivada» sobre una región es la integral del campo sobre su frontera. En Análisis Matemático y en Geometría Diferencial, con las *formas diferenciales*, las tres son casos de un solo teorema de Stokes en variedades. Este curso

> no lo enuncia: su prueba pide álgebra multilineal y cadenas, y aquí no se enuncia lo que no se demuestra.

Lo que Cálculo IV cerró

Pendiente	Qué decía	Dónde se cierra
C2-005.T6 ⚠ C4	criterio de Lebesgue (enunciado)	C4-004.T2 y C4-004.C1
C2-019.D1 ⚠ def	área entre gráficas como definición	C4-007.C1
C2-019.D2 ⚠ def	área en polares como definición	C4-011.C1
C2-021.D1 ⚠ def	volumen por secciones (Cavalieri)	C4-007.T2 y C4-007.E2
C2-021.D2 ⚠ def	área de superficie de revolución	C4-018.C2
C2-022.D1 ⚠ def	trabajo de una fuerza en la recta	C4-014.C1
C2-022.D3	centroide de una región (coherencia)	C4-007.E3
C2-028.T5 ⚠ C4	derivación e integración término a término	C4-029.T3 (y C4-029.C2)
C2-029.T5 ⚠ C4	teorema de Dirichlet	C4-031.T3
C3-027 (lectura)	significado físico de div y rot	C4-020.T2, C4-021.T2, C4-022.T5

Cálculo IV no deja piezas ⚠ propias: lo que no se demuestra no se enuncia. Quedaron fuera la existencia de solución del problema de Dirichlet, la transformada de Fourier, las formas diferenciales y los métodos numéricos en varias variables (TEMARIO, decisión 10).

Lo que se citó de otra materia

Pieza	Qué es	Dónde se usó en Cálculo IV
AL.1	álgebra de matrices	Gauss–Jordan (C4-008), norma por renglones (C4-009), campo jalado (C4-016.T2), traza (C4-022.T1), coordenadas ortogonales (C4-025.T1)
AL.4	determinante: multilineal, alternante, **único**; $\det(AB)$; polinomio; 3×3; invertible $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$	determinante de las elementales y contenido (C4-008), cambio de variables (C4-009, C4-010), rotacional jalado (C4-016.T3), producto cruz de combinaciones (C4-018.T2), traza (C4-022.T1), $\det Dg = H$ (C4-025.T1)
EN	elección numerable (axioma de Cálculo I)	continuidad de integrales con parámetro (C4-012.T2, a través de C3-009.T0)

La unicidad del determinante, que en Cálculo III solo se *leía*, en Cálculo IV trabajó: dio la identidad de la traza y, por ella, Gauss y el laplaciano en coordenadas ortogonales. La multiplicatividad dio $|\det A| = \prod |\det E_i|$ en el caso lineal del cambio de variables. AL.3, AL.5 y AL.6 no se usaron en Cálculo IV.

Despedida

Con Cálculo IV termina la serie de Cálculo: de los axiomas de los números reales a los teoremas de Green, Stokes y Gauss, las funciones armónicas y las series de Fourier, todo demostrado paso a paso. Lo que sigue, en Análisis Matemático y en Ecuaciones Diferenciales Parciales, se apoya en estas 819 piezas.

Ejercicios

1. Sigue en TEOREMAS-C4 los «usa:» de C4-022.T4 hasta llegar a una pieza de Cálculo III. ¿Cuáles aparecen primero?

2. ¿En qué paso de la prueba de Green se usa que σ es inyectiva en int Q? ¿Y en Stokes?
3. Explica por qué la unión numerable de conjuntos de medida cero no se enunció en general.
4. Da tres lugares donde se usó la regla de Leibniz (C4-012.T3).
5. ¿Qué pieza de Cálculo II cierra la fórmula de Poisson? (Pregunta con trampa.)

Respuestas

1. Por ejemplo, C3-012.T4 (preimágenes de abiertos) y, a través de C4-022.T2, la regla de la cadena (C3-023.T1) y Schwarz (C3-018.T1).
2. En Green, solo en el último paso: el cambio de variables con conjunto excepcional (C4-016.T4). Stokes no la pide (C4-021.T1).
3. Pediría elegir una sucesión de cajas para cada conjunto, más de lo que da EN; donde hizo falta (Lebesgue) las cubiertas se construyeron con rejillas y el buen orden (TEMARIO, decisión 11).
4. Lema de Poincaré (C4-015.T4), valor medio (C4-025.T2), conservación de la masa (C4-020.E1, C4-023.E3) y Gauss con Leibniz (C4-012.E3).
5. Ninguna: la fórmula de Poisson no cerró un pendiente. Representa armónicas; la existencia para Dirichlet no se enuncia.