Geometría analítica I

Todas las demostraciones, explicadas paso a paso

Geometría Analítica I · según el programa de la Facultad de Ciencias, UNAM

Guillermo Izquierdo

con revisión de Claude Opus 5.5 (Anthropic)

PyPro · pypro.mx · 2026

Prólogo

Este libro abre la serie de geometría con el mismo objetivo que la de cálculo: **demostrar todo**. Cada teorema de la geometría analítica que aparece aquí se demuestra completo, paso a paso, sin «es fácil ver», sin «se deja al lector» y sin usar nada que no se haya demostrado antes. En particular, ningún hecho geométrico se toma «porque se ve en el dibujo»: ángulo, perpendicularidad, congruencia, tangente y área se **definen**, y lo que se afirma de ellos se prueba.

El recorrido sigue el programa de **Geometría Analítica I** (clave 0244) de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en sus temas y en su orden: la introducción (el método analítico, el producto punto, la norma y la desigualdad de Cauchy–Schwarz, la perpendicularidad y la distancia más corta, las simetrías, los lugares geométricos y las gráficas); la trigonometría (el ángulo entre dos vectores, las **leyes de cosenos y senos**, la congruencia, la semejanza y el **teorema de Tales**, los puntos notables del triángulo, las rotaciones, el ángulo inscrito y la potencia de un punto, las funciones trigonométricas y las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas); los espacios vectoriales básicos (subespacios, independencia lineal, **bases y dimensión**, producto vectorial, triple producto y determinantes); las rectas, planos, semiplanos y semiespacios (ecuaciones, distancias, **sistemas de ecuaciones lineales** y de desigualdades); y las cónicas (definición por focos, **ecuaciones canónicas**, traslaciones y rotaciones, la **clasificación de la ecuación general de segundo grado**, la excentricidad, las **secciones de un cono**, la tangente y la **propiedad focal**, las parametrizaciones y las familias de cónicas, hasta que **cinco puntos sin tres alineados determinan una única cónica**).

Cómo está hecho

- **El plano es $\mathbb{R}^2$, el espacio es $\mathbb{R}^3$.** Los axiomas de los números reales de *Cálculo diferencial* (K1–K9, O1–O3 y S) son el punto de partida. Un punto es una pareja (o terna) de reales y el vector de P a Q es Q − P; todo lo demás se construye sobre eso. Los resultados de Cálculo I se citan con su número, por ejemplo «(C1-002.T5)»; los de este libro empiezan con G1.
- **Ángulos en dos capas.** Del capítulo 6 al 12 un ángulo se describe por su coseno y su seno algebraicos, y los ángulos orientados son rotaciones: con eso salen las leyes de cosenos y senos, la congruencia, la semejanza y el ángulo inscrito, sin medir nada. Desde el capítulo 13 los ángulos se miden en radianes. Para eso hacen falta π, el seno y el coseno, que se construyen con rigor en

Cálculo integral, un curso posterior: cuatro hechos se **citan** con su número y el rótulo **«⚠ Cálculo II · se cita»** (bloque TR), y toda pieza que los usa lleva la marca ⚠ TR. Todo lo demás de la trigonometría se demuestra aquí.

- **El álgebra lineal se demuestra dentro.** Espacios vectoriales, subespacios, independencia, bases y dimensión, el producto cruz, el triple producto y los determinantes 2 × 2 y 3 × 3 se prueban aquí, hasta dimensión 3 (el capítulo de bases trabaja en cualquier dimensión finita). No se cita nada de un curso de álgebra lineal.
- ⚠ **def: área y volumen.** El área del paralelogramo y el volumen del paralelepípedo se definen donde se necesitan y se marcan ⚠ def; la teoría del área es de *Cálculo en varias variables II*. Ningún teorema depende de una de esas definiciones salvo los que calculan esa misma área o ese volumen.
- **Cada paso dice qué usa.** Las justificaciones aparecen entre paréntesis con el número del resultado que se aplica, por ejemplo «(G1-003.T5)». El número indica la clase (G1-003) y la pieza dentro de ella (T5 = quinto teorema). Detrás del libro hay un inventario de **259 piezas** en el que cada una declara de qué depende, y un programa comprueba que ninguna use algo posterior.
- **Sin elecciones ocultas.** Cuando una prueba necesita «un» vector o «una» raíz, se dice cuál: el primer vector de la base canónica que no es proporcional, el menor índice con coeficiente no nulo, la raíz mayor.
- **Intuición primero, formalidad siempre.** Cada capítulo abre con una situación cotidiana (la parada de autobús más cercana, una antena que debe quedar a la misma distancia de tres colonias, el minutero de un reloj de pared, la báscula de la frutería, el jardinero que traza un arriate ovalado con dos estacas y una cuerda, una mesa de billar elíptica) y dice dónde falla la analogía. Después vienen la definición o el teorema formal, su demostración y un contraejemplo por cada hipótesis.

Cómo leerlo

Cada capítulo corresponde a una clase en video (algunos, a dos partes) del curso *Geometría analítica I: todas las demostraciones, explicadas paso a paso* de PyPro (pypro.mx). Se puede leer solo, pero funciona mejor junto con el video: el video da la idea y la imagen; el libro da cada detalle por escrito.

Los recuadros ayudan a orientarse:

- **Teorema, definición, ejemplo:** el enunciado exacto, tal como se usa después.
- **Idea:** la estrategia de la demostración en una o dos frases.
- **En la vida diaria:** la situación cotidiana y el límite de la analogía.

- **Cuidado:** errores frecuentes, lo que pasa si se quita una hipótesis y por qué una pieza lleva ⚠.

Al final de cada capítulo hay ejercicios con sus respuestas.

Agradecimientos

A la **Facultad de Ciencias de la UNAM**, por un plan de estudios extraordinario y por haber formado a tantas generaciones de matemáticas y matemáticos. Este libro sigue su programa de Geometría Analítica I y no existiría sin él.

A los creadores de **Claude**, en Anthropic, por su esfuerzo de condensar el conocimiento del mundo en un modelo capaz de revisar, cuestionar y verificar cada línea de una demostración. Claude Opus 5.5 revisó la estructura lógica de este libro: que cada enunciado esté completo, que ningún paso use algo no demostrado y que no haya contradicciones entre capítulos ni con *Cálculo diferencial*.

A quienes estudian este material: la geometría es el lugar donde más se confía en el dibujo, y donde más enseña demostrar sin él.

Guillermo Izquierdo

Índice general

Prólogo I

Agradecimientos IV

G1-001 · El método analítico: el plano es $\mathbb{R}^2$ 1

G1-002 · Producto punto, norma y Cauchy–Schwarz 8

G1-003 · Perpendicularidad, Pitágoras y la distancia más corta 15

G1-004 · Simetrías: respecto a un punto, una recta y un plano 21

G1-005 · Lugares geométricos y gráficas de 1.er y 2.º grado 26

G1-006 · El ángulo entre dos vectores, sin medirlo 32

G1-007 · Leyes de cosenos y senos; resolución de triángulos 36

G1-008 · Congruencia 42

G1-009 · Semejanza y teorema de Tales 48

G1-010 · Rectas y puntos notables del triángulo 53

G1-011 · Rotaciones y ángulos orientados 59

G1-012 · Ángulo central, ángulo inscrito y potencia de un punto 65

G1-013 · Funciones trigonométricas: medir ángulos ⚠ TR 72

G1-014 · Coordenadas polares y curvas polares ⚠ TR 79

G1-015 · Curvas paramétricas 84

G1-016 · Coordenadas cilíndricas y esféricas; superficies paramétricas ⚠ TR 88

G1-017 · Espacios vectoriales 92

G1-018 · Subespacios 96

G1-019 · Independencia lineal y generadores 102

G1-020 · Bases y dimensión 107

G1-021 · Producto escalar y producto vectorial 114

G1-022 · Triple producto escalar y determinantes 121

G1-023 · La recta en el plano 128

G1-024 · Rectas en el espacio 134

G1-025 · Planos y semiespacios 139

G1-026 · Sistemas de ecuaciones lineales y transversalidad 143

G1-027 · Sistemas de desigualdades lineales 149

G1-028 · Cónicas: definición, trazado y simetrías 154

G1-029 · Ecuaciones canónicas 159

G1-030 · Traslaciones y cónicas con ejes paralelos 165

G1-031 · Rotaciones y la ecuación general de 2.º grado 170

G1-032 · Excentricidad y secciones de un cono 175

G1-033 · Tangente a una cónica y propiedad focal 183

G1-034 · Cónicas parametrizadas 191

G1-035 · Familias de cónicas 196

G1-001 · El método analítico: el plano es $\mathbb{R}^2$

Motivación

> **La app de reparto**
> Una app de reparto guarda cada parada como una pareja de números: kilómetros al este y al norte de la central. Las paradas son $(1,2)$, $(3,5)$ y $(5,8)$, y la central es $(0,0)$. La app no ve el mapa; solo tiene números. ¿Puede decidir si las tres paradas están sobre una misma avenida recta?
> Sí: $(3,5)-(1,2)=(2,3)$ y $(5,8)-(1,2)=(4,6)=2\,(2,3)$. En cambio $(0,0)-(1,2)=(-1,-2)$ no es múltiplo de $(2,3)$. Las tres paradas están alineadas; la central no.
> Dónde falla la analogía: una avenida tiene ancho y curvas; una recta de este capítulo no tiene grosor y sigue para siempre en los dos sentidos.

El método analítico consiste en esto: el plano **es** $\mathbb{R}^2$ y el espacio **es** $\mathbb{R}^3$, con $\mathbb{R}$ el campo ordenado completo de Cálculo I. Un punto es una pareja (o terna) de números reales, y cada «hecho geométrico» será un teorema sobre números reales. Nada queda a la intuición.

Este modelo cumple los axiomas de Hilbert de la geometría euclidiana; aquí no se demuestra, y ningún resultado del libro lo usa.

Puntos y vectores

Definición G1-001.D1 (el plano y el espacio)

$\mathbb{R}^2 := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$; dos parejas (ternas) son iguales si coinciden en cada componente. Sus elementos se llaman **puntos** o **vectores**. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$: $x + y := (x_1 + y_1, \dots)$, $cx := (cx_1, \dots)$, $0 := (0, \dots, 0)$, $-x := (-1)x$, $x - y := x + (-y)$. El **vector de** P **a** Q es $Q - P$. Base canónica: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$; e_1, e_2, e_3 en $\mathbb{R}^3$.

En este capítulo y en los capítulos 2, 4 y 5, «$\mathbb{R}^n$» quiere decir $n = 2$ o $n = 3$.

Teorema G1-001.T1 (reglas de $\mathbb{R}^n$)

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $c, d \in \mathbb{R}$: $(x + y) + z = x + (y + z)$; $x + y = y + x$; $x + 0 = x$; $x + (-x) = 0$; $c(dx) = (cd)x$; $1x = x$; $c(x + y) = cx + cy$; $(c + d)x = cx + dx$; $x = \sum_i x_i e_i$.

> **Idea de la demostración**
> Dos vectores son iguales si lo son componente a componente, y en cada componente la regla es un axioma de campo.

Demostración. Por G1-001.D1 basta comparar la componente i de cada lado.

1. $((x + y) + z)_i = (x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i) = (x + (y + z))_i$ (K1).
2. $(x + y)_i = x_i + y_i = y_i + x_i = (y + x)_i$ (K2).
3. $(x + 0)_i = x_i + 0 = x_i$ (K3).
4. $(-x)_i = (-1)x_i = -(1 \cdot x_i) = -x_i$ (C1-002.T4, K6, K7), así que $(x + (-x))_i = x_i + (-x_i) = 0$ (K4).
5. $(c(dx))_i = c(dx_i) = (cd)x_i = ((cd)x)_i$ (K5).
6. $(1x)_i = 1 \cdot x_i = x_i$ (K6, K7).
7. $(c(x + y))_i = c(x_i + y_i) = cx_i + cy_i = (cx + cy)_i$ (K9).
8. $((c + d)x)_i = (c + d)x_i = x_i(c + d) = x_i c + x_i d = cx_i + dx_i$ (K6, K9).
9. La componente j de $x_i e_i$ es $x_i \cdot 1 = x_i$ si $j = i$ y $x_i \cdot 0 = 0$ si $j \neq i$ (K7, C1-002.T3); al sumar sobre i, la componente j de $\sum_i x_i e_i$ es $x_j + 0 + \cdots + 0 = x_j$ (K3). ■

Definición G1-001.D2 (vectores proporcionales y paralelos)

$u, v \in \mathbb{R}^n$ son **proporcionales** (linealmente dependientes) si existen $a, b \in \mathbb{R}$, no ambos 0, con $au + bv = 0$. Son **paralelos** ($u \parallel v$) si son ambos $\neq 0$ y proporcionales.

Teorema G1-001.T2

Si $u \neq 0$: u, v son proporcionales $\iff v = \lambda u$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $u, v \neq 0$ y $v = \lambda u$, entonces $\lambda \neq 0$ y $u = \lambda^{-1} v$.

Demostración.

1. ($\Leftarrow$) Si $v = \lambda u$, entonces $\lambda u + (-1)v = 0$ con el coeficiente $-1 \neq 0$ (G1-001.T1): son proporcionales (G1-001.D2).
2. ($\Rightarrow$) Sea $au + bv = 0$ con a, b no ambos 0. Si fuera $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y $au = 0$, es decir $au_i = 0$ en cada componente; por C1-002.T5, $u_i = 0$ para todo i y $u = 0$, contra la hipótesis.
3. Luego $b \neq 0$, y $bv = -au$ (G1-001.T1). Multiplicando por b^{-1} (K8): $v = b^{-1}(bv) = (-ab^{-1})u$ (G1-001.T1). Basta $\lambda := -ab^{-1}$.
4. Si $u, v \neq 0$ y $v = \lambda u$ con $\lambda = 0$, entonces $v = 0u = 0$ (C1-002.T3), contradicción. Así $\lambda \neq 0$ y $\lambda^{-1} v = \lambda^{-1}(\lambda u) = (\lambda^{-1}\lambda)u = u$ (K8, G1-001.T1). ■

Teorema G1-001.T3 (Chasles y punto medio)

$(Q - P) + (R - Q) = R - P$ y $P + (Q - P) = Q$. El **punto medio** $M := (P + Q)/2$ es el único punto con $M - P = Q - M$.

Demostración.

1. En la componente i: $(q_i - p_i) + (r_i - q_i) = r_i - p_i$ y $p_i + (q_i - p_i) = q_i$ (G1-001.T1: asociatividad, opuestos y neutro).
2. Para un punto X: $X - P = Q - X \iff$ en cada componente $x_i - p_i = q_i - x_i \iff 2x_i = p_i + q_i$ (sumando $x_i + p_i$ a ambos lados, G1-001.T1).
3. Como $2 > 0$ (C1-003.T8), $2 \neq 0$ y $2x_i = p_i + q_i \iff x_i = (p_i + q_i)/2$ (K8). Así existe un único tal X, y es M. ■

Segmentos, rectas y planos

Definición G1-001.D3 (segmento, rayo, recta, plano)

Para $P, Q \in \mathbb{R}^n$: segmento $[P, Q] := \{P + t(Q - P) : t \in [0, 1]\}$; para $v \neq 0$: rayo $\{P + tv : t \geq 0\}$ y **recta** $L(P, v) := \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$ (v es un **vector director**). En $\mathbb{R}^3$, para u, v no proporcionales: **plano** $\Pi(P, u, v) := \{P + su + tv : s, t \in \mathbb{R}\}$. Puntos **alineados**: contenidos en una misma recta; **coplanares**: en un mismo plano. Dos rectas son **paralelas** si sus vectores directores lo son. **Triángulo** ABC: tres puntos no alineados (sus lados se miden en G1-002.D3).

Teorema G1-001.T4 (rectas)

(a) Si $Q \in L(P, v)$ y $\lambda \neq 0$, $L(Q, \lambda v) = L(P, v)$. (b) Por dos puntos distintos A, B pasa exactamente una recta, $L(A, B - A)$. (c) Dos rectas distintas tienen a lo más un punto común. (d) Si $L(P, v) = L(Q, w)$, entonces $v \parallel w$; por eso «rectas paralelas» (G1-001.D3) no depende del vector director elegido.

Demostración.

1. (a) Sea $Q = P + t_0 v$. Si $X = Q + s(\lambda v)$, entonces $X = P + (t_0 + s\lambda)v \in L(P, v)$ (G1-001.T1).
2. Si $X = P + tv$, entonces $X = Q + (t - t_0)v = Q + \big((t - t_0)\lambda^{-1}\big)(\lambda v) \in L(Q, \lambda v)$ (K8, G1-001.T1). Las dos rectas son el mismo conjunto.
3. (b) $B - A \neq 0$ porque $A \neq B$, y $A = A + 0(B - A)$, $B = A + 1(B - A)$ están en $L(A, B - A)$.
4. Si además $A, B \in L(P, v)$, con $A = P + \alpha v$ y $B = P + \beta v$, entonces $B - A = (\beta - \alpha)v$, y $\beta \neq \alpha$ porque $A \neq B$. Por (a) con $Q = A$ y $\lambda = \beta - \alpha$: $L(A, B - A) = L(P, v)$. Toda recta por A y B es $L(A, B - A)$.
5. (c) Si dos rectas tuvieran dos puntos comunes distintos A, B, por (b) ambas serían $L(A, B - A)$: no serían distintas.
6. (d) Q y $Q + w$ están en $L(Q, w) = L(P, v)$ y son distintos ($w \neq 0$). Por el paso 4, $w = (Q + w) - Q = (\beta - \alpha)v$ con $\beta \neq \alpha$: w y v son proporcionales (G1-001.T2) y ambos $\neq 0$, así que $v \parallel w$ (G1-001.D2). ■

Teorema G1-001.T5 (alineados)

A, B, C son alineados $\iff$ $B - A$ y $C - A$ son proporcionales. En particular, en un triángulo $B - A$ y $C - A$ no son proporcionales: $a(B - A) + b(C - A) = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Sean $A = P + \alpha v$, $B = P + \beta v$, $C = P + \gamma v$ en una recta $L(P, v)$. Entonces $B - A = (\beta - \alpha)v$ y $C - A = (\gamma - \alpha)v$ (G1-001.T1), y

$$(\gamma - \alpha)(B - A) - (\beta - \alpha)(C - A) = 0.$$

2. Si los dos coeficientes son 0, entonces $\beta = \alpha$ y $B = A$; en ese caso $1 \cdot (B - A) + 0 \cdot (C - A) = 0$. En ambos casos hay coeficientes no ambos nulos: son proporcionales (G1-001.D2).
3. ($\Leftarrow$) Si $B = A$ y $C = A$, los tres están en $L(A, e_1)$. Si $B = A \neq C$, los tres están en $L(A, C - A)$ (G1-001.T4 (b)).
4. Si $B \neq A$, por G1-001.T2 con $u = B - A \neq 0$: $C - A = \lambda(B - A)$, así que $C = A + \lambda(B - A) \in L(A, B - A)$, junto con A y B (G1-001.T4 (b)).
5. En un triángulo los puntos no son alineados (G1-001.D3); por lo anterior $B - A$, $C - A$ no son proporcionales, y por G1-001.D2 la única combinación nula es la de coeficientes $a = b = 0$. ■

Teorema G1-001.T6 (regla del paralelogramo)

Si $B - A$ y $D - A$ no son proporcionales y $C := B + D - A$, entonces $C - B = D - A$, $C - D = B - A$ y las diagonales $[A, C]$ y $[B, D]$ tienen el mismo punto medio. Recíprocamente, si $(A + C)/2 = (B + D)/2$, entonces $B - A = C - D$.

Demostración.

1. $C - B = (B + D - A) - B = D - A$ y $C - D = B - A$ (G1-001.T1).
2. $A + C = A + B + D - A = B + D$, así que $(A + C)/2 = (B + D)/2$: por G1-001.T3, las dos diagonales tienen el mismo punto medio.
3. Recíprocamente, multiplicando $(A + C)/2 = (B + D)/2$ por 2 queda $A + C = B + D$, y restando $A + D$ a ambos lados, $C - D = B - A$ (G1-001.T1). ■

La hipótesis «no proporcionales» no se usa en las cuentas: solo garantiza que los cuatro puntos forman

una figura genuina (si $B - A \parallel D - A$, los cuatro quedan alineados).

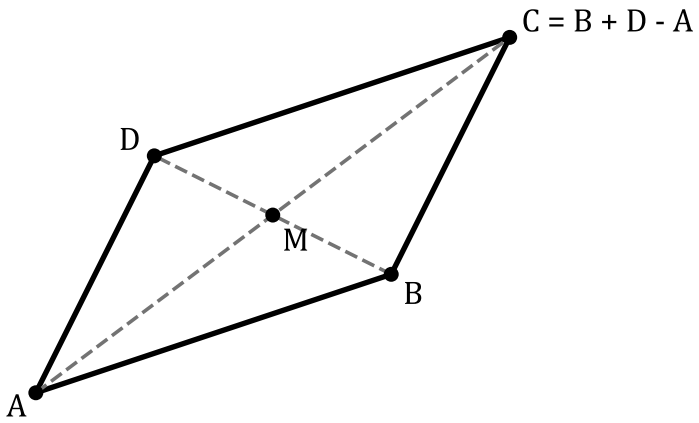


Figura 1: Regla del paralelogramo: $C = B + D - A$ y las diagonales comparten su punto medio M.

Ejemplo G1-001.E1

La recta por $(1, 2)$ y $(3, 5)$ es $L((1, 2), (2, 3))$; $(2, 7/2)$ es el punto medio; $(5, 8)$ está en ella ($t = 2$) y $(0, 0)$ no.

1. Por G1-001.T4 (b), la recta es $L((1, 2), (3, 5) - (1, 2)) = L((1, 2), (2, 3))$.
2. Por G1-001.T3, el punto medio es $((1 + 3)/2, (2 + 5)/2) = (2, 7/2)$.
3. $(1, 2) + 2(2, 3) = (5, 8)$.
4. Si $(1, 2) + t(2, 3) = (0, 0)$, la primera componente da $t = -1/2$ y la segunda $t = -2/3$: no existe tal t.

Por qué cada hipótesis

⚠ Directores nulos y planos aplastados

- Sin $v \neq 0$, $\{P + t \cdot 0\} = \{P\}$ es un punto, no una recta.
- Sin u, v no proporcionales, $\Pi(0, e_1, 2e_1) = L(0, e_1)$ es una recta, no un plano.
- «Proporcionales» no es «paralelos»: 0 es proporcional a cualquier v ($1 \cdot 0 + 0 \cdot v = 0$), pero no es paralelo a nada.

Ejercicios

1. Demuestra que $L(P, v) = L(P, -v)$ y que $[P, Q] = [Q, P]$.
2. ¿Están alineados $(2, -1, 0)$, $(4, 0, 3)$ y $(8, 2, 9)$? ¿Y $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 5)$?
3. Demuestra que si $u \parallel v$ y $v \parallel w$, entonces $u \parallel w$.
4. Para $A = (0, 0)$, $B = (3, 1)$, $D = (1, 2)$, calcula C de G1-001.T6 y el punto medio común de las diagonales.

Respuestas

1. $L(P, -v) = L(P, v)$ por G1-001.T4 (a) con $Q = P, \lambda = -1$. $P + t(Q - P) = Q + (1 - t)(P - Q)$ y $1 - t \in [0, 1] \iff t \in [0, 1]$.
2. Sí: las diferencias $(2, 1, 3)$ y $(6, 3, 9) = 3(2, 1, 3)$ son proporcionales (G1-001.T5). No: $(2, 4, 5)$ no es múltiplo de $(1, 2, 3)$ (de la primera componente $t = 2$, y $2 \cdot 3 = 6 \neq 5$).
3. $v = \lambda u, w = \mu v$ con λ, μ reales (G1-001.T2), así que $w = (\mu\lambda)u$ y $u, w \neq 0$.
4. $C = (4, 3)$; punto medio $(2, 3/2)$.

G1-002 · Producto punto, norma y Cauchy–Schwarz

Motivación

> **El dron y la bicicleta**
> En el mapa de la ciudad (en kilómetros), un dron vuela en línea recta de la central $A = (1, 1)$ a la clienta $C = (4, 5)$: recorre $|(3, 4)| = 5$. Un repartidor en bicicleta pasa antes por la farmacia $B = (4, 1)$ y recorre $3 + 4 = 7$. ¿Hay algún desvío B que empate a la línea recta? Sí: los puntos del segmento $[A, C]$, y solo ellos. Por ejemplo, el punto medio $(2.5, 3)$ da $2.5 + 2.5 = 5$.
> Dónde falla la analogía: el repartidor no puede cruzar manzanas en diagonal; en $\mathbb{R}^2$ no hay manzanas, y la distancia es siempre la de la línea recta.

Parte 1 · Producto punto, norma y la identidad de Lagrange

Definición G1-002.D1 (producto punto)

$x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2$ en $\mathbb{R}^2$ y $x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ en $\mathbb{R}^3$.

Teorema G1-002.T1 (propiedades)

$x \cdot y = y \cdot x$; $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$; $(cx) \cdot y = c(x \cdot y)$; $x \cdot x \geq 0$, y $x \cdot x = 0 \iff x = 0$; $e_i \cdot x = x_i$.

Demostración. Todas las sumas son sobre i (dos o tres sumandos).

1. $x \cdot y = \sum x_i y_i = \sum y_i x_i = y \cdot x$ (K6, K2).
2. $(x + y) \cdot z = \sum (x_i + y_i) z_i = \sum x_i z_i + \sum y_i z_i$ (K9, K6, K1, K2).
3. $(cx) \cdot y = \sum (cx_i) y_i = c \sum x_i y_i$ (K5, K9).

4. Cada $x_i^2 \geq 0$: si $x_i \neq 0$, $x_i^2 > 0$ (C1-003.T5), y si $x_i = 0$, $x_i^2 = 0$ (C1-002.T3). La suma de números ≥ 0 es ≥ 0 (O2, C1-003.T9).
5. Si $x \neq 0$, algún $x_i \neq 0$ tiene $x_i^2 > 0$ y los demás sumandos son ≥ 0, así que $x \cdot x > 0$ (C1-003.T9). Recíprocamente, $0 \cdot 0 = 0$.
6. $e_i \cdot x = 1 \cdot x_i + \sum_{j \neq i} 0 \cdot x_j = x_i$ (K7, C1-002.T3, K3). ■

Definición G1-002.D2 (raíz cuadrada)

Para $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es el único $y \geq 0$ con $y^2 = a$ ($\sqrt[2]{a}$ de C1-023.C2 si $a > 0$; $\sqrt{0} := 0$).

La definición es correcta: si $a > 0$, C1-023.C2 da un único $y > 0$ con $y^2 = a$, y $y = 0$ no sirve porque $0^2 = 0 \neq a$; si $a = 0$, $y^2 = 0$ obliga $y = 0$ (C1-002.T5).

Teorema G1-002.T2 (reglas de $\sqrt{}$)

Para $a, b \geq 0$: $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$; $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{c^2} = |c|$ para todo $c \in \mathbb{R}$; $\sqrt{a} \leq b \iff a \leq b^2$ (si $b \geq 0$).

Demostración.

1. Para $y, z \geq 0$: $y < z \iff y^2 < z^2$ (C1-003.T9). Con $y = \sqrt{a}$, $z = \sqrt{b}$: $\sqrt{a} < \sqrt{b} \iff a < b$.
2. $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ (C1-003.T9) y $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$ (K5, K6). Por la unicidad de G1-002.D2, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. $|c| \geq 0$ y $|c|^2 = c^2$ (C1-004.T1, C1-004.T6); por la unicidad, $\sqrt{c^2} = |c|$.
4. Si $b \geq 0$: $\sqrt{a} \leq b \iff (\sqrt{a})^2 \leq b^2$ (paso 1 y su versión con $=$) $\iff a \leq b^2$. ■

Definición G1-002.D3 (norma y distancia)

$|x| := \sqrt{x \cdot x}$; $d(P, Q) := |Q - P|$. x es **unitario** si $|x| = 1$. En un triángulo ABC, $a := |B - C|$, $b := |C - A|$, $c := |A - B|$.

Teorema G1-002.T3 (propiedades de la norma)

$|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \iff x = 0$; $|cx| = |c||x|$; $|x|^2 = x \cdot x$; $|x \pm y|^2 = |x|^2 \pm 2x \cdot y + |y|^2$; $x \cdot y = (|x + y|^2 - |x - y|^2)/4$ (polarización); $|x_i| \leq |x|$; si $x \neq 0$, $x/|x|$ es unitario.

Demostración.

1. $|x| \geq 0$ por G1-002.D2. $|x| = 0 \iff x \cdot x = 0$ (si $a > 0, \sqrt{a} > 0$) $\iff x = 0$ (G1-002.T1).
2. $|cx| = \sqrt{c^2(x \cdot x)} = \sqrt{c^2}\sqrt{x \cdot x} = |c||x|$ (G1-002.T1, G1-002.T2).
3. $|x|^2 = x \cdot x$ por G1-002.D2.
4. $|x \pm y|^2 = (x \pm y) \cdot (x \pm y) = x \cdot x \pm 2x \cdot y + y \cdot y$ (G1-002.T1).
5. Restando las dos versiones del paso 4: $|x + y|^2 - |x - y|^2 = 4x \cdot y$.
6. $x_i^2 \leq x \cdot x$ (los otros sumandos son ≥ 0, C1-003.T9), así que $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x \cdot x}$ (G1-002.T2).
7. Si $x \neq 0$, $|x| > 0$ y $\left|x/|x|\right| = |x|^{-1}|x| = 1$ (paso 2, C1-003.T7). ■

Definición G1-002.D4 (determinante 2×2 y menores)

Para $u, v \in \mathbb{R}^2$: $\det(u, v) := u_1 v_2 - u_2 v_1$. Para $x, y \in \mathbb{R}^3$ sus **menores** son $m_{ij} := x_i y_j - x_j y_i$ $(1 \leq i < j \leq 3)$.

Teorema G1-002.T4 (identidad de Lagrange)

En $\mathbb{R}^2$: $(x \cdot y)^2 + \det(x, y)^2 = |x|^2|y|^2$. En $\mathbb{R}^3$: $(x \cdot y)^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = |x|^2|y|^2$.

Idea de la demostración

Se desarrollan los dos lados; los términos cruzados $2x_i y_i x_j y_j$ se cancelan.

Demostración.

1. En $\mathbb{R}^2$, por G1-002.D1 y la distributividad (K9, K6, K1, K2):

$$(x \cdot y)^2 = x_1^2 y_1^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2.$$

2. Por G1-002.D4 y C1-002.T4: $\det(x, y)^2 = x_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2$.
3. Como $x_1 y_1 x_2 y_2 = x_1 y_2 x_2 y_1$ (K5, K6), al sumar los términos cruzados se cancelan (K4):

$$(x \cdot y)^2 + \det(x, y)^2 = x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

4. Por G1-002.T3, eso es $|x|^2|y|^2$.
5. En $\mathbb{R}^3$: $(x \cdot y)^2 = \sum_i x_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i y_i x_j y_j$ y $\sum_{i<j} m_{ij}^2 = \sum_{i<j}(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) - 2\sum_{i<j} x_i y_j x_j y_i$.

6. Los términos cruzados se cancelan igual que en el paso 3, y queda $\sum_i \sum_j x_i^2 y_j^2 = (\sum_i x_i^2)(\sum_j y_j^2) = |x|^2|y|^2$ (K9, G1-002.T3). ■

Parte 2 · Cauchy–Schwarz y la desigualdad del triángulo

Teorema G1-002.T5 (Cauchy–Schwarz)

$|x \cdot y| \leq |x||y|$, con igualdad $\iff$ x, y son proporcionales. Además $x \cdot y = |x||y| \iff x = 0$ o $y = \lambda x$ con $\lambda \geq 0$.

> **Idea de la demostración**
> Lagrange dice que a $|x|^2|y|^2$ le falta una suma de cuadrados para ser $(x \cdot y)^2$: quitarla da la desigualdad, y hay igualdad justo cuando esa suma es 0.

Demostración. Sea $\Sigma := \det(x, y)^2$ en $\mathbb{R}^2$ y $\Sigma := m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

1. Por G1-002.T4, $(x \cdot y)^2 = |x|^2|y|^2 - \Sigma$, y $\Sigma \geq 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9). Así $(x \cdot y)^2 \leq |x|^2|y|^2$.
2. Por G1-002.T2: $|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} \leq \sqrt{|x|^2|y|^2} = |x||y|$.
3. Hay igualdad $\iff \Sigma = 0 \iff$ cada menor (o det) es 0: si alguno fuera $\neq 0$, su cuadrado sería > 0 y $\Sigma > 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9).
4. Si $x = 0$, x y y son proporcionales ($1 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, G1-001.D2) y hay igualdad ($0 = 0$).
5. Si $x \neq 0$, sea k el primero de los índices $1, 2(, 3)$, en ese orden, con $x_k \neq 0$. Si todos los menores son 0, para cada i se tiene $x_k y_i - x_i y_k = 0$ (es $\pm m_{ki}$, o 0 si $i = k$), y

$$y_i = \frac{y_k}{x_k} x_i \qquad (K8).$$

   Así $y = \lambda x$ con $\lambda := y_k / x_k$, y son proporcionales (G1-001.T2).
6. Recíprocamente, si son proporcionales y $x \neq 0$, $y = \lambda x$ (G1-001.T2) y $m_{ij} = x_i \lambda x_j - x_j \lambda x_i = 0$ (K5, K6, K4). Por el paso 3 hay igualdad.
7. Con signo: si $x \cdot y = |x||y|$, hay igualdad en el paso 2 (C1-004.T1), así que $x = 0$ o $y = \lambda x$. En el segundo caso con $x \neq 0$: $\lambda|x|^2 = x \cdot y = |x||\lambda x| = |\lambda||x|^2$ (G1-002.T1, G1-002.T3), y como $|x|^2 > 0$, $\lambda = |\lambda| \geq 0$ (C1-004.T1).
8. Recíprocamente, si $x = 0$ ambos lados son 0; si $y = \lambda x$ con $\lambda \geq 0$, $x \cdot y = \lambda|x|^2 = |\lambda||x||x| = |x||y|$. ■

Teorema G1-002.T6 (desigualdad del triángulo)

$|x+y| \le |x| + |y|$, con igualdad $\iff x = 0$ o $y = \lambda x$ con $\lambda \ge 0$; además $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$.

Demostración.

1. Por G1-002.T3 y G1-002.T5 (con $x \cdot y \le |x \cdot y|$, C1-004.T1):

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \\ &\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

2. Ambos números son ≥ 0, así que $|x+y| \le |x| + |y|$ (G1-002.T2).
3. Hay igualdad $\iff$ hay igualdad en el paso 1 $\iff x \cdot y = |x||y| \iff x = 0$ o $y = \lambda x$ con $\lambda \ge 0$ (G1-002.T5).
4. $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$, así que $|x| - |y| \le |x-y|$; igual $|y| - |x| \le |y-x| = |x-y|$ (G1-002.T3 con $c = -1$). Por C1-004.T3, $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$. ■

Teorema G1-002.T7 (d es una métrica; estar entre)

$d(P,Q) \ge 0$, $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$, $d(P,Q) = d(Q,P)$ y $d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$, con igualdad $\iff B \in [A,C]$. Si M es el punto medio de $[P,Q]$, $d(P,M) = d(M,Q) = d(P,Q)/2$.

Demostración.

1. $d(P,Q) = |Q-P| \ge 0$, y es 0 $\iff Q - P = 0 \iff P = Q$ (G1-002.T3, G1-001.T1).
2. $d(Q,P) = |P-Q| = |(-1)(Q-P)| = |Q-P|$ (G1-002.T3).
3. Con $x := B - A$ y $y := C - B$: $x + y = C - A$ (G1-001.T3), y G1-002.T6 da la desigualdad.
4. Igualdad $\iff x = 0$ o $y = \lambda x$ con $\lambda \ge 0$. Si $x = 0$, $B = A = A + 0(C-A) \in [A,C]$.
5. Si $y = \lambda x$ con $\lambda \ge 0$: $C - A = (1+\lambda)(B-A)$ con $1 + \lambda > 0$ (C1-003.T4), así que $B = A + t(C-A)$ con $t = (1+\lambda)^{-1} \in (0,1]$ (C1-003.T7): $B \in [A,C]$.
6. Recíprocamente, si $B = A + t(C-A)$ con $t \in [0,1]$: $B - A = t(C-A)$ y $C - B = (1-t)(C-A)$, así que $d(A,B) + d(B,C) = (t + 1 - t)|C-A| = d(A,C)$ (G1-002.T3, $t, 1-t \ge 0$).
7. Para $M = (P+Q)/2$: $M - P = Q - M = \frac{1}{2}(Q-P)$ (G1-001.T3), y por G1-002.T3 ambas distancias valen $|Q-P|/2$. ■

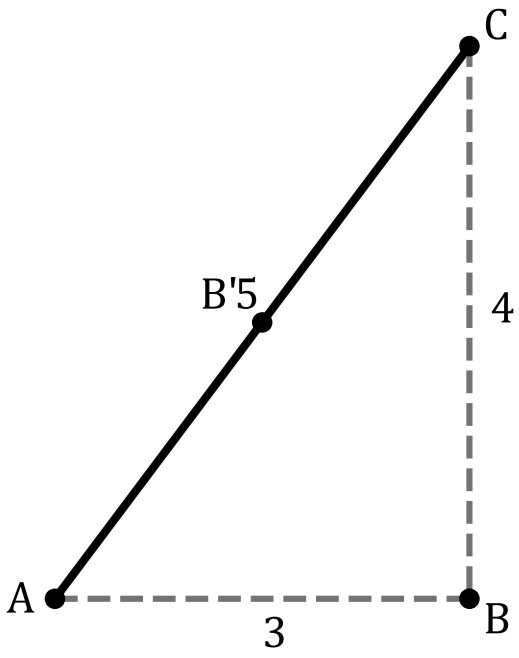


Figura 2: Desigualdad del triángulo: $|B - A| + |C - B| \geq |C - A|$; solo los puntos del segmento la empatan.

Ejemplo G1-002.E1

$|(1, 2, 2)| = 3$; $d((1, 1), (4, 5)) = 5$; para $x = (1, 2)$, $y = (3, 1)$: $x \cdot y = 5 \leq \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$.

1. $(1, 2, 2) \cdot (1, 2, 2) = 1 + 4 + 4 = 9$ y $\sqrt{9} = 3$ $(3 \geq 0, 3^2 = 9)$.
2. $(4, 5) - (1, 1) = (3, 4)$, $9 + 16 = 25$, $\sqrt{25} = 5$.
3. $x \cdot y = 3 + 2 = 5$, $|x| = \sqrt{5}$, $|y| = \sqrt{10}$, y $5^2 = 25 \leq 50 = 5 \cdot 10$; además $\det(x, y) = 1 - 6 = -5$ y $25 + 25 = 50$ (Lagrange).

Por qué cada hipótesis

⚠ Los casos de igualdad

- Igualdad en Cauchy–Schwarz con valor absoluto no da $\lambda \geq 0$: $x = (1, 2)$, $y = (-2, -4)$ dan $|x \cdot y| = 10 = |x||y|$, pero $x \cdot y = -10$.
- En la desigualdad del triángulo, $x = (1, 0)$ y $y = (-1, 0)$ son proporcionales y aun así $|x + y| = 0 < 2 = |x| + |y|$: hace falta $\lambda \geq 0$.

Ejercicios

1. Calcula $x \cdot y$, $\det(x, y)$ y verifica Lagrange para $x = (2, -1)$, $y = (1, 3)$.
2. Demuestra que $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$ (ley del paralelogramo).
3. Demuestra que $|x \cdot y| = |x||y|$ si $y = -3x$, y que $x \cdot y = |x||y|$ falla si $x \neq 0$.
4. ¿Para qué B en la recta $L(A, C - A)$ se cumple $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$?

Respuestas

1. $x \cdot y = -1$, $\det(x, y) = 7$, $1 + 49 = 50 = 5 \cdot 10$.
2. Suma las dos fórmulas de G1-002.T3: los términos $\pm 2x \cdot y$ se cancelan.
3. $x \cdot y = -3|x|^2$ y $|x||y| = 3|x|^2$; son iguales en valor absoluto, y $-3|x|^2 = 3|x|^2$ solo si $x = 0$.
4. $B = A + t(C - A)$ con $t \in [0, 1]$ (G1-002.T7).

G1-003 · Perpendicularidad, Pitágoras y la distancia más corta

Motivación

> **La parada más cercana**
> Estás en un parque en $P = (3, 4)$ (en kilómetros) y la avenida es el eje x. ¿Cuál es la parada de autobús más cercana sobre la avenida? Si caminas «a escuadra» llegas a $F = (3, 0)$, a 4 km. Cualquier otra parada queda más lejos: $(0, 0)$ y $(6, 0)$ están a 5 km, y $5^2 = 4^2 + 3^2$. Este capítulo convierte esa observación en teorema.
> Dónde falla la analogía: en la ciudad se camina por calles; aquí la distancia es la de la línea recta, como si cruzaras el parque en diagonal.

Parte 1 · Perpendicularidad y Pitágoras

Definición G1-003.D1 (perpendicular)

$u \perp v :\Leftrightarrow\ u \cdot v = 0$. En $\mathbb{R}^2$, $u^{\perp} := (-u_2, u_1)$.

Teorema G1-003.T1 (Pitágoras y su recíproco)

$u \perp v\ \Leftrightarrow\ |u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$. En un triángulo ABC: $(A - C) \perp (B - C)\ \Leftrightarrow\ c^2 = a^2 + b^2$.

> **Idea de la demostración**
> Al desarrollar $|u + v|^2$ sobra el término $2u \cdot v$; desaparece justo cuando la esquina es recta.

Demostración.

1. Por G1-002.T3, $|u+v|^2 = |u|^2 + 2u\cdot v + |v|^2$.
2. Así $|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2 \iff 2u\cdot v = 0 \iff u\cdot v = 0$ (K8, pues $2\neq 0$) $\iff u \perp v$ (G1-003.D1).
3. En el triángulo, sean $u := A - C$ y $v := B - C$; entonces $A - B = u - v$ (G1-001.T1), $|u| = b$, $|v| = a$ y $|A-B| = c$ (G1-002.D3, G1-002.T3).
4. Por G1-002.T3, $c^2 = |u-v|^2 = b^2 - 2u\cdot v + a^2$. Luego $c^2 = a^2+b^2 \iff u\cdot v = 0 \iff (A-C)\perp(B-C)$. ■

Teorema G1-003.T2 (el giro de un cuarto de vuelta)

En $\mathbb{R}^2$: $u^\perp\cdot u = 0$, $|u^\perp| = |u|$, $(u^\perp)^\perp = -u$, $u^\perp\cdot v = \det(u,v)$ y $\det(v,u) = -\det(u,v)$. Si $u\neq 0$: $\{w\in\mathbb{R}^2 : w\cdot u = 0\} = \{t\,u^\perp : t\in\mathbb{R}\}$.

Demostración.

1. $u^\perp\cdot u = -u_2u_1 + u_1u_2 = 0$ y $|u^\perp|^2 = u_2^2+u_1^2 = |u|^2$, así que $|u^\perp| = |u|$ (G1-002.D1, G1-002.T3, G1-002.T2).
2. $(u^\perp)^\perp = (-u_1,-u_2) = -u$; $u^\perp\cdot v = -u_2v_1 + u_1v_2 = \det(u,v)$, y $\det(v,u) = v_1u_2 - v_2u_1 = -\det(u,v)$ (G1-002.D4).
3. Si $w = t\,u^\perp$, entonces $w\cdot u = t(u^\perp\cdot u) = 0$ (G1-002.T1).
4. Recíprocamente, sea $w\cdot u = 0$, $t := \det(u,w)/|u|^2$ (K8, $|u|^2>0$) y $z := w - t\,u^\perp$.
5. $z\cdot u = w\cdot u - t\,u^\perp\cdot u = 0$ y $z\cdot u^\perp = \det(u,w) - t|u|^2 = 0$ (pasos 1-2, G1-002.T1). En coordenadas:

$$z_1u_1 + z_2u_2 = 0, \qquad -z_1u_2 + z_2u_1 = 0.$$

6. Multiplicando la primera por u_1, la segunda por u_2 y restando: $z_1(u_1^2+u_2^2) = 0$. Multiplicando la primera por u_2, la segunda por u_1 y sumando: $z_2(u_1^2+u_2^2) = 0$.
7. Como $|u|^2\neq 0$, $z_1 = z_2 = 0$ (K8): $z = 0$ y $w = t\,u^\perp$. ■

Teorema G1-003.T3 (sistema 2×2 por productos punto)

Si $u,v\in\mathbb{R}^2$ y $\det(u,v)\neq 0$, para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ existe un único $X\in\mathbb{R}^2$ con $X\cdot u = \alpha$ y $X\cdot v = \beta$, a saber $X = (\beta\,u^\perp - \alpha\,v^\perp)/\det(u,v)$. En coordenadas: si $a_1b_2 - a_2b_1\neq 0$, el sistema $a_1x + b_1y = \alpha$, $a_2x + b_2y = \beta$ tiene exactamente una solución.

Demostración. Sea $D := \det(u,v)\neq 0$.

1. Existencia: con $X := (\beta\, u^{\perp} - \alpha\, v^{\perp})/D$ y G1-003.T2,

$$X \cdot u = \frac{\beta\, u^{\perp} \cdot u - \alpha\, v^{\perp} \cdot u}{D} = \frac{-\alpha \det(v,u)}{D} = \alpha, \qquad X \cdot v = \frac{\beta \det(u,v) - \alpha\, v^{\perp} \cdot v}{D} = \beta.$$

2. Unicidad: si X, Y cumplen ambas ecuaciones, $Z := X - Y$ cumple $Z \cdot u = Z \cdot v = 0$ (G1-002.T1).
3. $u \neq 0$ (si $u = 0$, $D = 0$, G1-002.D4), así que $Z = t\, u^{\perp}$ (G1-003.T2), y $0 = Z \cdot v = t \det(u,v)$; como $D \neq 0$, $t = 0$ (K8) y $X = Y$.
4. En coordenadas, el sistema es $X \cdot u = \alpha$, $X \cdot v = \beta$ con $X = (x,y)$, $u = (a_1, b_1)$, $v = (a_2, b_2)$, y $\det(u,v) = a_1 b_2 - b_1 a_2$. ■

Parte 2 · Proyección y la distancia más corta

Definición G1-003.D2 (proyección y conjuntos normales)

Para $v \neq 0$: $\text{proy}_v(x) := (x \cdot v/|v|^2)\, v$. Para $A \in \mathbb{R}^n$ y $n \neq 0$: $N(A,n) := \{X : (X - A) \cdot n = 0\}$. Para $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y $P \in \mathbb{R}^n$: $d(P,S) := \inf\{|P - X| : X \in S\}$ (existe: el conjunto es no vacío y acotado inferiormente por 0).

El ínfimo existe por C1-006.T3. En G1-023.T1 ($n = 2$) y G1-025.T1 ($n = 3$) se demuestra que $N(A,n)$ es una recta, resp. un plano, y que toda recta del plano y todo plano del espacio es de esa forma.

Teorema G1-003.T4 (descomposición ortogonal)

Si $v \neq 0$, $x - \text{proy}_v(x) \perp v$, y es la única escritura $x = \lambda v + w$ con $w \perp v$.

Demostración.

1. $(x - \text{proy}_v\, x) \cdot v = x \cdot v - (x \cdot v/|v|^2)|v|^2 = 0$ (G1-002.T1, G1-002.T3).
2. Así $x = \lambda v + w$ con $\lambda = x \cdot v/|v|^2$ y $w = x - \text{proy}_v\, x \perp v$.
3. Si $x = \lambda v + w$ con $w \cdot v = 0$, entonces $x \cdot v = \lambda |v|^2$, así que $\lambda = x \cdot v/|v|^2$ y $w = x - \lambda v = x - \text{proy}_v\, x$. ■

Teorema G1-003.T5 (el pie de la perpendicular a una recta)

Sean $L = L(A, v)$ y $P \in \mathbb{R}^n$; $F := A + \text{proy}_v(P - A)$. Entonces $F \in L$, $P - F \perp v$, y para todo $X \in L$: $|P - X|^2 = |P - F|^2 + |F - X|^2$. En consecuencia F es el único punto de L más cercano a P, $d(P, L) = |P - F|$ se alcanza solo en F, y F es el único $X \in L$ con $P - X \perp v$.

Idea de la demostración

Para cada X de la recta, P, F y X forman una esquina recta en F: Pitágoras hace ganar a F.

Demostración. Sea $t := (P - A) \cdot v / |v|^2$.

1. $F = A + tv \in L$ (G1-003.D2, G1-001.D3).
2. $P - F = (P - A) - \text{proy}_v(P - A) \perp v$ (G1-001.T1, G1-003.T4).
3. Si $X = A + sv \in L$, entonces $F - X = (t - s)v$ y $(P - F) \cdot (F - X) = (t - s)\,(P - F) \cdot v = 0$ (G1-001.T1, G1-002.T1).
4. Como $P - X = (P - F) + (F - X)$, Pitágoras (G1-003.T1) da

$$|P - X|^2 = |P - F|^2 + |F - X|^2.$$

5. Por lo tanto $|P - X|^2 \geq |P - F|^2$, con igualdad $\Leftrightarrow$ $|F - X| = 0$ $\Leftrightarrow$ $X = F$ (G1-002.T3); y por G1-002.T2, $|P - X| \geq |P - F|$, con igualdad solo en $X = F$.
6. $|P - F|$ es cota inferior de $\{|P - X| : X \in L\}$ y pertenece a él; toda cota inferior m cumple $m \leq |P - F|$. Es el ínfimo (C1-006.D1): $d(P, L) = |P - F|$, alcanzado solo en F.
7. Si $X = A + sv$ y $(P - X) \cdot v = 0$, entonces $(F - X) \cdot v = (P - X) \cdot v - (P - F) \cdot v = 0$, es decir $(t - s)|v|^2 = 0$; como $|v|^2 > 0$, $s = t$ y $X = F$ (K8). ■

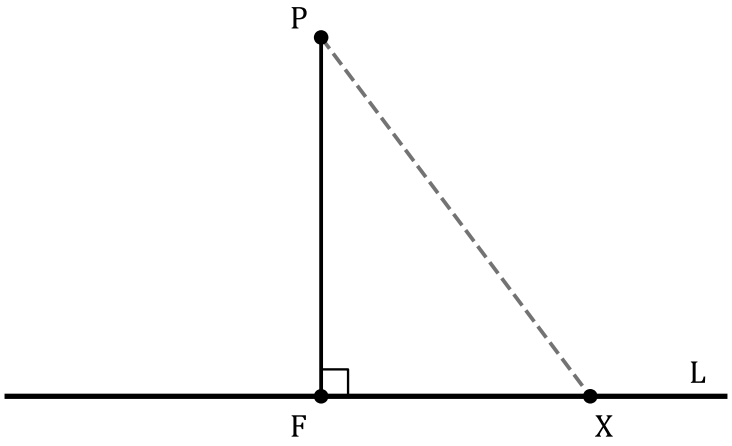


Figura 3: El pie F de la perpendicular: para todo $X \in L$, $|P-X|^2 = |P-F|^2 + |F-X|^2$.

Teorema G1-003.T6 (el pie de la perpendicular a un conjunto normal)

Sean $H = N(A,n)$ y $P \in \mathbb{R}^n$; $F := P - ((P-A)\cdot n/|n|^2)\, n$. Entonces $F \in H$, $P - F \parallel n$ (o $P = F$), para todo $X \in H$ $|P-X|^2 = |P-F|^2 + |F-X|^2$, y $d(P,H) = |P-F| = |(P-A)\cdot n|/|n|$ se alcanza solo en F.

Demostración. Sea $\lambda := (P-A)\cdot n/|n|^2$, de modo que $F = P - \lambda n$.

1. $(F-A)\cdot n = (P-A)\cdot n - \lambda|n|^2 = 0$: $F \in H$ (G1-002.T1, G1-002.T3).
2. $P - F = \lambda n$: si $\lambda \neq 0$ es paralelo a n; si $\lambda = 0$, $P = F$.
3. Para $X \in H$: $(F-X)\cdot n = (F-A)\cdot n - (X-A)\cdot n = 0$, así que $(P-F)\cdot(F-X) = \lambda\, n\cdot(F-X) = 0$ (G1-002.T1).
4. Pitágoras (G1-003.T1) con $P - X = (P-F) + (F-X)$: $|P-X|^2 = |P-F|^2 + |F-X|^2$.
5. Como en los pasos 5 y 6 de G1-003.T5, $|P-F|$ es el mínimo de $\{|P-X| : X \in H\}$, es $d(P,H)$ (C1-006.D1, G1-002.T2) y se alcanza solo en F.
6. $|P-F| = |\lambda||n| = |(P-A)\cdot n|/|n|$ (G1-002.T3, C1-004.T6). ■

Ejemplo G1-003.E1

Pie de $(3,4)$ sobre $L((0,0),(1,0))$: $(3,0)$, distancia 4. Pie de $(1,1,1)$ sobre $N(0,(0,0,1))$: $(1,1,0)$.

1. $\text{proy}_{(1,0)}(3,4) = 3\,(1,0)$, así que $F = (3,0)$ y $|P - F| = |(0,4)| = 4$ (G1-003.T5).
2. $(P - 0) \cdot (0,0,1) = 1$ y $|n|^2 = 1$: $F = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$ (G1-003.T6).

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin la norma euclidiana se pierde la unicidad

Con la «distancia del taxista» $|x_1| + |x_2|$, del punto $(1,1)$ a $X = (x,-x)$ en la recta $x + y = 0$ hay $|x - 1| + |x + 1|$, que vale 2 para todo $x \in [-1,1]$: infinitos puntos más cercanos. La unicidad de G1-003.T5 viene de Pitágoras, que necesita un producto punto. Y sin $v \neq 0$ no hay recta ni proyección.

Ejercicios

1. Verifica Pitágoras para $u = (1,2,2)$, $v = (2,1,-2)$.
2. Resuelve con G1-003.T3: $2x + y = 5$, $x - 3y = -1$.
3. Calcula el pie y la distancia de $P = (2,5)$ a $L((0,1),(1,1))$.
4. Demuestra que si $X, X' \in L$ son distintos y $|P - X| = |P - X'|$, entonces F es el punto medio de $[X, X']$.

Respuestas

1. $u \cdot v = 2 + 2 - 4 = 0$; $|u + v|^2 = |(3,3,0)|^2 = 18 = 9 + 9$.
2. $u = (2,1)$, $v = (1,-3)$, $\det = -7$; $X = (-u^{\perp} - 5v^{\perp})/(-7) = (2,1)$.
3. $P - A = (2,4)$, $\text{proy} = 3(1,1)$, $F = (3,4)$, distancia $|(-1,1)| = \sqrt{2}$.
4. $|F - X|^2 = |P - X|^2 - |P - F|^2 = |F - X'|^2$; con $X = F + \sigma v$, $X' = F + \sigma' v$, $\sigma^2 = \sigma'^2$ y $\sigma \neq \sigma'$, así que $\sigma' = -\sigma$ y $F = (X + X')/2$.

G1-004 · Simetrías: respecto a un punto, una recta y un plano

Motivación

> **La carambola en la banda**
> En una mesa de billar (en decímetros) tu bola está en $P = (1, 2)$, la bola objetivo en $Q = (4, 1)$ y la banda es el eje x. ¿A qué punto de la banda apuntas para pegar a Q con una carambola? Al reflejo: si $\sigma(Q) = (4, -1)$, la recta de P a $\sigma(Q)$ corta la banda en $X = (3, 0)$, y el recorrido mide $|P - X| + |X - Q| = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = |P - \sigma(Q)|$. Con $X' = (2, 0)$ mide $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.
> Dónde falla la analogía: una bola real gira y la banda la frena; aquí el reflejo es exacto.

Definiciones

Definición G1-004.D1 (simetrías)

Respecto al punto M: $\sigma_M(P) := 2M - P$. Respecto a la recta L ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$): $\sigma_L(P) := 2F - P$ con F el pie de G1-003.T5. Respecto a $H = N(A, n)$: $\sigma_H(P) := P - 2((P - A) \cdot n/|n|^2)\, n$.

Definición G1-004.D2 (isometría)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una **isometría** si $|f(P) - f(Q)| = |P - Q|$ para todos P, Q. Una figura $S \subset \mathbb{R}^n$ es **simétrica** respecto a σ si $\sigma(S) = S$.

En $\mathbb{R}^3$, $N(A, n)$ es un plano (G1-025.T1), y σ_H es la simetría respecto a un plano; en $\mathbb{R}^2$, $N(A, n)$ es una recta (G1-023.T1). Ningún resultado de este capítulo usa esas identificaciones.

Resultados

Para la recta $L = L(A, v)$ y $H = N(A, n)$ escribe, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_L(x) := 2\,\mathrm{proy}_v(x) - x, \qquad \tau_H(x) := x - 2\,\mathrm{proy}_n(x).$$

Por G1-003.T5 y G1-001.T1, $\sigma_L(A + x) = 2(A + \mathrm{proy}_v\, x) - (A + x) = A + \tau_L(x)$, y por G1-004.D1, $\sigma_H(A + x) = A + \tau_H(x)$.

Teorema G1-004.T1 (involuciones e isometrías)

σ_M, σ_L y σ_H cumplen $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$; son biyectivas y son isometrías.

> **Idea de la demostración**
> Con A como origen, la simetría deja igual la parte de x sobre la recta y le cambia el signo a la parte perpendicular; Pitágoras dice que eso no cambia el largo.

Demostración.

1. proy_v es lineal: $\mathrm{proy}_v(x - y) = ((x - y) \cdot v/|v|^2)v = \mathrm{proy}_v\, x - \mathrm{proy}_v\, y$ (G1-002.T1, G1-001.T1). Luego $\tau_L(x) - \tau_L(y) = \tau_L(x - y)$, y $\sigma_L(P) - \sigma_L(Q) = \tau_L(P - Q)$.
2. Sea $x = p + w$ con $p := \mathrm{proy}_v\, x$ y $w \perp v$ (G1-003.T4). Entonces $\tau_L(x) = 2p - (p + w) = p - w$.
3. p es múltiplo de v, así que $p \cdot (-w) = 0$, y por Pitágoras (G1-003.T1, dos veces):

$$|\tau_L(x)|^2 = |p|^2 + |w|^2 = |x|^2.$$

4. Por G1-002.T2, $|\tau_L(x)| = |x|$, y con el paso 1: $|\sigma_L(P) - \sigma_L(Q)| = |P - Q|$; σ_L es una isometría (G1-004.D2).
5. $p - w = p + (-w)$ con p múltiplo de v y $-w \perp v$: por la unicidad de G1-003.T4, $\mathrm{proy}_v(p - w) = p$, y $\tau_L(\tau_L(x)) = p - (-w) = x$. Así $\sigma_L(\sigma_L(A + x)) = A + \tau_L(\tau_L(x)) = A + x$: $\sigma_L \circ \sigma_L = \mathrm{id}$.
6. Para σ_H, con $x = p + w$, $p := \mathrm{proy}_n\, x$, $w \perp n$: $\tau_H(x) = w - p$, y los pasos 1-5 valen cambiando los papeles de p y w.
7. Para σ_M: $\sigma_M(P) - \sigma_M(Q) = Q - P$, de norma $|P - Q|$ (G1-002.T3), y $\sigma_M(\sigma_M(P)) = 2M - (2M - P) = P$ (G1-001.T1).
8. Una función con $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ tiene inversa (σ misma), y por C1-011.T1 es biyectiva. ■

Teorema G1-004.T2 (puntos fijos)

σ_M fija solo a M; σ_L fija exactamente a los puntos de L; σ_H, exactamente a los de H.

Demostración.

1. $2M - P = P \iff 2P = 2M \iff P = M$ (G1-001.T1, K8).
2. $\sigma_L(P) = P \iff 2F = 2P \iff P = F$. Si $P = F$, $P \in L$ (G1-003.T5). Si $P \in L$, $|P - P| = 0$ es la menor distancia posible, y por la unicidad de G1-003.T5 el pie es $F = P$.
3. $\sigma_H(P) = P \iff ((P - A) \cdot n/|n|^2)\, n = 0 \iff (P - A) \cdot n = 0$ (pues $n \neq 0$, G1-001.T2 y K8) $\iff P \in H$ (G1-003.D2). ■

Teorema G1-004.T3 (la mediatriz)

Para $P \neq Q$ con punto medio M: $\{X : |X - P| = |X - Q|\} = N(M, Q - P)$, y la simetría respecto a $N(M, Q - P)$ intercambia P y Q. Si σ es una simetría con $\sigma(S) \subset S$, entonces $\sigma(S) = S$.

Demostración.

1. Por G1-002.T3 y G1-002.T1,

$$|X - P|^2 - |X - Q|^2 = -2X \cdot P + |P|^2 + 2X \cdot Q - |Q|^2$$
$$= 2X \cdot (Q - P) - (Q + P) \cdot (Q - P) = 2(X - M) \cdot (Q - P).$$

2. Como las normas son ≥ 0, $|X - P| = |X - Q| \iff |X - P|^2 = |X - Q|^2$ (G1-002.T2) $\iff (X - M) \cdot (Q - P) = 0 \iff X \in N(M, Q - P)$ (G1-003.D2; $Q - P \neq 0$).
3. Con $n := Q - P$: $P - M = -n/2$ (G1-001.T3), así que $(P - M) \cdot n = -|n|^2/2$ y $\sigma_H(P) = P - 2(-\frac{1}{2})n = P + n = Q$ (G1-004.D1).
4. Por G1-004.T1, $\sigma_H(Q) = \sigma_H(\sigma_H(P)) = P$.
5. Si $\sigma(S) \subset S$, aplicando σ: $S = \sigma(\sigma(S)) \subset \sigma(S)$ (G1-004.T1). Las dos inclusiones dan $\sigma(S) = S$. ■

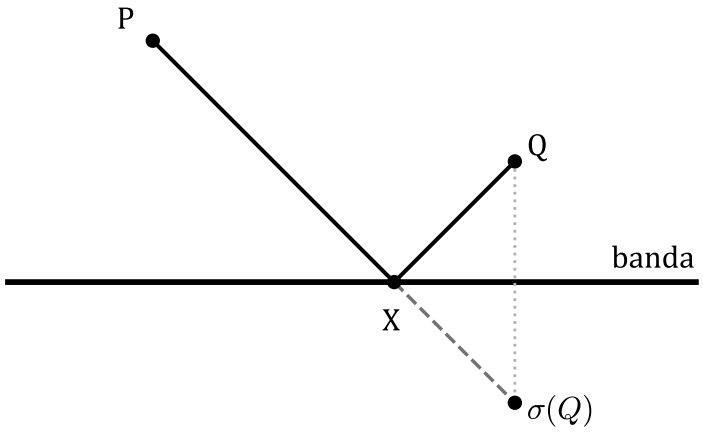


Figura 4: La banda es la mediatriz de $[Q, \sigma(Q)]$: el camino $P \to X \to Q$ mide lo mismo que $P \to X \to \sigma(Q)$.

Ejemplo G1-004.E1

El segmento $[P, Q]$ es simétrico respecto a su punto medio y respecto a su mediatriz; σ respecto a la recta $L((0,0),(1,1))$ en $\mathbb{R}^2$ es $(x, y) \mapsto (y, x)$.

1. $\sigma_M(P + t(Q-P)) = 2M - P - t(Q-P) = P + (1-t)(Q-P)$, y $1-t \in [0,1]$: $\sigma_M([P,Q]) \subset [P,Q]$, y por G1-004.T3 hay igualdad.
2. Para $H = N(M,n)$ con $n = Q - P$ y $X = P + tn$: $X - M = (t - \frac{1}{2})n$, así que $\sigma_H(X) = X - (2t-1)n = P + (1-t)n \in [P,Q]$; por G1-004.T3, $\sigma_H([P,Q]) = [P,Q]$.
3. Con $A = 0$, $v = (1,1)$ y $P = (x,y)$: $F = \frac{x+y}{2}(1,1)$ (G1-003.T5) y $2F - P = (y,x)$.

Regreso a la carambola: la banda $y = 0$ es la mediatriz de $[Q, \sigma(Q)]$ (G1-004.T3), así que $|X - Q| = |X - \sigma(Q)|$ en toda la banda, y $|P - X| + |X - Q| \geq |P - \sigma(Q)|$ con igualdad solo si $X \in [P, \sigma(Q)]$ (G1-002.T7): $X = (3, 0)$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Reflejar en otra dirección no es una simetría

El reflejo oblicuo $(x, y) \mapsto (x - 2y, -y)$ también es involución y fija el eje x, pero lleva $(0, 1)$ a $(-2, -1)$, a distancia $\sqrt{5}$ de $(0, 0)$: no es isometría. La simetría usa el pie de la **perpendicular**. Y con $P = Q$ el «lugar equidistante» es todo $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios

1. Calcula el reflejo de $(5, 0)$ respecto a la recta $L((0, 0), (1, 2))$.
2. Calcula $\sigma_H(1, 2, 3)$ para $H = N(0, (1, 1, 1))$ y verifica que $|\sigma_H(P)| = |P|$.
3. Demuestra que la composición de dos isometrías es una isometría.
4. ¿Qué isometría es $\sigma_{M'} \circ \sigma_M$? Calcúlala.

Respuestas

1. $F = \frac{5}{5}(1, 2) = (1, 2)$, reflejo $2F - P = (-3, 4)$.
2. $(P \cdot n)/|n|^2 = 2$, $\sigma_H(P) = (1, 2, 3) - 4(1, 1, 1) = (-3, -2, -1)$; ambas normas valen $\sqrt{14}$.
3. $|g(f(P)) - g(f(Q))| = |f(P) - f(Q)| = |P - Q|$.
4. $\sigma_{M'}(\sigma_M(P)) = 2M' - 2M + P$: la traslación por $2(M' - M)$.

G1-005 · Lugares geométricos y gráficas de 1.er y 2.º grado

Motivación

> **El chorro de la fuente**
> Una fuente lanza un chorro que, en metros, sigue $y = -x^2 + 4x$. ¿Dónde está su punto más alto y dónde cae el agua? Completando el cuadrado, $-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$: el punto más alto es $(2, 4)$ y el agua cae en $x = 4$. El chorro sube y baja «igual»: a la altura 3 está en $x = 1$ y en $x = 3$, reflejo uno del otro respecto a $x = 2$.
> Dónde falla la analogía: el aire frena el agua y un chorro real no es exactamente una parábola.

Definiciones

Definición G1-005.D1 (lugar geométrico, gráfica, circunferencia)

El **lugar** de una condición sobre $X \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto de los X que la cumplen. Gráfica de $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$): $\{(x, f(x)) : x \in D\}$. Para $O \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$: **circunferencia** ($n = 2$) o **esfera** ($n = 3$) $C(O, r) := \{X : |X - O| = r\}$; disco o bola abiertos $\{|X - O| < r\}$.

Ecuaciones de segundo grado

Teorema G1-005.T1 (completar el cuadrado; fórmula general)

Si $a \neq 0$ y $\Delta := b^2 - 4ac$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ para todo x. Si $\Delta > 0$ hay exactamente dos raíces, $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$; si $\Delta = 0$, exactamente una, $-b/(2a)$; si $\Delta < 0$, ninguna. Si t_1, t_2 son las raíces ($t_1 = t_2$ si $\Delta = 0$), $ax^2 + bx + c = a(x - t_1)(x - t_2)$, $t_1 + t_2 = -b/a$ y $t_1 t_2 = c/a$

(Vieta).

Demostración. Sea $y := x + b/(2a)$.

1. $ay^2 = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$ (K9, C1-002.T6), así que
$$ax^2 + bx + c = ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = ay^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$
2. Por lo tanto $ax^2 + bx + c = 0 \iff y^2 = \Delta/(4a^2)$ (K8, $a \neq 0$, $4a^2 > 0$ por C1-003.T5).
3. Si $\Delta < 0$: $\Delta/(4a^2) < 0 \leq y^2$ (C1-003.T4, C1-003.T9): no hay raíces.
4. Si $\Delta = 0$: $y^2 = 0 \iff y = 0$ (C1-002.T5): una raíz, $x = -b/(2a)$.
5. Si $\Delta > 0$, sea $k := \sqrt{\Delta}/(2a) \neq 0$; $k^2 = \Delta/(4a^2)$ (G1-002.D2). Entonces $y^2 - k^2 = (y-k)(y+k) = 0 \iff y = k$ o $y = -k$ (C1-002.T5), y $k \neq -k$: dos raíces, $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$.
6. Vieta: si $\Delta > 0$, $t_1 + t_2 = -b/a$ y $t_1 t_2 = (b^2 - \Delta)/(4a^2) = c/a$. Si $\Delta = 0$, $t_1 = t_2 = -b/(2a)$, con suma $-b/a$ y producto $b^2/(4a^2) = c/a$ (pues $b^2 = 4ac$).
7. Así $a(x - t_1)(x - t_2) = ax^2 - a(t_1 + t_2)x + at_1t_2 = ax^2 + bx + c$ (K9). ■

Teorema G1-005.T2 (ecuación de la circunferencia y de la esfera)

$X \in C(O, r) \iff \sum_i (x_i - o_i)^2 = r^2$. El lugar $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la circunferencia de centro $(-D/2, -E/2)$ y radio $\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}/2$ si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, el punto $(-D/2, -E/2)$ si $= 0$ y vacío si < 0. Lo mismo para la esfera en $\mathbb{R}^3$: $x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Gz + F = 0$ tiene centro $(-D/2, -E/2, -G/2)$ y radio $\sqrt{D^2 + E^2 + G^2 - 4F}/2$ si $D^2 + E^2 + G^2 - 4F > 0$.

Demostración.

1. $|X - O| = r \iff |X - O|^2 = r^2$ (G1-002.T2, ambos ≥ 0) $\iff \sum_i (x_i - o_i)^2 = r^2$ (G1-002.T3).
2. Completando cuadrados en x y en y (paso 1 de G1-005.T1 con $a = 1$), con $Z := (-D/2, -E/2)$ y $K := D^2 + E^2 - 4F$:
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = |X - Z|^2 - K/4.$$
3. Si $K > 0$: el lugar es $|X - Z|^2 = (\sqrt{K}/2)^2$, es decir $C(Z, \sqrt{K}/2)$ (paso 1).
4. Si $K = 0$: $|X - Z|^2 = 0 \iff X = Z$ (G1-002.T3). Si $K < 0$: $|X - Z|^2 \geq 0 > K/4$, vacío.
5. En $\mathbb{R}^3$, con $x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Gz + F = 0$, se completa también en z y queda $Z = (-D/2, -E/2, -G/2)$, $K = D^2 + E^2 + G^2 - 4F$. ■

Teorema G1-005.T3 (circunferencia de Apolonio)

Para $P \neq Q$ y $k > 0, k \neq 1$: $\{X : |X-P| = k|X-Q|\}$ es $C(Z,\rho)$ con $Z = (P - k^2Q)/(1-k^2)$ y $\rho = k|P-Q|/|1-k^2|$; para $k = 1$ es la mediatriz.

Demostración.

1. Por G1-002.T3 y G1-002.T1:

$$|X-P|^2 - k^2|X-Q|^2 = (1-k^2)|X|^2 - 2X\cdot(P-k^2Q) + |P|^2 - k^2|Q|^2.$$

2. Con Z como en el enunciado, $(1-k^2)(|X|^2 - 2X\cdot Z) = (1-k^2)|X-Z|^2 - (1-k^2)|Z|^2$.
3. La identidad $|P-k^2Q|^2 - (1-k^2)(|P|^2 - k^2|Q|^2) = k^2|P-Q|^2$ se verifica desarrollando: el lado izquierdo es $|P|^2 - 2k^2P\cdot Q + k^4|Q|^2 - |P|^2 + k^2|Q|^2 + k^2|P|^2 - k^4|Q|^2$.
4. Con el paso 3 dividido entre $1-k^2$: $(1-k^2)|Z|^2 - |P|^2 + k^2|Q|^2 = (1-k^2)\rho^2$, así que

$$|X-P|^2 - k^2|X-Q|^2 = (1-k^2)\big(|X-Z|^2 - \rho^2\big).$$

5. $|X-P| = k|X-Q| \iff |X-P|^2 = k^2|X-Q|^2$ (G1-002.T2) $\iff |X-Z|^2 = \rho^2$ $(1-k^2 \neq 0)$ $\iff X \in C(Z,\rho)$ (G1-005.T2), con $\rho > 0$ porque $k > 0$ y $P \neq Q$.
6. Si $k = 1$ es G1-004.T3. ■

Gráficas de primer y segundo grado

Teorema G1-005.T4 (gráficas de 1.er grado)

La gráfica de $y = mx + k$ es la recta $L((0,k),(1,m))$; la de $z = ax + by + k$ es el plano $\Pi((0,0,k),(1,0,a),(0,1,b))$.

Demostración.

1. $(x, mx+k) = (0,k) + x(1,m)$ (G1-001.T1), y x recorre $\mathbb{R}$: la gráfica es $L((0,k),(1,m))$, con $(1,m) \neq 0$.
2. $(x, y, ax+by+k) = (0,0,k) + x(1,0,a) + y(0,1,b)$.
3. $(1,0,a)$ y $(0,1,b)$ no son proporcionales: $\alpha(1,0,a) + \beta(0,1,b) = 0$ da $\alpha = \beta = 0$ en las dos primeras componentes. Por G1-001.D3 la gráfica es ese plano. ■

Teorema G1-005.T5 (parábola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$)

Con $V := (-b/(2a), -\Delta/(4a))$: la gráfica es simétrica respecto a la recta $x = -b/(2a)$ (su **eje**), V está en ella, y si $a > 0$ entonces $y \geq -\Delta/(4a)$ en toda la gráfica con igualdad solo en V (si $a < 0$, al revés).

Idea de la demostración

Completa el cuadrado: $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Todo sale de que $(x-h)^2$ no cambia al reflejar x en h y es ≥ 0.

Demostración. Sean $f(x) := ax^2 + bx + c$, $h := -b/(2a)$ y $k := -\Delta/(4a)$.

1. Por G1-005.T1, $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para todo x.
2. El eje es $L((h,0), e_2)$. Para $P = (x,y)$, el pie es $(h,0) + \text{proy}_{e_2}(x-h, y) = (h,y)$ (G1-003.T5), y el reflejo es $\sigma(P) = (2h - x, y)$ (G1-004.D1).
3. Como $(2h - x - h)^2 = (h-x)^2 = (x-h)^2$ (C1-002.T4), $f(2h-x) = f(x)$.
4. Si $P = (x, f(x))$ está en la gráfica, $\sigma(P) = (2h - x, f(2h-x))$ también. Por G1-004.T3, $\sigma(\text{gráfica}) = \text{gráfica}$.
5. $V = (h, f(h)) = (h,k)$ está en la gráfica y en el eje.
6. Si $a > 0$: $(x-h)^2 \geq 0$ (C1-003.T5) y $f(x) - k = a(x-h)^2 \geq 0$ (C1-003.T4), con igualdad $\Leftrightarrow x = h$ (C1-002.T5). Si $a < 0$, $a(x-h)^2 \leq 0$ con la misma igualdad. ■

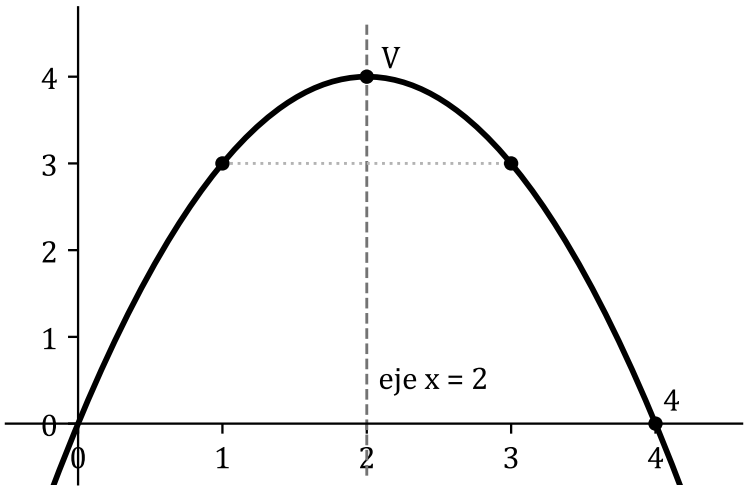


Figura 5: El chorro $y = -x^2 + 4x$: eje $x = 2$, vértice $V = (2, 4)$ y dos puntos simétricos a la altura 3.

Ejemplo G1-005.E1 (de 2.º grado en dos variables)
$z = x^2 + y^2$: el nivel $z = c$ es vacío ($c < 0$), el punto 0 ($c = 0$) o la circunferencia de radio $\sqrt{c}$ ($c > 0$); es simétrica respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$. $z = x^2 - y^2$: el nivel $z = 0$ es la unión de las rectas $y = x$ y $y = -x$; las trazas $x = k$ son parábolas abiertas hacia abajo. La circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta por su centro. Región $y \geq x^2$.

1. $x^2 + y^2 = c$ es G1-005.T2 con $D = E = 0, F = -c$: $K = 4c$, radio $\sqrt{4c}/2 = \sqrt{c}$.
2. La simetría respecto a $N(0, e_1)$ es $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ (G1-004.D1), y $(-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2$; igual con e_2. Por G1-004.T3 la superficie es simétrica.
3. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \iff y = x$ o $y = -x$ (C1-002.T5). Con $x = k$: $z = -y^2 + k^2$, una parábola con coeficiente $-1 < 0$ (G1-005.T5).
4. Si $O \in L, \sigma_L(O) = O$ (G1-004.T2) y $|\sigma_L(X) - O| = |\sigma_L(X) - \sigma_L(O)| = |X - O|$ (G1-004.T1): $\sigma_L(C(O, r)) \subset C(O, r)$, y por G1-004.T3 hay igualdad.
5. La región $y \geq x^2$ es el lugar de una desigualdad: los puntos sobre la parábola $y = x^2$ o por encima.

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin $a \neq 0$ no hay parábola

Con $a = 0$, $y = bx + c$ es una recta (G1-005.T4): no hay vértice ni punto extremo, y $-b/(2a)$ no está definido. Y una ecuación con $x^2 + y^2$ puede no ser una circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$ tiene $K = -4 < 0$ y es vacía.

Ejercicios

1. Encuentra centro y radio de $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
2. Describe $\{X \in \mathbb{R}^2 : |X - (0,0)| = 2|X - (3,0)|\}$.
3. Encuentra el vértice de $y = 2x^2 - 8x + 5$ y demuestra que $y \geq -3$ en su gráfica.
4. ¿Para qué c la recta $y = c$ corta a $y = -x^2 + 4x$ en dos puntos?

Respuestas

1. $K = 16 + 36 + 12 = 64$: centro $(2, -3)$, radio 4.
2. $k = 2$: $Z = (0 - 4(3,0))/(1 - 4) = (4,0)$, $\rho = 2 \cdot 3/3 = 2$: la circunferencia $C((4,0), 2)$.
3. $h = 2, k = -3$: $y = 2(x - 2)^2 - 3 \geq -3$.
4. $-x^2 + 4x - c = 0$ tiene $\Delta = 16 - 4c > 0 \iff c < 4$.

G1-006 · El ángulo entre dos vectores, sin medirlo

Motivación

> **La rampa de acceso**
> La norma pide que una rampa suba a lo más 1 m por cada 12 m de recorrido horizontal. La rampa va en la dirección $u = (12, 1)$ y el piso en e_1. ¿Qué tan inclinada está, sin transportador? El número $u \cdot e_1/(|u||e_1|) = 12/\sqrt{145} \approx 0.99654$ lo dice: mientras más cerca de 1, más plana. Una rampa $(12, 2)$ da $12/\sqrt{148} \approx 0.98639$: más empinada.
> Dónde falla la analogía: una rampa real tiene descansos y bordes; aquí solo hay dos direcciones.

En este capítulo (capa 1, sin medir ángulos) «el ángulo» entre dos vectores se describe por dos números, su coseno y su seno, definidos con el producto punto. La medida en radianes llega en G1-013.

Definición

Definición G1-006.D1 (coseno y seno de un ángulo)

Para $u, v \neq 0$: $\cos\angle(u, v) := u \cdot v/(|u||v|) \in [-1, 1]$ y $\operatorname{sen}\angle(u, v) := \sqrt{1 - \cos^2\angle(u, v)} \in [0, 1]$. Dos ángulos son **iguales** si tienen el mismo coseno. El ángulo es **recto** si $\cos = 0$, **agudo** si $\cos > 0$, **obtuso** si $\cos < 0$. En un triángulo, $A := \angle(B - A, C - A)$, $B := \angle(C - B, A - B)$, $C := \angle(A - C, B - C)$; se escribe $\cos A$, $\operatorname{sen} A$, etc. $\tan\angle := \operatorname{sen}\angle/\cos\angle$ si $\cos\angle \neq 0$.

La definición es correcta. Como $u, v \neq 0$, $|u||v| > 0$ (G1-002.T3). Por Cauchy–Schwarz (G1-002.T5), $|u \cdot v| \leq |u||v|$, así que $|\cos\angle(u, v)| \leq 1$ (C1-004.T6), es decir $\cos \in [-1, 1]$ (C1-004.T3). Entonces $\cos^2 \leq 1$ (C1-004.T6), $1 - \cos^2 \in [0, 1]$, y su raíz existe y está en $[0, 1]$ (G1-002.D2, G1-002.T2). En un triángulo los vectores $B - A$, $C - A$, etc. son $\neq 0$ (G1-001.T5).

Resultados

Teorema G1-006.T1 (propiedades)

$\cos\angle(u,v) = \cos\angle(v,u)$; para $a,b > 0$, $\cos\angle(au,bv) = \cos\angle(u,v)$; $\cos\angle(-u,v) = -\cos\angle(u,v)$ y $\operatorname{sen}\angle(-u,v) = \operatorname{sen}\angle(u,v)$; $\cos\angle(u,v) = 1 \iff v = \lambda u$ con $\lambda > 0$; $\cos = -1 \iff \lambda < 0$; $\operatorname{sen}\angle(u,v) = 0 \iff u \parallel v$. $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$. En $\mathbb{R}^2$: $\operatorname{sen}\angle(u,v) = |\det(u,v)|/(|u||v|)$; en $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{sen}\angle(u,v) = \sqrt{m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2}/(|u||v|)$.

Demostración.

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (G1-002.T1): $\cos\angle(u,v) = \cos\angle(v,u)$.
2. Para $a,b > 0$: $(au)\cdot(bv) = ab\,u\cdot v$ y $|au||bv| = ab|u||v|$ (G1-002.T1, G1-002.T3); se cancela ab.
3. $(-u)\cdot v = -u\cdot v$ y $|-u| = |u|$: $\cos\angle(-u,v) = -\cos\angle(u,v)$, y como $(-c)^2 = c^2$, los senos coinciden.
4. $\cos\angle(u,v) = 1 \iff u\cdot v = |u||v| \iff v = \lambda u$ con $\lambda \geq 0$ (G1-002.T5, $u \neq 0$); como $v \neq 0$, $\lambda \neq 0$, es decir $\lambda > 0$.
5. $\cos\angle(u,v) = -1 \iff \cos\angle(-u,v) = 1$ (paso 3) $\iff v = \mu(-u)$ con $\mu > 0 \iff v = \lambda u$ con $\lambda < 0$.
6. $\operatorname{sen} = 0 \iff \cos^2 = 1 \iff |u\cdot v| = |u||v| \iff u, v$ proporcionales (G1-002.T5) $\iff u \parallel v$ (ambos $\neq 0$, G1-001.D2).
7. $\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2$ por G1-002.D2.
8. En $\mathbb{R}^2$, por Lagrange (G1-002.T4):

$$\operatorname{sen}^2\angle(u,v) = 1 - \frac{(u\cdot v)^2}{|u|^2|v|^2} = \frac{\det(u,v)^2}{|u|^2|v|^2}.$$

   Como ambos lados son raíces ≥ 0, $\operatorname{sen}\angle(u,v) = \sqrt{\det(u,v)^2}/\sqrt{|u|^2|v|^2} = |\det(u,v)|/(|u||v|)$ (G1-002.T2). En $\mathbb{R}^3$, igual con los tres menores. ■

Teorema G1-006.T2 (distancia a una recta y seno)

Si $A \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ y $P \neq A$: $d(P, L(A,v)) = |P - A| \cdot \operatorname{sen}\angle(P - A, v)$. En un triángulo, la altura desde C mide $h_C := d(C, L(A, B-A)) = b\operatorname{sen} A = a\operatorname{sen} B > 0$.

Demostración. Sea $x := P - A \neq 0$ y F el pie de G1-003.T5.

1. $d(P, L(A, v)) = |P - F|$ y $P - F = x - \text{proy}_v\, x \perp \text{proy}_v\, x$ (G1-003.T5, G1-003.T4).
2. Por Pitágoras (G1-003.T1) y G1-002.T3:

$$|P - F|^2 = |x|^2 - |\,\text{proy}_v\, x|^2 = |x|^2 - \frac{(x \cdot v)^2}{|v|^2}$$
$$= |x|^2\big(1 - \cos^2 \angle(x, v)\big) = |x|^2 \,\text{sen}^2\, \angle(x, v).$$

3. Ambos lados son cuadrados de números ≥ 0; por G1-002.T2, $|P - F| = |x|\,\text{sen}\,\angle(x, v)$.
4. En el triángulo, con $P = C$, A y $v = B - A$: $h_C = |C - A|\,\text{sen}\,\angle(C - A, B - A) = b\,\text{sen}\,A$ (G1-006.T1, paso 1: el seno es simétrico).
5. $L(A, B - A) = L(B, A - B)$ (G1-001.T4 (a): B está en la recta y $A - B = -(B - A)$), así que con $P = C$, B y $v = A - B$: $h_C = a\,\text{sen}\,\angle(C - B, A - B) = a\,\text{sen}\,B$.
6. $C - A$ y $B - A$ no son paralelos (G1-001.T5), así que $\text{sen}\,A \neq 0$ (G1-006.T1), y con $b > 0$, $h_C > 0$. ■

Teorema G1-006.T3 (razones en el triángulo rectángulo)

Si el ángulo C de ABC es recto: $\cos A = b/c$, $\text{sen}\,A = a/c$, $\tan A = a/b$, y $\cos A = \text{sen}\,B$.

Demostración.

1. C recto: $(A - C) \cdot (B - C) = 0$, es decir $(B - C) \cdot (C - A) = 0$ (G1-006.D1, G1-002.T1).
2. $(B - A) \cdot (C - A) = ((B - C) + (C - A)) \cdot (C - A) = 0 + b^2$ (G1-001.T3, G1-002.T1).
3. $\cos A = b^2/(cb) = b/c$ (G1-006.D1).
4. Por Pitágoras (G1-003.T1), $c^2 = a^2 + b^2$, y

$$\text{sen}\,A = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = \frac{a}{c} \qquad \text{(G1-002.T2)}.$$

5. $\tan A = (a/c)/(b/c) = a/b$ $(b > 0)$.
6. Intercambiando los papeles de A y B (y de a y b) en los pasos 1-3: $\cos B = a/c = \text{sen}\,A$; y del paso 4 para B, $\text{sen}\,B = b/c = \cos A$. ■

Ejemplo G1-006.E1

$\cos \angle((1, 0), (1, 1)) = 1/\sqrt{2} = \text{sen}\,\angle$; $(1, 2, 2)$ y $(2, -2, 1)$ forman ángulo recto; el triángulo 3-4-5 da $\cos A = 4/5$, $\text{sen}\,A = 3/5$.

1. $(1,0)\cdot(1,1)=1$, $|(1,1)|=\sqrt{2}$: $\cos=1/\sqrt{2}$; $\det((1,0),(1,1))=1$: $\operatorname{sen}=1/\sqrt{2}$ (G1-006.T1).
2. $(1,2,2)\cdot(2,-2,1)=2-4+2=0$.
3. Con $C=(0,0)$, $A=(4,0)$, $B=(0,3)$: $a=3$, $b=4$, $c=5$, el ángulo C es recto y G1-006.T3 da $\cos A=4/5$, $\operatorname{sen} A=3/5$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El coseno ve direcciones, no vectores

- Con $u=0$ se dividiría entre 0: el ángulo no está definido.
- $\cos\angle(u,v)=\cos\angle(u,w)$ no implica $v=w$: con $u=e_1$, los vectores e_2 y $-e_2$ (y en $\mathbb{R}^3$, también e_3) forman ángulo recto con u. La capa 1 no distingue «arriba» de «abajo»; eso lo hará el ángulo orientado de G1-011.

Ejercicios

1. Clasifica (agudo, recto, obtuso) el ángulo entre $(1,3)$ y $(4,-1)$, y entre $(2,1,0)$ y $(-1,2,5)$.
2. Calcula $\operatorname{sen}\angle((3,4),(4,3))$ con el determinante.
3. Calcula la distancia de $(5,5)$ a $L((0,0),(1,0))$ con G1-006.T2.
4. Demuestra que si el ángulo C de un triángulo es recto, los ángulos A y B son agudos.

Respuestas

1. $4-3=1>0$: agudo. $-2+2+0=0$: recto.
2. $|\det|=|9-16|=7$; $\operatorname{sen}=7/25$.
3. $|P-A|=5\sqrt{2}$, $\operatorname{sen}\angle((5,5),(1,0))=1/\sqrt{2}$; distancia 5.
4. Por G1-006.T3, $\cos A=b/c>0$ y $\cos B=a/c>0$ (lados positivos): ambos son agudos (G1-006.D1).

G1-007 · Leyes de cosenos y senos; resolución de triángulos

Motivación

> **Varillas para un móvil**
> Para un móvil tienes varillas de 2, 3 y 6 dm, y en otra caja de 5, 6 y 7 dm. Con las primeras no se arma un triángulo: $2 + 3 < 6$. Con las segundas sí, y el ángulo opuesto a la varilla de 5 tiene coseno $(36+49-25)/(2\cdot 6\cdot 7) = 5/7$. Este capítulo demuestra las dos afirmaciones y construye el triángulo en coordenadas.
> Dónde falla la analogía: las varillas tienen grosor y se traslapan en las esquinas; los lados del modelo no.

Seguimos en la capa 1: ningún ángulo se mide, y «dar un ángulo» quiere decir dar su coseno (G1-006.D1).

Las dos leyes

Teorema G1-007.T1 (ley de cosenos)
En un triángulo: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (y cíclicamente).

Demostración.

1. $B - C = (B - A) - (C - A)$ (G1-001.T1), y por G1-002.T3:

$$a^2 = |B - A|^2 - 2(B - A)\cdot(C - A) + |C - A|^2.$$

2. Por G1-006.D1, $(B - A)\cdot(C - A) = cb\cos A$, así que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Con los vértices en otro orden salen las otras dos. ■

Teorema G1-007.T2 (ley de senos, por alturas)

$a/\operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$.

Demostración.

1. Por G1-006.T2, $h_C = b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$, con $\operatorname{sen} A, \operatorname{sen} B > 0$. Dividiendo entre $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ (K8): $a/\operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B$.
2. G1-006.T2 aplicado al triángulo BCA (vértices en ese orden) da la altura desde A: $h_A = c \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} C$, y como en el paso 1, $b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$. ■

Teorema G1-007.T3 (proyecciones y el tercer ángulo)

$c = a\cos B + b\cos A$ (y cíclicamente). En consecuencia $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$ y $\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B$.

Demostración.

1. $B - A = (B - C) + (C - A)$, así que, por G1-002.T1 y G1-006.D1,

$$c^2 = (B - A) \cdot (B - C) + (B - A) \cdot (C - A) = ca \cos B + cb \cos A,$$

   pues $(B - A) \cdot (B - C) = (A - B) \cdot (C - B) = ca \cos B$. Dividiendo entre c: $c = a \cos B + b \cos A$.
2. Sea $\rho := a/\operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$ (G1-007.T2). Sustituyendo $a = \rho \operatorname{sen} A$, etc., en el paso 1 y dividiendo entre $\rho > 0$: $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$.
3. La versión cíclica $a = b \cos C + c \cos B$ da del mismo modo $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B$. Con el paso 2 y $\cos^2 B = 1 - \operatorname{sen}^2 B$ (G1-006.T1):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B \cos C &= \operatorname{sen} A - (\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B) \cos B \\ &= \operatorname{sen} A \operatorname{sen}^2 B - \cos A \operatorname{sen} B \cos B. \end{aligned}$$

4. Dividiendo entre $\operatorname{sen} B > 0$: $\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B$. ■

¿Cuándo hay triángulo?

Teorema G1-007.T4 (existencia: LLL)

Para $a, b, c > 0$ existe un triángulo con lados $a, b, c \iff a < b + c, b < a + c$ y $c < a + b$.

Idea de la demostración
(⇒) Si hubiera igualdad en la desigualdad del triángulo, los tres puntos estarían alineados. (⇐) Pon A en el origen y B en el eje x, y calcula dónde tiene que estar C.

Demostración.

1. (⇒) En un triángulo, $a = d(B, C) \leq d(B, A) + d(A, C) = c + b$ (G1-002.T7).
2. Si $a = b + c$, por G1-002.T7 $A \in [B, C] \subset L(B, C - B)$ y A, B, C estarían alineados (G1-001.D3): contradicción. Así $a < b + c$; con los vértices en otro orden, $b < a + c$ y $c < a + b$.
3. (⇐) Sea $x := (b^2 + c^2 - a^2)/(2c)$. Como $2bc > 0$ (C1-004.T3, C1-003.T9):

   $$|x| < b \iff -2bc < b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \iff (b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2 \iff |b - c| < a < b + c,$$

   y $|b - c| < a$ equivale a $b < a + c$ y $c < a + b$. Por hipótesis, $|x| < b$.
4. Entonces $x^2 < b^2$ (C1-003.T9) y $y := \sqrt{b^2 - x^2} > 0$ (G1-002.D2, G1-002.T2).
5. Sean $A := (0, 0)$, $B := (c, 0)$, $C := (x, y)$. Por G1-002.T3: $|C - A|^2 = x^2 + y^2 = b^2$, $|B - A| = c$ y

   $$|B - C|^2 = (c - x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + b^2 = a^2.$$

6. Si $\alpha(B - A) + \beta(C - A) = 0$, la segunda componente da $\beta y = 0$, luego $\beta = 0$ (C1-002.T5), y la primera $\alpha c = 0$, luego $\alpha = 0$. Por G1-001.T5, A, B, C no están alineados: es un triángulo con lados a, b, c (G1-002.T2: las raíces de a^2, b^2, c^2 son a, b, c). ■

Resolver triángulos

Teorema G1-007.T5 (resolución de triángulos)

En un triángulo: (LLL) los lados determinan $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$; (LAL) b, c y $\cos A$ determinan a y los otros ángulos; (ALA) c, $\cos A$ y $\cos B$ determinan $\cos C$, $\operatorname{sen} C$, a y b; (LLA, caso ambiguo) dados a, b y $\cos A$, c es raíz positiva de $c^2 - 2b\cos A \cdot c + b^2 - a^2 = 0$, que tiene 0, 1 o 2 raíces positivas. Existencia, con $\operatorname{sen} A := \sqrt{1-\cos^2 A}$ y $\operatorname{sen} B := \sqrt{1-\cos^2 B}$: (LAL) para todos $b, c > 0$ y $\cos A \in (-1,1)$ hay un triángulo con esos datos, de vértices $P_A = 0$, $P_B = (c,0)$ y $P_C = b(\cos A, \operatorname{sen} A)$; (ALA) para $c > 0$ y $\cos A, \cos B \in (-1,1)$ hay uno $\iff \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B > 0$.

Los vértices se llaman P_A, P_B, P_C para no confundir el punto A con el ángulo A. Escribimos $c_A := \cos A$, $s_A := \operatorname{sen} A = \sqrt{1-c_A^2}$, y lo mismo con B.

Demostración.

1. (LLL) Por G1-007.T1, $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$, y cíclicamente.
2. (LAL) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ determina $a = \sqrt{a^2}$ ($a > 0$, G1-002.T2); con los tres lados, el paso 1 da $\cos B$ y $\cos C$.
3. (ALA) $\cos A$, $\cos B$ determinan s_A, s_B (G1-006.D1) y, por G1-007.T3, $\operatorname{sen} C$ y $\cos C$; por la ley de senos (G1-007.T2), $a = c\, s_A/\operatorname{sen} C$ y $b = c\, s_B/\operatorname{sen} C$.
4. (LLA) La ley de cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ es $c^2 - 2b\cos A \cdot c + b^2 - a^2 = 0$; c es una raíz positiva, y por G1-005.T1 hay a lo más dos raíces.
5. (LAL, existencia) Con $P_A := 0$, $P_B := (c,0)$, $P_C := b(c_A, s_A)$: $|P_C| = b$ (pues $c_A^2 + s_A^2 = 1$), $|P_B| = c$, y $\cos\angle(P_B, P_C) = cb\, c_A/(cb) = c_A$. Como $\det(P_B, P_C) = cb\, s_A \neq 0$ ($c_A \neq \pm 1$), no son proporcionales (como en G1-007.T4, paso 6).
6. (ALA, necesidad) Si existe el triángulo, $\operatorname{sen} C > 0$ (G1-006.T2) y por G1-007.T3 es $s_A c_B + c_A s_B$.
7. (ALA, suficiencia) Supón $s := s_A c_B + c_A s_B > 0$. Con $P_A := 0$ y $P_B := (c,0)$, buscamos $t(c_A, s_A) = P_B + r(-c_B, s_B)$, es decir $tc_A + rc_B = c, ts_A - rs_B = 0$. El determinante es $-c_A s_B - c_B s_A = -s \neq 0$, y G1-003.T3 da la solución única $t = c\, s_B/s > 0, r = c\, s_A/s > 0$.
8. Con $P_C := t(c_A, s_A)$: $\cos\angle(P_B - P_A, P_C - P_A) = ct\, c_A/(ct) = c_A$, y $P_C - P_B = r(-c_B, s_B)$, $P_A - P_B = (-c, 0)$ dan $\cos\angle(P_C - P_B, P_A - P_B) = rc\, c_B/(rc) = c_B$. $\det(P_B, P_C) = ct\, s_A \neq 0$: es un triángulo. ■

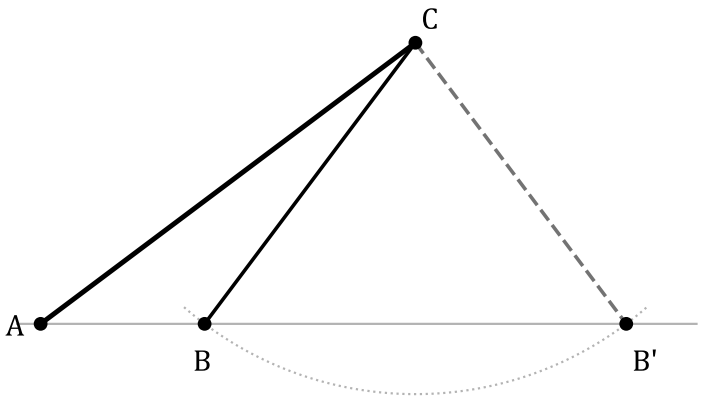


Figura 6: Caso ambiguo: $a = 3$, $b = 4$, $\cos A = 4/5$ dan dos triángulos, con $c = 7/5$ y $c = 5$.

Ejemplo G1-007.E1

Lados 2, 3, 6 no forman triángulo ($2 + 3 < 6$); con lados 5, 6, 7, el ángulo opuesto a 5 tiene $\cos = 5/7$. Caso ambiguo: $a = 3$, $b = 4$, $\cos A = 4/5$ da $c^2 - (32/5)c + 7 = 0$, con $c = 5$ o $c = 7/5$.

1. $6 < 2 + 3$ es falso: por G1-007.T4 no hay triángulo.
2. Con $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$: $(36 + 49 - 25)/84 = 60/84 = 5/7$ (G1-007.T1).
3. $2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$ y $16 - 9 = 7$; $\Delta = \frac{1024}{25} - 28 = \frac{324}{25}$, así que $c = (\frac{32}{5} \pm \frac{18}{5})/2$, es decir 5 o $\frac{7}{5}$ (G1-005.T1), ambas positivas.

Por qué cada hipótesis

⚠ Desigualdades estrictas y el caso ambiguo

- Con $a = b + c$ (por ejemplo 5, 2, 3) el único «triángulo» tiene los tres puntos alineados: en la construcción, $x = -b$ y la altura es 0.
- Con LLA no hay unicidad: el ejemplo da dos triángulos distintos con a, b y $\cos A$ iguales. Por eso LLA no es un criterio de congruencia en G1-008.

Ejercicios

1. ¿Forman triángulo 4, 7, 10? Si sí, ¿qué ángulo es obtuso?
2. Resuelve (LAL) $b = 2, c = 3, \cos A = 1/4$.
3. Demuestra que en un triángulo a lo más un ángulo es recto u obtuso.
4. Con $a = 2, b = 4, \cos A = 4/5$, ¿cuántos triángulos hay?

Respuestas

1. $10 < 11$: sí. $\cos C = (16 + 49 - 100)/56 = -35/56 < 0$: el opuesto a 10.
2. $a^2 = 4 + 9 - 3 = 10$, $a = \sqrt{10}$; $\cos B = (10 + 9 - 4)/(6\sqrt{10}) = 15/(6\sqrt{10})$, $\cos C = (10 + 4 - 9)/(4\sqrt{10}) = 5/(4\sqrt{10})$.
3. Si $\cos A \leq 0$ y $\cos B \leq 0$, por G1-007.T3 $c = a\cos B + b\cos A \leq 0$, contra $c > 0$. Igual con cualquier otro par de vértices.
4. $c^2 - \frac{32}{5}c + 12 = 0$: $\Delta = \frac{1024}{25} - 48 < 0$. Ninguno.

G1-008 · Congruencia

Motivación

> **Piezas de un vitral**
> Un taller de vitrales tiene una pieza modelo con vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,4)$ (en cm) y corta una nueva con vértices $(1,1)$, $(1,4)$, $(-3,1)$. ¿Encaja la nueva en el hueco de la modelo? Ambas tienen lados 3, 4 y 5, y eso basta: girando la modelo un cuarto de vuelta y trasladándola por $(1,1)$ cae justo sobre la nueva.
> Dónde falla la analogía: el vidrio tiene grosor y bordes astillados; un triángulo del modelo es exacto.

Parte 1 · Congruencia y criterios

Definición G1-008.D1 (congruencia)

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ (en ese orden) son **congruentes** si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $\cos A = \cos A'$, $\cos B = \cos B'$ y $\cos C = \cos C'$.

Teorema G1-008.T1 (criterios LLL, LAL, ALA)

Dos triángulos son congruentes si coinciden (LLL) los tres lados; (LAL) b, c y $\cos A$; (ALA) c, $\cos A$ y $\cos B$.

> **Idea de la demostración**
> Cada criterio da, con las leyes de G1-007, los seis números de la definición.

Demostración.

1. (LLL) Por la ley de cosenos (G1-007.T1), $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc) = (b'^2 + c'^2 - a'^2)/(2b'c') = \cos A'$, y del mismo modo $\cos B = \cos B'$, $\cos C = \cos C'$ (G1-007.T1 en los otros vértices).
2. (LAL) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a'^2$ (G1-007.T1); como $a, a' > 0$, $a = a'$ (G1-002.T2). Se aplica LLL.
3. (ALA) $\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \operatorname{sen} A'$ y $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} B'$ (G1-006.D1).
4. Por G1-007.T3, $\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B = \cos C'$ y $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} C'$.
5. Por la ley de senos (G1-007.T2), $a = c \operatorname{sen} A / \operatorname{sen} C = a'$ y $b = c \operatorname{sen} B / \operatorname{sen} C = b'$. Los seis números coinciden. ■

Teorema G1-008.T2 (triángulo isósceles)

En ABC: $b = c \iff \cos B = \cos C$.

Demostración.

1. (⇒) Considera ABC y ACB (en ese orden). Los lados de ACB son: opuesto al primer vértice, $|C - B| = a$; al segundo, $|B - A| = c = b$; al tercero, $|A - C| = b = c$. Coinciden con a, b, c: por LLL (G1-008.T1) son congruentes.
2. El ángulo del segundo vértice de ACB es el ángulo en C; la congruencia da $\cos C = \cos B$ (G1-008.D1).
3. (⇐) Considera BCA y CBA (en ese orden). En BCA el lado «c» (entre los dos primeros vértices) es $|B - C| = a$, y los ángulos «A», «B» son los de B y C. En CBA, el lado «c» es $|C - B| = a$ y los ángulos «A», «B» son los de C y B.
4. Como $\cos B = \cos C$, los dos triángulos tienen el mismo lado «c» y los mismos cosenos «A», «B»: por ALA (G1-008.T1) son congruentes.
5. Sus lados «b» (del tercer vértice al primero) coinciden: en BCA es $|A-B| = c$, en CBA es $|A-C| = b$. Así $b = c$. ■

Parte 2 · Congruencia por movimientos

Definición G1-008.D2 (movimiento del plano)

Un **marco ortonormal** de $\mathbb{R}^2$ es (w_1, w_2) con $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 \cdot w_2 = 0$. Un **movimiento** de $\mathbb{R}^2$ es $m(x) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + b$ con (w_1, w_2) un marco ortonormal y $b \in \mathbb{R}^2$; su **parte lineal** es $\ell(x) = x_1 w_1 + x_2 w_2$ (la «matriz con columnas w_1, w_2»).

Teorema G1-008.T3 (marcos del plano)

Si $u \in \mathbb{R}^2$ es unitario, los marcos ortonormales con primer vector u son exactamente $(u, u^\perp)$ y $(u, -u^\perp)$, y todo $y \in \mathbb{R}^2$ es $y = (y \cdot u)u + (y \cdot u^\perp)u^\perp$. Para todo marco ortonormal (w_1, w_2), $y = (y \cdot w_1)w_1 + (y \cdot w_2)w_2$.

Demostración.

1. Si (u, w) es un marco, $w \cdot u = 0$ y por G1-003.T2 $w = t\,u^\perp$; como $|w| = |t||u^\perp| = |t| = 1$, $t = \pm 1$. Recíprocamente $|\pm u^\perp| = 1$ y $u \cdot (\pm u^\perp) = 0$ (G1-003.T2).
2. Sea $z := y - (y \cdot u)u - (y \cdot u^\perp)u^\perp$. Entonces $z \cdot u = y \cdot u - y \cdot u - 0 = 0$ y $z \cdot u^\perp = 0$ (G1-002.T1). Por G1-003.T2, $z = t\,u^\perp$, y $0 = z \cdot u^\perp = t$: $z = 0$.
3. Para un marco (w_1, w_2): por el paso 1, $w_2 = \pm w_1^\perp$, y $(y \cdot (-w_1^\perp))(-w_1^\perp) = (y \cdot w_1^\perp)w_1^\perp$; el paso 2 da la fórmula. ■

Teorema G1-008.T4 (los movimientos)

Un movimiento m conserva el producto punto de diferencias, $(m(P) - m(Q)) \cdot (m(R) - m(S)) = (P - Q) \cdot (R - S)$; es una isometría biyectiva cuya inversa, $y \mapsto ((y - b) \cdot w_1, (y - b) \cdot w_2)$, también es un movimiento; lleva la recta $L(P, v)$ sobre la recta $L(m(P), \ell(v))$; la composición de movimientos es un movimiento; lleva cada triángulo en uno congruente.

Demostración.

1. $\ell(x) \cdot \ell(y) = (x_1 w_1 + x_2 w_2) \cdot (y_1 w_1 + y_2 w_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = x \cdot y$ (G1-002.T1, G1-008.D2).
2. $m(P) - m(Q) = \ell(P) - \ell(Q) = \ell(P - Q)$ (G1-001.T1), y por el paso 1 se conservan los productos punto de diferencias. Con $R = P, S = Q$ y raíces: $|m(P) - m(Q)| = |P - Q|$ (G1-004.D2).
3. Sea $n(y) := ((y - b) \cdot w_1, (y - b) \cdot w_2)$. Por el paso 1, $\ell(x) \cdot w_j = \ell(x) \cdot \ell(e_j) = x_j$, así que

$n(m(x)) = x$; y por G1-008.T3, $m(n(y)) = ((y-b)\cdot w_1)w_1 + ((y-b)\cdot w_2)w_2 + b = y$. Por C1-011.T1, m es biyectiva con inversa n.

4. n es un movimiento: $n(y) = y_1 w_1' + y_2 w_2' + b'$ con $w_j' := (e_j \cdot w_1, e_j \cdot w_2)$ y $b' := -(b \cdot w_1, b \cdot w_2)$ (G1-002.T1, G1-001.T1). Por G1-008.T3, $\ell(w_j') = (e_j \cdot w_1)w_1 + (e_j \cdot w_2)w_2 = e_j$, y por el paso 1, $w_i' \cdot w_j' = e_i \cdot e_j$: es un marco ortonormal.
5. $m(P + tv) = m(P) + t\,\ell(v)$, y $\ell(v) \neq 0$ porque $|\ell(v)| = |v|$: $m(L(P, v)) = L(m(P), \ell(v))$.
6. Si m_1, m_2 son movimientos, $m_2(m_1(x)) = x_1\ell_2(w_1) + x_2\ell_2(w_2) + \ell_2(b_1) + b_2$, y $(\ell_2(w_1), \ell_2(w_2))$ es un marco ortonormal por el paso 1.
7. Si ABC es un triángulo, $m(A), m(B), m(C)$ no están alineados: si estuvieran en una recta L', por el paso 5 aplicado a n, A, B, C estarían en la recta $n(L')$. Los lados se conservan (paso 2) y los cosenos también (paso 2 y G1-006.D1): son congruentes (G1-008.D1). ■

Teorema G1-008.T5 (congruentes ⟺ existe un movimiento)

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ de $\mathbb{R}^2$ son congruentes ⟺ existe un movimiento m con $m(A) = A'$, $m(B) = B'$ y $m(C) = C'$.

Idea de la demostración

Escribe C en el marco $(u, u^\perp)$ pegado al lado AB; el movimiento manda ese marco al de $A'B'$, con un volteo si hace falta.

Demostración.

1. (⇐) Es G1-008.T4.
2. (⇒) Sean $u := (B - A)/c$ y $u' := (B' - A')/c'$, unitarios (G1-002.T3). Por G1-008.T3, $C - A = ((C-A)\cdot u)\,u + ((C-A)\cdot u^\perp)\,u^\perp$.
3. $(C - A)\cdot u = b\cos A$ (G1-006.D1) y, como $|C - A|^2 = ((C-A)\cdot u)^2 + ((C-A)\cdot u^\perp)^2$ (G1-002.T3, $u \perp u^\perp$),

$$((C-A)\cdot u^\perp)^2 = b^2 - b^2\cos^2 A = b^2 \operatorname{sen}^2 A.$$

   Así $(C - A)\cdot u^\perp = \varepsilon\, b \operatorname{sen} A$ con $\varepsilon \in \{1, -1\}$ (G1-002.T2; $\operatorname{sen} A > 0$ por G1-006.T2).
4. Del mismo modo $C' - A' = b'\cos A'\,u' + \varepsilon' b' \operatorname{sen} A'\,u'^\perp$.
5. Sea $\ell(y) := (y \cdot u)\,u' + \varepsilon\varepsilon'(y \cdot u^\perp)\,u'^\perp$. Es lineal (G1-002.T1) y, como $(u', u'^\perp)$ es un marco y $(\varepsilon\varepsilon')^2 = 1$, $\ell(y)\cdot\ell(z) = (y\cdot u)(z\cdot u) + (y\cdot u^\perp)(z\cdot u^\perp) = y \cdot z$ (G1-008.T3).

6. Por linealidad $\ell(x) = x_1\ell(e_1) + x_2\ell(e_2)$, y por el paso 5 $(\ell(e_1), \ell(e_2))$ es un marco ortonormal: $m(x) := \ell(x) + A' - \ell(A) = A' + \ell(x - A)$ es un movimiento (G1-008.D2).
7. $m(A) = A'$. $m(B) = A' + \ell(cu) = A' + c\,u' = A' + c'u' = B'$ $(u \cdot u^{\perp} = 0)$.
8. Por los pasos 3-4 y la congruencia ($b = b'$, $\cos A = \cos A'$, luego $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} A'$):

$$m(C) = A' + b\cos A\,u' + \varepsilon\varepsilon' \cdot \varepsilon\, b \operatorname{sen} A\, u'^{\perp} = A' + b'\cos A'\,u' + \varepsilon' b' \operatorname{sen} A'\, u'^{\perp} = C'. \qquad \blacksquare$$

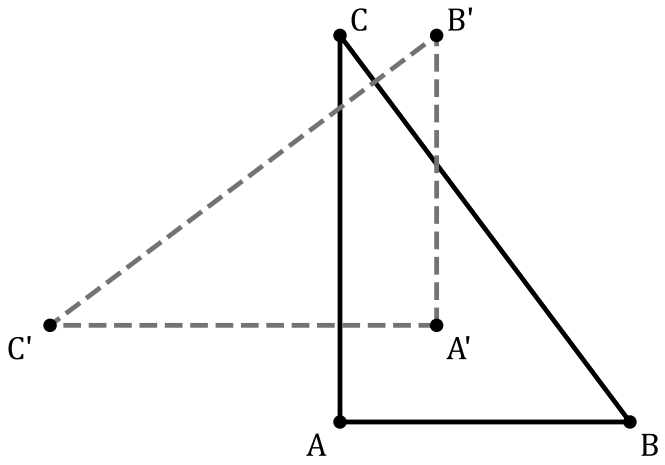


Figura 7: Las dos piezas del vitral: $m(x) = x^{\perp} + (1, 1)$ lleva una en la otra.

Ejemplo G1-008.E1

Los triángulos $(0, 0), (3, 0), (0, 4)$ y $(1, 1), (1, 4), (-3, 1)$ son congruentes; el movimiento es una rotación de un cuarto de vuelta seguida de una traslación.

1. Primer triángulo: $a = |(3, -4)| = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Segundo: $a' = |(1, 4) - (-3, 1)| = |(4, 3)| = 5$, $b' = |(-4, 0)| = 4$, $c' = |(0, -3)| = 3$. Por LLL son congruentes (G1-008.T1).
2. $m(x) := x_1e_2 + x_2(-e_1) + (1, 1) = (1 - x_2, 1 + x_1)$, con el marco $(e_2, -e_1)$; $m(0, 0) = (1, 1)$, $m(3, 0) = (1, 4)$, $m(0, 4) = (-3, 1)$. Su parte lineal es $x \mapsto x^{\perp}$, el giro de un cuarto de vuelta.

Por qué cada hipótesis

⚠ Lo que no basta

- LLA no es criterio: $a = 3$, $b = 4$, $\cos A = 4/5$ admite $c = 5$ y $c = 7/5$ (G1-007.E1).
- Tres cosenos iguales no bastan: $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,4)$ y $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,8)$ tienen los mismos cosenos y lados distintos (son semejantes, G1-009).
- El orden importa: ABC y BAC del triángulo 3-4-5 no son congruentes «en ese orden» ($a = 5$, $a' = 4$).
- $m(x) = (2x_1, x_2)$ no viene de un marco ortonormal y cambia los lados.

Ejercicios

1. ¿Son congruentes (en ese orden) $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,3)$ y $(5,5)$, $(5,7)$, $(2,6)$?
2. Encuentra el movimiento que lleva $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ en $(2,0)$, $(2,-1)$, $(3,0)$.
3. Demuestra que si $a = b = c$, los tres cosenos son iguales a $1/2$.
4. Demuestra que la inversa de un movimiento lleva triángulos en triángulos congruentes.

Respuestas

1. Lados del primero: $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$, 2; del segundo: $|(5,7) - (2,6)| = \sqrt{10}$, $|(2,6) - (5,5)| = \sqrt{10}$, 2. LLL: sí.
2. $u = e_1 \mapsto (0,-1)$ y $e_2 \mapsto (1,0)$: marco $((0,-1),(1,0))$, $m(x) = (2 + x_2, -x_1)$.
3. Ley de cosenos: $a^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos A$, $\cos A = 1/2$; igual los otros.
4. La inversa es un movimiento (G1-008.T4), y se aplica G1-008.T4.

G1-009 · Semejanza y teorema de Tales

Motivación

> **La sombra del poste**
> A media tarde, un bastón vertical de 1 m proyecta una sombra de 0.8 m, y a la misma hora la sombra de un poste de luz mide 6 m. Los rayos del sol son (casi) paralelos, así que el bastón y el poste forman dos triángulos con un vértice común (el extremo de las sombras) y lados paralelos. La razón de las sombras, $0.8/6 = 2/15$, es la de las alturas: el poste mide $1/(2/15) = 7.5$ m. Dónde falla la analogía: los rayos del sol no son exactamente paralelos, y con una linterna cercana las sombras se abren (eso es la perspectiva, G2-015).

Tales

Teorema G1-009.T1 (Tales y su recíproco)

En un triángulo ABC sean $D = A + t(B - A)$ con $t \neq 0$ y $E \in L(A, C - A)$. Entonces $E - D \parallel C - B \iff E = A + t(C - A)$. En ese caso $|D-A|/|B-A| = |E-A|/|C-A| = |E-D|/|C-B| = |t|$.

> **Idea de la demostración**
> Escribe $E - D$ con $B - A$ y $C - A$; como esos dos no son proporcionales, los coeficientes se pueden comparar.

Demostración.

1. Como $E \in L(A, C - A)$, $E = A + s(C - A)$ para algún s, y $E - D = s(C - A) - t(B - A)$ (G1-001.D3, G1-001.T1).
2. ($\Leftarrow$) Si $s = t$, $E - D = t(C - B)$. Como $t \neq 0$ y $C - B \neq 0$, $E - D \neq 0$ y es paralelo a $C - B$ (G1-001.D2).

3. (⇒) Si $E - D \parallel C - B$, por G1-001.T2 existe λ con $E - D = \lambda(C - B) = \lambda(C - A) - \lambda(B - A)$.
4. Igualando con el paso 1: $(s - \lambda)(C - A) + (\lambda - t)(B - A) = 0$ (G1-001.T1).
5. $B - A$ y $C - A$ no son proporcionales (G1-001.T5): $s - \lambda = 0$ y $\lambda - t = 0$, así que $s = t$.
6. En ese caso $D - A = t(B - A)$, $E - A = t(C - A)$ y $E - D = t(C - B)$; por G1-002.T3 las tres razones valen $|t|$. ■

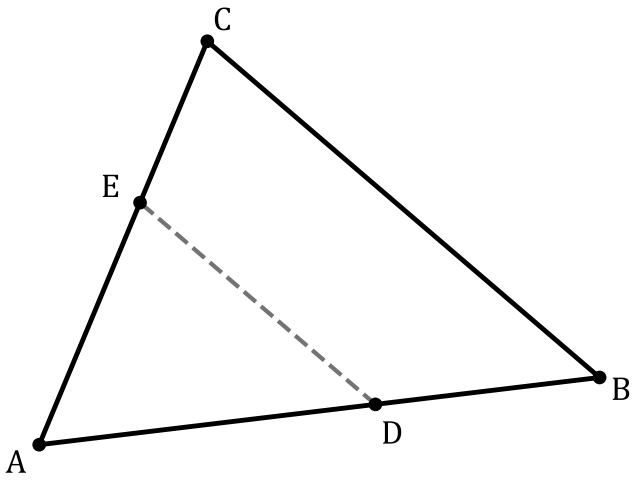


Figura 8: Tales: si $E - D \parallel C - B$, entonces D y E dividen AB y AC en la misma razón t.

Homotecias

Definición G1-009.D1 (homotecia)

Para $O \in \mathbb{R}^n$ y $k \neq 0$: $h(X) := O + k(X - O)$.

Teorema G1-009.T2 (propiedades de la homotecia)

$|h(P) - h(Q)| = |k||P - Q|$; h es biyectiva; lleva $L(P, v)$ sobre $L(h(P), v)$ (rectas paralelas); conserva el coseno de los ángulos; lleva triángulos en triángulos.

Demostración.

1. $h(P) - h(Q) = k(P - Q)$ (G1-001.T1), así que $|h(P) - h(Q)| = |k||P - Q|$ (G1-002.T3).

2. $g(Y) := O + k^{-1}(Y - O)$ cumple $g(h(X)) = X$ y $h(g(Y)) = Y$ (K8, G1-001.T1); por C1-011.T1, h es biyectiva.
3. $h(P + tv) = h(P) + tk\,v$, y tk recorre $\mathbb{R}$ cuando t lo hace: $h(L(P, v)) = L(h(P), kv) = L(h(P), v)$ (G1-001.T4 (a)).
4. Por el paso 1, $\cos \angle(h(P) - h(Q), h(R) - h(S)) = \dfrac{k^2(P - Q) \cdot (R - S)}{k^2|P - Q||R - S|} = \cos \angle(P - Q, R - S)$ (G1-006.D1, $|k|^2 = k^2$).
5. Si $\alpha(h(B) - h(A)) + \beta(h(C) - h(A)) = 0$, entonces $\alpha k(B - A) + \beta k(C - A) = 0$, y por G1-001.T5 $\alpha k = \beta k = 0$, es decir $\alpha = \beta = 0$: $h(A), h(B), h(C)$ no están alineados. ■

Semejanza

Definición G1-009.D2 (semejanza)

ABC y $A'B'C'$ son **semejantes** con razón $k > 0$ si $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ y $\cos A = \cos A'$, $\cos B = \cos B'$, $\cos C = \cos C'$.

Teorema G1-009.T3 (criterios AA, LAL, LLL)

Son semejantes si (AA) $\cos A = \cos A'$ y $\cos B = \cos B'$; (LAL) $b'/b = c'/c$ y $\cos A = \cos A'$; (LLL) $a'/a = b'/b = c'/c$.

Demostración.

1. (AA) $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} A'$ y $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} B'$ (G1-006.D1); por G1-007.T3, $\cos C = \cos C'$ y $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} C'$.
2. Sean $\rho := a/\operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$ y ρ' el de $A'B'C'$ (G1-007.T2), y $k := \rho'/\rho > 0$. Entonces $a' = \rho' \operatorname{sen} A' = k\rho \operatorname{sen} A = ka$, y lo mismo $b' = kb$, $c' = kc$.
3. (LAL) Con $k := b'/b = c'/c$, por la ley de cosenos (G1-007.T1):

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A' = k^2(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) = k^2a^2,$$

   y $a' = ka$ (G1-002.T2). Así las tres razones son k y se aplica LLL.
4. (LLL) Con $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$: $\cos A' = \dfrac{k^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2k^2bc} = \cos A$, y cíclicamente (G1-007.T1). ■

Corolario G1-009.C1 (semejantes ⟺ movimiento y homotecia)

En $\mathbb{R}^2$, ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón k ⟺ existe $X \mapsto m(kX)$ (m movimiento) que lleva A, B, C en A', B', C'.

Demostración.

1. (⇐) $X \mapsto kX$ es la homotecia de centro 0 y razón k (G1-009.D1): multiplica los lados por k, conserva cosenos y lleva el triángulo en un triángulo (G1-009.T2). El movimiento m conserva lados y cosenos (G1-008.T4). Así $A'B'C'$ es semejante a ABC con razón k (G1-009.D2).
2. (⇒) Si son semejantes con razón k, el triángulo kA, kB, kC (G1-009.T2) tiene lados $ka = a', kb = b', kc = c'$ y los cosenos de ABC, que son los de $A'B'C'$: es congruente con $A'B'C'$ (G1-008.D1).
3. Por G1-008.T5 hay un movimiento m con $m(kA) = A', m(kB) = B', m(kC) = C'$. ■

Ejemplo G1-009.E1

La paralela a BC por el punto medio de AB corta a AC en su punto medio y mide $a/2$.

1. El punto medio de $[A, B]$ es $D = A + \frac{1}{2}(B - A)$ (G1-001.T3), con $t = \frac{1}{2} \neq 0$.
2. La paralela a BC por D es $L(D, C - B)$; si corta a $L(A, C - A)$ en E, entonces $E - D \parallel C - B$ (o $E = D$, imposible porque $D \notin L(A, C - A)$ por G1-001.T5).
3. Por G1-009.T1, $E = A + \frac{1}{2}(C - A)$, el punto medio de $[A, C]$, y $|E - D| = \frac{1}{2}|C - B| = a/2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin triángulo, Tales falla

Con $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$ (alineados), $t = \frac{1}{2}$ y $E = (3, 0)$: $D = (\frac{1}{2}, 0)$ y $E - D = (\frac{5}{2}, 0) \parallel C - B$, pero $E \neq A + \frac{1}{2}(C - A) = (1, 0)$. El paso 5 de la demostración necesita que $B - A$ y $C - A$ no sean proporcionales. Con $t = 0$, $D = A$ y no hay recta paralela que separe.

Ejercicios

1. En el triángulo $A = (0,0)$, $B = (6,0)$, $C = (0,3)$, encuentra E en AC con $E - D \parallel C - B$ para $D = (4,0)$.
2. ¿Son semejantes los triángulos de lados 3, 4, 5 y 4.5, 6, 7.5? ¿Con qué razón?
3. Demuestra que la composición de dos homotecias con el mismo centro es una homotecia.
4. Demuestra que si $k < 0$, la homotecia de centro O y razón k es σ_O compuesta con la de razón $|k|$.

Respuestas

1. $t = 4/6 = 2/3$; $E = (0,2)$.
2. Sí, razón 1.5 (LLL).
3. $O + k_2(O + k_1(X - O) - O) = O + k_1k_2(X - O)$, y $k_1k_2 \neq 0$.
4. $\sigma_O(O + |k|(X - O)) = O - |k|(X - O) = O + k(X - O)$.

G1-010 · Rectas y puntos notables del triángulo

Motivación

> **La antena y la fuente**
> Tres colonias están en $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0,3)$ (km). Una antena a la misma distancia de las tres debe ir en $O = (2, 3/2)$, y es el único lugar posible: está a $5/2$ km de cada colonia. En un jardín con esos vértices, la fuente circular más grande que toca las tres bardas tiene centro $I = (1,1)$ y radio 1. Son dos puntos distintos, y cada uno sale de que ciertas tres rectas pasan por un mismo punto.
> Dónde falla la analogía: las colonias y las bardas tienen tamaño; aquí son puntos y rectas.

Todo el capítulo es en $\mathbb{R}^2$, para un triángulo ABC con lados a, b, c (G1-002.D3) y puntos medios $M_a := (B + C)/2$, $M_b := (C + A)/2$, $M_c := (A + B)/2$.

Parte 1 · Medianas, mediatrices y alturas

Definición G1-010.D1 (rectas notables)

Mediana desde A: $L(A, M_a - A)$ con M_a el punto medio de $[B, C]$. Mediatriz de $[B, C]$: $N(M_a, C - B)$. Altura desde A: $N(A, C - B)$. Bisectriz (interior) desde A: $L(A, w_A)$ con $w_A := (B - A)/c + (C - A)/b$. Rectas **concurrentes**: con un punto común.

Antes de los teoremas, un hecho que se usa varias veces: **si** $u \neq 0$ **y** $\det(u, v) = 0$**, entonces** v **es múltiplo de** u**.** En efecto, $u^\perp \neq 0$ y $v \cdot u^\perp = u^\perp \cdot v = \det(u, v) = 0$; por G1-003.T2 aplicado a $u^\perp$, $v = t(u^\perp)^\perp = -tu$ para algún t. En un triángulo, por lo tanto, $\det(B - A, C - A) \neq 0$ (G1-001.T5), y lo mismo con cualquier par de lados.

Teorema G1-010.T1 (baricentro)

Las tres medianas pasan por $G := (A + B + C)/3$, y $G = A + (2/3)(M_a - A)$. Dos medianas cualesquiera se cortan solo en G.

Demostración.

1. $A + \frac{2}{3}(M_a - A) = A + \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2} - A\right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = G$ (G1-001.T1): G está en la mediana desde A ($t = 2/3$).
2. La expresión de G es simétrica en A, B, C; el mismo cálculo da $G = B + \frac{2}{3}(M_b - B) = C + \frac{2}{3}(M_c - C)$.
3. Dos medianas son rectas distintas: si la mediana desde A contuviera a B, contendría a M_a y a $C = 2M_a - B$, y A, B, C estarían alineados (G1-001.T4); igual con los otros pares.
4. Dos rectas distintas tienen a lo más un punto común (G1-001.T4 (c)); dos medianas comparten G, así que se cortan solo en G. ■

Teorema G1-010.T2 (circuncentro)

Existe un único O equidistante de A, B y C; está en las tres mediatrices, que concurren solo en O. Con $R := |A - O|$, $C(O, R)$ es la única circunferencia que pasa por A, B, C.

> **Idea de la demostración**
> Equidistar de dos puntos es una ecuación lineal; de tres, un sistema 2×2 con solución única porque el triángulo no está aplastado.

Demostración.

1. Por G1-002.T3, $|X - A|^2 - |X - B|^2 = 2X \cdot (B - A) - (|B|^2 - |A|^2)$, así que $|X - A| = |X - B| \iff X \cdot (B - A) = (|B|^2 - |A|^2)/2$ (G1-002.T2). Igual con C en lugar de B.
2. X equidista de A, B y $C \iff$

$$X \cdot (B - A) = \frac{|B|^2 - |A|^2}{2}, \qquad X \cdot (C - A) = \frac{|C|^2 - |A|^2}{2}.$$

3. $\det(B - A, C - A) \neq 0$ (hecho previo, G1-003.T2, G1-001.T5). Por G1-003.T3 el sistema tiene una única solución O.
4. $|O - B| = |O - A| = |O - C|$, así que O está en las tres mediatrices (G1-004.T3).

5. Si X está en dos mediatrices, por G1-004.T3 equidista de los tres vértices, y por el paso 3, $X = O$.
6. $C(O, R)$ pasa por A, B, C (G1-005.D1). Si $C(O', R')$ pasa por los tres, O' equidista de ellos: $O' = O$ y $R' = |A - O'| = R$. ■

Teorema G1-010.T3 (ortocentro)
$H := A + B + C - 2O$ está en las tres alturas, que concurren solo en H.

Demostración.

1. $H - A = (B - O) + (C - O)$ y $C - B = (C - O) - (B - O)$ (G1-001.T1), así que (G1-002.T1, G1-002.T3)

$$(H - A) \cdot (C - B) = |C - O|^2 - |B - O|^2 = 0.$$

   Por lo tanto $H \in N(A, C - B)$, la altura desde A.
2. Igual (la fórmula es simétrica) H está en las alturas desde B y C.
3. Un punto común a las alturas desde A y B resuelve $X \cdot (C - B) = A \cdot (C - B)$ y $X \cdot (A - C) = B \cdot (A - C)$, con $\det(C - B, A - C) \neq 0$ (hecho previo, aplicado a los lados de C). Por G1-003.T3 la solución es única: es H. ■

Parte 2 · Euler, bisectrices y la ley de senos extendida

Teorema G1-010.T4 (recta de Euler)
$H - O = 3(G - O)$: O, G y H están alineados (si $O \neq G$, en la recta $L(O, G - O)$).

Demostración.

1. $H - O = A + B + C - 3O = 3\left(\frac{A+B+C}{3} - O\right) = 3(G - O)$ (G1-010.T1, G1-010.T3, G1-001.T1).
2. Si $O \neq G$: $O = O + 0(G - O)$, $G = O + 1(G - O)$ y $H = O + 3(G - O)$ están en $L(O, G - O)$. Si $O = G$, entonces $H = O$ y los tres coinciden. ■

Teorema G1-010.T5 (bisectrices e incentro)

$w_A \neq 0$ y $\cos\angle(w_A, B-A) = \cos\angle(w_A, C-A)$; los puntos $X = A + tw_A$ $(t \geq 0)$ equidistan de las rectas AB y AC. Las tres bisectrices pasan por $I := (aA + bB + cC)/(a+b+c)$, y $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA) =: r$.

Idea de la demostración

w_A es la diagonal del rombo formado por los dos vectores unitarios de los lados: divide el ángulo en dos iguales. Luego basta escribir $I - A$ como múltiplo positivo de w_A.

Demostración.

1. Si $w_A = 0$, entonces $\frac{1}{c}(B-A) + \frac{1}{b}(C-A) = 0$ con coeficientes no nulos, contra G1-001.T5. Así $w_A \neq 0$.
2. Por G1-002.T1 y G1-006.D1:

$$\frac{w_A \cdot (B-A)}{c} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{(C-A)\cdot(B-A)}{bc} = 1 + \cos A,$$

   y del mismo modo $w_A \cdot (C-A)/b = 1 + \cos A$. Así $\cos\angle(w_A, B-A) = (1+\cos A)/|w_A| = \cos\angle(w_A, C-A)$.
3. Los senos también coinciden (G1-006.D1). Si $X = A + tw_A$ con $t > 0$, por G1-006.T2 y G1-006.T1 (escala positiva): $d(X, AB) = t|w_A| \operatorname{sen}\angle(w_A, B-A) = t|w_A| \operatorname{sen}\angle(w_A, C-A) = d(X, AC)$. Si $t = 0$, $X = A$ está en ambas rectas y las dos distancias son 0.
4. $I - A = \dfrac{b(B-A) + c(C-A)}{a+b+c} = \dfrac{bc}{a+b+c}\, w_A$ (G1-001.T1), con $bc/(a+b+c) > 0$: I está en la bisectriz desde A, con $t > 0$.
5. La fórmula de I es simétrica: con $w_B = (C-B)/a + (A-B)/c$, $I - B = \frac{ca}{a+b+c} w_B$, e igual desde C.
6. Por el paso 3, $d(I, AB) = d(I, AC)$ y $d(I, BA) = d(I, BC)$; como la recta AB es la recta BA (G1-001.T4), las tres distancias coinciden. ■

Teorema G1-010.T6 (ley de senos extendida)

$a/\operatorname{sen} A = 2R$.

Demostración. Sean $u := B - A$, $v := C - A$ y $D := \det(u, v) \neq 0$.

1. $O - A$ equidista de 0, u y v; como en G1-010.T2, eso es $X \cdot u = |u|^2/2 = c^2/2$ y $X \cdot v = b^2/2$. Por G1-003.T3:
$$O - A = \frac{b^2 u^\perp - c^2 v^\perp}{2D}.$$
2. $|u^\perp| = c$, $|v^\perp| = b$ (G1-003.T2) y $u^\perp \cdot v^\perp = \det(u, v^\perp) = u_1 v_1 + u_2 v_2 = u \cdot v$ (G1-003.T2, G1-002.D4). Entonces (G1-002.T3)
$$R^2 = |O - A|^2 = \frac{b^4 c^2 - 2b^2 c^2\, u \cdot v + c^4 b^2}{4D^2} = \frac{b^2 c^2\, |v - u|^2}{4D^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{4D^2},$$
así que $R = abc/(2|D|)$ (G1-002.T2).
3. Por G1-006.T1, $\operatorname{sen} A = |D|/(bc)$, y $a/\operatorname{sen} A = abc/|D| = 2R$. ■

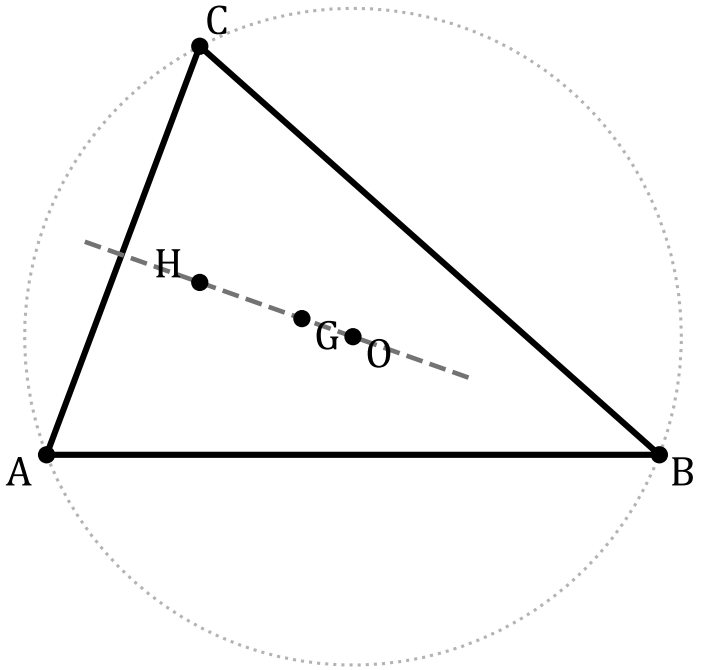


Figura 9: Un triángulo con su baricentro G, circuncentro O y ortocentro H sobre la recta de Euler.

Ejemplo G1-010.E1

Para $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0,3)$: $G = (4/3, 1)$, $O = (2, 3/2)$, $H = (0,0)$, $I = (1,1)$, $r = 1$, $R = 5/2$.

1. $a = |B - C| = 5$, $b = 3$, $c = 4$. $G = (4,3)/3$ (G1-010.T1).
2. El sistema de G1-010.T2 es $4x = 8$, $3y = 9/2$: $O = (2, 3/2)$, $R = |O| = \sqrt{4 + 9/4} = 5/2$.
3. $H = (4,3) - (4,3) = (0,0)$ (G1-010.T3).
4. $I = (5 \cdot 0 + 3(4,0) + 4(0,3))/12 = (1,1)$, y $r = d(I, \text{eje } x) = 1$ (G1-010.T5, G1-003.T5).

Por qué cada hipótesis

⚠ Triángulos aplastados y rombos

- Con $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (3,0)$, las mediatrices $x = 1/2$ y $x = 3/2$ son paralelas: no hay punto equidistante. Es justo $\det(B - A, C - A) = 0$.
- La bisectriz necesita vectores **unitarios**: con $A = 0$, $B = (4,0)$, $C = (0,1)$, la dirección $(B - A) + (C - A) = (4,1)$ forma cosenos $4/\sqrt{17}$ y $1/\sqrt{17}$ con los lados.

Ejercicios

1. Calcula O, G y H para $(0,0)$, $(4,0)$, $(1,1)$ y verifica $H - O = 3(G - O)$.
2. Calcula el incentro y r del triángulo $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,8)$.
3. Demuestra que en un triángulo equilátero $O = G = H = I$.
4. Demuestra que $|G - A| = 2|G - M_a|$.

Respuestas

1. $O = (2,-1)$, $G = (5/3, 1/3)$, $H = (1,3)$; $H - O = (-1,4) = 3(-1/3, 4/3)$.
2. $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$: $I = (8(6,0) + 6(0,8))/24 = (2,2)$, $r = 2$.
3. Con $a = b = c$, $I = (A + B + C)/3 = G$; O equidista y la mediatriz de $[B, C]$ es la mediana (pasa por A, G1-004.T3), así que $O = G$ y $H = 3G - 2O = G$.
4. $G - A = \frac{2}{3}(M_a - A)$ y $M_a - G = \frac{1}{3}(M_a - A)$ (G1-010.T1).

G1-011 · Rotaciones y ángulos orientados

Motivación

> **La pluma sobre el triángulo**
> Dibuja un triángulo y pon una pluma sobre el lado AB, apuntando de A hacia B. En B gírala, sobre el papel, lo que abre el ángulo B, hasta quedar sobre BC; avanza; en C gira lo que abre el ángulo C; en A, lo que abre el ángulo A. Al final la pluma está otra vez sobre AB, pero apuntando al revés: dio media vuelta. Este capítulo lo demuestra sin medir ningún ángulo.
> Dónde falla la analogía: la pluma se gira a ojo; aquí el resultado es una identidad exacta entre matrices.

Rotaciones

Definición G1-011.D1 (rotaciones)

Para $c, s \in \mathbb{R}$ con $c^2 + s^2 = 1$: $R(c,s)(x) := (cx_1 - sx_2, sx_1 + cx_2)$ (la matriz $\left(\begin{smallmatrix} c & -s \\ s & c \end{smallmatrix}\right)$). $I := R(1,0) = \mathrm{id}$ y $-I := R(-1,0)$ (la **media vuelta**).

Teorema G1-011.T1 (el grupo de las rotaciones)

$R(c,s)$ es un movimiento lineal (marco (c,s), $(-s,c)$); conserva el producto punto y $\det(Rx, Ry) = \det(x,y)$. $R(c,s) \circ R(c',s') = R(cc' - ss', sc' + cs') = R(c',s') \circ R(c,s)$; $R(c,s)^{-1} = R(c,-s)$; $R(0,1)x = x^{\perp}$; $R(-c,-s) = -R(c,s)$.

Demostración. Sean $w := (c,s)$, unitario, y $w^{\perp} = (-s,c)$.

1. $R(c,s)x = x_1 w + x_2 w^{\perp}$, y $(w, w^{\perp})$ es un marco ortonormal (G1-003.T2): es un movimiento con $b = 0$ (G1-008.D2), y conserva productos punto (G1-008.T4 con $Q = S = 0$).

2. Desarrollando (G1-002.D4):

$$\det(Rx, Ry) = (cx_1 - sx_2)(sy_1 + cy_2) - (sx_1 + cx_2)(cy_1 - sy_2) = (c^2 + s^2)(x_1y_2 - x_2y_1) = \det(x, y).$$

3. Aplicando $R(c', s')$ y luego $R(c, s)$:

$$R(c,s)R(c',s')x = \big((cc' - ss')x_1 - (sc' + cs')x_2,\ (sc' + cs')x_1 + (cc' - ss')x_2\big).$$

Con $x = (c, s)$, $y = (c', -s')$ en Lagrange (G1-002.T4): $(cc' - ss')^2 + (sc' + cs')^2 = (c^2 + s^2)(c'^2 + s'^2) = 1$, así que es $R(cc' - ss', sc' + cs')$.

4. La fórmula del paso 3 es simétrica al intercambiar (c, s) y (c', s'): las rotaciones conmutan.
5. $R(c,s)R(c,-s) = R(c^2 + s^2, sc - cs) = R(1,0) = I$; por C1-011.T1, $R(c,s)^{-1} = R(c,-s)$.
6. $R(0,1)x = (-x_2, x_1) = x^{\perp}$, y $R(-c,-s)x = -R(c,s)x$ directamente. ■

Teorema G1-011.T2 (la rotación que lleva u en v)

Si $u, v \in \mathbb{R}^2$ son unitarios, existe una única rotación R con $Ru = v$: $R = R(u \cdot v, \det(u, v))$. Una rotación que fija un vector $\neq 0$ es I.

Demostración.

1. Por Lagrange (G1-002.T4), $(u \cdot v)^2 + \det(u, v)^2 = |u|^2|v|^2 = 1$: $R := R(u \cdot v, \det(u, v))$ es una rotación.
2. Con $c = u_1v_1 + u_2v_2$ y $s = u_1v_2 - u_2v_1$:

$$cu_1 - su_2 = u_1^2v_1 + u_1u_2v_2 - u_1u_2v_2 + u_2^2v_1 = v_1,$$
$$su_1 + cu_2 = u_1^2v_2 - u_1u_2v_1 + u_1u_2v_1 + u_2^2v_2 = v_2.$$

Así $Ru = v$.

3. Unicidad: si $R(c,s)u = v$, entonces $u \cdot v = u_1(cu_1 - su_2) + u_2(su_1 + cu_2) = c$ y $\det(u, v) = u_1(su_1 + cu_2) - u_2(cu_1 - su_2) = s$ (G1-002.T1, G1-002.D4): (c, s) está determinado.
4. Si $R(c,s)x = x$ con $x \neq 0$, con $u = v = x/|x|$ el paso 3 da $c = u \cdot u = 1$ y $s = \det(u, u) = 0$: $R = I$. ■

Definición G1-011.D2 (ángulo orientado)

Para $u, v \neq 0$: $\measuredangle(u, v) :=$ la rotación R con $R(u/|u|) = v/|v|$. Es positivo si $\det(u, v) > 0$.

Teorema G1-011.T3 (sumar ángulos es componer)

$\measuredangle(u,v) = R(\cos\angle(u,v), \det(u,v)/(|u||v|))$; $\measuredangle(u,v)\measuredangle(v,w) = \measuredangle(u,w)$; $\measuredangle(v,u) = \measuredangle(u,v)^{-1}$; $\measuredangle(-u,-v) = \measuredangle(u,v)$; $\measuredangle(u,-v) = -\measuredangle(u,v)$; $\measuredangle(u,-u) = -I$; para R rotación, $\measuredangle(Ru,Rv) = \measuredangle(u,v)$.

Demostración. Escribe $\hat{u} := u/|u|$, etc.

1. Por G1-011.T2 con $\hat{u},\hat{v}$: $\measuredangle(u,v) = R(\hat{u}\cdot\hat{v}, \det(\hat{u},\hat{v}))$, y $\hat{u}\cdot\hat{v} = \cos\angle(u,v)$ (G1-006.D1), $\det(\hat{u},\hat{v}) = \det(u,v)/(|u||v|)$ (G1-002.D4).
2. $\measuredangle(u,v)\measuredangle(v,w)$ lleva $\hat{u} \mapsto \hat{v} \mapsto \hat{w}$ (las rotaciones conmutan, G1-011.T1); por la unicidad de G1-011.T2 es $\measuredangle(u,w)$.
3. $\measuredangle(u,v)^{-1}$ lleva $\hat{v}$ en $\hat{u}$: es $\measuredangle(v,u)$.
4. R es lineal: si $R\hat{u} = \hat{v}$, entonces $R(-\hat{u}) = -\hat{v}$; por unicidad, $\measuredangle(-u,-v) = \measuredangle(u,v)$.
5. $-R = R(-c,-s)$ es una rotación (G1-011.T1) y $(-R)\hat{u} = -\hat{v}$: $\measuredangle(u,-v) = -\measuredangle(u,v)$. En particular $\measuredangle(u,-u) = -\measuredangle(u,u) = -I$.
6. Sea $S := \measuredangle(u,v)$. Como $|Ru| = |u|$, $\widehat{Ru} = R\hat{u}$, y $S(R\hat{u}) = R(S\hat{u}) = R\hat{v}$ (G1-011.T1): por unicidad $S = \measuredangle(Ru,Rv)$. ■

La suma de los ángulos de un triángulo

Teorema G1-011.T4 (la suma de los ángulos de un triángulo es la media vuelta)

En todo triángulo ABC, $R(\cos A, \operatorname{sen} A)\, R(\cos B, \operatorname{sen} B)\, R(\cos C, \operatorname{sen} C) = -I$.

> **Idea de la demostración**
> Cada factor es el ángulo orientado entre dos lados consecutivos, recorridos en el mismo sentido; al encadenarlos, la dirección $B - A$ termina en $A - B = -(B - A)$.

Demostración. Sean $x := C - A$, $y := B - A$.

1. $\det(u,v) = u^{\perp}\cdot v$ (G1-003.T2) es lineal en v (G1-002.T1), y $\det(v,u) = -\det(u,v)$; así det es lineal en cada argumento y $\det(y,y) = 0$.

2. Lema cíclico:

$$\det(C-B, A-B) = \det(x-y, -y) = -\det(x,y) + \det(y,y) = \det(y,x),$$
$$\det(A-C, B-C) = \det(-x, y-x) = -\det(x,y) + \det(x,x) = \det(y,x).$$

   Sea $D := \det(B-A, C-A) = \det(y,x)$; los tres determinantes valen D.
3. $D \neq 0$: si $D = 0$, sen $A = |D|/(bc) = 0$ (G1-006.T1) y $B - A \parallel C - A$, contra G1-001.T5.
4. Supón $D > 0$. Por G1-011.T3 y G1-006.T1 (sen $=$ | det |/(producto de lados)):

$$\measuredangle(B-A, C-A) = R(\cos A, \operatorname{sen} A), \quad \measuredangle(C-B, A-B) = R(\cos B, \operatorname{sen} B), \quad \measuredangle(A-C, B-C) = R(\cos C, \operatorname{sen} C).$$

5. $\measuredangle(A-C, B-C) = \measuredangle(-(C-A), -(C-B)) = \measuredangle(C-A, C-B)$ (G1-011.T3).
6. Las rotaciones conmutan (G1-011.T1), así que el producto pedido es, por G1-011.T3,

$$\measuredangle(B-A, C-A)\,\measuredangle(C-A, C-B)\,\measuredangle(C-B, A-B) = \measuredangle(B-A, A-B) = \measuredangle(y, -y) = -I.$$

7. Si $D < 0$, los senos de los $\measuredangle$ son $D/(\dots) = -\operatorname{sen}$, y cada $\measuredangle$ es $R(\cos, -\operatorname{sen}) = R(\cos, \operatorname{sen})^{-1}$ (G1-011.T1). El producto de los tres $\measuredangle$ sigue siendo $-I$ (pasos 5-6), así que el producto pedido es $(-I)^{-1} = -I$, porque $(-I)(-I) = R(1,0) = I$. ■

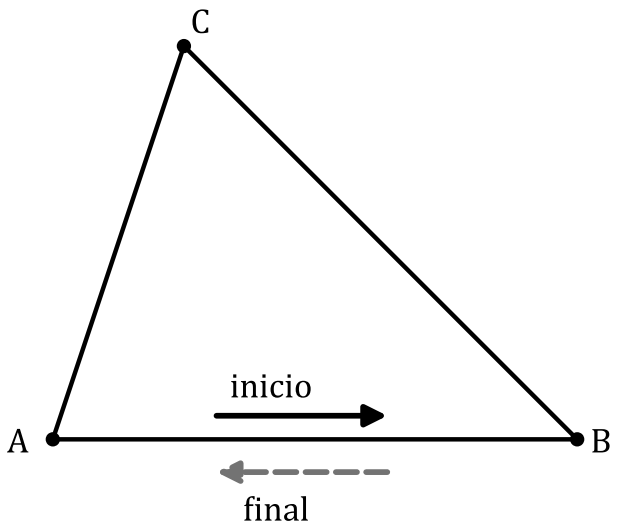


Figura 10: La pluma: tras girar en B, C y A por los ángulos interiores, apunta al revés.

Teorema G1-011.T5 (movimientos lineales del plano)

Si (w_1, w_2) es un marco ortonormal, la parte lineal ℓ es $R(c,s)$ o $R(c,s)\circ S$ con $S(x,y) := (x,-y)$; $\det(\ell x, \ell y) = \delta \det(x,y)$ con $\delta = \det(w_1, w_2) = \pm 1$; si $\delta = -1$, $\measuredangle(\ell x, \ell y) = \measuredangle(y,x)$.

Demostración. Sea $w_1 = (c,s)$, unitario.

1. Por G1-008.T3, $w_2 = w_1^\perp = (-s,c)$ o $w_2 = -w_1^\perp$. En el primer caso $\ell x = x_1 w_1 + x_2 w_1^\perp = R(c,s)x$; en el segundo, $\ell x = x_1 w_1 - x_2 w_1^\perp = R(c,s)Sx$.
2. $\det(w_1, w_1^\perp) = w_1^\perp \cdot w_1^\perp = 1$ (G1-003.T2): $\delta = 1$ en el primer caso y $\delta = -1$ en el segundo.
3. $\det(Rx, Ry) = \det(x,y)$ (G1-011.T1) y $\det(Sx, Sy) = x_1(-y_2) - (-x_2)y_1 = -\det(x,y)$: así $\det(\ell x, \ell y) = \delta \det(x,y)$.
4. Si $\delta = -1$: ℓ conserva productos punto (G1-008.T4), así que por G1-011.T3

$$\measuredangle(\ell x, \ell y) = R\Big(\cos\angle(x,y), \frac{-\det(x,y)}{|x||y|}\Big) = R\Big(\cos\angle(y,x), \frac{\det(y,x)}{|y||x|}\Big) = \measuredangle(y,x). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo G1-011.E1

$\measuredangle((1,0),(0,1)) = R(0,1)$; en el triángulo equilátero $R(1/2, \sqrt{3}/2)^3 = -I$.

1. $(1,0)\cdot(0,1) = 0$, $\det = 1$: $R(0,1)$ (G1-011.T3).
2. En el equilátero $(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$: $\cos A = 1/2$, $\operatorname{sen} A = \sqrt{3}/2$ (G1-006.D1, G1-006.T1), y lo mismo en B, C.
3. $R(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = R(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = R(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, y $R(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})R(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = R(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = R(-1,0)$ (G1-011.T1), como predice G1-011.T4.

Por qué cada hipótesis

⚠ El sentido importa

Si en un triángulo con $D > 0$ se usara $\measuredangle(C-A, B-A) = R(\cos A, -\operatorname{sen} A)$ en un solo vértice, el producto ya no sería $-I$ en general. Y $R^2 = R'^2$ no implica $R = R'$: $I^2 = (-I)^2$. Lo correcto es $R = \pm R'$, porque $R(c,s)^2 = R(c^2 - s^2, 2cs) = I$ obliga $s = 0$ y $c = \pm 1$.

Ejercicios

1. Calcula $\measuredangle((3,4),(-4,3))$ y $\measuredangle((1,1),(1,-1))$.
2. Verifica G1-011.T4 en el triángulo $(0,0)$, $(4,0)$, $(1,3)$.
3. Demuestra que $\measuredangle(u,v)^2 = I$ si y solo si $u \parallel v$.
4. ¿Qué movimiento lineal es $x \mapsto (x_2, x_1)$? Calcula δ.

Respuestas

1. $R(0,1)$ (un cuarto de vuelta positivo) y $R(0,-1)$.
2. $\cos A = 1/\sqrt{10}$, $\operatorname{sen} A = 3/\sqrt{10}$; $\cos B = \operatorname{sen} B = 1/\sqrt{2}$; $\cos C = 1/\sqrt{5}$, $\operatorname{sen} C = 2/\sqrt{5}$; el producto es $R(-1,0)$.
3. $R(c,s)^2 = I \iff s = 0$ (y $c = \pm 1$) $\iff \det(u,v) = 0 \iff u \parallel v$ (G1-006.T1).
4. Marco (e_2, e_1), $\delta = \det(e_2, e_1) = -1$: es $R(0,1) \circ S$, la simetría respecto a $y = x$.

G1-012 · Ángulo central, ángulo inscrito y potencia de un punto

Motivación

> **La sala de cine y la glorieta**
> En una sala de cine, las butacas de la última fila están sobre un arco de la circunferencia $C(0,5)$ que pasa por los extremos $A = (-3,-4)$ y $B = (3,-4)$ de la pantalla. Desde $(0,5)$, $(4,3)$ y $(-5,0)$ el ángulo orientado con que se ve la pantalla es el mismo, $R(4/5,3/5)$, y el ángulo desde el centro es su cuadrado, $R(7/25,24/25)$.
> En una glorieta circular de radio 3 con centro en el origen, un ciclista en $P = (5,0)$ ve que, para toda calle recta que cruza la glorieta en A y B, el producto $|PA| \cdot |PB|$ vale $16 = 5^2 - 3^2$.
> Dónde falla la analogía: las butacas y la glorieta tienen tamaño; aquí son puntos y una circunferencia exacta.

Todo es en $\mathbb{R}^2$, sobre una circunferencia $C(O,r)$. **«P y P' del mismo lado de AB»** significa que $\det(B-A,P-A)$ y $\det(B-A,P'-A)$ son no nulos y del mismo signo (G1-023.C1 lo identificará con los semiplanos). Seguimos en la capa 1: «la mitad» de un ángulo se expresa con rotaciones.

Parte 1 · El ángulo inscrito

Teorema G1-012.T1 (simetría lineal y orientación)
Para $n \neq 0$, $\sigma(x) := x - 2(x \cdot n/\lvert n\rvert^2)n$ conserva el producto punto, $\det(\sigma x,\sigma y) = -\det(x,y)$ y $\measuredangle(\sigma x,\sigma y) = \measuredangle(y,x)$.

Demostración.

1. Con $\alpha := x \cdot n$, $\beta := y \cdot n$ y G1-002.T1:

$$\sigma x \cdot \sigma y = x \cdot y - \frac{2\alpha\beta}{|n|^2} - \frac{2\alpha\beta}{|n|^2} + \frac{4\alpha\beta|n|^2}{|n|^4} = x \cdot y.$$

2. σ es lineal (G1-002.T1), así que $\sigma x = x_1\sigma(e_1) + x_2\sigma(e_2)$, y por el paso 1 $(\sigma e_1, \sigma e_2)$ es un marco ortonormal: σ es la parte lineal de un movimiento (G1-008.D2). Por G1-011.T5, $\det(\sigma x, \sigma y) = \delta \det(x, y)$ con $\delta = \pm 1$.
3. Con $\hat{n} := n/|n|$: $\sigma\hat{n} = -\hat{n}$ y $\sigma\hat{n}^\perp = \hat{n}^\perp$ ($\hat{n}^\perp \cdot n = 0$). Como $\det(\hat{n}, \hat{n}^\perp) = \hat{n}^\perp \cdot \hat{n}^\perp = 1$ (G1-003.T2): $\delta = \det(\sigma\hat{n}, \sigma\hat{n}^\perp) = \det(-\hat{n}, \hat{n}^\perp) = -1$.
4. Por G1-011.T5 con $\delta = -1$, $\measuredangle(\sigma x, \sigma y) = \measuredangle(y, x)$. ■

Teorema G1-012.T2 (el ángulo inscrito es la mitad del central)

Si $A, B, P \in C(O, r)$ son distintos, $\measuredangle(A - O, B - O) = \measuredangle(A - P, B - P)^2$.

Idea de la demostración

Refleja en la mediatriz de $[P, A]$, que pasa por el centro: el ángulo en P aparece dos veces en el ángulo desde el centro. Haz lo mismo con B y divide.

Demostración. Sean $a := A - O$, $b := B - O$, $p := P - O$; $|a| = |b| = |p| = r$, $a \neq p$, $b \neq p$.

1. $|O - P| = |O - A|$, así que O está en la mediatriz $H := N(M, n)$ de $[P, A]$, con $n := A - P$, y σ_H intercambia P y A (G1-004.T3).
2. Como $(O + x - M) \cdot n = x \cdot n$, $\sigma_H(O + x) = O + \sigma(x)$ con σ la simetría lineal de G1-012.T1 (G1-004.D1). Así $\sigma(p) = a$, $\sigma(a) = p$, y por linealidad $\sigma(-p) = -a$, $\sigma(a - p) = p - a$.
3. Sea $\rho_A := \measuredangle(-p, a - p)$. Por G1-012.T1 y G1-011.T3:

$$\measuredangle(-a, p - a) = \measuredangle(\sigma(-p), \sigma(a - p)) = \measuredangle(a - p, -p) = \rho_A^{-1},$$

   y por lo tanto $\measuredangle(a - p, a) = \measuredangle(p - a, -a) = \measuredangle(-a, p - a)^{-1} = \rho_A$.
4. Encadenando (G1-011.T3): $\measuredangle(-p, a) = \measuredangle(-p, a - p)\,\measuredangle(a - p, a) = \rho_A^2$, y $\measuredangle(p, a) = -\measuredangle(p, -a) = -\measuredangle(-p, a) = -\rho_A^2$.
5. Del mismo modo, con $\rho_B := \measuredangle(-p, b - p)$: $\measuredangle(p, b) = -\rho_B^2$.
6. Como $-R = (-I)R$ y $(-I)^{-1}(-I) = I$ (G1-011.T1):

$$\measuredangle(a, b) = \measuredangle(a, p)\,\measuredangle(p, b) = \measuredangle(p, a)^{-1}\measuredangle(p, b) = \rho_A^{-2}\rho_B^2.$$

7. Por otro lado $\measuredangle(A-P, B-P) = \measuredangle(a-p, b-p) = \measuredangle(a-p, -p)\,\measuredangle(-p, b-p) = \rho_A^{-1}\rho_B$, cuyo cuadrado, por la conmutatividad, es $\rho_A^{-2}\rho_B^2 = \measuredangle(A-O, B-O)$. ■

Teorema G1-012.T3 (inscritos que abarcan el mismo arco)

Si $A, B, P, P' \in C(O,r)$ son distintos: $\measuredangle(A-P, B-P) = \measuredangle(A-P', B-P')$ si P, P' están del mismo lado de AB, y $\measuredangle(A-P, B-P) = -\measuredangle(A-P', B-P')$ si están en lados opuestos; en este caso $\cos\angle APB = -\cos\angle AP'B$ (cuadrilátero cíclico).

Demostración. Sean $R := \measuredangle(A-P, B-P)$ y $R' := \measuredangle(A-P', B-P')$.

1. Por G1-012.T2, $R^2 = \measuredangle(A-O, B-O) = R'^2$, y como conmutan, $(RR'^{-1})^2 = I$ (G1-011.T1).
2. Si $Q = R(c,s)$ cumple $Q^2 = R(c^2-s^2, 2cs) = R(1,0)$, entonces $2cs = 0$ y $c^2 - s^2 = 1$; $c = 0$ daría $-s^2 = 1$, imposible, así que $s = 0$ (C1-002.T5) y $c^2 = 1$: $Q = \pm I$. Por lo tanto $R = \pm R'$.
3. Por G1-011.T3, la segunda entrada de R tiene el signo de $\det(A-P, B-P)$, y por la bilinealidad del determinante (G1-003.T2)

$$\det(A-P, B-P) = \det(A-P, (B-A)+(A-P)) = \det(A-P, B-A) = \det(B-A, P-A).$$

4. Mismo lado: las segundas entradas de R y R' son no nulas y del mismo signo; $R = -R'$ las haría opuestas. Así $R = R'$.
5. Lados opuestos: tienen signos opuestos; $R = R'$ las haría iguales. Así $R = -R'$, y la primera entrada da $\cos\angle APB = -\cos\angle AP'B$ (G1-011.T3). ■

Teorema G1-012.T4 (Tales del semicírculo)

Si $B = 2O - A$ y $P \in C(O,r) \setminus \{A, B\}$, el ángulo APB es recto.

Demostración. Con $a := A - O$ y $p := P - O$: $B - O = -a$, y (G1-002.T1, G1-002.T3)

$$(A-P)\cdot(B-P) = (a-p)\cdot(-a-p) = -|a|^2 + |p|^2 = -r^2 + r^2 = 0.$$

Los dos vectores son $\neq 0$, así que $\cos\angle APB = 0$: es recto (G1-006.D1). ■

Teorema G1-012.T5 (recíproco: cuadrilátero cíclico)

Si $A \neq B$, $P \in C(O,r) \setminus \{A,B\}$ y X está del lado de AB opuesto a P con $\measuredangle(A-X,B-X) = -\measuredangle(A-P,B-P)$, entonces $X \in C(O,r)$.

Demostración.

1. $\det(B-A,X-A) \neq 0$, así que $X-A$ no es múltiplo de $B-A$ y A,B,X no están alineados (G1-001.T5): ABX es un triángulo, con circuncentro O' y circunferencia $C(O',r')$ por A,B,X (G1-010.T2).
2. Por G1-012.T2 en $C(O',r')$ y en $C(O,r)$, y $(-R)^2 = R^2$ (G1-011.T1):

$$\measuredangle(A-O',B-O') = \measuredangle(A-X,B-X)^2 = \measuredangle(A-P,B-P)^2 = \measuredangle(A-O,B-O).$$

3. O y O' equidistan de A y B: están en la mediatriz $N(M,B-A)$ (G1-004.T3). Con $h := |B-A|/2 > 0$, $\hat{u} := (B-A)/(2h)$ y $\hat{n} := \hat{u}^{\perp}$, la mediatriz es $\{O_t := M + t\hat{n} : t \in \mathbb{R}\}$ (G1-003.T2).
4. $A-O_t = -h\hat{u}-t\hat{n}$ y $B-O_t = h\hat{u}-t\hat{n}$; $|A-O_t|^2 = |B-O_t|^2 = h^2+t^2$, $(A-O_t)\cdot(B-O_t) = t^2-h^2$ y, por bilinealidad con $\det(\hat{u},\hat{n}) = 1$, $\det(A-O_t,B-O_t) = 2ht$. Por G1-011.T3:

$$\measuredangle(A-O_t,B-O_t) = R\Big(\frac{t^2-h^2}{t^2+h^2},\frac{2ht}{t^2+h^2}\Big).$$

5. Esa rotación determina t: su primera entrada c es < 1 y de $c(t^2+h^2) = t^2-h^2$ sale $t^2 = h^2(1+c)/(1-c)$; el signo de la segunda entrada es el de t. Dos valores de t con el mismo t^2 y el mismo signo coinciden (G1-002.T2).
6. Por el paso 2, O y O' dan la misma rotación: $O' = O$, y $|X-O| = r' = |A-O'| = |A-O| = r$. ■

(La hipótesis de lado es automática: la segunda entrada de $\measuredangle(A-X,B-X)$ tiene el signo de $\det(B-A,X-A)$, por el paso 3 de G1-012.T3.)

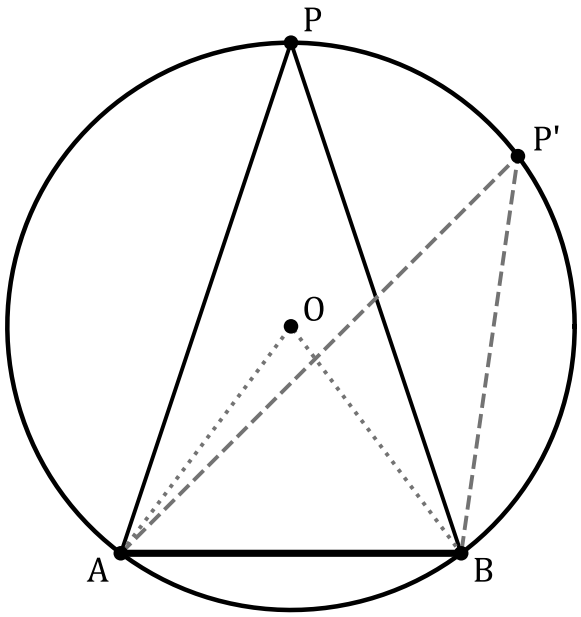


Figura 11: Ángulo inscrito: desde P y P', del mismo lado de AB, se ve el mismo ángulo; el central es su cuadrado.

Parte 2 · Recta, circunferencia y potencia

Teorema G1-012.T6 (recta y circunferencia)

Una recta ℓ corta a $C(O,r)$ en 2, 1 o 0 puntos según $d(O,\ell) < r$, $= r$ o $> r$. Si $\ell = L(A,v)$ con $A \in C(O,r)$, ℓ corta solo en $A \iff v \perp A - O$. Una recta es **tangente** a $C(O,r)$ si la corta en exactamente un punto.

Demostración.

1. Sea F el pie de O sobre ℓ y $d := |O-F| = d(O,\ell)$ (G1-003.T5); con u unitario director, $\ell = L(F,u)$ (G1-001.T4 (a)).
2. Para $X = F + su$, $|O-X|^2 = d^2 + s^2$ (G1-003.T5). Así $X \in C(O,r) \iff s^2 = r^2 - d^2$ (G1-005.T2).
3. Si $d < r$: $s = \pm\sqrt{r^2-d^2}$, dos valores distintos, dos puntos. Si $d = r$: solo $s = 0$, el punto F. Si $d > r$: $s^2 \geq 0 > r^2 - d^2$, ninguno (G1-005.T1, G1-002.T2).
4. Si $A \in \ell \cap C(O,r)$: ℓ corta solo en $A \iff d = r$ (paso 3) $\iff A = F$ (porque $r^2 = |O-A|^2 =$

$d^2 + |F - A|^2) \iff (O - A) \perp v$ (G1-003.T5: F es el único punto de ℓ con $O - X \perp v$). ■

Teorema G1-012.T7 (potencia de un punto)

Para $P \in \mathbb{R}^2$ y toda recta por P que corta a $C(O, r)$ en A y B ($A = B$ si es tangente): $(A - P) \cdot (B - P) = |P - O|^2 - r^2$. En particular $|PA| \cdot |PB|$ no depende de la recta.

Idea de la demostración

Los cortes son las raíces de una cuadrática en el parámetro de la recta; Vieta da su producto.

Demostración.

1. Escribe la recta como $L(P, u)$ con u unitario (G1-001.T4 (a)). Por G1-005.T2 y G1-002.T3,

$$P + tu \in C(O, r) \iff t^2 + 2t\, u \cdot (P - O) + |P - O|^2 - r^2 = 0.$$

2. Si corta en dos puntos, la cuadrática tiene dos raíces $t_1 \neq t_2$ y $A = P + t_1 u$, $B = P + t_2 u$; si es tangente, una raíz doble $t_1 = t_2$ y $A = B$ (G1-012.T6, G1-005.T1).
3. Por Vieta (G1-005.T1), $t_1 t_2 = |P - O|^2 - r^2$, que no depende de u.
4. $(A - P) \cdot (B - P) = t_1 t_2 |u|^2 = t_1 t_2$ (G1-002.T1), y $|PA| \cdot |PB| = |t_1||t_2| = |t_1 t_2|$ (G1-002.T3, C1-004.T2). ■

Ejemplo G1-012.E1

$P = (5, 0)$, $C(0, 3)$: potencia 16, tangente de longitud 4; la secante por el eje x da $2 \cdot 8 = 16$.

1. $|P|^2 - 9 = 16$ (G1-012.T7).
2. En la tangente $A = B = T$ y $|PT|^2 = (T - P) \cdot (T - P) = 16$: $|PT| = 4$.
3. El eje x corta en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$: $|PA| = 2$, $|PB| = 8$, producto 16.

Por qué cada hipótesis

⚠ Puntos fuera de la circunferencia y lados

- Si P no está en la circunferencia, el «inscrito» no es la raíz del central: con $P = O$ el ángulo es el central mismo, $R(7/25, 24/25)$, y su cuadrado es otro.
- Del otro lado de AB el inscrito se invierte: desde $(0, -5)$ la pantalla del cine se ve con $R(-4/5, -3/5) = -R(4/5, 3/5)$.
- Si la recta no corta, no hay A ni B: desde $(5, 0)$, la recta $x = 5$ da $t^2 + 16 = 0$.
- Dentro del círculo la potencia es negativa y la fórmula sigue valiendo: $|PA| \cdot |PB| = r^2 - |P - O|^2$.

Ejercicios

1. Verifica G1-012.T2 con $C(0, 5)$, $A = (5, 0)$, $B = (0, 5)$, $P = (-3, -4)$.
2. Desde $P = (0, 10)$, calcula la longitud de la tangente a $C(0, 6)$.
3. Demuestra que si AB es un diámetro y P está en la circunferencia, $\measuredangle(A - P, B - P) = R(0, \pm 1)$.
4. Una cuerda pasa por P a distancia 2 del centro de $C(O, 5)$ y P la divide en dos tramos; si uno mide 3, ¿cuánto mide el otro?

Respuestas

1. $A - P = (8, 4)$, $B - P = (3, 9)$: producto punto 60, $\det = 60$, normas con producto $60\sqrt{2}$; así $\measuredangle(A-P, B-P) = R(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, cuyo cuadrado es $R(0, 1)$. El central: $\measuredangle((5, 0), (0, 5)) = R(0, 1)$.
2. Potencia $100 - 36 = 64$: longitud 8.
3. Por G1-012.T4 el coseno es 0; con $c = 0$, $c^2 + s^2 = 1$ da $s = \pm 1$.
4. $|PA| \cdot |PB| = 25 - 4 = 21$: el otro mide 7.

G1-013 · Funciones trigonométricas: medir ángulos ⚠ TR

Motivación

> **El minutero**
> Un reloj marca las 12:00 y el minutero gira 75 minutos. Termina apuntando a las «3», la dirección $(1, 0)$. Pero si solo ves la dirección final no puedes saber si giró 15, 75 o 135 minutos: los giros que terminan ahí difieren en vueltas completas. Para medir ángulos con números hace falta π, y una regla para elegir una lectura canónica.
> Dónde falla la analogía: el reloj real también tiene horario, que sí cuenta las vueltas.

Hasta G1-012 los ángulos se describían sin medirlos (capa 1). Desde aquí se miden en radianes (capa 2). Las funciones sen, cos y el número π se construyen con rigor en Cálculo II, que va después de este curso. Por eso se **citan** cuatro hechos, con los ids donde están demostrados, y todo lo demás se demuestra aquí.

⚠ Cálculo II · se cita (bloque TR)

- **TR.1** (π, sen y cos) Existe un número $\pi > 0$ y funciones $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que, para todo $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$; $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$. (C2-014.D2, T3, D4, T5, T4.)
- **TR.2** (identidades básicas) Para $x, y \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ y $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. (C2-014.T5, T8.)
- **TR.3** (monotonía en $[0, \pi]$) cos restringida a $[0, \pi]$ es estrictamente decreciente y biyectiva sobre $[-1, 1]$; $\operatorname{sen} x > 0$ si $0 < x < \pi$; $\cos(\pi/2) = 0$, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$. (C2-014.D3, T3, T4, C1.)
- **TR.4** (tangente e inversas) $\tan := \operatorname{sen} / \cos$ donde $\cos \neq 0$; tan es estrictamente creciente y biyectiva de $(-\pi/2, \pi/2)$ sobre $\mathbb{R}$. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to$

$[-\pi/2, \pi/2]$ y $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ son las inversas de cos, sen y tan restringidas a esos intervalos, y son continuas. (C2-014.D5, T9, D6, T11.)

Parte 1 · El argumento y la medida

Teorema G1-013.T1 ⚠ TR (el argumento)

Para todo unitario $u \in \mathbb{R}^2$ existe un único $t \in (-\pi, \pi]$ con $u = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Además $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos t', \operatorname{sen} t') \iff t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Idea de la demostración

Existencia: arc cos da el ángulo entre 0 y π, y el signo de u_2 decide el signo. Unicidad: si dos números dan el mismo punto, su diferencia tiene coseno 1; quitando vueltas completas queda un número en $[-\pi, \pi)$ con coseno 1, que solo puede ser 0.

Demostración.

1. $|u_1| \le |u| = 1$ (G1-002.T3), así que $u_1 \in [-1, 1]$ y por TR.3 hay un único $t_0 \in [0, \pi]$ con $\cos t_0 = u_1$.
2. $\operatorname{sen} t_0 \ge 0$ (TR.3, y $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = 0$ por TR.1, TR.3) y $\operatorname{sen}^2 t_0 = 1 - u_1^2 = u_2^2$ (TR.2, $|u| = 1$). Por G1-002.T2, $\operatorname{sen} t_0 = \sqrt{u_2^2} = |u_2|$.
3. Si $u_2 \ge 0$, $t := t_0$ cumple $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (u_1, u_2)$.
4. Si $u_2 < 0$, entonces $\operatorname{sen} t_0 = |u_2| > 0$, así que $t_0 \ne 0, \pi$ y $t_0 \in (0, \pi)$; con $t := -t_0 \in (-\pi, 0)$: $\cos t = \cos t_0 = u_1$ y $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t_0 = u_2$ (TR.1). En ambos casos $t \in (-\pi, \pi]$.
5. (⇐) Para $k \in \mathbb{N}$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ por inducción (C1-005.T1): $k = 1$ es TR.1, y $\cos(x + 2\pi(k+1)) = \cos((x + 2\pi k) + 2\pi) = \cos(x + 2\pi k)$. Para $k = -m$ con $m \in \mathbb{N}$, el caso positivo aplicado a $y = x - 2\pi m$ da $\cos x = \cos(y + 2\pi m) = \cos y$. Lo mismo para sen; como $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ (C1-005.D1), vale para todo $k \in \mathbb{Z}$.
6. (⇒) Sea $d := t - t'$. Por TR.2 y TR.1:

   $$\cos d = \cos t \cos t' + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t' = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1, \qquad \operatorname{sen} d = \operatorname{sen} t \cos t' - \cos t \operatorname{sen} t' = 0.$$

7. Sea $k := \lfloor (d+\pi)/(2\pi) \rfloor \in \mathbb{Z}$ (C1-007.T2): $2\pi k - \pi \le d < 2\pi k + \pi$, así que $y := d - 2\pi k \in [-\pi, \pi)$,

y $\cos y = \cos d = 1$ (paso 5).

8. $|y| \in [0, \pi]$ y $\cos |y| = \cos y = 1 = \cos 0$ (C1-004.D1, TR.1). Por la inyectividad de TR.3, $|y| = 0$: $d = 2\pi k$.
9. Unicidad en $(-\pi, \pi]$: si t, t' están ahí y dan el mismo punto, $t - t' = 2\pi k$ con $-2\pi < t - t' < 2\pi$, así que $-1 < k < 1$, y el único entero con eso es $k = 0$ (C1-005.T2, C1-005.T6). ■

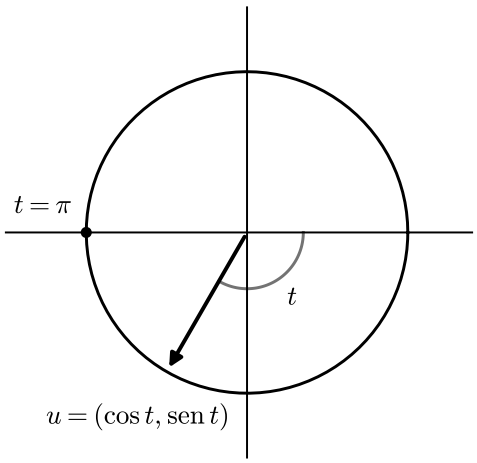


Figura 12: El argumento: el único $t \in (-\pi, \pi]$ con $u = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; los demás difieren en $2\pi\mathbb{Z}$.

Definición G1-013.D1 ⚠ TR

$R(t) := R(\cos t, \operatorname{sen} t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Es una rotación porque $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ (TR.2, G1-011.D1).

Teorema G1-013.T2 ⚠ TR ($t \mapsto R(t)$ es un homomorfismo)

$R(t + t') = R(t)R(t')$; toda rotación es $R(t)$ para un único $t \in (-\pi, \pi]$; $R(t) = I \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Demostración.

1. Por G1-011.T1 y TR.2: $R(t)R(t') = R(\cos t \cos t' - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t', \operatorname{sen} t \cos t' + \cos t \operatorname{sen} t') = R(\cos(t + t'), \operatorname{sen}(t + t')) = R(t + t')$.
2. Si $R(c, s)$ es una rotación, (c, s) es unitario, y por G1-013.T1 es $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ para un único $t \in (-\pi, \pi]$.
3. $R(t) = I = R(1, 0) = R(0)$ (TR.1) $\iff$ $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}$ (G1-013.T1).

■

En particular $R(t)R(-t) = R(0) = I$: $R(t)^{-1} = R(-t)$.

Definición G1-013.D2 ⚠ TR (medida)

La **medida** del ángulo entre $u, v \neq 0$ es $m\angle(u,v) := \arccos(\cos\angle(u,v)) \in [0,\pi]$; se cumple $\cos(m\angle) = \cos\angle$ y $\operatorname{sen}(m\angle) = \operatorname{sen}\angle$. Dos ángulos son iguales $\iff$ tienen la misma medida; recto $\iff m\angle = \pi/2$. **Grados**: $180 \cdot m\angle/\pi$ (notación).

Las afirmaciones de la definición se demuestran:

1. $\cos\angle \in [-1,1]$ (G1-006.D1), y por TR.4 arc cos está definido, con valor en $[0,\pi]$ y $\cos(\arccos x) = x$.
2. $\operatorname{sen}(m\angle) \geq 0$ (TR.3, $m\angle \in [0,\pi]$) y $\operatorname{sen}^2(m\angle) = 1 - \cos^2\angle = \operatorname{sen}^2\angle$ (TR.2, G1-006.T1); por G1-002.T2, $\operatorname{sen}(m\angle) = \operatorname{sen}\angle$.
3. Mismo coseno $\iff$ misma medida: arc cos es una función y es inyectiva (inversa de $\cos|_{[0,\pi]}$, TR.4).
4. Recto $\iff \cos\angle = 0 \iff m\angle = \arccos 0 = \pi/2$ (TR.3: $\cos(\pi/2) = 0, \pi/2 \in [0,\pi]$).

Definición G1-013.D3 ⚠ TR (medida orientada)

Para $u, v \neq 0$, el **argumento** de $\measuredangle(u,v)$ es el único $\theta \in (-\pi,\pi]$ con $\measuredangle(u,v) = R(\theta)$; $|\theta| = m\angle(u,v)$; $\theta \in (0,\pi) \iff \det(u,v) > 0$, $\theta \in (-\pi,0) \iff \det(u,v) < 0$, y $\theta \in \{0,\pi\} \iff \det(u,v) = 0$.

Demostración (de lo que afirma D3).

1. $\measuredangle(u,v)$ es una rotación (G1-011.D2), así que es $R(\theta)$ para un único $\theta \in (-\pi,\pi]$ (G1-013.T2).
2. Por G1-011.T3, $\cos\theta = \cos\angle(u,v)$ y $\operatorname{sen}\theta = \det(u,v)/(|u||v|)$.
3. $|\theta| \in [0,\pi]$ y $\cos|\theta| = \cos\theta = \cos\angle(u,v)$ (TR.1), así que $|\theta| = \arccos(\cos\angle(u,v)) = m\angle(u,v)$ (TR.4).
4. Por TR.1 y TR.3, $\operatorname{sen}\theta > 0$ si $\theta \in (0,\pi)$, < 0 si $\theta \in (-\pi,0)$, y $= 0$ si $\theta \in \{0,\pi\}$. Con el paso 2, el signo de $\det(u,v)$ es el de $\operatorname{sen}\theta$. ■

Parte 2 · Triángulos, circunferencias e identidades

Teorema G1-013.T3 ⚠ TR (la suma de los ángulos de un triángulo es π)

$m(A) + m(B) + m(C) = \pi$.

Idea de la demostración
La media vuelta es $R(\pi)$; las tres medidas están en $(0, \pi)$, así que la única forma de que $R(\alpha + \beta + \gamma) = R(\pi)$ es que la suma sea exactamente π.

Demostración. Sean $\alpha := m(A), \beta := m(B), \gamma := m(C)$.

1. Por G1-013.D2, $\cos\alpha = \cos A$ y $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} A$, así que $R(\cos A, \operatorname{sen} A) = R(\alpha)$ (G1-013.D1); igual con β, γ.
2. Por TR.3, $-I = R(-1, 0) = R(\cos\pi, \operatorname{sen}\pi) = R(\pi)$.
3. Por G1-011.T4 y G1-013.T2: $R(\alpha + \beta + \gamma) = R(\alpha)R(\beta)R(\gamma) = -I = R(\pi)$, y multiplicando por $R(-\pi) = R(\pi)^{-1}$: $R(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = I$.
4. Por G1-013.T2, $\alpha + \beta + \gamma - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}$.
5. $\operatorname{sen} A > 0$ (G1-006.T2) y $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = 0$ (TR.1, TR.3), así que $\alpha \in (0, \pi)$; igual $\beta, \gamma \in (0, \pi)$.
6. Entonces $\alpha+\beta+\gamma-\pi \in (-\pi, 2\pi)$; si es $2\pi k, k \in (-1/2, 1)$ y $k = 0$ (C1-005.T2). Así $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. ■

Teorema G1-013.T4 ⚠ TR (central = 2 · inscrito)

Si $A, B, P \in C(O, r)$ son distintos, con θ_c y θ_i los argumentos de $\measuredangle(A-O, B-O)$ y $\measuredangle(A-P, B-P)$: $\theta_c - 2\theta_i \in 2\pi\mathbb{Z}$. Si O no está en la recta AB y P, O están del mismo lado de AB, $m\angle AOB = 2 \cdot m\angle APB$; si están en lados opuestos, $m\angle AOB = 2\pi - 2 \cdot m\angle APB$.

Demostración.

1. Por G1-012.T2 y G1-013.T2: $R(\theta_c) = R(\theta_i)^2 = R(2\theta_i)$, así que $R(\theta_c - 2\theta_i) = I$ y $\theta_c - 2\theta_i \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Como en G1-012.T3 (paso 3), $\det(A - X, B - X) = \det(B - A, X - A)$ para todo X; por el paso 4 de la demostración de D3, el signo de $\operatorname{sen}\theta_c$ es el de $\det(B - A, O - A) \neq 0$, y el de $\operatorname{sen}\theta_i$ el de $\det(B - A, P - A) \neq 0$. Así $\theta_c, \theta_i \notin \{0, \pi\}$.

3. Mismo lado, ambos en $(0,\pi)$: $\theta_c - 2\theta_i \in (-2\pi,\pi)$, y el único múltiplo de 2π ahí es 0: $\theta_c = 2\theta_i$. Ambos en $(-\pi,0)$: $\theta_c - 2\theta_i \in (-\pi,2\pi)$, otra vez 0. En los dos casos $|\theta_c| = 2|\theta_i|$, es decir $m\angle AOB = 2m\angle APB$ (G1-013.D3).
4. Lados opuestos, $\theta_c \in (0,\pi)$ y $\theta_i \in (-\pi,0)$: $\theta_c - 2\theta_i \in (0,3\pi)$, así que es 2π y $\theta_c = 2\pi + 2\theta_i = 2\pi - 2|\theta_i|$. Con $\theta_c \in (-\pi,0)$ y $\theta_i \in (0,\pi)$: $\theta_c - 2\theta_i \in (-3\pi,0)$, así que es -2π y $|\theta_c| = 2\pi - 2\theta_i$. En ambos, $m\angle AOB = 2\pi - 2m\angle APB$. ■

Teorema G1-013.T5 ⚠ TR (identidades)

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$; $\cos^2(x/2) = (1+\cos x)/2$, $\operatorname{sen}^2(x/2) = (1-\cos x)/2$; $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$; $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\tan(x+y) = (\tan x + \tan y)/(1 - \tan x\tan y)$ donde los cuatro están definidos y el denominador $\neq 0$.

Demostración.

1. Con $y = x$ en TR.2: $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$; con $\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2$ (TR.2) salen las otras dos formas.
2. Con $x/2$ en lugar de x: $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$; se despeja.
3. Sean $p := (x+y)/2$, $q := (x-y)/2$, de modo que $x = p + q$, $y = p - q$. Por TR.2 y la paridad (TR.1), $\operatorname{sen}(p \pm q) = \operatorname{sen} p\cos q \pm \cos p\operatorname{sen} q$ y $\cos(p \pm q) = \cos p\cos q \mp \operatorname{sen} p\operatorname{sen} q$; sumando y restando salen las tres fórmulas de suma a producto.
4. $\cos(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2)\cos x + \operatorname{sen}(\pi/2)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$ y $\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen} x = -\cos x$ (paso 3, TR.3).
5. Si $\cos x, \cos y, \cos(x+y) \neq 0$: dividiendo numerador y denominador de $\dfrac{\operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}$ entre $\cos x\cos y$ (TR.2, TR.4) se obtiene $(\tan x + \tan y)/(1 - \tan x\tan y)$, y el denominador es $\cos(x+y)/(\cos x\cos y) \neq 0$. ■

Ejemplo G1-013.E1 ⚠ TR

$\cos(\pi/3) = 1/2$ (el triángulo equilátero: tres ángulos iguales que suman π, y $\cos = 1/2$ por la ley de cosenos), $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ (el rectángulo isósceles), $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$.

1. Equilátero: $a^2 = 2a^2 - 2a^2\cos A$ da $\cos A = 1/2$ (G1-007.T1), y lo mismo en B, C: las tres medidas son iguales (G1-013.D2) y suman π (G1-013.T3), así que valen $\pi/3$ y $\cos(\pi/3) =$

$1/2$.

2. Rectángulo en C con $a = b$: $\cos A = \cos B$ (G1-008.T2), las medidas son iguales y suman $\pi - \pi/2$, así que valen $\pi/4$; $c^2 = 2b^2$ y $\cos A = b/c = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ (G1-006.T3).
3. $\operatorname{sen}(\pi/6) = \cos(\pi/2 - \pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$ (G1-013.T5).

Por qué cada hipótesis

⚠ Intervalos y vueltas

- En $[-\pi, \pi]$ no hay unicidad: $-\pi$ y π dan el mismo punto $(-1, 0)$.
- $\cos\theta = \cos\theta'$ no implica $\theta = \theta'$: $\cos(\pi/3) = \cos(-\pi/3)$. Solo en $[0, \pi]$ (TR.3).
- Si A, B, C están alineados con C entre A y B, las «medidas» son $0, 0, \pi$: la suma da π, pero no es un triángulo.

Ejercicios

1. Encuentra el argumento de $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ y de $(0, -1)$.
2. ¿Cuántos grados mide el ángulo entre $(1, 0)$ y $(-1, 1)$?
3. Demuestra que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$.
4. En un triángulo con $m(A) = \pi/2$ y $m(B) = \pi/6$, ¿cuánto mide C? Calcula $\cos C$.

Respuestas

1. $t_0 = \arccos(-1/2) = 2\pi/3$ y $u_2 < 0$: argumento $-2\pi/3$. Para $(0, -1)$: $-\pi/2$.
2. $\cos = -1/\sqrt{2}$, medida $3\pi/4$: 135 grados.
3. TR.2 con $\operatorname{sen}(\pi + (-x))$: $\operatorname{sen}\pi\cos x - \cos\pi\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$.
4. $m(C) = \pi - \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$, $\cos C = 1/2$.

G1-014 · Coordenadas polares y curvas polares ⚠ TR

Motivación

> **El sonar de la lancha**
> El sonar de una lancha reporta un banco de peces «a 2 km en la dirección $2\pi/3$» (medida desde el este, en sentido antihorario). Otro aparato dice «a -2 km en la dirección $-\pi/3$». Es el mismo punto, $(-1, \sqrt{3})$: ir dos kilómetros «hacia atrás» en la dirección opuesta lleva al mismo lugar. Dónde falla la analogía: un sonar real reporta distancias positivas y con error; aquí r puede ser negativo y todo es exacto.

⚠ Cálculo II · se cita

Este capítulo usa los hechos TR.1-TR.4 del bloque citado de Cálculo II (enunciados completos en G1-013): π, sen y cos continuas, periódicas y con paridad (TR.1); $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y fórmulas de suma (TR.2); cos biyectiva y decreciente en $[0, \pi]$, valores en $\pi/2$ y π (TR.3); tan y las inversas arc cos, arcsen, arctan (TR.4).

Coordenadas polares

Definición G1-014.D1 ⚠ TR

$P(r, \theta) := (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ para $r, \theta \in \mathbb{R}$ (r con signo); (r, θ) son **coordenadas polares** de $P(r, \theta)$.

Teorema G1-014.T1 ⚠ TR (unicidad y conversión)

Todo $X \neq 0$ es $P(r,\theta)$ con únicos $r > 0$ y $\theta \in (-\pi,\pi]$: $r = |X|$ y θ el argumento de $X/|X|$; si $x > 0$, $\theta = \arctan(y/x)$. Para $X \neq 0$: $P(r,\theta) = P(r',\theta') \iff (r' = r$ y $\theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z})$ o $(r' = -r$ y $\theta' - \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z})$. $P(0,\theta) = 0$ para todo θ.

Demostración.

1. Si $X \neq 0$, $X/|X|$ es unitario (G1-002.T3); por G1-013.T1 es $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con un único $\theta \in (-\pi,\pi]$, y $X = P(|X|,\theta)$.
2. Unicidad con $r > 0$: si $X = P(r,\theta)$, entonces $|X| = |r|\,|(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)| = r$ (G1-002.T3, TR.2), así que $r = |X|$ y $(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) = X/|X|$; por G1-013.T1, θ es el argumento.
3. Si $x > 0$: $\cos\theta = x/r > 0$. Si $\theta \in [\pi/2,\pi]$, $\cos\theta \leq \cos(\pi/2) = 0$ (TR.3); si $\theta \in (-\pi,-\pi/2]$, $\cos\theta = \cos(-\theta) \leq 0$ (TR.1). Así $\theta \in (-\pi/2,\pi/2)$ y $\tan\theta = (y/r)/(x/r) = y/x$; por TR.4, $\theta = \arctan(y/x)$.
4. Si $P(r,\theta) = P(r',\theta') = X \neq 0$, por el paso 2, $|r| = |r'| = |X| > 0$.
5. Caso $r' = r$: $(\cos\theta',\operatorname{sen}\theta') = (\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \iff \theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (G1-013.T1).
6. Caso $r' = -r$: la igualdad es $(\cos\theta',\operatorname{sen}\theta') = -(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) = (\cos(\theta+\pi),\operatorname{sen}(\theta+\pi))$, porque $\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta+\pi) = -\operatorname{sen}\theta$ (TR.2, TR.3); por G1-013.T1, eso equivale a $\theta' - \theta - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}$.
7. Los pasos 5-6 se leen en los dos sentidos. $P(0,\theta) = (0,0)$ es inmediato. ■

Curvas polares y simetrías

Definición G1-014.D2 ⚠ TR (curva polar)

Para $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$, la curva $r = f(\theta)$ es $\{P(f(\theta),\theta) : \theta \in D\}$.

Teorema G1-014.T2 ⚠ TR (criterios de simetría)

$\sigma_x(P(r,\theta)) = P(r,-\theta)$, $\sigma_y(P(r,\theta)) = P(r,\pi-\theta)$ y $-P(r,\theta) = P(r,\theta+\pi) = P(-r,\theta)$. Por tanto la curva $r = f(\theta)$ es simétrica respecto al eje x si $-D = D$ y $f(-\theta) = f(\theta)$; respecto al eje y si $\pi - D = D$ y $f(\pi-\theta) = f(\theta)$; respecto al origen si $D + \pi = D$ y $f(\theta+\pi) = f(\theta)$.

Demostración.

1. Las simetrías respecto a los ejes son $\sigma_x(x,y) = (x,-y)$ y $\sigma_y(x,y) = (-x,y)$: el pie de (x,y) sobre $L(0,e_1)$ es $(x,0)$, y $2(x,0) - (x,y) = (x,-y)$ (G1-004.D1, G1-003.T5); igual con e_2. La simetría respecto al origen es $X \mapsto -X$ (σ_M con $M = 0$).
2. $\sigma_x(P(r,\theta)) = (r\cos\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\theta) = (r\cos(-\theta), r\,\mathrm{sen}(-\theta)) = P(r,-\theta)$ (TR.1).
3. $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ y $\mathrm{sen}(\pi-\theta) = \mathrm{sen}\,\pi\cos\theta - \cos\pi\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\theta$ (TR.2, TR.3, TR.1), así que $\sigma_y(P(r,\theta)) = (-r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = P(r,\pi-\theta)$.
4. Por el paso 6 de G1-014.T1, $-P(r,\theta) = P(r,\theta+\pi)$, y $-P(r,\theta) = P(-r,\theta)$ es inmediato.
5. Eje x: si $\theta \in D$, entonces $-\theta \in D$ y $\sigma_x(P(f(\theta),\theta)) = P(f(\theta),-\theta) = P(f(-\theta),-\theta)$ está en la curva. Así $\sigma_x(\text{curva}) \subset \text{curva}$, y por G1-004.T3 hay igualdad.
6. Eje y y origen: igual, con $\sigma_y(P(f(\theta),\theta)) = P(f(\pi-\theta),\pi-\theta)$ y $-P(f(\theta),\theta) = P(f(\theta+\pi),\theta+\pi)$.

■

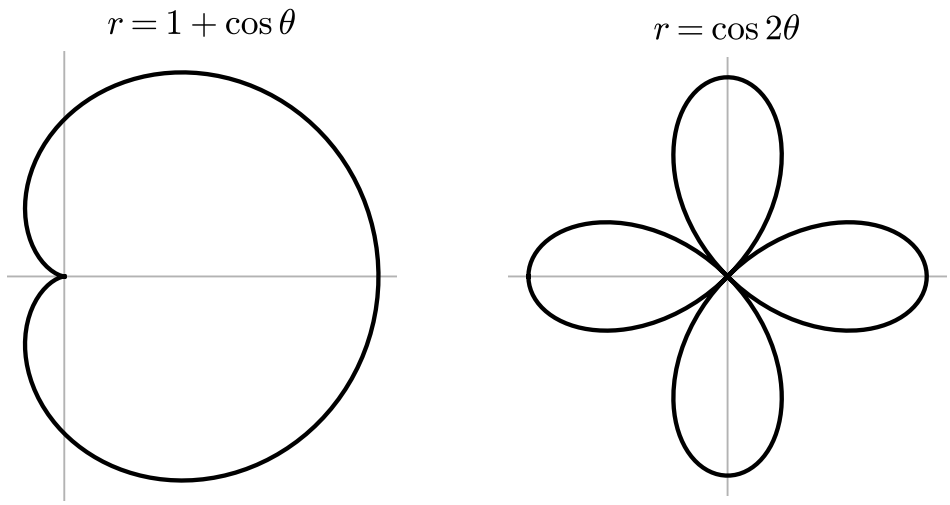


Figura 13: Curvas polares: la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ (simétrica respecto al eje x) y la rosa $r = \cos 2\theta$ (respecto a los dos ejes).

Ejemplo G1-014.E1 ⚠ TR

Para $a \neq 0$, $r = 2a\cos\theta$ ($\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$) es la circunferencia $C((a,0),|a|)$; $r = 1 + \cos\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$, cardioide) es simétrica respecto al eje x; $r = \cos 2\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$, rosa de cuatro pétalos) respecto a ambos ejes; $r = \theta$ ($\theta \geq 0$, espiral de Arquímedes) corta cada rayo desde el origen en infinitos puntos.

1. $\subset$: $X = P(2a\cos\theta, \theta) = (2a\cos^2\theta, 2a\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta)$ y, por G1-013.T5,

$$|X - (a,0)|^2 = a^2(2\cos^2\theta - 1)^2 + a^2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 = a^2(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta) = a^2.$$

2. $\supset$: si $Y = (x,y) \in C((a,0),|a|)$, entonces $x^2 + y^2 = 2ax$ (G1-005.T2). Si $Y = 0$, $Y = P(0,\pi/2)$ y $2a\cos(\pi/2) = 0$. Si $Y \neq 0$, $Y = P(\rho,\varphi)$ con $\rho > 0$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ (G1-014.T1), y $\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi$ da $\rho = 2a\cos\varphi$.
3. Si $a > 0$, $\cos\varphi > 0$ y $\varphi \in (-\pi/2,\pi/2)$ (paso 3 de G1-014.T1): listo. Si $a < 0$, $\cos\varphi < 0$; con $\varphi' := \varphi \mp \pi \in (-\pi/2,\pi/2]$, por G1-014.T1, $Y = P(-\rho,\varphi') = P(2a\cos\varphi',\varphi')$, porque $\cos\varphi' = -\cos\varphi$.
4. Cardioide ($D = \mathbb{R}$): $1 + \cos(-\theta) = 1 + \cos\theta$ (TR.1); G1-014.T2.
5. Rosa ($D = \mathbb{R}$): $\cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ y $\cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$ (TR.1); G1-014.T2, ejes x e y.
6. Espiral: el rayo $\{tu : t > 0\}$ con $u = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ contiene a $P(\varphi + 2\pi k, \varphi + 2\pi k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $\varphi + 2\pi k > 0$ (G1-013.T1); son puntos distintos porque sus normas $\varphi + 2\pi k$ son distintas.

Por qué cada hipótesis

⚠ El origen, arctan y criterios que solo bastan

- El origen no tiene θ único: $P(0,\theta) = 0$ para todo θ.
- $\theta = \arctan(y/x)$ solo si $x > 0$: para $(-1,\sqrt{3})$, $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$, pero el argumento es $2\pi/3$.
- Los criterios son suficientes, no necesarios: $r = \operatorname{sen} 2\theta$ no cumple $f(-\theta) = f(\theta)$ y aun así la rosa es simétrica respecto al eje x, porque $\sigma_x(P(f(\theta),\theta)) = P(-f(-\theta),-\theta) = P(f(\pi - \theta),\pi - \theta)$.

Ejercicios

1. Convierte $(-3,-3)$ a polares con $r > 0$, $\theta \in (-\pi,\pi]$.
2. ¿Son el mismo punto $P(3,\pi/4)$ y $P(-3,5\pi/4)$? ¿Y $P(3,\pi/4)$ y $P(-3,-3\pi/4)$?
3. Demuestra que la curva $r = 1/(1-\cos\theta)$, $\theta \in (0,2\pi)$, es simétrica respecto al eje x (sugerencia: usa $\theta \mapsto 2\pi - \theta$).
4. Escribe en cartesianas la curva $r = 4\operatorname{sen}\theta$.

Respuestas

1. $r = 3\sqrt{2}, \theta = -3\pi/4$.
2. Sí en los dos casos: $r' = -r$, y $5\pi/4 - \pi/4 = \pi$ y $-3\pi/4 - \pi/4 = -\pi$ están en $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ (G1-014.T1).
3. $\sigma_x(P(f(\theta), \theta)) = P(f(\theta), -\theta) = P(f(\theta), 2\pi - \theta)$ (G1-014.T1) y $f(2\pi - \theta) = f(\theta)$.
4. $x^2 + y^2 = 4y$: la circunferencia $C((0, 2), 2)$ (el origen con $\theta = 0$).

G1-015 · Curvas paramétricas

Motivación

> **La escuadra del carpintero**
> Un carpintero arma esquinas a escuadra con tablas de 3, 4 y 5; otro usa 5, 12 y 13. ¿Hay una fórmula para todas las ternas de enteros con $a^2+b^2=c^2$? Cada terna da un punto con coordenadas racionales en la circunferencia unitaria, $(a/c, b/c)$, y la proyección estereográfica los produce todos a partir de una fracción t: con $t=1/2$ sale $(3/5, 4/5)$, y con $t=2/3$, $(5/13, 12/13)$.
> Dónde falla la analogía: las tablas se cortan con error; una terna pitagórica es exacta.

Curvas

Definición G1-015.D1 (curva paramétrica)

Una curva es una función $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalo); su **traza** es $\gamma(I)$. Eliminar el parámetro = describir la traza por ecuaciones.

Teorema G1-015.T1 (recta y segmento)

La traza de $t \mapsto P + tv$ en $\mathbb{R}$ es $L(P, v)$, y en $[0, 1]$, con $v = Q - P$, es $[P, Q]$.

Demostración. Por G1-001.D3, $L(P, v) = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$, que es la imagen de $\mathbb{R}$; y $[P, Q] = \{P + t(Q - P) : t \in [0, 1]\}$, la imagen de $[0, 1]$ con $v = Q - P$. ■

La circunferencia sin trigonometría

Teorema G1-015.T2 (parametrización racional de la circunferencia)

$\varphi(t) := \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $C(0,1) \setminus \{(-1,0)\}$, con inversa $(x,y) \mapsto y/(1+x)$; $\varphi(t)$ es el segundo punto de corte de la recta por $(-1,0)$ y $(0,t)$ con la circunferencia (proyección estereográfica). Sin TR.

Idea de la demostración

Se escribe la inversa explícita y se comprueban las dos composiciones; la recta por $(-1,0)$ corta a la circunferencia en una cuadrática que ya tiene la raíz $s = 0$.

Demostración. Sea $N := (-1,0)$.

1. $1 + t^2 \geq 1 > 0$ (C1-003.T5): φ está definida en todo $\mathbb{R}$.
2. $(1-t^2)^2 + (2t)^2 = 1 + 2t^2 + t^4 = (1+t^2)^2$, así que $|\varphi(t)|^2 = 1$ y $\varphi(t) \in C(0,1)$ (G1-005.T2).
3. Si la primera coordenada de $\varphi(t)$ fuera -1, sería $1 - t^2 = -1 - t^2$, es decir $2 = 0$: imposible. Así $\varphi(t) \neq N$.
4. Si $(x,y) \in C(0,1)$ y $x = -1$, entonces $y^2 = 1 - x^2 = 0$ y $(x,y) = N$. Por lo tanto en $C(0,1) \setminus \{N\}$ se tiene $1 + x \neq 0$, y $\psi(x,y) := y/(1+x)$ está definida.
5. $\psi(\varphi(t)) = \dfrac{2t/(1+t^2)}{1 + (1-t^2)/(1+t^2)} = \dfrac{2t/(1+t^2)}{2/(1+t^2)} = t.$
6. Sea $(x,y) \in C(0,1) \setminus \{N\}$ y $t := \psi(x,y)$. Como $y^2 = 1 - x^2 = (1-x)(1+x)$:

$$1 + t^2 = \frac{(1+x)^2 + y^2}{(1+x)^2} = \frac{2}{1+x}, \qquad 1 - t^2 = \frac{(1+x)^2 - (1-x)(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{2x}{1+x}.$$

7. Entonces $\varphi(t) = \left(\dfrac{2x}{1+x} \cdot \dfrac{1+x}{2}, \dfrac{2y}{1+x} \cdot \dfrac{1+x}{2}\right) = (x,y)$.
8. Por los pasos 5 y 7, ψ es inversa de φ, y por C1-011.T1 φ es biyectiva.
9. La recta por N y $(0,t)$ es $L(N,(1,t)) = \{(-1+s, st) : s \in \mathbb{R}\}$ (G1-001.D3). Por G1-005.T2:

$$(-1+s)^2 + s^2t^2 = 1 \iff s^2(1+t^2) - 2s = 0 \iff s\left(s(1+t^2) - 2\right) = 0.$$

El corte $s = 0$ es N; el otro, $s = 2/(1+t^2)$, es $\left(-1 + \frac{2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = \varphi(t)$. ■

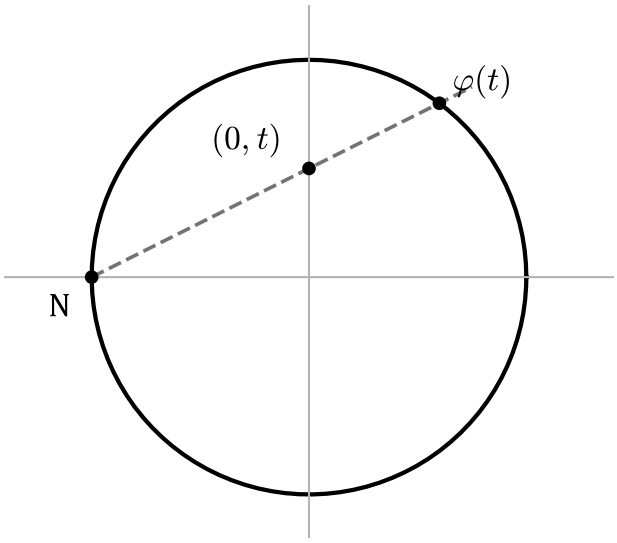


Figura 14: Proyección estereográfica: la recta de $N=(-1,0)$ a $(0,t)$ corta la circunferencia en $\varphi(t)$.

Con trigonometría ⚠ TR

⚠ Cálculo II · se cita
G1-015.T3 y G1-015.E1 usan TR.1 y TR.2 (enunciados en G1-013) y el argumento G1-013.T1.

Teorema G1-015.T3 ⚠ TR (circunferencia y elipse trigonométricas)
$t \mapsto O + r(\cos t, \operatorname{sen} t)$ es biyectiva de $(-\pi,\pi]$ sobre $C(O,r)$; la traza de $t \mapsto (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$ $(a,b>0)$ es $\{x^2/a^2+y^2/b^2=1\}$, y la restricción a $(-\pi,\pi]$ es biyectiva.

Demostración.

1. $|r(\cos t, \operatorname{sen} t)| = r$ (TR.2): la imagen está en $C(O,r)$ (G1-005.D1).
2. Si $X \in C(O,r)$, $(X-O)/r$ es unitario y es $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ para un único $t \in (-\pi,\pi]$ (G1-013.T1): la función es sobre e inyectiva en $(-\pi,\pi]$.
3. $(a\cos t)^2/a^2 + (b\operatorname{sen} t)^2/b^2 = 1$ (TR.2): la traza está en la elipse.
4. Si $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $(x/a, y/b)$ es unitario y es $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ para un único $t \in (-\pi,\pi]$ (G1-013.T1); así $(x,y) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, y la restricción es biyectiva. ■

Ejemplo G1-015.E1 ⚠ TR (cicloide y hélice)
Para $\rho > 0$, la cicloide $t \mapsto \rho(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ toca el eje x exactamente en los $t \in 2\pi\mathbb{Z}$; la hélice $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, ct)$ está en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Ternas pitagóricas: $\varphi(p/q)$ da $(q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$.

1. $\rho(1 - \cos t) = 0 \iff \cos t = 1$; entonces $\operatorname{sen}^2 t = 0$ (TR.2), y $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (1, 0) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0)$, que por G1-013.T1 equivale a $t \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ (TR.2).
3. $\varphi(p/q) = \big((q^2 - p^2)/(q^2 + p^2), 2pq/(q^2 + p^2)\big)$ multiplicando por q^2 arriba y abajo; por el paso 2 de G1-015.T2, $(q^2 - p^2)^2 + (2pq)^2 = (q^2 + p^2)^2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El punto que falta

Ningún t da $N = (-1, 0)$: la recta por N que «debería» darlo es la tangente vertical $x = -1$, que no corta al eje y. Y $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en todo $\mathbb{R}$ no es inyectiva: tiene periodo 2π; solo en $(-\pi, \pi]$ lo es.

Ejercicios

1. Calcula $\varphi(3)$ y $\psi(-7/25, 24/25)$.
2. Encuentra la terna pitagórica que da $t = 3/7$.
3. Elimina el parámetro en $t \mapsto (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Demuestra que la traza de $t \mapsto (1 + 2t, 3 - t)$, $t \in [0, 1]$, es el segmento $[(1, 3), (3, 2)]$.

Respuestas

1. $\varphi(3) = (-8/10, 6/10) = (-4/5, 3/5)$; $\psi = (24/25)/(18/25) = 4/3$.
2. $(49 - 9, 42, 58) = (40, 42, 58)$, que se reduce a $(20, 21, 29)$.
3. $y^2 = x^3$ (con $x = t^2 \geq 0$; para cada $x \geq 0$ hay dos t, uno por cada signo de y).
4. Es $P + t(Q - P)$ con $P = (1, 3)$, $Q - P = (2, -1)$ (G1-015.T1).

G1-016 · Coordenadas cilíndricas y esféricas; superficies paramétricas ⚠ TR

Motivación

Latitud y longitud

El GPS de un avión da la posición de la Ciudad de México como latitud 19.43° N y longitud 99.13° O. Con el centro de la Tierra en el origen, el eje z hacia el polo norte y radio 6371 km, sus coordenadas esféricas son $\rho = 6371$, $\varphi = 90° - 19.43° = 70.57°$ (la colatitud) y $\theta = -99.13°$, y sus cartesianas, aproximadamente $(-953.3, -5932.0, 2119.3)$ km. ¿Y el polo norte? Tiene $\varphi = 0$, y cualquier longitud sirve.

Dónde falla la analogía: la Tierra está achatada, y el GPS usa latitud, no colatitud.

⚠ Cálculo II · se cita

Este capítulo usa TR.1-TR.4 (enunciados completos en G1-013): paridad y periodicidad, $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y fórmulas de suma, monotonía de cos en $[0, \pi]$ con sen > 0 en $(0, \pi)$, y la función arc cos. La definición G1-016.D2 no usa TR.

Coordenadas

Definición G1-016.D1 ⚠ TR

Cilíndricas: $(r, \theta, z) \mapsto (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)$. **Esféricas**: $(\rho, \varphi, \theta) \mapsto (\rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\varphi)$.

Teorema G1-016.T1 ⚠ TR (rangos de unicidad)

Todo $X = (x, y, z)$ fuera del eje z tiene únicas coordenadas cilíndricas con $r > 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, y únicas esféricas con $\rho > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$: $\rho = |X|$, $\varphi = \arccos(z/\rho)$, $r = \rho \operatorname{sen} \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$. Los puntos $\neq 0$ del eje z tienen $\varphi \in \{0, \pi\}$ y θ arbitrario.

Demostración. Sea X fuera del eje z, es decir $(x, y) \neq 0$.

1. Cilíndricas: $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) = X \iff (x, y) = P(r, \theta)$ y la tercera coordenada es z. Por G1-014.T1 hay únicos $r > 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, con $r = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Esféricas, unicidad: si X es la imagen de (ρ, φ, θ) con $\rho > 0$, por TR.2

$$|X|^2 = \rho^2\big(\operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \cos^2\varphi\big) = \rho^2,$$

   así que $\rho = |X|$ (G1-002.T2).
3. $z = \rho\cos\varphi$ da $\cos\varphi = z/\rho$, y como $\varphi \in (0, \pi)$, $\varphi = \arccos(z/\rho)$ (TR.4): φ está determinado.
4. $\operatorname{sen}\varphi > 0$ (TR.3), y $(x, y) = P(\rho\operatorname{sen}\varphi, \theta)$ con $\rho\operatorname{sen}\varphi > 0$; por G1-014.T1, $\rho\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ y θ es único.
5. Existencia: sean $\rho := |X| > 0$ y $\varphi := \arccos(z/\rho)$, definido porque $|z| \leq |X|$ (G1-002.T3). Si fuera $z/\rho = \pm 1$, entonces $x^2 + y^2 = \rho^2 - z^2 = 0$ y X estaría en el eje; así $\varphi \in (0, \pi)$ (TR.3, TR.4).
6. $\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{1 - z^2/\rho^2} = \sqrt{x^2 + y^2}/\rho = r/\rho$ (TR.2, G1-002.T2), y con $(x, y) = P(r, \theta)$ del paso 1: $(x, y) = (\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)$ y $z = \rho\cos\varphi$.
7. Si $X = (0, 0, z)$ con $z \neq 0$: $\rho = |z|$ y $\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta = 0$ para cualquier θ obliga $\operatorname{sen}\varphi = 0$ (TR.2), es decir $\varphi \in \{0, \pi\}$ en $[0, \pi]$ (TR.3), y θ queda libre. ■

Teorema G1-016.T2 ⚠ TR (superficies coordenadas)

$r = k > 0$ es el cilindro $x^2 + y^2 = k^2$; para $k \in (-\pi, \pi]$, $\theta = k$ es el semiplano abierto $\{(t\cos k, t\operatorname{sen} k, z) : t > 0\}$; $\rho = k > 0$ es la esfera $C(0, k)$; para $k \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$, $\varphi = k$ es el medio cono $\{X \neq 0 : z = |X|\cos k\}$ y $\varphi = \pi/2$ es el plano $z = 0$ sin el origen.

Aquí «$r = k$» es el conjunto de los puntos fuera del eje cuya coordenada r de G1-016.T1 vale k, y lo mismo con las demás; para $\rho = k$ se incluyen los puntos del eje (su $\rho = |X|$ está determinado), y para $\theta = k$ se toma $k \in (-\pi, \pi]$.

Demostración.

1. $r = k$: por G1-016.T1, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, así que $r = k \iff x^2 + y^2 = k^2$ (G1-002.T2), y esos puntos no están en el eje porque $k > 0$.
2. $\theta = k$: por G1-016.T1, los puntos con $\theta = k$ son $(t\cos k, t\,\mathrm{sen}\,k, z)$ con $t = r > 0$ y z libre; y cada uno de esos puntos tiene, por la unicidad, $\theta = k$.
3. $\rho = k$: $\rho = |X|$, así que el lugar es $\{|X| = k\} = C(0, k)$ (G1-005.D1).
4. $\varphi = k \in (0, \pi)$: fuera del eje, $\cos\varphi = z/|X|$ (G1-016.T1), así que $\varphi = k \iff z = |X|\cos k$ (TR.4). Recíprocamente, si $X \neq 0$ y $z = |X|\cos k$, con $|\cos k| < 1$ (TR.3), entonces $|z| < |X|$, X no está en el eje, y $\varphi = \arccos(\cos k) = k$.
5. Si $k = \pi/2$, $\cos k = 0$ (TR.3) y la condición es $z = 0$ con $X \neq 0$. ■

Superficies paramétricas

Definición G1-016.D2 (superficie paramétrica)

Una función $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ con $D \subset \mathbb{R}^2$; su **traza** es $\Phi(D)$.

Ejemplo G1-016.E1 ⚠ TR (superficies)

Plano $(s, t) \mapsto P + su + tv$ (traza $\Pi(P, u, v)$); esfera $(\varphi, \theta) \mapsto \rho(\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, \dots)$ en $[0, \pi]\times(-\pi, \pi]$; cilindro $(\theta, z) \mapsto (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, z)$; cono $(\theta, z) \mapsto (z\cos\theta, z\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$ (traza $x^2 + y^2 = z^2$); toro $((R + \rho\cos\varphi)\cos\theta, (R + \rho\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, $0 < \rho < R$ (traza $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = \rho^2$).

1. Plano: es G1-001.D3.
2. Esfera: la imagen está en $C(0, \rho)$ (paso 2 de G1-016.T1); cada punto de $C(0, \rho)$ fuera del eje tiene coordenadas esféricas (G1-016.T1), y los polos son la imagen de $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$.
3. Cilindro: $(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$ recorre $C(0, 1)$ cuando $\theta \in (-\pi, \pi]$ (G1-015.T3), y z es libre: la traza es $x^2 + y^2 = 1$.
4. Cono: $x^2 + y^2 = z^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = z^2$ (TR.2). Recíprocamente, si $x^2 + y^2 = z^2$: con $z = 0$ es el origen, $\Phi(\theta, 0)$; con $z \neq 0$, $(x/z, y/z)$ es unitario y es $(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$ (G1-013.T1).
5. Toro: con $s := \sqrt{x^2 + y^2} = |R + \rho\cos\varphi| = R + \rho\cos\varphi$ (pues $\rho < R$), $(s - R)^2 + z^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi = \rho^2$. Recíprocamente, si $(s - R)^2 + z^2 = \rho^2$, $((s - R)/\rho, z/\rho)$ es unitario, $= (\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi)$ (G1-013.T1); entonces $s = R + \rho\cos\varphi > 0$ y $(x, y) = P(s, \theta)$ (G1-014.T1).

Por qué cada hipótesis

⚠ El eje z y los rangos

- En el eje z no hay unicidad: $(0, 0, 5)$ tiene $\varphi = 0$ y θ cualquiera.
- Sin $\varphi \in (0, \pi)$ hay duplicados: $(1, -\pi/4, 0)$ y $(1, \pi/4, \pi)$ dan el mismo punto $(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$.
- $\varphi = \pi/4$ es solo **medio** cono ($z > 0$); la otra mitad es $\varphi = 3\pi/4$.

Ejercicios

1. Convierte $(1, 1, \sqrt{2})$ a esféricas.
2. Escribe en cartesianas la superficie $\rho = 4 \cos \varphi$.
3. Convierte $(r, \theta, z) = (2, -\pi/2, 3)$ a cartesianas y a esféricas.
4. Demuestra que la traza de $(\theta, z) \mapsto (2 \cos \theta, 3 \operatorname{sen} \theta, z)$ es el cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

Respuestas

1. $\rho = 2, \varphi = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4, \theta = \pi/4$.
2. $\rho^2 = 4\rho \cos \varphi = 4z$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, la esfera $C((0, 0, 2), 2)$ sin el origen (que tendría $\rho = 0$).
3. $(0, -2, 3)$; $\rho = \sqrt{13}, \varphi = \arccos(3/\sqrt{13}), \theta = -\pi/2$.
4. Es G1-015.T3 para la elipse, con z libre.

G1-017 · Espacios vectoriales

Motivación

> **Recetas, fuerzas y funciones**
> Una receta de hot cakes pide (harina, leche, huevo) $= (2, 1.5, 1)$. Para el doble de porciones se multiplica por 2; para comprar dos recetas a la vez, se suman componente a componente. Dos fuerzas que jalan una lancha se suman igual, y las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ también se suman y se multiplican por números. ¿Qué tienen en común? Que cumplen las mismas ocho reglas. Este capítulo toma esas reglas como definición.
> Dónde falla la analogía: una receta no admite cantidades negativas (no hay «-2 tazas de harina»); un espacio vectorial sí.

La definición

Definición G1-017.D1 (espacio vectorial real)

Un conjunto V con una suma $V \times V \to V$ y un producto $\mathbb{R} \times V \to V$ tales que, para $u, v, w \in V$ y $a, b \in \mathbb{R}$: $(u + v) + w = u + (v + w)$; $u + v = v + u$; existe $0 \in V$ con $v + 0 = v$; para cada v existe $-v$ con $v + (-v) = 0$; $a(bv) = (ab)v$; $1v = v$; $a(u + v) = au + av$; $(a + b)v = av + bv$.

En lo que sigue, «0» denota según el contexto el cero de $\mathbb{R}$ o el de V; en cada paso se dice cuál.

Consecuencias

Teorema G1-017.T1 (consecuencias)

En un espacio vectorial: 0 y $-v$ son únicos; $u+v = u+w \Rightarrow v = w$; $0v = 0$; $a0 = 0$; $(-1)v = -v$; $av = 0 \Rightarrow a = 0$ o $v = 0$.

> **Idea de la demostración**
> Cada consecuencia sale de sumar un opuesto a ambos lados, o de escribir $0 = 0 + 0$ y cancelar.

Demostración.

1. (Cero único) Si 0 y $0'$ son neutros: $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$ (D1: neutro y conmutativa).
2. (Opuesto único) Si w y w' son opuestos de v:

$$w = w + 0 = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0 + w' = w' \qquad \text{(D1)}.$$

3. (Cancelación) Si $u + v = u + w$, sumando $-u$ por la izquierda: $(-u) + (u + v) = (-u) + (u + w)$, y por la asociativa y el opuesto, $0 + v = 0 + w$, es decir $v = w$ (D1).
4. ($0v = 0$) En $\mathbb{R}$, $0 + 0 = 0$ (K3), así que $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ (D1). Como también $0v + 0 = 0v$ (D1), la cancelación (paso 3) da $0 = 0v$ (el cero de V).
5. ($a0 = 0$) $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$ (D1, con el cero de V), y como en el paso 4, $a0 = 0$.
6. ($(-1)v = -v$) $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$ (D1, K4, paso 4). Así $(-1)v$ es un opuesto de v, y por el paso 2, $(-1)v = -v$.
7. ($av = 0 \Rightarrow a = 0$ o $v = 0$) Si $a \neq 0$, existe a^{-1} con $a^{-1}a = 1$ (K8, K6), y

$$v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}0 = 0 \qquad \text{(D1, paso 5)}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplos y no ejemplos

Ejemplo G1-017.E1 (ejemplos)
$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) := las n-adas $x = (x_1, \dots, x_n)$ (funciones $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$, C1-010.D1) con operaciones por componentes, base canónica $e_1, \dots, e_n$ y $x = \sum_i x_i e_i$ (las reglas de G1-001.T1 valen igual, componente a componente); las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(cf)(x) = cf(x)$. Las fuerzas que actúan en un punto (motivación física).

1. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$: los ocho axiomas son G1-001.T1.
2. $\mathbb{R}^n$: dos n-adas son iguales si coinciden en cada i (C1-010.D1); cada axioma, en la componente i, es un axioma de campo, exactamente como en la demostración de G1-001.T1 (K1, K2, K3, K4, K5, K6, K7, K9). La suma $\sum_i x_i e_i$ tiene en la componente j el valor x_j (C1-005.T12, C1-002.T3).
3. Funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (C1-011.D1): dos funciones son iguales si coinciden en cada x; cada axioma, evaluado en x, es un axioma de campo. El cero es la función constante 0 y $-f$ es $x \mapsto -f(x)$.
4. Las fuerzas que actúan en un punto se suman con la regla del paralelogramo y se escalan: en coordenadas son vectores de $\mathbb{R}^3$. Es motivación física, no una pieza matemática nueva.

Ejemplo G1-017.E2 (no ejemplos)
$\mathbb{R}^2$ con $c(x, y) := (cx, 0)$ falla $1v = v$; el semiplano $\{y \geq 0\}$ con las operaciones usuales no tiene opuestos ni es cerrado bajo el producto por escalares negativos.

1. $1 \cdot (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$.
2. En $S = \{y \geq 0\}$ el neutro de la suma, si existe, es $(0, 0)$ (componente a componente). Un opuesto de $(0, 1)$ en S tendría que ser $(0, -1)$, que no está en S. (Además $(-1)(0, 1) \notin S$: el producto por escalares no se queda en S.)

Por qué cada axioma

⚠ Cada axioma hace falta

- Sin $1v = v$: la regla $c(x, y) := (cx, 0)$ cumple los otros siete axiomas y falla ese.
- Sin la distributiva $(a + b)v = av + bv$: en $\mathbb{R}$ con $a \cdot v := a^2 v$, $(1 + 1) \cdot 1 = 4$ pero $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$.
- $0v = 0$ no es «obvio»: es una consecuencia que usa la distributiva y la cancelación.

Ejercicios

1. Demuestra que $-(-v) = v$ y que $(-a)v = -(av)$.
2. Demuestra que si $v \neq 0$ y $av = bv$, entonces $a = b$.
3. ¿Es espacio vectorial el conjunto de las parejas (x, y) con $x + y = 0$, con las operaciones de $\mathbb{R}^2$? ¿Y con $x + y = 1$?
4. Demuestra que en $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y $c \odot (x, y) := (cx, cy)$ si $c \geq 0$ y $(0, 0)$ si $c < 0$ falla algún axioma.

Respuestas

1. v es opuesto de $-v$, y por la unicidad $-(-v) = v$. $(-a)v + av = (-a + a)v = 0v = 0$.
2. $(a - b)v = 0$ con $v \neq 0$: por G1-017.T1, $a - b = 0$.
3. Sí (cerrado bajo suma y producto, con 0 y opuestos dentro; los axiomas se heredan). No: $(0, 0)$ no está.
4. $1 = 2 + (-1)$: $(2 + (-1)) \odot v = v$, pero $2 \odot v + (-1) \odot v = 2v$; falla $(a + b)v = av + bv$ si $v \neq 0$.

G1-018 · Subespacios

Motivación

> **La barra de licuados**
> En una barra de licuados hay plátano, $p = (1, 14)$, y yogur, $y = (10, 5)$: gramos de proteína y de azúcar por porción. Pedir «dos de plátano y uno de yogur» es formar $2p + y = (12, 33)$. Si juntas dos licuados que se pueden pedir, por ejemplo $2p + y$ y $p + 3y$, obtienes $3p + 4y$, que también se puede pedir. El conjunto de todo lo que la barra puede preparar es *cerrado*: mezclar mezclas no te saca de él.
> Dónde falla la analogía: en la barra no se piden -2 porciones; en matemáticas los coeficientes son reales cualesquiera.

Ese conjunto cerrado es un espacio vectorial que vive dentro de $\mathbb{R}^2$. En esta clase se precisa la idea.

Definiciones

Definición G1-018.D1 (subespacio)

$W \subset V$ es un **subespacio** si $W \neq \emptyset$ y $u, v \in W, a \in \mathbb{R} \Rightarrow u + v \in W$ y $av \in W$.

Definición G1-018.D2 (combinación lineal, generado)

Una **combinación lineal** de $v_1, \ldots, v_k$ es $\sum_i a_i v_i$. Para $S \subset V$, $\langle S \rangle :=$ el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de S ($\langle \emptyset \rangle := \{0\}$).

Resultados

Teorema G1-018.T1

Todo subespacio contiene a 0 y es un espacio vectorial con las operaciones de V; la intersección de cualquier familia no vacía de subespacios es un subespacio.

Demostración. Sea W un subespacio de V.

1. Como $W \neq \emptyset$, existe $w \in W$, y $0 = 0w \in W$ (G1-018.D1, G1-017.T1).
2. La suma y el producto de V, restringidos a W, dan funciones $W \times W \to W$ y $\mathbb{R} \times W \to W$ (G1-018.D1).
3. Las identidades de G1-017.D1 (asociatividad, conmutatividad, $1v = v$, distributividades) valen para todos los elementos de V, en particular para los de W.
4. El neutro 0 está en W (paso 1), y para $v \in W$, $-v = (-1)v \in W$ (G1-017.T1, G1-018.D1). Así W es un espacio vectorial.
5. Sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de subespacios y $W := \bigcap_i W_i$. Por el paso 1, $0 \in W_i$ para todo i, así que $0 \in W$ y $W \neq \emptyset$.
6. Si $u, v \in W$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $u, v \in W_i$ para cada i, y $u + v, av \in W_i$ (G1-018.D1); luego $u + v, av \in W$. ■

⚠ La familia vacía

El enunciado pide una familia no vacía. La intersección de una familia *vacía* de subconjuntos de V se toma a veces, por convenio, igual a V; con ese convenio valdría también ahí. En G1-018.T2 la familia siempre contiene a V.

Teorema G1-018.T2 (el generado es el menor)

$\langle S \rangle$ es un subespacio que contiene a S y está contenido en todo subespacio que contiene a S; es la intersección de todos ellos. En particular, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle := \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle = \{\sum_i a_i v_i : a_i \in \mathbb{R}\}$.

Idea de la demostración

Sumar recetas da una receta y multiplicar una receta da una receta. Una carta cerrada que tiene

> los ingredientes tiene, por inducción en el número de términos, todas las recetas.

Demostración.

1. Si $S = \emptyset$, $\langle S\rangle = \{0\}$ (G1-018.D2). Es no vacío, $0 + 0 = 0$ y $a0 = 0$ (G1-017.D1, G1-017.T1): es subespacio, contiene a S y está en todo subespacio (G1-018.T1).
2. Sea $S \neq \emptyset$. Para $s \in S$, $s = 1s$ es una combinación lineal (G1-017.D1): $S \subset \langle S\rangle$ y $\langle S\rangle \neq \emptyset$.
3. *Suma.* Si $x = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ y $y = \sum_{j=1}^{l} b_j w_j$ con $v_i, w_j \in S$, entonces $x+y$ es la combinación lineal de la lista $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ con coeficientes $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ (asociatividad de la suma, G1-017.D1 y C1-005.T12). Que un vector se repita en la lista no importa: la definición G1-018.D2 permite listas cualesquiera.
4. *Escalares.* Por inducción en k (C1-005.T1), $c\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (ca_i)v_i$: para $k = 1$ es $c(a_1 v_1) = (ca_1)v_1$; y $c(x + a_{k+1}v_{k+1}) = cx + (ca_{k+1})v_{k+1}$ (G1-017.D1). Con los pasos 2-4, $\langle S\rangle$ es un subespacio (G1-018.D1).
5. *Es el menor.* Sea W un subespacio con $S \subset W$. Por inducción en k: si $v_1 \in S$, $a_1 v_1 \in W$ (G1-018.D1); si $x = \sum_{i\leq k} a_i v_i \in W$ y $v_{k+1} \in S$, entonces $a_{k+1}v_{k+1} \in W$ y $x + a_{k+1}v_{k+1} \in W$. Así $\langle S\rangle \subset W$.
6. *Es la intersección.* Sea $\mathcal{W}$ la familia de los subespacios que contienen a S; $V \in \mathcal{W}$, así que no es vacía. Por el paso 5, $\langle S\rangle \subset \bigcap \mathcal{W}$. Por los pasos 1-4, $\langle S\rangle \in \mathcal{W}$, y la intersección está contenida en cada miembro: $\bigcap \mathcal{W} \subset \langle S\rangle$.
7. *El generado de una lista.* Sea $S = \{v_1, \dots, v_k\}$. Cada $\sum_i a_i v_i$ es una combinación de elementos de S. Recíprocamente, en una combinación $\sum_j b_j s_j$ con $s_j \in S$ se juntan los términos con el mismo $s_j = v_i$ usando $(a + b)v = av + bv$ (G1-017.D1, C1-005.T12, por inducción en el número de términos, C1-005.T1), y los v_i que no aparecen llevan coeficiente 0 ($0v_i = 0$, G1-017.T1). Así $\langle v_1, \dots, v_k\rangle = \{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i : a_i \in \mathbb{R}\}$; esta forma se usa en lo que sigue. ■

Teorema G1-018.T3 (rectas y planos por el origen)

$\langle v\rangle = L(0, v)$ ($v \neq 0$) y $\langle u, v\rangle = \Pi(0, u, v)$ (u, v no proporcionales) son subespacios. $L(P, v)$ es un subespacio $\iff 0 \in L(P, v) \iff P \in \langle v\rangle$; igual para los planos.

Demostración.

1. Por G1-018.T2, $\langle v\rangle = \{tv : t \in \mathbb{R}\} = \{0 + tv\} = L(0, v)$ (G1-001.T1, G1-001.D3), y $\langle u, v\rangle =$

$\{su + tv\} = \Pi(0, u, v)$. Son subespacios por G1-018.T2.

2. Si $L(P, v)$ es un subespacio, contiene a 0 (G1-018.T1).
3. Si $0 \in L(P, v)$, existe t_0 con $0 = P + t_0 v$, así que $P = (-t_0)v \in \langle v \rangle$ (G1-001.T1).
4. Si $P = \lambda v$, entonces $0 = P + (-\lambda)v \in L(P, v)$, y por G1-001.T4 (a) (con $Q = 0$ y factor 1) $L(P, v) = L(0, v) = \langle v \rangle$, que es subespacio por el paso 1.
5. Para planos, los pasos 2 y 3 son iguales: $0 = P + s_0 u + t_0 v$ da $P = -s_0 u - t_0 v \in \langle u, v \rangle$.
6. Si $P = \alpha u + \beta v$, entonces $P + su + tv = (\alpha + s)u + (\beta + t)v$, y como $s \mapsto \alpha + s$ y $t \mapsto \beta + t$ recorren todo $\mathbb{R}$, $\Pi(P, u, v) = \Pi(0, u, v)$ (G1-001.T1), un subespacio. ■

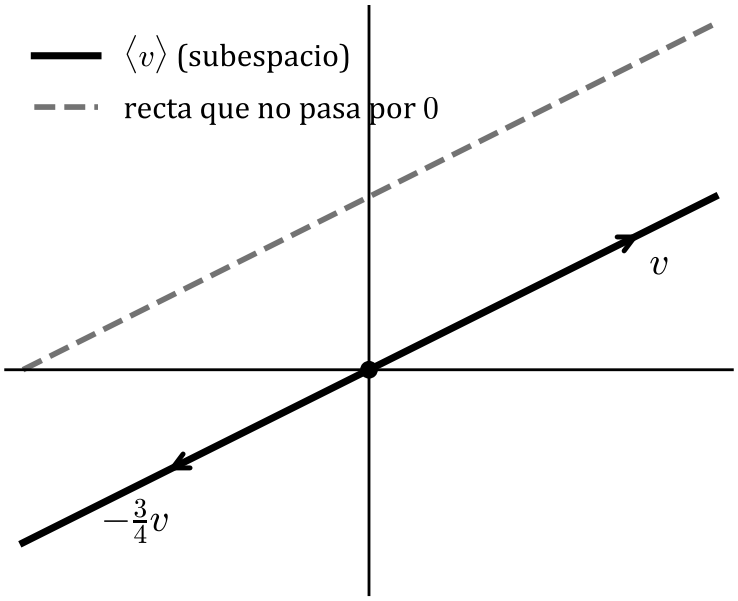


Figura 15: Una recta por el origen es cerrada bajo suma y múltiplos; la paralela que no pasa por 0 no lo es.

Ejemplo G1-018.E1

Los polinomios (C1-010.D2) son un subespacio de las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. No son subespacios: una recta que no pasa por 0, la unión de dos rectas distintas por 0, el disco unitario.

1. *Polinomios.* Las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forman un espacio vectorial (G1-017.E1). El polinomio 0 es un polinomio; si $p = \sum_k a_k x^k$ y $q = \sum_k b_k x^k$ (completando con ceros hasta el mismo grado), $(p + q)(x) = \sum_k (a_k + b_k)x^k$ y $(cp)(x) = \sum_k (ca_k)x^k$ (C1-011.D1, C1-005.T12): son polinomios.

2. *Recta sin el origen.* Si $0 \notin L(P, v)$, no es subespacio (G1-018.T3).
3. *Dos rectas por* 0. Sean $L(0, u) \neq L(0, v)$. Entonces u, v no son proporcionales (si $v = \lambda u$, por G1-001.T4 (a) las rectas coincidirían). u, v están en la unión, pero si $u + v = au$, entonces $v = (a-1)u$; y si $u+v = bv$, $u = (b-1)v$: en ambos casos serían proporcionales. Así $u + v$ no está en la unión.
4. *Disco.* $x = (1/2, 0)$ cumple $|x| < 1$, pero $|4x| = 2$: $4x$ no está en el disco.

Por qué cada hipótesis

⚠ $W \neq \emptyset$

El conjunto vacío cumple las dos cerraduras (no hay elementos que sumar), pero no contiene a 0: no es un espacio vectorial. Por eso D1 pide $W \neq \emptyset$.

⚠ Las dos cerraduras son independientes

La unión de los ejes de $\mathbb{R}^2$ es cerrada bajo múltiplos pero no bajo sumas ($e_1 + e_2$). El primer cuadrante $\{x, y \geq 0\}$ es cerrado bajo sumas pero no bajo múltiplos ($(-1)e_1$).

Ejercicios

1. Demuestra que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ es un subespacio.
2. ¿Es $\{(x, y) : xy = 0\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$? Justifica.
3. Demuestra que si $S \subset T \subset V$, entonces $\langle S\rangle \subset \langle T\rangle$, y que $\langle\langle S\rangle\rangle = \langle S\rangle$.
4. Demuestra que la unión de dos subespacios W_1, W_2 es subespacio $\iff$ $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.
5. Verifica que $(12, 33) \in \langle(1, 14), (10, 5)\rangle$ y encuentra los coeficientes.

Respuestas

1. Contiene a 0; si $x - 2y + z = 0$ y $x' - 2y' + z' = 0$, la suma y los múltiplos cumplen la ecuación (distributividad).
2. No: es la unión de los ejes (ejemplo de arriba).
3. Toda combinación de elementos de S lo es de elementos de T. $\langle S\rangle$ es un subespacio que contiene a $\langle S\rangle$, así que $\langle\langle S\rangle\rangle \subset \langle S\rangle$ (G1-018.T2); la otra contención es la del paso 2.

4. (⇐) la unión es uno de ellos. (⇒) si $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ y $w_2 \in W_2 \setminus W_1$, $w_1 + w_2$ no está en W_1 (si no, $w_2 = (w_1 + w_2) - w_1 \in W_1$) ni en W_2.
5. $a + 10b = 12$, $14a + 5b = 33$: $a = 2$, $b = 1$.

G1-019 · Independencia lineal y generadores

Motivación

> **¿Sobra el licuado verde?**
> La barra anota (proteína, azúcar, fibra) por porción: plátano $p = (1, 14, 3)$, yogur $y = (10, 5, 0)$. Un «licuado verde» trae $v = (12, 33, 6)$. Como $v = 2p + y$, comprarlo como ingrediente no agrega nada: lo que prepares con p, y, v ya lo preparabas con p, y. Y si solo te importan proteína y azúcar, con plátano, yogur y avena $a = (5, 1)$ siempre hay una receta no trivial que da cero: $5p - 23y + 45a = (0, 0)$, es decir, 5 plátanos y 45 avenas tienen lo mismo que 23 yogures.
> Dónde falla la analogía: una receta con coeficientes negativos no se prepara; aquí es solo una cuenta.

Definiciones

Definición G1-019.D1 (independencia, generadores)

$v_1, \dots, v_k \in V$ son **linealmente independientes** si $\sum a_i v_i = 0 \Rightarrow$ todos los $a_i = 0$; si no, **dependientes**. Generan V si $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = V$.

Resultados

Teorema G1-019.T1 (representación única)

$v_1, \dots, v_k$ son independientes $\iff$ cada elemento de $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ se escribe de una sola manera como combinación lineal de ellos.

Demostración.

1. (⇒) Si $\sum a_i v_i = \sum b_i v_i$, restando término a término (G1-017.D1, C1-005.T12), $\sum (a_i - b_i) v_i = 0$.
2. Por la independencia, $a_i - b_i = 0$ para todo i: las dos escrituras coinciden.
3. (⇐) $0 = \sum 0\, v_i$ (G1-017.T1). Si $\sum a_i v_i = 0$, la unicidad aplicada a 0 da $a_i = 0$ para todo i (G1-019.D1). ■

Teorema G1-019.T2 (criterios)

$v_1, \dots, v_k$ son dependientes $\iff$ algún v_i es combinación lineal de los otros. Dos vectores son dependientes $\iff$ son proporcionales (G1-001.D2); dos vectores $\neq 0$ son independientes $\iff$ no son paralelos. Si $v_1, \dots, v_k$ son independientes y $v \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $v_1, \dots, v_k, v$ son independientes.

Demostración.

1. (⇒) Si $\sum a_i v_i = 0$ con algún $a_i \neq 0$, sea j el **menor** índice con $a_j \neq 0$ (buen orden, C1-005.T3). Entonces $a_j v_j = -\sum_{i \neq j} a_i v_i$ y, multiplicando por a_j^{-1} (K8), $v_j = \sum_{i \neq j} (-a_j^{-1} a_i) v_i$.
2. (⇐) Si $v_j = \sum_{i \neq j} c_i v_i$, entonces $\sum_{i \neq j} c_i v_i + (-1) v_j = 0$ con el coeficiente $-1 \neq 0$: son dependientes. (Para $k = 1$, «combinación de los otros» es la suma vacía 0: v_1 es dependiente $\iff$ $v_1 = 0$.)
3. *Dos vectores.* «$au + bv = 0$ con a, b no ambos 0» es a la vez la definición de dependientes (G1-019.D1) y la de proporcionales (G1-001.D2).
4. Si $u, v \neq 0$, «paralelos» es «proporcionales y ambos $\neq 0$» (G1-001.D2); con el paso 3, independientes $\iff$ no paralelos.
5. *Agregar un vector.* Sea $\sum a_i v_i + bv = 0$. Si $b \neq 0$, $v = \sum (-b^{-1} a_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ (K8), contra la hipótesis. Luego $b = 0$, y $\sum a_i v_i = 0$ da $a_i = 0$ por la independencia. ■

Teorema G1-019.T3 (lema del sistema homogéneo)

Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n$, todo sistema $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ $(i = 1, \dots, m)$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tiene una solución $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

> **Idea de la demostración**
> Inducción en el número de ecuaciones. Se despeja x_n de la primera ecuación que lo contiene y se sustituye: quedan $m - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas, de nuevo más incógnitas que ecuaciones.

Demostración. Para $m \in \mathbb{N}$ sea $P(m)$: «para todo $n > m$, todo sistema homogéneo de m ecuaciones en

n incógnitas tiene una solución no nula». Se prueba por inducción (C1-005.T1).

1. *Base,* $m = 1$. La ecuación es $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$ con $n \geq 2$ (C1-005.T2). Si $a_{1n} = 0$, $x = e_n$ es solución y $x \neq 0$.
2. Si $a_{1n} \neq 0$, sea $x := e_1 - (a_{11}/a_{1n})e_n$. Como $n \geq 2$, su primera componente es 1, así que $x \neq 0$, y
$$a_{11} \cdot 1 + a_{1n}\Big(-\frac{a_{11}}{a_{1n}}\Big) = a_{11} - a_{11} = 0 \quad \text{(K8, K9)}.$$
3. *Paso.* Supón $P(m)$ y considera $m + 1$ ecuaciones en $n > m + 1$ incógnitas. Si $a_{in} = 0$ para todo i, $x = e_n$ es una solución no nula.
4. Si no, sea i_0 el **menor** i con $a_{i_0 n} \neq 0$ (buen orden, C1-005.T3; no se elige nada). La ecuación i_0 equivale a
$$x_n = -a_{i_0 n}^{-1} \sum_{j<n} a_{i_0 j} x_j \quad \text{(K8)}.$$
5. Para cada una de las otras m ecuaciones ($i \neq i_0$), al sustituir x_n queda
$$\sum_{j<n} \big(a_{ij} - a_{in} a_{i_0 n}^{-1} a_{i_0 j}\big) x_j = 0 \quad \text{(K9, C1-005.T12)},$$
un sistema homogéneo de m ecuaciones en $n - 1$ incógnitas, con $n - 1 > m$ (C1-005.T2).
6. Por $P(m)$ tiene una solución $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$. Se define x_n con la fórmula del paso 4.
7. La ecuación i_0 se cumple por la definición de x_n. Para $i \neq i_0$,
$$\begin{aligned} \sum_{j<n} a_{ij} x_j + a_{in} x_n &= \sum_{j<n} a_{ij} x_j - a_{in} a_{i_0 n}^{-1} \sum_{j<n} a_{i_0 j} x_j \\ &= \sum_{j<n} \big(a_{ij} - a_{in} a_{i_0 n}^{-1} a_{i_0 j}\big) x_j = 0. \end{aligned}$$
8. Algún x_j con $j < n$ es $\neq 0$, así que $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Esto prueba $P(m + 1)$, y por inducción $P(m)$ vale para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

⚠ Por qué «el menor índice»

Decir «toma una ecuación con $a_{in} \neq 0$» es elegir. Con «la de menor índice» la construcción queda determinada por el sistema; así lo usarán G1-020 y G1-035.

Ejemplo G1-019.E1

$(1,0,1), (0,1,1), (1,1,2)$ son dependientes; $(1,2), (3,4)$ son independientes y generan $\mathbb{R}^2$.

1. $(1,0,1) + (0,1,1) - (1,1,2) = 0$, con coeficientes no todos nulos.
2. $(1,2)$ y $(3,4)$ son $\neq 0$ y no son paralelos: si $(3,4) = \lambda(1,2)$, entonces $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$. Por G1-019.T2 son independientes.
3. Para $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $x(1,2) + z(3,4) = (\alpha,\beta)$ es el sistema $x + 3z = \alpha$, $2x + 4z = \beta$, con $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$: tiene solución (G1-003.T3), $x = -2\alpha + \frac{3}{2}\beta$, $z = \alpha - \frac{1}{2}\beta$. Generan $\mathbb{R}^2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $m < n$

$x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0$ $(m = n = 2)$: sumando, $2x_1 = 0$, y la única solución es 0.

⚠ **Homogéneo**

$x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $(m = 2 < n = 3)$ no tiene ninguna solución. El lema necesita lados derechos nulos: así 0 siempre es solución y la pregunta es si hay otra.

⚠ **«Paralelos» pide vectores no nulos**

0 y $(1,2)$ son dependientes $(1 \cdot 0 + 0 \cdot (1,2) = 0)$ y no son paralelos. Toda lista que contiene a 0 es dependiente.

Ejercicios

1. Decide si $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ son independientes.
2. Demuestra que si $v_1, \ldots, v_k$ son independientes, toda sublista también lo es.
3. Encuentra una solución no nula de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_3 = 0, x_2 + 2x_4 = 0$ siguiendo la construcción del lema.
4. Demuestra que u, v son independientes $\iff u + v, u - v$ lo son.
5. En la barra, ¿son independientes plátano, yogur y avena en (proteína, azúcar)? ¿Y en (proteína,

azúcar, fibra) con avena $= (5, 1, 4)$?

Respuestas

1. Dependientes: $(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + (7, 8, 9) = 0$.
2. Una relación no trivial de la sublista, completada con ceros, sería una de la lista.
3. De la primera (la de menor índice con x_4): $x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$; al sustituir: $x_1 - x_3 = 0$, $-2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$; de nuevo, $x_3 = x_1$ y $x_2 = -4x_1$. Con $x_1 = 1$: $(1, -4, 1, 2)$.
4. $a(u + v) + b(u - v) = (a + b)u + (a - b)v$, y $a + b = a - b = 0 \iff a = b = 0$.
5. En $\mathbb{R}^2$ no (tres vectores, dos ecuaciones: G1-019.T3). En $\mathbb{R}^3$ sí: el sistema homogéneo tiene solo la solución 0 (el determinante es $-585 \neq 0$, como se verá en G1-022).

G1-020 · Bases y dimensión

Motivación

> **¿Cuántos ingredientes necesitas?**
> La barra anota (proteína, azúcar, fibra): plátano $(1, 14, 3)$, yogur $(10, 5, 0)$, avena $(5, 1, 4)$, cacao $(2, 1, 3)$. Con los tres primeros ya se prepara cualquier terna. El cacao no agrega nada: $13 \cdot \text{cacao} + 2 \cdot \text{yogur} = \text{plátano} + 9 \cdot \text{avena} = (46, 23, 39)$. Esta clase demuestra que en $\mathbb{R}^3$ ningún cuarto ingrediente puede agregar algo, y que «el número de ingredientes base» no depende de cuáles escojas.
> Dónde falla la analogía: los nutrientes reales son muchos más de tres; si mides n, el número es n.

Parte 1 · Más vectores que generadores

Teorema G1-020.T1 (más vectores que generadores son dependientes)

Si $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ y $w_1, \dots, w_m \in V$ con $m > n$, entonces $w_1, \dots, w_m$ son dependientes.

> **Idea de la demostración**
> Se escribe cada w_j en los generadores y se agrupa por generador: anular $\sum x_j w_j$ se reduce a un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones.

Demostración.

1. Si $n = 0$, $V = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$ (G1-018.D2), así que $w_1 = 0$ y $1 \cdot w_1 = 0$ es una relación no trivial (G1-017.T1). Sea en adelante $n \geq 1$.
2. Cada $w_j \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, así que $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (G1-018.T2).

3. Para $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, por las reglas de G1-017.D1 y el intercambio de sumas finitas (C1-005.T12),

$$\sum_{j=1}^{m} x_j w_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \Big) v_i .$$

4. El sistema $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ tiene n ecuaciones y $m > n$ incógnitas: por G1-019.T3 tiene una solución $x \neq 0$.
5. Con esa x, el paso 3 da $\sum_j x_j w_j = \sum_i 0\, v_i = 0$ (G1-017.T1), con algún $x_j \neq 0$: los w_j son dependientes (G1-019.D1). ■

Definición G1-020.D1 (base, dimensión)

Una **base** de V es una lista independiente que genera V. V es **finitamente generado** si lo genera una lista finita.

Teorema G1-020.T2 (la dimensión está bien definida)

Si V es finitamente generado, tiene una base, y todas sus bases tienen el mismo número de elementos, dim V ($\{0\}$ tiene la base vacía y dim 0).

Demostración. Sea $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

1. *La regla de extracción.* Se recorren $j = 1, \dots, n$ y se **conserva** v_j si y solo si $v_j \notin \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$ (para $j = 1$: si $v_1 \neq 0$). Sea B_j la lista de los conservados entre los primeros j. La regla no deja nada a elección.
2. *Genera.* Por inducción en j (C1-005.T1): $\langle B_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Si v_j se conserva, se agrega a ambos lados. Si no, $v_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle = \langle B_{j-1} \rangle$ y agregarlo no cambia el generado (G1-018.T2: $\langle B_{j-1} \rangle$ es un subespacio que contiene a $v_1, \dots, v_j$).
3. *Es independiente.* Por inducción en j: si B_{j-1} es independiente y v_j se conserva, entonces $v_j \notin \langle B_{j-1} \rangle$ (paso 2), y B_j es independiente por G1-019.T2. La lista vacía es independiente (no hay coeficientes que anular).
4. Así B_n es una base de V (G1-020.D1). Si $V = \{0\}$, todos los v_j son 0 y B_n es la lista vacía.
5. *Mismo tamaño.* Sean B y B' bases con k y k' elementos. B' es independiente y $V = \langle B \rangle$; si $k' > k$, B' sería dependiente (G1-020.T1). Luego $k' \leq k$, y por simetría $k \leq k'$.
6. *El caso* $\{0\}$. Toda lista no vacía de $\{0\}$ contiene a 0, que es dependiente ($1 \cdot 0 = 0$); la única base es la vacía y $\dim\{0\} = 0$. ■

Parte 2 · Extraer, extender y los subespacios de $\mathbb{R}^3$

Teorema G1-020.T3 (extraer y extender)

En V de dimensión n: toda lista generadora contiene una base; toda lista independiente tiene a lo más n vectores y se extiende a una base; n vectores independientes (o n generadores) forman una base.

Demostración. Sea $v_1, \dots, v_n$ una base de V.

1. *Extraer.* A una lista generadora $u_1, \dots, u_r$ se le aplica la regla de G1-020.T2; queda una sublista que es base.
2. *A lo más n.* Una lista independiente en $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ tiene a lo más n vectores (G1-020.T1).
3. *Extender.* Sea $w_1, \dots, w_k$ independiente. Se recorren $j = 1, \dots, n$ y se **agrega** v_j si no está en el generado de la lista actual (la lista que se tiene en ese momento). Cada lista intermedia es independiente (G1-019.T2) y, por el paso 2, el proceso agrega a lo más $n - k$ vectores.
4. Al final, cada v_j está en el generado de la lista final F: o se agregó, o ya estaba en el generado de una lista intermedia, contenido en $\langle F \rangle$. Así $\langle F \rangle$ es un subespacio que contiene a $v_1, \dots, v_n$, y contiene a $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ (G1-018.T2): F es una base que extiende a $w_1, \dots, w_k$.
5. *n independientes.* Se extienden a una base (paso 3), que tiene n elementos (G1-020.T2): no se agregó nada, y ya eran base.
6. *n generadores.* Contienen una base (paso 1) de n elementos (G1-020.T2): la sublista es toda la lista, que es independiente. ■

Teorema G1-020.T4 (dimensión de subespacios)

Si $\dim V = n$ y $W \subset V$ es subespacio, W es finitamente generado, $\dim W \leq n$, y $\dim W = n \Rightarrow W = V$.

Demostración.

1. Las listas independientes de elementos de W son independientes en V, así que tienen a lo más n vectores (G1-020.T3). El conjunto de sus longitudes es no vacío (contiene a 0, la lista vacía) y está acotado por n.
2. Sea k la mayor de esas longitudes (buen orden, C1-005.T3, aplicado a los números $n + 1 - \ell \in \mathbb{N}$) y sea $w_1, \dots, w_k$ una lista independiente en W de longitud k.

3. Si existiera $w \in W$ con $w \notin \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, la lista $w_1, \dots, w_k, w$ sería independiente (G1-019.T2) y de longitud $k+1$: contradicción. Luego $\langle w_1, \dots, w_k \rangle \supset W$, y como W es subespacio, $\langle w_1, \dots, w_k \rangle \subset W$ (G1-018.T2).
4. Así $w_1, \dots, w_k$ es una base de W y $\dim W = k \leq n$.
5. Si $k = n$, son n independientes en V, luego base de V (G1-020.T3): $V = \langle w_1, \dots, w_n \rangle \subset W \subset V$. ■

Teorema G1-020.T5

$\dim \mathbb{R}^n = n$ (base canónica).

Demostración.

1. Todo $x \in \mathbb{R}^n$ es $x = \sum_i x_i e_i$ (G1-017.E1): $e_1, \dots, e_n$ generan.
2. Si $\sum_i a_i e_i = 0$, la componente i del lado izquierdo es a_i (G1-017.E1, C1-005.T12), así que $a_i = 0$: son independientes.
3. Es una base de n elementos (G1-020.D1) y $\dim \mathbb{R}^n = n$ (G1-020.T2). ■

Teorema G1-020.T6 (los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, las rectas $\langle v \rangle$ ($v \neq 0$) y $\mathbb{R}^2$; los de $\mathbb{R}^3$ son $\{0\}$, las rectas $\langle v \rangle$, los planos $\langle u, v \rangle$ (u, v independientes) y $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$.

1. Por G1-020.T4 y G1-020.T5, W tiene una base de $k \leq n$ vectores.
2. $k = 0$: $W = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$.
3. $k = 1$: la base es un v independiente, es decir $v \neq 0$ (G1-019.T2), y $W = \langle v \rangle = L(0, v)$ (G1-018.T3).
4. $k = 2 < n$ (solo si $n = 3$): u, v independientes, es decir no proporcionales (G1-019.T2), y $W = \langle u, v \rangle = \Pi(0, u, v)$ (G1-018.T3).
5. $k = n$: $W = \mathbb{R}^n$ (G1-020.T4).
6. Recíprocamente, $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, las rectas y los planos por el origen son subespacios (G1-018.T1, G1-018.T3). ■

⚠ Dimensión de una curva o de una superficie

Se dice que una curva «tiene dimensión 1» y una superficie «dimensión 2» porque se describen con uno o dos parámetros. Es una idea intuitiva (TEMARIO, decisión 5); no es un teorema del curso. Una circunferencia no es un subespacio y G1-020.T6 no habla de ella.

Teorema G1-020.T7 (identidad de polinomios, versión elemental)

Si $\sum_{j=0}^{d} a_j x^j = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, todos los a_j son 0.

Demostración. Supón que algún $a_j \neq 0$ y sea e el mayor índice con $a_e \neq 0$ (máximo de una lista finita). Para todo x, $p(x) := \sum_{j \leq e} a_j x^j = 0$.

1. Si $e = 0$, $p(x) = a_0 \neq 0$: contradicción.
2. Si $e \geq 1$, sea $M := \sum_{j<e} |a_j|/|a_e|$ y $x := M + 1 \geq 1$. Para $j \leq e-1$, $x^j \leq x^{e-1}$ (inducción con C1-005.T9 y C1-003.T4, pues $x \geq 1$).
3. Por la desigualdad del triángulo (C1-004.T4, C1-005.T1) y $|ab| = |a||b|$ (C1-004.T2):

$$\left|\sum_{j<e} a_j x^j\right| \leq \sum_{j<e} |a_j| x^j \leq M|a_e|x^{e-1} < (M+1)|a_e|x^{e-1} = |a_e|x^e,$$

   donde la desigualdad estricta usa $|a_e|x^{e-1} > 0$ (C1-003.T4).
4. Pero $p(x) = 0$ da $a_e x^e = -\sum_{j<e} a_j x^j$, y tomando valor absoluto (C1-004.T2), $|a_e|x^e = |\sum_{j<e} a_j x^j|$, contra el paso 3. Luego todos los a_j son 0. ■

Corolario G1-020.C1 (los polinomios no tienen dimensión finita)

Para cada k, $1, x, \ldots, x^k$ son independientes; por tanto el espacio de los polinomios no es finitamente generado.

Demostración.

1. Si $\sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ es la función 0, todos los a_j son 0 (G1-020.T7): son independientes (G1-019.D1).
2. Los polinomios son un espacio vectorial (G1-018.E1, G1-018.T1). Si los generaran n polinomios, los $n+1$ polinomios $1, x, \ldots, x^n$ serían dependientes (G1-020.T1), contra el paso 1. ■

Ejemplo G1-020.E1

$(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ se extiende a una base de $\mathbb{R}^3$ con e_1; $\{x + y + z = 0\}$ tiene dimensión 2.

1. Con la regla de G1-020.T3 se prueba e_1: $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = (a, a + b, b) = (1, 0, 0)$ obliga $a = 1, b = 0$ y $a + b = 0$, imposible. Se agrega e_1.
2. Tres independientes en $\mathbb{R}^3$ son base (G1-020.T3, G1-020.T5); e_2 y e_3 ya están en el generado.
3. $W := \{x + y + z = 0\}$ contiene a 0 y es cerrado bajo suma y múltiplos: es subespacio. Si $(x, y, z) \in W$, $(x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$; estos dos vectores no son proporcionales, así que son base de W y $\dim W = 2$: un plano por el origen (G1-020.T6).

Por qué cada hipótesis

⚠ En G1-020.T1, que los v_i generen

En $\mathbb{R}^2$, $v_1 = e_1$ no genera; $w_1 = e_1, w_2 = e_2$ ($m = 2 > 1$) son independientes.

⚠ En G1-020.T4, la dimensión finita

Dentro de las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (que no son finitamente generadas, por G1-020.C1), los polinomios son un subespacio sin base finita. T4 necesita $\dim V = n$.

Ejercicios

1. Extiende $(1, 2, 3)$ a una base de $\mathbb{R}^3$ con la regla de G1-020.T3.
2. Extrae una base de $(1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0)$.
3. Demuestra que si $\dim V = n$, toda lista de $n + 1$ vectores es dependiente y ninguna de $n - 1$ genera.
4. Encuentra la dimensión de $\{(x, y, z, w) : x = y,\ z = 2w\} \subset \mathbb{R}^4$.
5. Demuestra que dos planos distintos por el origen de $\mathbb{R}^3$ se cortan en una recta por el origen.

Respuestas

1. $e_1 \notin \langle(1,2,3)\rangle$: se agrega. $e_2 \notin \langle(1,2,3), e_1\rangle$ (la tercera componente obligaría a coeficiente 0 de $(1,2,3)$): se agrega. Base: $(1,2,3), e_1, e_2$.
2. Se conserva $(1,1)$; $(2,2) \in \langle(1,1)\rangle$ no; $(0,1)$ sí; $(1,0) = (1,1) - (0,1)$ no. Base $(1,1), (0,1)$.
3. G1-020.T1; si $n-1$ generaran, la base de n sería dependiente.
4. $(y, y, 2w, w) = y(1,1,0,0) + w(0,0,2,1)$: dimensión 2.
5. La intersección W es subespacio (G1-018.T1) contenido en un plano, así que $\dim W \leq 2$; si fuera 2, coincidiría con ambos planos (G1-020.T4). No es $\{0\}$: con bases u_1, u_2 y v_1, v_2, los cuatro vectores son dependientes en $\mathbb{R}^3$ y la relación da un vector común $\neq 0$. Luego $\dim W = 1$.

G1-021 · Producto escalar y producto vectorial

Motivación

> **La llave de cruz**
> Para aflojar una tuerca de la llanta, el brazo de la llave es $r = (0.25, 0, 0)$ m. Si empujas con $F_1 = (0, -160, 0)$ N o con $F_2 = (120, -160, 0)$ N (más fuerte, $|F_2| = 200$ N, pero inclinada), el giro es el mismo: $r \times F_1 = r \times F_2 = (0, 0, -40)$, un torque de 40 N·m. Solo cuenta la parte de la fuerza perpendicular al brazo, y el resultado apunta a lo largo del eje de la tuerca.
> Dónde falla la analogía: el torque es una ley de la física; aquí $u \times v$ es solo una fórmula sobre números.

Parte 1 · Bases ortonormales y producto cruz

Teorema G1-021.T1 (bases ortonormales)

En $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), vectores unitarios ortogonales dos a dos son independientes; n de ellos, $u_1, \dots, u_n$, forman una base, y para $x, y \in \mathbb{R}^n$: $x = \sum_i (x \cdot u_i) u_i$ y $x \cdot y = \sum_i (x \cdot u_i)(y \cdot u_i)$.

Demostración.

1. Si $\sum_i a_i u_i = 0$, al multiplicar por u_j (G1-002.T1): $\sum_i a_i (u_i \cdot u_j) = a_j = 0$, pues $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$ y $u_j \cdot u_j = 1$. Son independientes (G1-019.D1).
2. n independientes en $\mathbb{R}^n$ forman una base (G1-020.T3, G1-020.T5).
3. Escribe $x = \sum_i c_i u_i$ (única, G1-019.T1). Multiplicando por u_j como en el paso 1, $x \cdot u_j = c_j$.
4. Entonces $x \cdot y = \left(\sum_i (x \cdot u_i) u_i \right) \cdot y = \sum_i (x \cdot u_i)(u_i \cdot y)$ (G1-002.T1, C1-005.T12). ■

Definición G1-021.D1 (producto cruz)

Para $u, v \in \mathbb{R}^3$: $u \times v := (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$.

Teorema G1-021.T2 (propiedades)

$u \times v$ es bilineal; $v \times u = -(u \times v)$; $u \times u = 0$; $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$; $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$; $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$; $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen} \angle(u, v)$ $(u, v \neq 0)$; $u \times v = 0 \iff u, v$ son proporcionales.

Idea de la demostración

Las componentes de $u \times v$ son, con signo, los tres menores de u y v; la longitud sale de la identidad de Lagrange y el caso $u \times v = 0$, de Cauchy–Schwarz.

Demostración.

1. *Bilineal.* Cada componente es una suma de dos términos $\pm u_i v_j$; por la distributividad (K9) es lineal en u con v fijo y en v con u fijo.
2. *Antisimétrico.* Intercambiar u y v en cada componente da su negativo; con $v = u$, $u \times u = -(u \times u)$, así que $2(u \times u) = 0$ y $u \times u = 0$ (también se ve directo: $u_2u_3 - u_3u_2 = 0$, etc.).
3. *Perpendicular.*

$$(u \times v) \cdot u = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0,$$

   pues los términos se cancelan en pares. Con $(u \times v) \cdot v = -(v \times u) \cdot v = 0$ (paso 2 y lo anterior con los papeles cambiados).
4. *Base canónica.* $e_1 \times e_2 = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0,\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = e_3$; las otras dos, igual.
5. *Longitud.* Con los menores $m_{ij} = u_iv_j - u_jv_i$ (G1-002.D4), $u \times v = (m_{23}, -m_{13}, m_{12})$, y por la identidad de Lagrange (G1-002.T4)

$$|u \times v|^2 = m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2.$$

6. Si $u, v \neq 0$, $\operatorname{sen} \angle(u, v) = \sqrt{m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2}/(|u||v|)$ (G1-006.T1), y $|u \times v| = \sqrt{m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2} = |u||v| \operatorname{sen} \angle(u, v)$.
7. *Cero.* $u \times v = 0 \iff |u \times v|^2 = 0$ (G1-002.T3) $\iff (u \cdot v)^2 = |u|^2|v|^2 \iff |u \cdot v| = |u||v|$ (G1-002.T2, raíces de números ≥ 0) $\iff u, v$ proporcionales (caso de igualdad de G1-002.T5). ■

Teorema G1-021.T3 (doble producto)

$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ y $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$; identidad de Jacobi $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

Demostración.

1. *Primera componente.* Con $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$:

$$\begin{aligned}\big(u \times (v \times w)\big)_1 &= u_2(v_1w_2 - v_2w_1) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3)\\ &= v_1(u_2w_2 + u_3w_3) - w_1(u_2v_2 + u_3v_3)\\ &= v_1(u \cdot w - u_1w_1) - w_1(u \cdot v - u_1v_1) = v_1(u \cdot w) - w_1(u \cdot v).\end{aligned}$$

2. *Las otras componentes.* Sea $P(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3, x_1)$. Por cuenta directa con G1-021.D1, $P(u \times v) = Pu \times Pv$ (por ejemplo, la primera componente de $Pu \times Pv$ es $u_3v_1 - u_1v_3 = (u \times v)_2$), y $Pu \cdot Pv = u \cdot v$ (G1-002.D1).
3. La componente 2 de un vector z es la componente 1 de Pz. Con $z = u \times (v \times w)$, $Pz = Pu \times (Pv \times Pw)$ (paso 2, dos veces), y el paso 1 aplicado a Pu, Pv, Pw da $z_2 = (Pv)_1(Pu \cdot Pw) - (Pw)_1(Pu \cdot Pv) = v_2(u \cdot w) - w_2(u \cdot v)$. Aplicando P otra vez se obtiene la componente 3.
4. *Segunda fórmula.* $(u \times v) \times w = -w \times (u \times v) = -[(w \cdot v)u - (w \cdot u)v] = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$ (G1-021.T2, paso anterior, G1-002.T1).
5. *Jacobi.* Por la primera fórmula, la suma es

$$(u \cdot w)v - (u \cdot v)w + (v \cdot u)w - (v \cdot w)u + (w \cdot v)u - (w \cdot u)v = 0. \quad \blacksquare$$

Parte 2 · Complementos ortogonales y área

Teorema G1-021.T4 (complementos ortogonales en $\mathbb{R}^3$)

Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ son independientes: $u, v, u \times v$ forman una base; $\{w : w \cdot u = w \cdot v = 0\} = \langle u \times v \rangle$; y $\{x : x \cdot (u \times v) = 0\} = \langle u, v \rangle$.

> **Idea de la demostración**
> Si w es perpendicular a u y v, el doble producto da $(u \times v) \times w = 0$: w es proporcional a $u \times v$.

> Lo demás se lee en la base $u, v, u \times v$.

Demostración.

1. u, v no son proporcionales (G1-019.T2), así que $u \times v \neq 0$ (G1-021.T2).
2. Si $au + bv + c(u \times v) = 0$, al multiplicar por $u \times v$ (G1-002.T1, G1-021.T2): $c|u \times v|^2 = 0$, luego $c = 0$; entonces $au + bv = 0$ y $a = b = 0$. Son tres independientes en $\mathbb{R}^3$: una base (G1-020.T3, G1-020.T5).
3. Si $w = \lambda(u \times v)$, entonces $w \cdot u = w \cdot v = 0$ (G1-021.T2).
4. Si $w \cdot u = w \cdot v = 0$, por G1-021.T3, $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u = 0$. Por G1-021.T2, $u \times v$ y w son proporcionales, y como $u \times v \neq 0$, $w = \lambda(u \times v)$ (G1-001.T2).
5. Si $x = au + bv$, $x \cdot (u \times v) = 0$ (G1-021.T2).
6. Si $x \cdot (u \times v) = 0$, en la base del paso 2, $x = au + bv + c(u \times v)$ (G1-019.T1); multiplicando por $u \times v$: $0 = c|u \times v|^2$, así que $c = 0$ y $x \in \langle u, v \rangle$. ■

Teorema G1-021.T5 (completar a una base ortonormal)

Todo u unitario de $\mathbb{R}^3$ forma parte de una base ortonormal $(u, v, u \times v)$; todo par ortonormal (u, v) se completa con $u \times v$, y los únicos terceros vectores posibles son $\pm u \times v$.

Demostración.

1. e_1 y e_2 no son ambos proporcionales a u: si $e_1 = \lambda u$ y $e_2 = \mu u$, entonces $\lambda \neq 0$ y $e_2 = (\mu/\lambda)e_1$ (G1-001.T2), falso. Sea i el **menor** índice con e_i no proporcional a u.
2. $w := e_i - (e_i \cdot u)u \neq 0$ (si no, e_i sería proporcional a u) y $w \perp u$ (G1-003.T4, con $|u| = 1$). Sea $v := w/|w|$, unitario (G1-002.T3) y $\perp u$.
3. Para un par ortonormal (u, v): $|u \times v|^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1$ y $u \times v \perp u, v$ (G1-021.T2). Así $(u, v, u \times v)$ son unitarios y ortogonales dos a dos: una base ortonormal (G1-021.T1).
4. Si z es unitario y $z \perp u, v$, entonces $z = \lambda(u \times v)$ (G1-021.T4; u, v son independientes por G1-021.T1), y $1 = |z| = |\lambda|$: $z = \pm u \times v$. ■

Definición G1-021.D2 ⚠ def (área del paralelogramo)

Para $u \neq 0$, el paralelogramo de lados u, v tiene **área** $|u| \cdot d(v, L(0,u))$ (base × altura); si $u = 0$, área 0. En $\mathbb{R}^2$ se identifica (x, y) con $(x, y, 0)$.

⚠⚠ def

El área se define donde se necesita; la teoría del área (contenido de Jordan) es de Cálculo IV, como en C2-019. Ningún teorema posterior depende de esta definición salvo los que la calculan.

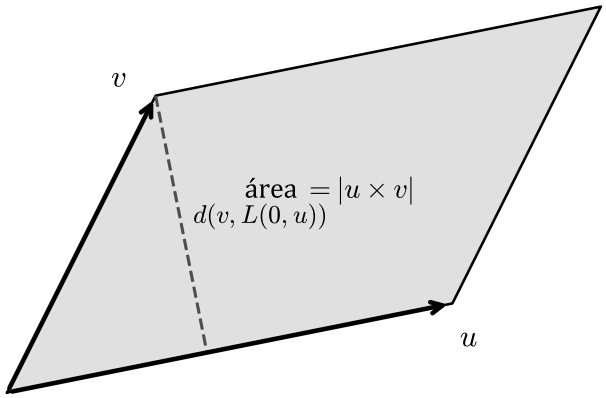


Figura 16: Área del paralelogramo: la base $|u|$ por la altura $d(v, L(0,u))$.

Teorema G1-021.T6 ⚠ def (área $= |u \times v|$)

El área de G1-021.D2 es $|u \times v|$; es simétrica en u, v; en $\mathbb{R}^2$ vale $|\det(u, v)|$.

Demostración.

1. Si $u = 0$, el área es $0 = |0 \times v|$ (G1-021.T2, bilinealidad).
2. Si $u \neq 0$ y $v = 0$: $0 \in L(0,u)$, así que $d(0, L(0,u)) = 0$ y el área es $0 = |u \times 0|$.
3. Si $u, v \neq 0$: por G1-006.T2 (con $A = 0$, $P = v$ y director u), $d(v, L(0,u)) = |v| \operatorname{sen} \angle(v,u)$, y $\operatorname{sen} \angle(v,u) = \operatorname{sen} \angle(u,v)$ (G1-006.T1). El área es $|u||v| \operatorname{sen} \angle(u,v) = |u \times v|$ (G1-021.T2).
4. *Simetría.* $|v \times u| = |-(u \times v)| = |u \times v|$ (G1-021.T2, G1-002.T3).
5. *En* $\mathbb{R}^2$. $(u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0) = (0, 0, u_1 v_2 - u_2 v_1)$, cuya norma es $|\det(u, v)|$ (G1-002.D4). ■

Ejemplo G1-021.E1

$(1,0,0) \times (1,1,0) = (0,0,1)$; área del paralelogramo de $(1,2,0)$, $(3,1,0)$: 5.

1. $(0 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0,\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = (0,0,1)$.
2. $\det((1,2),(3,1)) = 1 - 6 = -5$; el área es $|-5| = 5$ (G1-021.T6).

El panel solar

Un panel de lados $u = (2,0,0)$ y $v = (0,1,1)$ (en metros) tiene $u \times v = (0,-2,2)$: área $2\sqrt{2} \approx 2.83\ \text{m}^2$, y mira en la dirección de $\langle (0,-1,1) \rangle$ (G1-021.T4).

Por qué cada hipótesis

⚠ En G1-021.T4, u, v independientes

Con $u = e_1$, $v = 2e_1$: $u \times v = 0$, pero $\{w : w \cdot u = w \cdot v = 0\} = \{w_1 = 0\}$ es un plano, no $\langle 0 \rangle = \{0\}$.

⚠ El producto cruz no es asociativo ni conmutativo

$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0$ pero $e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$; y $e_2 \times e_1 = -e_3$.

Ejercicios

1. Calcula $(1,2,3) \times (4,5,6)$ y verifica que es perpendicular a ambos.
2. Demuestra que $|u \times v|^2 + (u \cdot v)^2 = |u|^2|v|^2$ con G1-021.T2 y explica por qué es Pitágoras para $(|u||v| \operatorname{sen}, |u||v| \cos)$.
3. Completa $u = (1,2,2)/3$ a una base ortonormal con la regla de G1-021.T5.
4. Calcula el área del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ como la mitad del paralelogramo.
5. Demuestra que $u \times v = u \times w$ con $u \neq 0$ implica $v - w = \lambda u$.

Respuestas

1. $(-3, 6, -3)$; $(-3, 6, -3) \cdot (1, 2, 3) = -3 + 12 - 9 = 0$ y con $(4, 5, 6)$: $-12 + 30 - 18 = 0$.
2. Es la fórmula de T2 reordenada.
3. e_1 no es proporcional a u: $w = e_1 - \frac{1}{3}u = (8, -2, -2)/9$, $v = (4, -1, -1)/(3\sqrt{2})$, $u \times v = (0, 1, -1)/\sqrt{2}$.
4. Lados $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$; producto $(1, 1, 1)$; área del triángulo $\sqrt{3}/2$.
5. $u \times (v - w) = 0$, así que $u, v - w$ son proporcionales y $v - w = \lambda u$ (G1-001.T2).

G1-022 · Triple producto escalar y determinantes

Motivación

> **El tripié de la cámara**
> Las patas de un tripié van de la cabeza a los apoyos: $u = (1, 0, -3)$, $v = (-1, 1, -3)$, $w = (0, -1, -3)$ (en decímetros). Si las tres quedaran en un mismo plano por la cabeza, el tripié se caería. Una sola cuenta lo decide: $u \cdot (v \times w) = -9 \neq 0$. Con una tercera pata «chueca» $w' = 2u - v = (3, -1, -3)$, la cuenta da 0.
> Dónde falla la analogía: un tripié real también se cae si el centro de masa queda fuera de los apoyos.

Parte 1 · Determinante, volumen y orientación

Definición G1-022.D1 (triple producto y determinante 3 × 3)

$[u, v, w] := u \cdot (v \times w)$. El **determinante** de la matriz 3 × 3 de columnas u, v, w es

$$\det(u, v, w) := [u, v, w] = u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 - u_2 v_1 w_3 - u_1 v_3 w_2$$

(desarrollo por la primera columna); para 2 × 2, $\det(u, v)$ de G1-002.D4. La **transpuesta** intercambia filas y columnas.

La fórmula de seis términos sale de desarrollar $u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)$ (G1-021.D1, G1-002.D1).

Teorema G1-022.T1 (multilineal, alternante)

det es lineal en cada columna; cambia de signo al intercambiar dos columnas; es 0 si dos columnas son iguales; $[u,v,w] = [v,w,u] = [w,u,v]$; $\det(e_1,e_2,e_3) = 1$; $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$. Lo mismo para 2×2.

Demostración.

1. *Lineal.* En u: $u \mapsto u\cdot(v\times w)$ es lineal (G1-002.T1). En v o en w: $v\times w$ es bilineal (G1-021.T2) y el producto punto es lineal.
2. *Cíclica.* En la fórmula de seis términos, cambiar (u,v,w) por (v,w,u) permuta los tres términos con $+$ entre sí ($u_1v_2w_3 \leftrightarrow v_1w_2u_3$, etc.) y los tres con $-$ entre sí: $[v,w,u] = [u,v,w]$; aplicando otra vez, $[w,u,v] = [u,v,w]$.
3. *Intercambios.* $[u,w,v] = -[u,v,w]$ porque $w\times v = -(v\times w)$ (G1-021.T2). Con la ciclicidad, $[v,u,w] = [u,w,v] = -[u,v,w]$ y $[w,v,u] = [v,u,w] = -[u,v,w]$.
4. *Columnas iguales.* $[u,u,w] = u\cdot(u\times w) = 0$, $[u,v,v] = u\cdot 0 = 0$ y $[u,v,u] = u\cdot(v\times u) = 0$ (G1-021.T2).
5. $\det(e_1,e_2,e_3) = e_1\cdot(e_2\times e_3) = e_1\cdot e_1 = 1$ (G1-021.T2).
6. *Transpuesta.* Las columnas de A^{T} son $r_i = (u_i,v_i,w_i)$. Con la fórmula, $\det(r_1,r_2,r_3) = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - w_1v_2u_3 - v_1u_2w_3 - u_1w_2v_3$, que son los mismos seis términos que $\det A$.
7. 2×2. $\det(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$ es lineal en cada columna (K9), cambia de signo al intercambiar, $\det(u,u) = 0$, $\det(e_1,e_2) = 1$, y la transpuesta tiene columnas (u_1,v_1), (u_2,v_2) con determinante $u_1v_2 - v_1u_2$. ■

Teorema G1-022.T2 ($\det = 0 \iff$ columnas dependientes)

$[u,v,w] = 0 \iff u,v,w$ son dependientes $\iff$ están en un plano por el origen (un subespacio de dimensión ≤ 2). $\det(u,v) = 0 \iff u,v$ dependientes.

Idea de la demostración

$v\times w$ es normal al plano $\langle v,w\rangle$; $[u,v,w] = 0$ dice que u está en ese plano.

Demostración.

1. *Si v, w son dependientes:* $v \times w = 0$ (G1-021.T2), así que $[u, v, w] = 0$; y una relación $bv + cw = 0$ no trivial da $0u + bv + cw = 0$: u, v, w son dependientes. Las dos primeras afirmaciones valen.
2. *Si v, w son independientes:* por G1-021.T4, $\{x : x \cdot (v \times w) = 0\} = \langle v, w\rangle$, así que $[u, v, w] = 0 \iff u \in \langle v, w\rangle$.
3. Si $u \in \langle v, w\rangle$, u, v, w son dependientes (G1-019.T2). Si $au + bv + cw = 0$ no trivial, $a \neq 0$ (si no, v, w serían dependientes), y $u = -a^{-1}(bv + cw) \in \langle v, w\rangle$.
4. *Plano por el origen.* Si son dependientes, la base que G1-020.T3 extrae de u, v, w tiene a lo más 2 vectores (no puede ser toda la lista), así que $\langle u, v, w\rangle$ tiene dimensión ≤ 2: es $\{0\}$, una recta o un plano por el origen (G1-020.T6), y contiene a los tres. Recíprocamente, en un subespacio de dimensión ≤ 2 tres vectores son dependientes (G1-020.T3).
5. 2×2. Por la identidad de Lagrange (G1-002.T4), $\det(u, v)^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$; así $\det(u, v) = 0 \iff |u \cdot v| = |u||v| \iff u, v$ son proporcionales (G1-002.T5), es decir dependientes. ■

Definición G1-022.D2 ⚠ def (volumen del paralelepípedo)

Si u, v son independientes, el paralelepípedo de aristas u, v, w tiene **volumen** (área de la base $u, v) \times d(w, \langle u, v\rangle)$; si son dependientes, 0.

Teorema G1-022.T3 ⚠ def (volumen $= |[u, v, w]|$)

El volumen de G1-022.D2 es $|[u, v, w]|$.

Demostración.

1. Si u, v son dependientes, el volumen es 0 y $[u, v, w] = 0$ (G1-022.T2).
2. Si son independientes, $\langle u, v\rangle = \{x : x \cdot (u \times v) = 0\} = N(0, u \times v)$ (G1-021.T4, G1-003.D2), y por G1-003.T6, $d(w, N(0, u \times v)) = |w \cdot (u \times v)|/|u \times v|$.
3. El área de la base es $|u \times v|$ (G1-021.T6). El volumen es

$$|u \times v| \cdot \frac{|w \cdot (u \times v)|}{|u \times v|} = |[w, u, v]| = |[u, v, w]| \quad \text{(G1-022.T1).} \quad ■$$

⚠⚠ def

El volumen se define aquí (base × altura); la teoría del volumen es de Cálculo IV. Ningún teorema posterior de G1 depende de esta definición.

Definición G1-022.D3 (orientación)

Una base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ es **positiva** si $[u, v, w] > 0$ y **negativa** si < 0.

Por G1-022.T2, una base tiene $[u, v, w] \neq 0$, así que es positiva o negativa.

Parte 2 · Movimientos del espacio y congruencia

Definición G1-022.D4 (movimiento del espacio)

Un **movimiento** de $\mathbb{R}^3$ es $m(x) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + b$ con (w_1, w_2, w_3) base ortonormal; es **directo** si $[w_1, w_2, w_3] = 1$.

Teorema G1-022.T4 (los movimientos de $\mathbb{R}^3$)

Para un movimiento: $[w_1, w_2, w_3] = \pm 1$; conserva el producto punto de diferencias; es una isometría biyectiva cuya inversa es un movimiento; lleva rectas en rectas y planos en planos.

Demostración. Sea $\ell(x) := x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3$, así que $m(x) = \ell(x) + b$.

1. ± 1. Por G1-021.T5, $w_3 = \varepsilon\, w_1 \times w_2$ con $\varepsilon = \pm 1$. Entonces $[w_1, w_2, w_3] = [w_3, w_1, w_2] = w_3 \cdot (w_1 \times w_2) = \varepsilon |w_1 \times w_2|^2 = \varepsilon$ (G1-022.T1, G1-021.T2 con $|w_1 \times w_2|^2 = 1 - 0$).
2. *Producto punto.* $m(P) - m(Q) = \ell(P - Q)$, y $\ell(x) \cdot \ell(y) = \sum_{i,j} x_i y_j\, w_i \cdot w_j = \sum_i x_i y_i = x \cdot y$ (G1-002.T1).
3. *Isometría.* Con $x = y = P - Q$: $|m(P) - m(Q)| = |P - Q|$ (G1-004.D2).
4. *Inversa.* Sea $g(y) := ((y - b) \cdot w_1, (y - b) \cdot w_2, (y - b) \cdot w_3)$. Por G1-021.T1, $m(g(y)) = \sum_i ((y - b) \cdot w_i) w_i + b = y$, y $g(m(x))_i = \ell(x) \cdot w_i = x_i$. Así m es biyectiva con inversa g (C1-011.T1).
5. *La inversa es un movimiento.* $g(y) = \sum_j y_j w'_j - c$, con $w'_j := ((w_1)_j, (w_2)_j, (w_3)_j)$ (los renglones) y $c := (b \cdot w_i)_i$. Por G1-021.T1 con $x = e_j, y = e_k$: $e_j \cdot e_k = \sum_i (e_j \cdot w_i)(e_k \cdot w_i) = w'_j \cdot w'_k$: los w'_j son ortonormales.
6. *Rectas.* $m(P + tv) = m(P) + t\ell(v)$ y $|\ell(v)| = |v| \neq 0$: $m(L(P, v)) = L(m(P), \ell(v))$ (G1-001.D3).
7. *Planos.* $m(P + su + tv) = m(P) + s\ell(u) + t\ell(v)$. Si $a\ell(u) + b'\ell(v) = 0$, entonces $\ell(au + b'v) = 0$, $|au + b'v| = 0$ y $a = b' = 0$: $\ell(u), \ell(v)$ no son proporcionales, y $m(\Pi(P, u, v)) = \Pi(m(P), \ell(u), \ell(v))$. ■

Teorema G1-022.T5 (congruencia en el espacio)

Dos triángulos de $\mathbb{R}^3$ (G1-008.D1) son congruentes $\iff$ existe un movimiento de $\mathbb{R}^3$ que lleva uno en el otro, vértice a vértice.

Idea de la demostración

En el marco propio de cada triángulo, las coordenadas de los vértices dependen solo de c, b y $\cos A$. El movimiento que lleva un marco en el otro lleva los vértices en los vértices.

Demostración. Sean ABC y $A'B'C'$.

1. ($\Leftarrow$) Si m es un movimiento con $m(A) = A'$, etc., conserva los productos punto de diferencias (G1-022.T4), luego los lados (G1-002.D3) y los cosenos (G1-006.D1): son congruentes (G1-008.D1).
2. ($\Rightarrow$) Sea $u := (B-A)/c$. Por G1-003.T4, $C-A = ((C-A)\cdot u)u + z$ con $z \perp u$, y $(C-A)\cdot u = b\cos A$ (G1-006.D1).
3. Por Pitágoras (G1-003.T1), $|z|^2 = b^2 - b^2\cos^2 A = b^2 \operatorname{sen}^2 A$, y $\operatorname{sen} A > 0$ (G1-006.T2, pues $B-A$ y $C-A$ no son proporcionales, G1-001.T5): $|z| = b\operatorname{sen} A > 0$. Sea $w := z/|z|$.
4. (u, w) es un par ortonormal y (u, w, n) con $n := u \times w$ es base ortonormal (G1-021.T5). Igual (u', w', n') para $A'B'C'$.
5. Se define $m(x) := A' + ((x-A)\cdot u)u' + ((x-A)\cdot w)w' + ((x-A)\cdot n)n'$. Es de la forma $\sum_j x_j W_j + b$ con $W_j := (e_j\cdot u)u' + (e_j\cdot w)w' + (e_j\cdot n)n'$, y $W_j\cdot W_k = (e_j\cdot u)(e_k\cdot u) + (e_j\cdot w)(e_k\cdot w) + (e_j\cdot n)(e_k\cdot n) = e_j\cdot e_k$ (G1-021.T1, dos veces): m es un movimiento (G1-022.D4).
6. $m(A) = A'$. Como $B - A = cu$, $(B-A)\cdot w = (B-A)\cdot n = 0$ y $m(B) = A' + cu' = A' + c'u' = B'$ (con $c = c'$).
7. $C - A = b\cos A\, u + b\operatorname{sen} A\, w$, así que $m(C) = A' + b\cos A\, u' + b\operatorname{sen} A\, w'$. Lo mismo para el otro triángulo da $C' - A' = b'\cos A'\, u' + b'\operatorname{sen} A'\, w'$, y como $b = b'$ y $\cos A = \cos A'$ (luego $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} A'$, G1-006.D1), $m(C) = C'$. ■

Ejemplo G1-022.E1

$[e_1, e_2, e_3] = 1$, $[e_2, e_1, e_3] = -1$; $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ tienen det 2 y son una base positiva.

1. $[e_1, e_2, e_3] = 1$ (G1-022.T1) y al intercambiar dos columnas cambia el signo.
2. $(0,1,1) \times (1,0,1) = (1,1,-1)$ y $(1,1,0)\cdot(1,1,-1) = 2 > 0$: base (G1-022.T2) positiva

(G1-022.D3).

Las dos escuadras
$(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,4,0)$ y $(1,1,1)$, $(1,1,4)$, $(1,5,1)$ son triángulos 3-4-5 con el ángulo recto en el primer vértice: son congruentes, y el movimiento de G1-022.T5 lleva uno en otro (verificado en `tools/checks/G1-022.py`).

Por qué cada hipótesis

⚠ $\det = 0$ no quiere decir que haya dos paralelos

$(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,2)$ tienen det 0 (el tercero es la suma) y ningún par es paralelo.

⚠ La base ortonormal en G1-022.D4

$m(x) = 2x$ lleva cada triángulo en uno semejante con razón 2, no congruente: G1-022.T4 pide columnas ortonormales.

⚠ No es multiplicativo por escalares

$\det(2u, 2v, 2w) = 8\det(u, v, w)$: es lineal en *cada* columna.

Ejercicios

1. Calcula $\det((1,2,3),(4,5,6),(7,8,10))$.
2. Demuestra que $[u, v, u \times v] = |u \times v|^2$.
3. Decide si los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ son coplanares.
4. Demuestra que la composición de dos movimientos de $\mathbb{R}^3$ es un movimiento.
5. Comprueba que $x \mapsto (x_1, x_2, -x_3)$ es un movimiento no directo.

Respuestas

1. $v \times w = (5 \cdot 10 - 6 \cdot 8,\ 6 \cdot 7 - 4 \cdot 10,\ 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = (2, 2, -3)$ y $u \cdot (v \times w) = 2 + 4 - 9 = -3$.

2. $[u, v, u \times v] = [u \times v, u, v] = (u \times v) \cdot (u \times v)$.
3. Con diferencias desde $(1, 0, 0)$: $\det((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)) = -1(0-1) - 1(-1-0) + 0 = 2 \neq 0$: no son coplanares.
4. $m_2(m_1(x)) = \ell_2\ell_1(x) + \ell_2(b_1) + b_2$, y $\ell_2\ell_1$ conserva productos punto, así que sus columnas $\ell_2\ell_1(e_j)$ son ortonormales.
5. Sus columnas son $e_1, e_2, -e_3$, ortonormales, y $[e_1, e_2, -e_3] = -1$ (G1-022.T1).

G1-023 · La recta en el plano

Motivación

> **La cafetería y la avenida**
> En el mapa de la ciudad (en km), la cafetería está en $(1, 2)$ y la avenida es la recta $3x + 4y = 1$. Caminando en línea recta, el punto más cercano de la avenida está a $|3 + 8 - 1|/\sqrt{3^2 + 4^2} = 2$ km. El parque está en $(-1, -1)$; el número $3x + 4y - 1$ vale 10 en la cafetería y -8 en el parque: los signos opuestos dicen que el camino recto entre ellos cruza la avenida.
> Dónde falla la analogía: una avenida real tiene ancho y en la ciudad no se camina a través de las manzanas.

Parte 1 · Ecuaciones y distancia

Teorema G1-023.T1 (paramétrica $\Leftrightarrow$ cartesiana)

En $\mathbb{R}^2$, $L(P, v) = \{(x, y) : ax + by = k\}$ con $(a, b) := v^\perp$ y $k := (a, b) \cdot P$; recíprocamente, si $(a, b) \neq 0$, $\{ax + by = k\} = L(P_0, (-b, a))$ con $P_0 := k(a, b)/(a^2 + b^2)$, y $N(A, n) = L(A, n^\perp)$. Dos ecuaciones dan la misma recta $\Leftrightarrow$ $(a', b', k') = \lambda(a, b, k)$ con $\lambda \neq 0$. (a, b) es un **vector normal**.

Demostración.

1. *Lema.* Para $u \neq 0$ y $A \in \mathbb{R}^2$: $N(A, u) = L(A, u^\perp)$. En efecto, $X \in N(A, u) \iff (X - A) \cdot u = 0 \iff X - A = tu^\perp$ para algún t (G1-003.T2) $\iff X \in L(A, u^\perp)$.
2. *De paramétrica a cartesiana.* Sea $n := v^\perp \neq 0$ ($|v^\perp| = |v|$, G1-003.T2). Por el lema, $N(P, n) = L(P, n^\perp) = L(P, -v) = L(P, v)$ (G1-003.T2: $(v^\perp)^\perp = -v$; G1-001.T4 (a)). Y $(X - P) \cdot n = 0 \iff n \cdot X = n \cdot P = k$.
3. *De cartesiana a paramétrica.* Con $n = (a, b) \neq 0$, $n \cdot P_0 = k(a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) = k$, así que $\{n \cdot X = k\} = \{(X - P_0) \cdot n = 0\} = N(P_0, n) = L(P_0, n^\perp)$ (lema), y $n^\perp = (-b, a)$.

4. *Misma recta.* Si $(a', b', k') = \lambda(a, b, k)$ con $\lambda \neq 0$, las ecuaciones son equivalentes (K8).
5. Si $\{ax + by = k\} = \{a'x + b'y = k'\}$, por el paso 3 la recta es $L(P_0, (-b, a)) = L(P_0', (-b', a'))$, y por G1-001.T4 (d), $(-b', a') = \lambda(-b, a)$ con $\lambda \neq 0$ (G1-001.T2): $(a', b') = \lambda(a, b)$.
6. Como P_0 está en la recta, $k' = (a', b') \cdot P_0 = \lambda(a, b) \cdot P_0 = \lambda k$. ■

Definición G1-023.D1 (pendiente)

Si $b \neq 0$, $ax + by = k$ es $y = mx + q$ con **pendiente** $m := -a/b$; si $b = 0$, es vertical.

Teorema G1-023.T2 (paralelas y perpendiculares)

Dos rectas del plano son paralelas $\iff$ sus normales lo son ($\iff$ misma pendiente o ambas verticales); son perpendiculares (directores ortogonales) $\iff$ normales ortogonales ($\iff$ $mm' = -1$ si no son verticales). Dos rectas no paralelas se cortan en exactamente un punto; dos paralelas distintas no se cortan.

Demostración. Sean $\ell = \{n \cdot X = k\}$ y $\ell' = \{n' \cdot X = k'\}$, con directores $n^\perp$, $n'^\perp$ (G1-023.T1).

1. *Paralelas.* Si $n'^\perp = \lambda n^\perp$, aplicando $\perp$ (que es lineal) y $(x^\perp)^\perp = -x$ (G1-003.T2): $n' = \lambda n$. El recíproco es igual. Así directores paralelos $\iff$ normales paralelas.
2. Con $n = (a, b), n' = (a', b')$: paralelas $\iff$ $\det(n, n') = ab' - a'b = 0$ (G1-022.T2). Si $b, b' \neq 0$, esto es $-a/b = -a'/b'$ (K8); si $b = 0$ (entonces $a \neq 0$), es $ab' = 0$, es decir $b' = 0$.
3. *Perpendiculares.* $n^\perp \cdot n'^\perp = (-b)(-b') + aa' = n \cdot n'$ (G1-002.D1). Si $b, b' \neq 0$, $aa' + bb' = 0 \iff (a/b)(a'/b') = -1 \iff mm' = -1$.
4. *No paralelas.* $\det(n, n') \neq 0$, y por G1-003.T3 hay exactamente un X con $X \cdot n = k$ y $X \cdot n' = k'$.
5. *Paralelas distintas.* Si $n' = \lambda n$ y un X_0 está en ambas, $k' = n' \cdot X_0 = \lambda k$: las ecuaciones son proporcionales y las rectas coinciden (G1-023.T1). ■

Teorema G1-023.T3 (distancia de un punto a una recta)

$d((x_0, y_0), \{ax + by = k\}) = |ax_0 + by_0 - k|/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Idea de la demostración

La recta es un conjunto normal $N(P_0, n)$, y la distancia a un conjunto normal ya se calculó en

G1-003.T6.

Demostración. Sean $n := (a, b) \neq 0$ y $X_0 := (x_0, y_0)$.

1. Por el paso 3 de G1-023.T1, la recta es $N(P_0, n)$ con $n \cdot P_0 = k$.
2. Por G1-003.T6, $d(X_0, N(P_0, n)) = |(X_0 - P_0) \cdot n|/|n|$, alcanzada solo en el pie.
3. $(X_0 - P_0) \cdot n = ax_0 + by_0 - n \cdot P_0 = ax_0 + by_0 - k$ (G1-002.T1) y $|n| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (G1-002.D3). ■

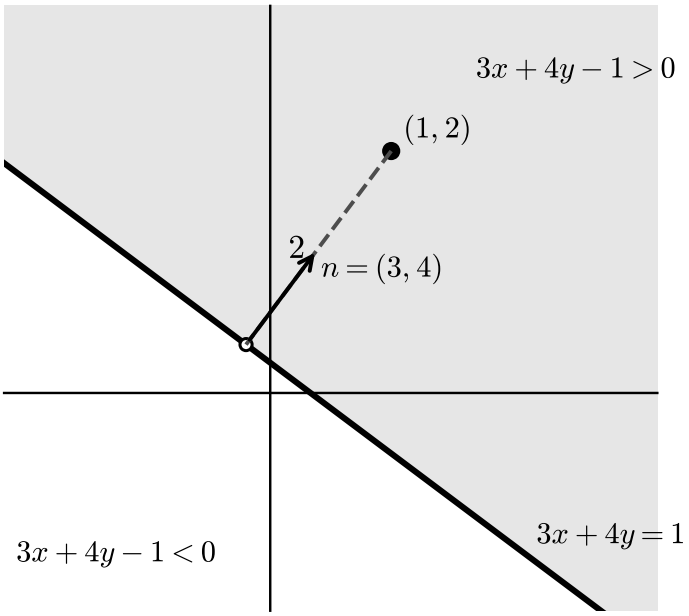


Figura 17: Distancia de $(1, 2)$ a $3x+4y = 1$: el segmento perpendicular mide 2. El semiplano sombreado es $3x + 4y - 1 > 0$.

Parte 2 · Razones, convexos y semiplanos

Teorema G1-023.T4 (división de un segmento en una razón)

Para $A \neq B$ y $\lambda \neq -1$, el único $X \in L(A, B - A)$ con $X - A = \lambda(B - X)$ es $X = (A + \lambda B)/(1 + \lambda)$; $\lambda > 0 \iff X$ está en $[A, B]$ y $X \neq A, B$ (división interna); $\lambda < 0$, externa.

Demostración.

1. $X - A = \lambda(B - X) \iff (1 + \lambda)X = A + \lambda B \iff X = (A + \lambda B)/(1 + \lambda)$ (G1-001.T1, K8): hay a lo más un tal X.
2. Ese X es $A + t(B - A)$ con $t := \lambda/(1 + \lambda)$, así que está en $L(A, B - A)$ y cumple la ecuación.
3. Como $B - A \neq 0$, el parámetro t de un punto de la recta es único, y $X \in [A, B] \setminus \{A, B\} \iff 0 < t < 1$ (G1-001.D3).
4. Si $\lambda > 0$: $1 + \lambda > 0$, $t > 0$ y $t = 1 - 1/(1 + \lambda) < 1$ (C1-003.T7).
5. Si $-1 < \lambda < 0$: $t < 0$. Si $\lambda < -1$: $1 + \lambda < 0$ y $t = 1 - 1/(1 + \lambda) > 1$ (C1-003.T4, C1-003.T7). Si $\lambda = 0$, $X = A$. En todos estos casos $X \notin [A, B] \setminus \{A, B\}$: división externa (o $X = A$). ■

Definición G1-023.D2 (convexo; semiplanos)

$K \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $[P, Q] \subset K$ para todos $P, Q \in K$. Para $n \neq 0$ y $k \in \mathbb{R}$, sea $s(X) := n \cdot X - k$. En $\mathbb{R}^2$, $\{s > 0\}$, $\{s < 0\}$ son los **semiplanos abiertos** de la recta $\{s = 0\}$ y $\{s \geq 0\}$, $\{s \leq 0\}$ los cerrados.

Teorema G1-023.T5 (lados de una recta)

Para $s(X) = n \cdot X - k$ en $\mathbb{R}^n$: $s(P + t(Q - P)) = (1 - t)s(P) + t\, s(Q)$. En consecuencia $\{s > 0\}$, $\{s \geq 0\}$, … son convexos, y para P, Q con $s(P), s(Q) \neq 0$: $[P, Q]$ corta a $\{s = 0\} \iff s(P)s(Q) < 0$. Cambiar (n, k) por $\lambda(n, k)$ conserva los semiplanos si $\lambda > 0$ y los intercambia si $\lambda < 0$.

Idea de la demostración

Sobre el segmento, s es una función de primer grado del parámetro: solo cambia de signo si pasa por 0.

Demostración.

1. Por G1-002.T1,

$$\begin{aligned} s(P + t(Q - P)) &= n \cdot P + t\, n \cdot (Q - P) - k \\ &= (1 - t)(n \cdot P - k) + t(n \cdot Q - k) = (1 - t)s(P) + t\, s(Q). \end{aligned}$$

2. *Convexos.* Si $s(P) > 0$, $s(Q) > 0$ y $t \in [0, 1]$: $(1 - t)s(P) \geq 0$ y $t\, s(Q) \geq 0$ (C1-003.T9), y uno es > 0 (si $t < 1$, el primero; si $t = 1$, el segundo). La suma es > 0 (C1-003.T6). Igual con $<, \geq, \leq$.
3. *Cruzar.* Si $s(P)s(Q) < 0$, sea $t^* := s(P)/(s(P) - s(Q))$. Como $s(P)$ y $-s(Q)$ tienen el mismo signo,

$0 < t^* < 1$ (C1-003.T7), y por el paso 1, $s(P + t^*(Q - P)) = s(P) - t^*(s(P) - s(Q)) = 0$.

4. Si $s(P)s(Q) > 0$, ambos tienen el mismo signo, y por el paso 2 todo punto de $[P, Q]$ tiene ese signo: $[P, Q]$ no corta a $\{s = 0\}$.
5. *Cambiar la ecuación.* $\lambda n \cdot X - \lambda k = \lambda s(X)$, que tiene el signo de $s(X)$ si $\lambda > 0$ y el opuesto si $\lambda < 0$ (C1-003.T4). ■

Corolario G1-023.C1 (lados y determinante)

Para la recta $L(A, v)$ de $\mathbb{R}^2$, P y Q están del mismo semiplano abierto $\iff$ $\det(v, P - A)$ y $\det(v, Q - A)$ son no nulos y del mismo signo (la convención de G1-012).

Demostración.

1. Por G1-023.T1, $L(A, v) = \{s = 0\}$ con $s(X) := v^\perp \cdot X - v^\perp \cdot A = v^\perp \cdot (X - A)$.
2. Por G1-003.T2, $v^\perp \cdot (X - A) = \det(v, X - A)$.
3. «Mismo semiplano abierto» es $s(P), s(Q) > 0$ o $s(P), s(Q) < 0$, es decir, no nulos y del mismo signo. Por la última parte de G1-023.T5, la respuesta no depende de la ecuación elegida para la recta (un factor λ cambia ambos signos a la vez). ■

Ejemplo G1-023.E1

$d((1, 2), \{3x + 4y = 1\}) = 2$; $(0, 0)$ y $(1, 1)$ están en lados opuestos de $x + y = 1$.

1. $|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|/\sqrt{9 + 16} = 10/5 = 2$ (G1-023.T3).
2. $s(X) = x + y - 1$: $s(0, 0) = -1$, $s(1, 1) = 1$, y $s(0, 0)s(1, 1) < 0$ (G1-023.T5).

Por qué cada hipótesis

⚠ $(a, b) \neq 0$

$0x + 0y = k$ es vacío si $k \neq 0$ y todo $\mathbb{R}^2$ si $k = 0$: no es una recta, y la fórmula de la distancia dividiría entre 0.

⚠ $\lambda \neq -1$ **en G1-023.T4**

$X - A = -(B - X)$ se reduce a $A = B$: si $A \neq B$ no hay ningún X.

⚠ $s(P), s(Q) \neq 0$ **en G1-023.T5**

Si P está en la recta, $[P, Q]$ la corta (en P) y $s(P)s(Q) = 0$, no < 0.

Ejercicios

1. Escribe en forma cartesiana la recta por $(1, -1)$ y $(4, 3)$, y calcula su distancia al origen.
2. Encuentra la recta perpendicular a $2x - y = 3$ por $(1, 1)$.
3. Divide el segmento de $A = (0, 0)$ a $B = (6, 3)$ en razón 2 y en razón -3.
4. Demuestra que el conjunto de puntos a distancia ≤ 1 de una recta es convexo.
5. ¿De qué lado de $L((0, 0), (1, 2))$ están $(1, 0)$ y $(0, 1)$, según G1-023.C1?

Respuestas

1. Director $(3, 4)$, normal $(-4, 3)$: $-4x + 3y = -7$, es decir $4x - 3y = 7$; distancia $7/5$.
2. Normal de la nueva: el director de la vieja, $(1, 2)$: $x + 2y = 3$.
3. $\lambda = 2$: $(4, 2)$; $\lambda = -3$: $(9, 9/2)$.
4. Es $\{-1 \leq s/|n| \leq 1\}$, intersección de dos semiplanos cerrados; cada uno es convexo (G1-023.T5) y la intersección de convexos lo es.
5. $\det((1, 2), (1, 0)) = -2 < 0$ y $\det((1, 2), (0, 1)) = 1 > 0$: lados opuestos.

G1-024 · Rectas en el espacio

Motivación

> **Dos drones**
> El dron A vuela por $P + sv$, con $P = (0, 0, 20)$ y $v = (1, 1, 0)$: siempre a 20 m de altura. El dron B, por $Q + tw$, con $Q = (10, 0, 25)$ y $w = (0, 1, 1)$: va subiendo. Las direcciones no son paralelas ($v \times w = (1, -1, 1) \neq 0$) y, sin embargo, las trayectorias no se cortan: se **cruzan**. Pasan a $5\sqrt{3} \approx 8.66$ m, entre $(5, 5, 20)$ y $(10, 0, 25)$.
> Dónde falla la analogía: los drones pasan por esos puntos en instantes distintos; la distancia entre trayectorias no es la distancia mínima entre los drones.

Resultados

Teorema G1-024.T1 (posiciones de dos rectas)

Para $L_1 = L(P, v)$ y $L_2 = L(Q, w)$ en $\mathbb{R}^3$ ocurre exactamente una de: son paralelas ($v \times w = 0$); se cortan en un solo punto ($v \times w \neq 0$ y $[Q - P, v, w] = 0$); **se cruzan** ($v \times w \neq 0$ y $[Q - P, v, w] \neq 0$: ni se cortan ni son paralelas). Además L_1, L_2 son coplanares $\iff [Q - P, v, w] = 0$.

Demostración.

1. *Paralelas.* $v \times w = 0 \iff v, w$ proporcionales (G1-021.T2) $\iff v \parallel w$ (ambos $\neq 0$, G1-001.D2) $\iff$ las rectas son paralelas (G1-001.D3).
2. *Si $v \times w \neq 0$:* las rectas se cortan $\iff$ existen s, t con $P + sv = Q + tw \iff Q - P = sv - tw \iff Q - P \in \langle v, w \rangle$.
3. Como v, w son independientes (G1-019.T2), $\langle v, w \rangle = \{x : x \cdot (v \times w) = 0\}$ (G1-021.T4): se cortan $\iff (Q - P) \cdot (v \times w) = [Q - P, v, w] = 0$ (G1-022.D1).
4. Si se cortan, es en un solo punto: las rectas son distintas (si fueran iguales, $v \parallel w$ por G1-001.T4 (d)) y dos rectas distintas tienen a lo más un punto común (G1-001.T4 (c)). Así los tres casos son

excluyentes y cubren todo.

5. *Coplanares, ⇐.* Si $[Q-P, v, w] = 0$ y $v \times w \neq 0$, entonces $Q - P \in \langle v, w\rangle$ y ambas rectas están en $\Pi(P, v, w)$: $P + sv$ sí, y $Q + tw = P + (Q - P) + tw$ también.
6. Si $v \times w = 0$, $w = \lambda v$ (G1-001.T2). Si $Q - P$ no es proporcional a v, ambas están en $\Pi(P, v, Q - P)$ ($Q + tw = P + (Q - P) + t\lambda v$). Si $Q - P = \mu v$, entonces $L_2 = L_1$ (G1-001.T4 (a)) y está en $\Pi(P, v, z)$ con z un vector de la base ortonormal que completa $v/|v|$ (G1-021.T5).
7. *Coplanares, ⇒.* Si ambas están en $\Pi(R, a, b)$, las diferencias de puntos del plano están en $\langle a, b\rangle$: $v = (P + v) - P$, w y $Q - P$ están en $\langle a, b\rangle$, un subespacio de dimensión 2. Tres vectores ahí son dependientes (G1-020.T3), y $[Q - P, v, w] = 0$ (G1-022.T2). ■

Teorema G1-024.T2 (distancia punto-recta en $\mathbb{R}^3$)

$d(P_0, L(A, v)) = |(P_0 - A) \times v|/|v|$.

Demostración. Sea $x := P_0 - A$.

1. Por G1-003.T5, $d(P_0, L(A, v)) = |P_0 - F|$ con $F = A + \text{proy}_v(x)$, así que $P_0 - F = x - \text{proy}_v(x)$.
2. Por G1-003.T4, $x - \text{proy}_v(x) \perp v$, y por Pitágoras (G1-003.T1, G1-002.T3)

$$|x - \text{proy}_v(x)|^2 = |x|^2 - \frac{(x \cdot v)^2}{|v|^2} = \frac{|x|^2|v|^2 - (x \cdot v)^2}{|v|^2}.$$

3. Por G1-021.T2 el numerador es $|x \times v|^2$; sacando raíz (G1-002.T2), $d = |x \times v|/|v|$. ■

Definición G1-024.D1 (perpendicular común)

Una **perpendicular común** a $L_1 = L(P, v)$ y $L_2 = L(Q, w)$ es una recta que corta a L_1 en un punto X y a L_2 en un punto $Y \neq X$, con $Y - X \perp v$ y $Y - X \perp w$ (es la recta $L(X, Y - X)$).

Teorema G1-024.T3 (distancia entre dos rectas; perpendicular común)

Sea $d(L_1, L_2) := \inf\{|X - Y| : X \in L_1, Y \in L_2\}$. Si $v \times w \neq 0$, existen únicos $X_0 \in L_1, Y_0 \in L_2$ con $Y_0 - X_0 \perp v$ y $\perp w$; la recta X_0Y_0 (si $X_0 \neq Y_0$) es la única perpendicular común, y $d(L_1, L_2) = |X_0 - Y_0| = |[Q - P, v, w]|/|v \times w|$, alcanzada solo en (X_0, Y_0). Si $v \parallel w$, $d(L_1, L_2) = d(P, L_2)$.

> **Idea de la demostración**
> Las dos condiciones de perpendicularidad forman un sistema 2×2 con determinante $-|v \times w|^2 \neq 0$; y Pitágoras muestra que cualquier otro par de puntos está más lejos.

Demostración. Escribe $X = P + sv \in L_1$ y $Y = Q + tw \in L_2$.

1. $Y - X \perp v$ y $\perp w$ es, por G1-002.T1, el sistema
$$|v|^2\, s - (v \cdot w)\, t = (Q - P) \cdot v,$$
$$(v \cdot w)\, s - |w|^2\, t = (Q - P) \cdot w.$$
2. Su determinante es $-|v|^2|w|^2 + (v \cdot w)^2 = -|v \times w|^2 \neq 0$ (G1-021.T2). Por G1-003.T3 tiene una única solución (s_0, t_0); sean $X_0 := P + s_0 v$, $Y_0 := Q + t_0 w$.
3. *Perpendicular común.* Si una recta corta a L_1 en X y a L_2 en $Y \neq X$ con $Y - X \perp v, w$, por la unicidad del paso 2, $(X, Y) = (X_0, Y_0)$, y la recta es la única por X_0 y Y_0 (G1-001.T4 (b)).
4. *Mínimo.* Todo $X \in L_1$ es $X_0 + \alpha v$ y todo $Y \in L_2$ es $Y_0 + \beta w$. Entonces $Y - X = (Y_0 - X_0) + (\beta w - \alpha v)$, y el segundo sumando es $\perp$ al primero (G1-002.T1).
5. Por Pitágoras (G1-003.T1),
$$|Y - X|^2 = |Y_0 - X_0|^2 + |\beta w - \alpha v|^2 \geq |Y_0 - X_0|^2,$$
con igualdad $\iff \beta w - \alpha v = 0 \iff \alpha = \beta = 0$ (v, w independientes, G1-019.T2).
6. Así $|Y_0 - X_0|$ es cota inferior del conjunto y pertenece a él: es el ínfimo (C1-006.D1), alcanzado solo en (X_0, Y_0).
7. *Fórmula.* $Y_0 - X_0 \perp v, w$, así que $Y_0 - X_0 = \mu(v \times w)$ (G1-021.T4). Como $Q - P = (Y_0 - X_0) - t_0 w + s_0 v$,
$$[Q - P, v, w] = (Q - P) \cdot (v \times w) = (Y_0 - X_0) \cdot (v \times w) = \mu |v \times w|^2,$$
y $|Y_0 - X_0| = |\mu||v \times w| = |[Q - P, v, w]|/|v \times w|$.
8. *Paralelas.* Si $w = \lambda v$ y $X = P + sv, Y \in L_2$: $|X - Y| = |P - (Y - sv)|$ y $Y - sv = Q + (t - s/\lambda)w \in L_2$. Así cada $|X - Y|$ es $\geq d(P, L_2)$ (C1-006.D1), y con $X = P$ e Y el pie de P en L_2 (G1-003.T5) se alcanza: $d(L_1, L_2) = d(P, L_2)$. ■

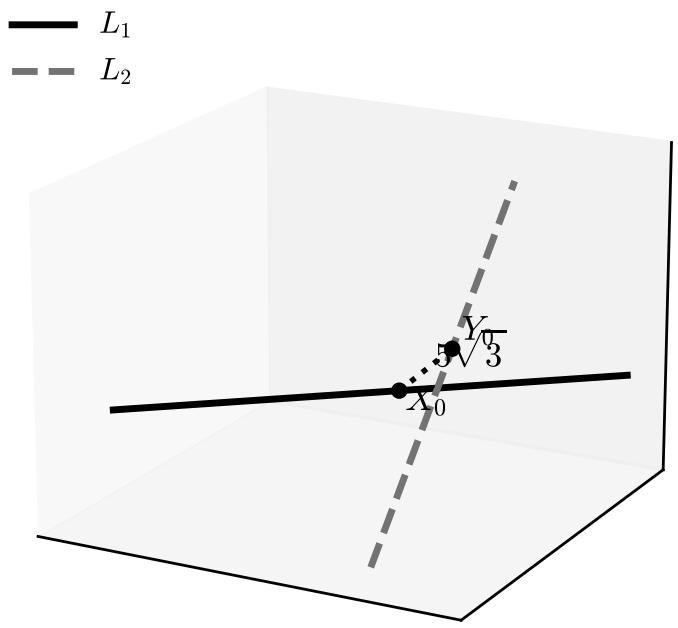


Figura 18: Las trayectorias de los drones se cruzan; el segmento X_0Y_0 es la perpendicular común.

Ejemplo G1-024.E1

El eje x y la recta $L((0,1,0),(0,0,1))$ se cruzan a distancia 1.

1. $v = e_1, w = e_3$: $v \times w = (0,-1,0) \neq 0$ (G1-021.D1).
2. $[Q-P, v, w] = (0,1,0)\cdot(0,-1,0) = -1 \neq 0$: se cruzan (G1-024.T1).
3. $d = |-1|/|(0,-1,0)| = 1$ (G1-024.T3), entre $X_0 = 0$ y $Y_0 = (0,1,0)$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $v \times w \neq 0$

Para el eje x y $L((0,1,0), e_1)$, todo par $(X, X+e_2)$ con X en el eje está a distancia 1 y cumple $(X+e_2)-X \perp e_1$: hay infinitas «perpendiculares comunes». La unicidad necesita direcciones no paralelas.

⚠ $X_0 \neq Y_0$

Si las rectas se cortan, $X_0 = Y_0$ es el punto de corte, la distancia es 0 y no hay recta X_0Y_0.

Ejercicios

1. Decide la posición de $L((1,0,0),(1,1,1))$ y $L((0,1,0),(2,2,2))$.
2. Calcula $d((1,2,3), L(0,(1,1,0)))$.
3. Encuentra la perpendicular común al eje z y a $L((1,0,0),(0,1,1))$.
4. Demuestra que si L_1, L_2 se cruzan, existen planos paralelos distintos $\Pi_1 \supset L_1$, $\Pi_2 \supset L_2$.
5. En el gancho, ¿a qué distancia pasa la ruta del dron B del punto de despegue $(0,0,0)$ del dron A? (Usa G1-024.T2.)

Respuestas

1. $w = 2v$: paralelas; $Q - P = (-1,1,0)$ no es proporcional a v: distintas, a distancia $|(-1,1,0) \times (1,1,1)|/\sqrt{3} = |(1,1,-2)|/\sqrt{3} = \sqrt{2}$.
2. $(1,2,3) \times (1,1,0) = (-3,3,-1)$, norma $\sqrt{19}$; $d = \sqrt{19}/\sqrt{2}$.
3. $v = e_3, w = (0,1,1)$: el sistema da $X_0 = (0,0,0)$, $Y_0 = (1,0,0)$; la perpendicular común es el eje x, distancia 1.
4. $\Pi_1 := \Pi(P,v,w)$, $\Pi_2 := \Pi(Q,v,w)$; son distintos porque $Q \notin \Pi_1$ ($[Q-P,v,w] \neq 0$).
5. $(0,0,0) - Q = (-10,0,-25)$; $(-10,0,-25) \times (0,1,1) = (25,10,-10)$, norma $\sqrt{825}$; $d = \sqrt{825}/\sqrt{2} \approx 20.3$ m.

G1-025 · Planos y semiespacios

Motivación

> **La rampa de patinetas**
> La rampa de un parque de patinetas pasa por $(0,0,0)$, $(0,3,0)$ y $(4,0,1)$ (en metros). Con los bordes $u = (0,3,0)$ y $v = (4,0,1)$, la normal es $u \times v = (3,0,-12)$, y la rampa es el plano $3x - 12z = 0$. Una pelota en $(2,1,2)$ está a $|6-24|/\sqrt{153} = 6/\sqrt{17} \approx 1.455$ m de la rampa, medida en perpendicular, no a 1.5 m (lo que se mide en vertical).
> Dónde falla la analogía: una rampa real es un pedazo acotado; el plano no termina.

Resultados

Teorema G1-025.T1 (paramétrica $\Leftrightarrow$ cartesiana)

Si u, v no son proporcionales, $\Pi(P,u,v) = N(P, u\times v) = \{X : n\cdot X = k\}$ con $n = u\times v$ y $k = n\cdot P$. Recíprocamente, si $n \neq 0$, $\{n\cdot X = k\} = \Pi(kn/|n|^2, u, v)$ para cualquier par ortonormal (u,v) que complete $n/|n|$ a una base ortonormal. Dos ecuaciones dan el mismo plano $\Leftrightarrow$ son proporcionales; $\Pi(P,u,v) = \Pi(Q,u',v') \iff Q \in \Pi(P,u,v)$ y $\langle u', v'\rangle = \langle u, v\rangle$.

Demostración.

1. *De paramétrica a cartesiana.* $X \in \Pi(P,u,v) \iff X - P \in \langle u, v\rangle$. Como u, v son independientes, $\langle u, v\rangle = \{x : x\cdot(u\times v) = 0\}$ (G1-021.T4). Así $\Pi(P,u,v) = N(P,n)$ (G1-003.D2), y $(X-P)\cdot n = 0 \iff n\cdot X = n\cdot P$.
2. *De cartesiana a paramétrica.* Sean $\hat{n} := n/|n|$ y $(\hat{n}, u, v)$ una base ortonormal (existe por G1-021.T5). $P_1 := kn/|n|^2$ cumple $n\cdot P_1 = k$, así que $\{n\cdot X = k\} = \{(X-P_1)\cdot\hat{n} = 0\}$.
3. Para todo X, $X - P_1 = ((X-P_1)\cdot\hat{n})\hat{n} + ((X-P_1)\cdot u)u + ((X-P_1)\cdot v)v$ (G1-021.T1). Si $(X-P_1)\cdot\hat{n} = 0$, entonces $X \in \Pi(P_1,u,v)$; y si $X = P_1 + su + tv$, $(X-P_1)\cdot\hat{n} = 0$.
4. *Direcciones.* Para un plano $\Pi = \Pi(P,u,v)$, el conjunto de diferencias $\{X - Y : X, Y \in \Pi\}$ es $\langle u, v\rangle$:

cada diferencia es $(s-s')u+(t-t')v$, y cada $su+tv$ es $(P+su+tv)-P$.

5. *Ecuaciones proporcionales.* Si $\{n\cdot X=k\}=\{n'\cdot X=k'\}$, con (u,v) como en el paso 2, n' es $\perp$ a toda diferencia de puntos del plano (ambos dan k'), en particular a u y v: por G1-021.T4, $n'=\lambda(u\times v)$, y $u\times v=\pm\hat{n}$ (G1-021.T5), así que $n'=\mu n$ con $\mu\neq 0$. Con P_1 en el plano, $k'=n'\cdot P_1=\mu k$. El recíproco es inmediato.
6. *Dos descripciones paramétricas.* Si $\Pi(P,u,v)=\Pi(Q,u',v')$, entonces Q está en él y, por el paso 4, $\langle u',v'\rangle=\langle u,v\rangle$. Recíprocamente, si $Q=P+w_0$ con $w_0\in\langle u,v\rangle$ y $\langle u',v'\rangle=\langle u,v\rangle$, entonces $\Pi(Q,u',v')=Q+\langle u,v\rangle=P+(w_0+\langle u,v\rangle)=P+\langle u,v\rangle$ (G1-018.T1: $\langle u,v\rangle$ es subespacio). ■

Teorema G1-025.T2 (plano por tres puntos)

Por tres puntos A,B,C no alineados pasa un único plano, $\{X:[X-A,B-A,C-A]=0\}$.

Demostración.

1. $B-A$, $C-A$ no son proporcionales (G1-001.T5), así que $\Pi(A,B-A,C-A)$ es un plano que contiene a A ($s=t=0$), B y C.
2. Por G1-025.T1 es $\{(X-A)\cdot((B-A)\times(C-A))=0\}=\{[X-A,B-A,C-A]=0\}$ (G1-022.D1).
3. *Unicidad.* Si $\{n'\cdot X=k'\}$ contiene a A,B,C, entonces $n'\cdot(B-A)=n'\cdot(C-A)=0$, y por G1-021.T4, $n'=\lambda(B-A)\times(C-A)$ con $\lambda\neq 0$; además $k'=n'\cdot A$. Las ecuaciones son proporcionales y el plano es el mismo (G1-025.T1). ■

Teorema G1-025.T3 (distancia punto-plano)

$d(P_0,\{n\cdot X=k\})=|n\cdot P_0-k|/|n|$.

> **Idea de la demostración**
> El plano es un conjunto normal, y la distancia a un conjunto normal ya se calculó en G1-003.T6.

Demostración.

1. Con $P_1:=kn/|n|^2$, $\{n\cdot X=k\}=N(P_1,n)$ (paso 2 de G1-025.T1).
2. Por G1-003.T6, $d(P_0,N(P_1,n))=|(P_0-P_1)\cdot n|/|n|$, alcanzada solo en el pie.
3. $(P_0-P_1)\cdot n=n\cdot P_0-k$ (G1-002.T1). ■

Definición G1-025.D1 (ángulo entre planos)

Para los planos $n \cdot X = k$ y $n' \cdot X = k'$, el coseno del ángulo entre ellos es $|n \cdot n'|/(|n||n'|)$; son perpendiculares si $n \cdot n' = 0$ y paralelos si $n \parallel n'$.

Por G1-025.T1 la normal de un plano es única salvo un factor $\lambda \neq 0$, y por G1-006.T1 el valor absoluto del coseno no cambia al multiplicar n o n' por $\lambda \neq 0$: la definición no depende de las ecuaciones elegidas.

Definición G1-025.D2 (semiespacios)

En $\mathbb{R}^3$, $\{n \cdot X > k\}$, $\{n \cdot X < k\}$ (abiertos) y sus versiones con $\geq, \leq$.

Teorema G1-025.T4 (semiespacios)

Los semiespacios son convexos; para P, Q fuera del plano, $[P, Q]$ corta al plano $\iff$ están en semiespacios abiertos distintos.

Demostración. Con $s(X) := n \cdot X - k$, G1-023.T5 vale en $\mathbb{R}^n$ para todo n, en particular en $\mathbb{R}^3$: los conjuntos $\{s > 0\}$, … son convexos, y para $s(P), s(Q) \neq 0$, $[P, Q]$ corta a $\{s = 0\} \iff s(P)s(Q) < 0$, es decir, $\iff P, Q$ están en semiespacios abiertos distintos. ■

Ejemplo G1-025.E1

El plano por $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ es $x + y + z = 1$, a distancia $1/\sqrt{3}$ del origen.

1. $(e_2 - e_1) \times (e_3 - e_1) = (-1,1,0) \times (-1,0,1) = (1,1,1)$ (G1-021.D1) y $k = (1,1,1) \cdot e_1 = 1$ (G1-025.T2).
2. $d(0, \{x + y + z = 1\}) = |0 - 1|/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$ (G1-025.T3).

La pelota y la rampa

$n = (3,0,-12)$, $k = 0$: $d = |3 \cdot 2 - 12 \cdot 2|/\sqrt{153} = 18/(3\sqrt{17}) = 6/\sqrt{17}$. Como $s(2,1,2) = -18 < 0$ y $s(4,0,0) = 12 > 0$, el segmento de la pelota a ese punto del piso cruza la rampa (G1-025.T4).

Por qué cada hipótesis

⚠ $n \neq 0$

$0 \cdot X = k$ es vacío ($k \neq 0$) o todo $\mathbb{R}^3$ ($k = 0$).

⚠ **Tres puntos no alineados**

$(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ están en los planos $x = y$ y $y = z$, que son distintos: hay más de un plano que los contiene.

⚠ k **no es la distancia**

$x + y + z = 1$ está a $1/\sqrt{3}$ del origen, no a 1: hay que dividir entre $|n|$.

Ejercicios

1. Encuentra la ecuación del plano por $(1,1,1)$ con direcciones $(1,0,2)$ y $(0,1,-1)$.
2. Calcula la distancia entre los planos paralelos $x - 2y + 2z = 1$ y $x - 2y + 2z = 7$.
3. Calcula el coseno del ángulo entre $x + y = 0$ y $y + z = 0$.
4. Demuestra que un plano y una recta $L(P, v)$ con $n \cdot v \neq 0$ se cortan en exactamente un punto.
5. ¿Están $(1,1,1)$ y $(-1,0,0)$ del mismo lado de $x + y + z = 1$?

Respuestas

1. $n = (1,0,2) \times (0,1,-1) = (-2,1,1)$, $k = 0$: $-2x + y + z = 0$.
2. Un punto del primero, $(1,0,0)$; su distancia al segundo es $|1 - 7|/3 = 2$.
3. $|(1,1,0) \cdot (0,1,1)|/2 = 1/2$.
4. $n \cdot (P + tv) = k$ tiene la única solución $t = (k - n \cdot P)/(n \cdot v)$.
5. $s = 2$ y $s = -2$: lados opuestos.

G1-026 · Sistemas de ecuaciones lineales y transversalidad

Motivación

> **La báscula de la frutería**
> Pagas por kilo x de manzana, y de pera, z de plátano. Tres bolsas: $(1, 1, 1)$ kg por \$100, $(2, 0, 1)$ kg por \$105, $(0, 1, 2)$ kg por \$85. Las tres ecuaciones determinan los precios: $(40, 35, 25)$. Pero si la tercera bolsa hubiera sido $(3, 1, 2)$ kg por \$205 (la suma de las dos primeras), no aportaría nada: habría infinitas soluciones.
> Dónde falla la analogía: una báscula real redondea; con datos redondeados, un determinante pequeño amplifica el error.

Parte 1 · Eliminación gaussiana y Cramer

Definición G1-026.D1 (sistemas y operaciones elementales)

Un sistema de m ecuaciones lineales en k incógnitas es $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Operaciones elementales: intercambiar dos ecuaciones; multiplicar una por $\lambda \neq 0$; sumar a una un múltiplo de otra. Forma **escalonada**: el primer coeficiente no nulo (pivote) de cada ecuación está a la derecha del de la anterior, y las ecuaciones nulas van al final.

Teorema G1-026.T1 (las operaciones conservan las soluciones)

Cada operación elemental se deshace con otra del mismo tipo, y el sistema nuevo tiene exactamente las mismas soluciones.

Demostración. Escribe la ecuación i como $E_i(x) = b_i$, con $E_i(x) := \sum_j a_{ij}x_j$.

1. Intercambiar i y j se deshace intercambiándolas otra vez. Multiplicar la ecuación i por $\lambda \neq 0$ se deshace multiplicándola por λ^{-1} (K8). Sumar c veces la ecuación j a la i ($i \neq j$) se deshace sumando $-c$ veces la j (que no cambió) a la nueva i (K9).
2. Si x es solución del sistema original, cumple cada ecuación nueva: $\lambda E_i(x) = \lambda b_i$, y $E_i(x) + cE_j(x) = b_i + cb_j$ (K9); el intercambio solo reordena.
3. Como el sistema original se obtiene del nuevo con otra operación elemental (paso 1), el paso 2 aplicado al revés muestra que toda solución del nuevo lo es del original. ■

Teorema G1-026.T2 (eliminación gaussiana)

Todo sistema se lleva por operaciones elementales a forma escalonada. Un sistema escalonado no tiene solución $\iff$ contiene una ecuación $0 = b$ con $b \neq 0$; si no, cada elección de las incógnitas sin pivote da exactamente una solución.

Demostración.

1. *Escalonar, por inducción en m* (C1-005.T1). Con $m = 1$ el sistema ya es escalonado.
2. Para $m+1$ ecuaciones: si todos los coeficientes son 0, todas las ecuaciones son nulas y el sistema es escalonado. Si no, sea j_0 la menor columna con algún coeficiente $\neq 0$ e i_0 la menor ecuación con $a_{i_0 j_0} \neq 0$ (C1-005.T2).
3. Se intercambian las ecuaciones 1 e i_0, y a cada ecuación $i \geq 2$ se le suma $-(a_{i j_0}/a_{1 j_0})$ veces la primera (K8). Ahora la columna j_0 tiene ceros debajo de la primera ecuación, y las columnas $< j_0$ son nulas.
4. Por la hipótesis de inducción, las ecuaciones 2, … , $m+1$ se escalonan con operaciones entre ellas; esas operaciones conservan los ceros de las columnas $\leq j_0$. Sus pivotes quedan a la derecha de j_0: todo el sistema es escalonado.
5. *Soluciones.* Sean $p_1 < \cdots < p_r$ las columnas de los pivotes de las r ecuaciones no nulas; las otras $m - r$ son $0 = b_i$. Si alguna tiene $b_i \neq 0$, no hay solución. Si no, se fijan las incógnitas sin pivote.
6. La ecuación r es $a_{r p_r} x_{p_r} + \sum_{j > p_r} a_{rj} x_j = b_r$, y todas las x_j con $j > p_r$ son libres: se despeja un único x_{p_r} (K8). Por inducción descendente en i (de r a 1), la ecuación i despeja un único x_{p_i} a partir de incógnitas con índice $> p_i$, ya determinadas. Así cada elección de las libres da exactamente una solución. ■

Teorema G1-026.T3 (particular + homogénea)

Las soluciones del homogéneo ($b_i = 0$) forman un subespacio W de $\mathbb{R}^k$; si x_0 es solución del sistema, el conjunto de soluciones es $x_0 + W$.

Demostración.

1. $0 \in W$, y si $E_i(x) = E_i(y) = 0$, entonces $E_i(x + y) = 0$ y $E_i(cx) = 0$ (K9): W es subespacio (G1-018.D1).
2. Si $E_i(x_0) = b_i$ para todo i: $E_i(x) = b_i \iff E_i(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in W$. ■

Teorema G1-026.T4 (Cramer 2×2 y 3×3)

Escrito como $x_1 a_1 + \cdots + x_k a_k = b$ con columnas a_j ($k = m = 2$ o 3): si $\det(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$, la solución es única y $x_j = \det(\ldots, b, \ldots)/\det(a_1, \ldots, a_k)$ (b en el lugar j). Si $\det = 0$, el sistema no tiene solución o tiene infinitas.

Idea de la demostración
Si $\det \neq 0$ las columnas son una base; la multilinealidad del determinante aísla cada x_j.

Demostración. Sea $k = 3$ (el caso $k = 2$ es igual con $\det(u, v)$).

1. Si $\det(a_1, a_2, a_3) \neq 0$, las columnas son independientes (G1-022.T2) y son una base de $\mathbb{R}^3$ (G1-020.T3, G1-020.T5). Así $b = \sum_j x_j a_j$ con x_j únicos (G1-019.T1).
2. Por la linealidad en la primera columna y porque el det se anula con dos columnas iguales (G1-022.T1),

$$[b, a_2, a_3] = x_1[a_1, a_2, a_3] + x_2[a_2, a_2, a_3] + x_3[a_3, a_2, a_3] = x_1[a_1, a_2, a_3].$$

   Igual en los lugares 2 y 3. Dividiendo entre $\det \neq 0$ (K8) se obtiene la fórmula.
3. Si $\det = 0$, las columnas son dependientes (G1-022.T2): hay $w \neq 0$ con $\sum w_j a_j = 0$, es decir, w es solución no nula del homogéneo.
4. Si el sistema tiene una solución x_0, por G1-026.T3 todas las $x_0 + tw$ ($t \in \mathbb{R}$) lo son, y son distintas para t distintos ($w \neq 0$): infinitas. Si no tiene ninguna, es el otro caso. ■

La frutería
Columnas $a_1 = (1,2,0)$, $a_2 = (1,0,1)$, $a_3 = (1,1,2)$, $b = (100,105,85)$: $\det = -3$, y $x = \det(b,a_2,a_3)/(-3) = 40$, $y = 35$, $z = 25$ (verificado en `tools/checks/G1-026.py`).

Parte 2 · Intersecciones y transversalidad

Teorema G1-026.T5 (dos rectas, dos o tres planos)

(a) Dos rectas $ax+by=k$ de $\mathbb{R}^2$: un punto si $\det \neq 0$; si no, son la misma recta o no se cortan.
(b) Dos planos de $\mathbb{R}^3$ con normales n_1, n_2: si $n_1 \times n_2 \neq 0$, se cortan en una recta de director $n_1 \times n_2$; si no, coinciden o son disjuntos. (c) Tres planos: si $[n_1,n_2,n_3] \neq 0$, un solo punto; si $\dim\langle n_1,n_2,n_3\rangle = 2$, vacío o una recta; si $= 1$, vacío o un plano.

Idea de la demostración
La intersección es vacía o $x_0 + S^\perp$, con S el generado de las normales; $S^\perp$ es un punto, una recta o un plano según $\dim S$. Que no sea vacía en los casos «punto» y «recta» sale de Cramer.

Demostración. Para $S \subset \mathbb{R}^3$ sea $S^\perp := \{x : x \cdot s = 0 \ \forall s \in S\}$.

1. *Forma de la intersección.* Por G1-026.T3, el conjunto de soluciones de $n_i \cdot X = k_i$ es vacío o $x_0 + W$, con $W = \{x : x \cdot n_i = 0 \ \forall i\}$. Por la linealidad del producto punto, $W = \langle n_1, \dots\rangle^\perp$.
2. *Dimensiones.* Si $S = \langle n_1, \dots\rangle$ tiene dimensión 2 con base a, b (G1-020.T3), $S^\perp = \{x \cdot a = x \cdot b = 0\} = \langle a \times b\rangle$, una recta por 0 (G1-021.T4). Si tiene dimensión 1 con base a, $S^\perp = N(0,a)$, un plano por 0 (G1-025.T1). Si tiene dimensión 3, $S^\perp = \{0\}$ (las normales generan $\mathbb{R}^3$, y $x \perp$ a todo $\mathbb{R}^3$ da $x \cdot x = 0$). Así $x_0 + S^\perp$ es un punto, una recta $L(x_0,d)$ o un plano $\Pi(x_0,u,v)$.
3. *(a)* Si $\det \neq 0$, hay exactamente un punto (G1-003.T3). Si $\det = 0$, las normales son proporcionales y las rectas son paralelas: coinciden o no se cortan (G1-023.T2).
4. *(c), $[n_1,n_2,n_3] \neq 0$.* La matriz del sistema tiene renglones n_i; su determinante es el de la transpuesta, de columnas n_i (G1-022.T1): $[n_1,n_2,n_3] \neq 0$. Por Cramer (G1-026.T4) hay una sola solución.
5. *(b), $n_1 \times n_2 \neq 0$.* Se agrega la ecuación $(n_1 \times n_2) \cdot X = 0$. El nuevo sistema tiene $[n_1,n_2,n_1 \times n_2] = [n_1 \times n_2, n_1, n_2] = |n_1 \times n_2|^2 \neq 0$ (G1-022.T1), así que tiene una solución X_0 (paso 4), que

está en los dos planos. Con el paso 2 (n_1, n_2 independientes, $S^\perp = \langle n_1 \times n_2 \rangle$), la intersección es $L(X_0, n_1 \times n_2)$.

6. *(b),* $n_1 \times n_2 = 0$. $n_2 = \lambda n_1$ (G1-021.T2). Si $k_2 = \lambda k_1$ las ecuaciones son proporcionales y los planos coinciden (G1-025.T1); si no, un punto común X daría $k_2 = n_2 \cdot X = \lambda k_1$: son disjuntos.
7. *(c), dimensión 2 o 1.* Por los pasos 1 y 2, la intersección es vacía, o $x_0 + S^\perp$, una recta (dim 2) o un plano (dim 1). ■

Definición G1-026.D2 (transversalidad)

Dos rectas de $\mathbb{R}^2$, dos planos o tres planos de $\mathbb{R}^3$ son **transversales** si sus normales son linealmente independientes.

Teorema G1-026.T6 (transversal ⟺ dimensión esperada)

m hiperplanos (rectas de $\mathbb{R}^2$, planos de $\mathbb{R}^3$) con $2 \leq m \leq n$ son transversales ⟺ su intersección es no vacía y es un punto ($m = n$) o una recta ($n = 3, m = 2$).

Demostración.

1. *Dos rectas.* Normales independientes ⟺ det ≠ 0 (G1-022.T2) ⟺ un punto (G1-026.T5 (a); si det = 0 la intersección es una recta o vacía, y una recta no es un punto).
2. *Dos planos.* Independientes ⟺ $n_1 \times n_2 \neq 0$ (G1-021.T2). Si lo son, la intersección es una recta (G1-026.T5 (b)). Si no, es vacía o un plano, y un plano no es una recta: contiene tres puntos no alineados ($P, P + u, P + v$, G1-001.T5).
3. *Tres planos.* Independientes ⟺ $[n_1, n_2, n_3] \neq 0$ (G1-022.T2) ⟺ un punto: si det = 0, la dimensión de $\langle n_i \rangle$ es 1 o 2 (no 0, pues $n_i \neq 0$), y la intersección es vacía, una recta o un plano, que tienen infinitos puntos (G1-026.T5 (c)). ■

Ejemplo G1-026.E1

$x + y + z = 1, x - y = 0, x + 2z = 2$ es transversal ($[n_1, n_2, n_3] = -3$; punto $(0, 0, 1)$); $x + y = 1$, $2x + 2y = 3$ no tiene solución.

1. $n_2 \times n_3 = (1, -1, 0) \times (1, 0, 2) = (-2, -2, 1)$ y $n_1 \cdot (n_2 \times n_3) = -3 \neq 0$.
2. De $x = y$ y $x + 2z = 2, x + y + z = 1$ da $2x + (2 - x)/2 = 1, x = 0, z = 1$: el punto $(0, 0, 1)$.
3. $(2, 2) = 2(1, 1)$ pero $3 \neq 2 \cdot 1$: paralelas distintas (G1-026.T5 (a)).

Por qué cada hipótesis

⚠ $\det \neq 0$ en Cramer

Con la bolsa $(3, 1, 2)$ por \$205 el determinante es 0 y hay infinitas soluciones; con \$200, ninguna. Cramer no se puede aplicar.

⚠ $\lambda \neq 0$ en las operaciones

Multiplicar una ecuación por 0 la borra y agrega soluciones: deja de ser reversible.

⚠ Dos a dos no basta

$x = 0, y = 0, x + y = 1$: cada par de planos se corta en una recta, pero los tres no tienen punto común (las normales generan un plano: dimensión 2, caso «vacío»).

Ejercicios

1. Escalona y resuelve $x + 2y - z = 1, 2x + 4y + z = 5, x + 2y + 2z = 4$.
2. Resuelve por Cramer $3x - y = 5, x + 2y = 4$.
3. ¿En qué se cortan $x + y + z = 1$ y $x - y = 0$?
4. Demuestra que tres planos por el origen con normales independientes se cortan solo en el origen.
5. Encuentra c para que $x + y = 1, y + z = 1, x + cz = 0$ no tenga solución única.

Respuestas

1. Restando: $3z = 3, 3z = 3$; $z = 1, x = 2 - 2y$: infinitas soluciones $(2 - 2t, t, 1)$.
2. $\det = 7$; $x = (10 + 4)/7 = 2, y = (12 - 5)/7 = 1$.
3. En la recta $L((1/2, 1/2, 0), (1, 1, -2))$.
4. Cramer con $b = 0$: la única solución es 0.
5. $\det((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, c)) = (1, 0, 1) \cdot ((1, 1, 0) \times (0, 1, c)) = (1, 0, 1) \cdot (c, -c, 1) = c + 1$: $c = -1$.

G1-027 · Sistemas de desigualdades lineales

Motivación

> **La panadería**
> Una panadería hornea x docenas de conchas y y de bolillos al día. El horno da 4 horas, una por docena: $x + y \leq 4$. Hay 6 kg de harina, 1 kg por docena de conchas y 3 kg por docena de bolillos: $x + 3y \leq 6$. Con $x, y \geq 0$, los planes posibles forman una región con esquinas $(0,0), (4,0), (3,1), (0,2)$. La ganancia $3x + 2y$ (en cientos de pesos) vale $0, 12, 11, 4$ en ellas, y no es mayor en ningún otro punto: el mejor plan es hornear solo conchas.
> Dónde falla la analogía: no se hornean 3.7 docenas; con cantidades enteras el problema es otro.

Resultados

Teorema G1-027.T1 (intersecciones de convexos)

La intersección de cualquier familia no vacía de convexos es convexa; en particular, toda intersección finita de semiplanos (región poligonal) es convexa.

Demostración.

1. Sea $\{K_i\}$ una familia no vacía de convexos y $P, Q \in \bigcap K_i$. Para cada i, $P, Q \in K_i$, así que $[P, Q] \subset K_i$ (G1-023.D2). Luego $[P, Q] \subset \bigcap K_i$.
2. Los semiplanos son convexos (G1-023.T5); por el paso 1 su intersección también. ■

Definición G1-027.D1 (combinación convexa, envolvente)

$\sum_i \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$; $\text{conv}\{v_1, \ldots, v_k\} :=$ el conjunto de las combinaciones convexas.

Teorema G1-027.T2 (la envolvente es el menor convexo)

$\text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ es convexo, contiene a cada v_i y está contenido en todo convexo que contiene a $v_1, \dots, v_k$.

Demostración.

1. *Contiene a v_i:* con $\lambda_i = 1$ y los demás 0.
2. *Convexo.* Si $X = \sum \lambda_i v_i$ e $Y = \sum \mu_i v_i$ son combinaciones convexas y $t \in [0,1]$, el punto $X + t(Y - X) = \sum((1-t)\lambda_i + t\mu_i)v_i$ (C1-005.T12) tiene coeficientes ≥ 0 que suman $(1-t) + t = 1$.
3. *El menor.* Se prueba por inducción en k (C1-005.T1): «para todo convexo K que contiene a $v_1, \dots, v_k$, toda combinación convexa de ellos está en K». Para $k = 1$, la única es $v_1 \in K$.
4. Sea $X = \sum_{i \leq k+1} \lambda_i v_i$. Si $\lambda_{k+1} = 1$, los demás λ_i son ≥ 0 y suman 0, así que son 0 y $X = v_{k+1} \in K$.
5. Si $\lambda_{k+1} < 1$, sea $Y := \sum_{i \leq k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} v_i$: sus coeficientes son ≥ 0 (C1-003.T7) y suman 1, así que $Y \in K$ por la hipótesis de inducción.
6. Entonces $X = (1-\lambda_{k+1})Y + \lambda_{k+1} v_{k+1} = Y + \lambda_{k+1}(v_{k+1} - Y) \in [Y, v_{k+1}] \subset K$, por la convexidad de K. ■

Teorema G1-027.T3 (el triángulo como intersección de semiplanos)

Para un triángulo ABC: todo $X \in \mathbb{R}^2$ es único $X = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C$ con $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$ (coordenadas baricéntricas, afines en X), y $\text{conv}\{A, B, C\} = \{\lambda_A \geq 0\} \cap \{\lambda_B \geq 0\} \cap \{\lambda_C \geq 0\}$, intersección de tres semiplanos cerrados.

Demostración. Sean $u := B - A$, $v := C - A$, no proporcionales (G1-001.T5).

1. u, v son independientes en $\mathbb{R}^2$, luego base (G1-020.T3, G1-020.T5): $X - A = \beta u + \gamma v$ con β, γ únicos (G1-019.T1).
2. Con $\lambda_A := 1 - \beta - \gamma$, $\lambda_B := \beta$, $\lambda_C := \gamma$: $X = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C$ y la suma es 1. Si $X = \mu_A A + \mu_B B + \mu_C C$ con suma 1, entonces $X - A = \mu_B u + \mu_C v$, y por la unicidad $\mu_B = \beta$, $\mu_C = \gamma$, $\mu_A = \lambda_A$.
3. *Afines.* Aplicando $\det(\cdot, v)$ y la bilinealidad (G1-022.T1), $\det(X - A, v) = \beta \det(u, v)$, con $\det(u, v) \neq 0$ (G1-022.T2). Así $\lambda_B(X) = \det(X - A, v)/\det(u, v) = n \cdot X - k$ con $n = -v^{\perp}/\det(u, v) \neq 0$ (G1-003.T2: $\det(X, v) = -v^{\perp} \cdot X$). Igual λ_C, y $\lambda_A = 1 - \lambda_B - \lambda_C$; las tres son de la forma $n \cdot X - k$ con $n \neq 0$ (cada una vale 1 en un vértice y 0 en los otros, así que no es constante).
4. Por el paso 2, $X \in \text{conv}\{A, B, C\}$ (G1-027.D1) $\iff$ sus coordenadas baricéntricas son ≥ 0; cada

$\{\lambda \geq 0\}$ es un semiplano cerrado (G1-023.D2). ■

Teorema G1-027.T4 (una función lineal alcanza su máximo en un vértice)

Si $f(X) = c \cdot X + k$, para todo $X \in \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$: $f(X) \leq \max(f(v_1), \dots, f(v_k))$ y $f(X) \geq \min(f(v_1), \dots, f(v_k))$; el máximo y el mínimo de f en $\text{conv}\{v_i\}$ se alcanzan en algún v_i.

Idea de la demostración

f de una combinación convexa es la combinación convexa de los valores, y un promedio con pesos ≥ 0 no supera al mayor valor.

Demostración.

1. Por C1-005.T13 hay i_0 con $f(v_i) \leq f(v_{i_0}) =: M$ para todo i.
2. Para $X = \sum \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$, por G1-002.T1 y C1-005.T12,
$$f(X) = \sum_i \lambda_i (c \cdot v_i) + k \sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i \, (c \cdot v_i + k) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$
3. Como $\lambda_i \geq 0$ y $f(v_i) \leq M$: $\lambda_i f(v_i) \leq \lambda_i M$ (C1-003.T9), y sumando, $f(X) \leq M \sum \lambda_i = M$.
4. $v_{i_0} \in \text{conv}\{v_i\}$ y $f(v_{i_0}) = M$: el máximo se alcanza en un vértice.
5. Aplicando los pasos 1-4 a $-f = (-c) \cdot X - k$ se obtienen la cota inferior y el mínimo. ■

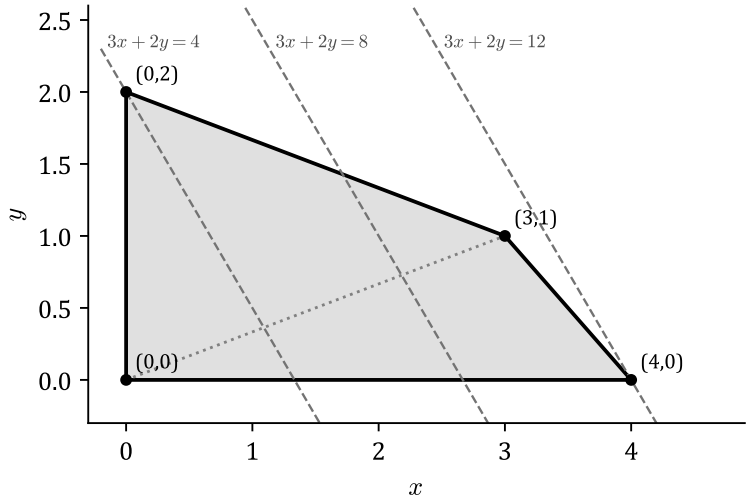


Figura 19: La región de la panadería, sus vértices y las rectas de nivel de $3x + 2y$: la de nivel 12 la toca en $(4, 0)$.

Ejemplo G1-027.E1 (programación lineal)

La región $R = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4, x + 3y \leq 6\}$ es $\text{conv}\{(0,0), (4,0), (3,1), (0,2)\}$ (unión de dos triángulos por la diagonal de $(0,0)$ a $(3,1)$); $3x + 2y$ alcanza su máximo 12 en $(4,0)$. Cifras verificadas por script.

1. *Dos triángulos.* $T_1 := \text{conv}\{(0,0), (4,0), (3,1)\}$ y $T_2 := \text{conv}\{(0,0), (3,1), (0,2)\}$. Por G1-027.T3, cada uno es la intersección de los semiplanos cerrados de sus lados que contienen al tercer vértice: $T_1 = \{y \geq 0,\ x+y \leq 4,\ x-3y \geq 0\}$ y $T_2 = \{x \geq 0,\ x+3y \leq 6,\ x-3y \leq 0\}$.
2. $T_1 = R \cap \{x - 3y \geq 0\}$. $\supset$: las tres desigualdades de T_1 están entre las de la derecha. $\subset$: en T_1, por G1-027.T4, $x \geq \min(0, 4, 3) = 0$ y $x + 3y \leq \max(0, 4, 6) = 6$.
3. $T_2 = R \cap \{x - 3y \leq 0\}$. Igual: en T_2, $y \geq \min(0, 1, 2) = 0$ y $x + y \leq \max(0, 4, 2) = 4$.
4. Como todo punto cumple $x - 3y \geq 0$ o $x - 3y \leq 0$, $R = T_1 \cup T_2$.
5. $R = \text{conv}$ *de los cuatro.* R es convexo (G1-027.T1) y contiene a los cuatro vértices, así que contiene a su envolvente (G1-027.T2). Y $T_1, T_2 \subset \text{conv}$ de los cuatro (una combinación de tres es combinación de los cuatro con un coeficiente 0).
6. *Máximo.* Por G1-027.T4, el máximo de $3x + 2y$ en R es $\max(0, 12, 11, 4) = 12$, en $(4,0)$.

Por qué cada hipótesis

⚠ f de primer grado

$f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1/2)^2$ tiene en R su máximo 0 en $(1, 1/2)$, que no es vértice.

⚠ Coeficientes ≥ 0

$2(4,0) - (0,0) = (8,0)$ tiene coeficientes que suman 1, pero uno es negativo: el punto está fuera de R y $f(8,0) = 24 > 12$.

⚠ Regiones no acotadas

En $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, que no es envolvente de finitos puntos, $f = x$ no tiene máximo.

Ejercicios

1. Encuentra el mínimo y el máximo de $x - y$ en R.
2. Demuestra que todo semiplano cerrado es convexo y que el disco $\{|X| \leq 1\}$ también lo es.
3. Calcula las coordenadas baricéntricas de $(2, 1/2)$ en el triángulo $(0,0), (4,0), (3,1)$.
4. Demuestra que si f alcanza su máximo en dos vértices v_i, v_j, lo alcanza en todo $[v_i, v_j]$.
5. ¿Qué ganancia por docena de bolillo haría que convenga hornear $(3,1)$ y no $(4,0)$?

Respuestas

1. Valores $0, 4, 2, -2$: mínimo -2 en $(0,2)$, máximo 4 en $(4,0)$.
2. G1-023.T5; para el disco, $|(1-t)P + tQ| \leq (1-t)|P| + t|Q| \leq 1$ (G1-002.T6).
3. $(2,1/2) - (0,0) = \beta(4,0) + \gamma(3,1)$: $\gamma = 1/2, \beta = 1/8$; $\lambda_A = 3/8$.
4. $f((1-t)v_i + tv_j) = (1-t)M + tM = M$.
5. Con ganancia $3x + gy$: $9 + g > 12$, es decir $g > 3$.

G1-028 · Cónicas: definición, trazado y simetrías

Motivación

> **El arriate del jardinero**
> Un jardinero clava dos estacas a 6 m una de otra, ata entre ellas una cuerda de 10 m y, con un palo que mantiene la cuerda tensa, marca el suelo. El palo cumple siempre «distancia a una estaca + distancia a la otra = 10». El arriate mide 10 m de largo y 8 m en su parte más angosta: no 6, como podría pensarse.
> Dónde falla la analogía: la cuerda tiene grosor y se estira; el lugar geométrico es exacto.

Definiciones

Definición G1-028.D1 (las tres cónicas)

En $\mathbb{R}^2$: **elipse** de focos F_1, F_2 y semieje a, con $2a > |F_1 - F_2|$: $\{X : |X - F_1| + |X - F_2| = 2a\}$ (circunferencia si $F_1 = F_2$); **hipérbola**, con $F_1 \neq F_2$ y $0 < 2a < |F_1 - F_2|$: $\{X : \big||X - F_1| - |X - F_2|\big| = 2a\}$; **parábola** de foco F y directriz ℓ (una recta, $F \notin \ell$): $\{X : |X - F| = d(X, \ell)\}$.

El trazado con hilo (dos clavos y una cuerda de longitud $2a$) realiza la definición de la elipse; es motivación, no prueba.

Definición G1-028.D2 (nomenclatura)

Elipse e hipérbola: **centro** $O := (F_1 + F_2)/2$, $c := |F_1 - F_2|/2$, **eje focal** la recta F_1F_2 (si $F_1 \neq F_2$), **eje secundario** la mediatriz de $[F_1, F_2]$, **vértices** los cortes con el eje focal; $b := \sqrt{a^2 - c^2}$ (elipse), $b := \sqrt{c^2 - a^2}$ (hipérbola). Parábola: **eje** la recta por F perpendicular a ℓ, **vértice** $V := (F + H)/2$ con H el pie de F en ℓ, $p := |F - H|/2$. **Lado recto**: la cuerda por un foco perpendicular

al eje focal.

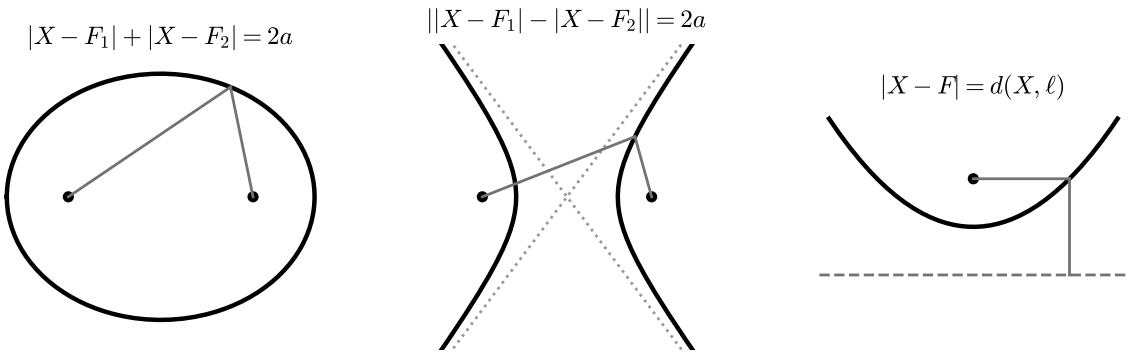


Figura 20: Las tres cónicas como lugares: suma constante, diferencia constante, igual distancia al foco y a la directriz.

Resultados

Teorema G1-028.T1 (invariancia por movimientos)

Si f es una isometría biyectiva, $d(f(X), f(S)) = d(X, S)$. Un movimiento m de $\mathbb{R}^2$ lleva la elipse (hipérbola) de focos F_1, F_2 y semieje a en la de focos $m(F_1), m(F_2)$ y semieje a, y la parábola de foco F y directriz ℓ en la de foco $m(F)$ y directriz $m(\ell)$.

Demostración.

1. $\{|f(X) - Y| : Y \in f(S)\} = \{|f(X) - f(Z)| : Z \in S\} = \{|X - Z| : Z \in S\}$ (G1-004.D2). Los ínfimos de conjuntos iguales son iguales (C1-006.D1): $d(f(X), f(S)) = d(X, S)$ (G1-003.D2).
2. Un movimiento es una isometría biyectiva (G1-008.T4). Para la elipse E: $Y \in m(E) \iff m^{-1}(Y) \in E \iff |m^{-1}(Y) - F_1| + |m^{-1}(Y) - F_2| = 2a$.
3. Como m es isometría, $|m^{-1}(Y) - F_i| = |Y - m(F_i)|$; además $|m(F_1) - m(F_2)| = |F_1 - F_2| < 2a$. Así $m(E)$ es la elipse de focos $m(F_i)$ y semieje a. La hipérbola es igual.
4. Para la parábola: $m(\ell)$ es una recta (G1-008.T4), $m(F) \notin m(\ell)$ (m es inyectiva), y $|m^{-1}(Y) - F| = |Y - m(F)|$, $d(m^{-1}(Y), \ell) = d(Y, m(\ell))$ (paso 1). ■

Teorema G1-028.T2 (simetrías)

La elipse con $F_1 \neq F_2$ y la hipérbola son simétricas respecto al eje focal, al eje secundario y al centro; la circunferencia ($F_1 = F_2$), respecto a su centro y a toda recta por él; la parábola, respecto a su eje.

Los ejes focal y secundario solo existen si $F_1 \neq F_2$ (G1-028.D2); por eso la circunferencia va aparte.

Demostración.

1. Cada simetría σ (respecto a un punto, una recta) es isometría, involución y biyectiva (G1-004.T1).
2. $\sigma\{F_1, F_2\} = \{F_1, F_2\}$: la del eje focal fija F_1, F_2 (G1-004.T2); la del eje secundario los intercambia (G1-004.T3); la del centro también: $2O - F_1 = F_2$ (G1-004.D1).
3. Si X está en la elipse, $|\sigma X - F_i| = |\sigma X - \sigma(\sigma F_i)| = |X - \sigma F_i|$, y como $\{\sigma F_1, \sigma F_2\} = \{F_1, F_2\}$, la suma no cambia: σX está en la elipse. Así $\sigma(E) \subset E$ y, por G1-004.T3, $\sigma(E) = E$. Para la hipérbola, el intercambio cambia el signo de la diferencia, que va en valor absoluto.
4. *Parábola.* Sea $u := (F - H)/|F - H|$. El eje es $L(H, u)$, F está en él y $\ell = L(H, u^\perp)$. Para $X = H + tu^\perp \in \ell$, $(X - H) \cdot u = 0$, así que el pie de X en el eje es H (G1-003.T5) y $\sigma(X) = 2H - X = H - tu^\perp \in \ell$ (G1-004.D1). Así $\sigma(\ell) \subset \ell$ y $\sigma(\ell) = \ell$ (involución).
5. Como $\sigma(F) = F$ (G1-004.T2), para X en la parábola: $|\sigma X - F| = |X - F|$ y $d(\sigma X, \ell) = d(\sigma X, \sigma\ell) = d(X, \ell)$ (G1-028.T1, paso 1).
6. *Circunferencia* ($F_1 = F_2 = O$): la simetría respecto a O fija el foco, y los pasos 1-3 valen sin cambios; la simetría respecto a toda recta por O es G1-005.E1. ■

Teorema G1-028.T3 (extensión)

Si X está en la elipse, $b \leq |X - O| \leq a$: la elipse es acotada. Si X está en la hipérbola, $|X - O| \geq a$; la hipérbola tiene dos **ramas**, $|X - F_1| - |X - F_2| = 2a$ y $= -2a$, cada una en un semiplano abierto del eje secundario. La parábola está en el semiplano abierto de ℓ que contiene a F.

> **Idea de la demostración**
> $X - O$ es el promedio de $X - F_1$ y $X - F_2$: la desigualdad del triángulo da la cota de arriba, y la ley del paralelogramo, la de abajo.

Demostración. Sean $p := X - O$, $f := F_2 - O$ (así $|f| = c$, $F_1 = O - f$), $r_i := |X - F_i|$.

1. $X - F_1 = p + f$ y $X - F_2 = p - f$, así que $p = \frac{1}{2}\big((X - F_1) + (X - F_2)\big)$.
2. *Elipse, arriba.* $|p| \le \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = a$ (G1-002.T6, G1-002.T3).
3. *Elipse, abajo.* Por G1-002.T3, $r_1^2 + r_2^2 = |p + f|^2 + |p - f|^2 = 2|p|^2 + 2c^2$.
4. Como $(r_1 - r_2)^2 \ge 0$, $r_1^2 + r_2^2 \ge \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 = 2a^2$ (C1-003.T9).
5. Así $2|p|^2 + 2c^2 \ge 2a^2$, $|p|^2 \ge a^2 - c^2 = b^2$, y $|p| \ge b$ (G1-002.T2). La elipse está en el disco cerrado de radio a: es acotada.
6. *Hipérbola.* $|x + y| \ge \big||x| - |y|\big|$ (G1-002.T6 con $-y$), así que $|p| \ge \frac{1}{2}|r_1 - r_2| = a$.
7. *Ramas.* $|r_1 - r_2| = 2a$ significa $r_1 - r_2 = 2a$ o $= -2a$ (C1-004.D1). Por la cuenta de G1-004.T3, $r_1^2 - r_2^2 = 2(X - O) \cdot (F_2 - F_1)$. Si $r_1 - r_2 = 2a > 0$, entonces $r_1 > r_2$, $r_1^2 > r_2^2$ y $s(X) := (X - O) \cdot (F_2 - F_1) > 0$; si $= -2a$, $s(X) < 0$. Los conjuntos $\{s > 0\}$, $\{s < 0\}$ son los semiplanos abiertos del eje secundario $N(O, F_2 - F_1)$ (G1-023.D2).
8. *Parábola.* Sea $s(X) := (X - H) \cdot (F - H)$; $\ell = \{s = 0\}$ y $s(F) = |F - H|^2 > 0$. Por G1-023.T3 (o G1-003.T6), $d(X, \ell) = |s(X)|/|F - H|$.
9. Supón $s(X) \le 0$. Por G1-002.T3,

$$|X - F|^2 = |(X - H) - (F - H)|^2 = |X - H|^2 - 2s(X) + |F - H|^2.$$

   Por Cauchy–Schwarz (G1-002.T5), $|X - H|^2 \ge s(X)^2/|F - H|^2 = d(X, \ell)^2$. Con $-2s(X) \ge 0$ y $|F - H|^2 > 0$: $|X - F|^2 > d(X, \ell)^2$, y X no está en la parábola.
10. Luego todo punto de la parábola cumple $s(X) > 0$: está en el semiplano abierto de ℓ que contiene a F (G1-023.T5). ■

> **Ejemplo G1-028.E1**
> La elipse de focos $(\pm 3, 0)$ y $a = 5$ pasa por $(0, \pm 4)$ y $(\pm 5, 0)$; la parábola de foco $(0, 1)$ y directriz $y = -1$ pasa por $(2, 1)$.
>
> 1. $|(0, 4) - (\pm 3, 0)| = \sqrt{9 + 16} = 5$, y $5 + 5 = 10 = 2a$; igual con $(0, -4)$.
> 2. $|(5, 0) - (-3, 0)| + |(5, 0) - (3, 0)| = 8 + 2 = 10$; igual con $(-5, 0)$.
> 3. $|(2, 1) - (0, 1)| = 2$ y $d((2, 1), \{y = -1\}) = |1 + 1| = 2$ (G1-023.T3).

En el arriate, $b = \sqrt{25 - 9} = 4$ (G1-028.D2) y los puntos $(0, \pm 4)$ alcanzan la cota de G1-028.T3: el ancho mínimo es 8 m.

Por qué cada hipótesis

⚠ $2a > |F_1 - F_2|$ en la elipse

Con $2a = |F_1 - F_2|$, el lugar $\{|X - F_1| + |X - F_2| = |F_1 - F_2|\}$ es el segmento $[F_1, F_2]$ (caso de igualdad de G1-002.T7): no es una curva cerrada ni tiene ancho.

⚠ $2a < |F_1 - F_2|$ en la hipérbola

Con $2a = |F_1 - F_2|$, la diferencia $|r_1 - r_2| \leq |F_1 - F_2|$ (G1-002.T6) se alcanza solo en los dos rayos del eje focal que salen de F_1 y F_2 hacia afuera.

⚠ $F \notin \ell$ en la parábola

Si $F \in \ell$, $|X - F| = d(X, \ell)$ se cumple solo en la recta por F perpendicular a ℓ (el pie de X debe ser F).

Ejercicios

1. Comprueba que $(5, 16/3)$ está en la hipérbola de focos $(\pm 5, 0)$ y $a = 3$.
2. Encuentra los vértices de la elipse de focos $(\pm 3, 0)$ y $a = 5$, y la longitud de su lado recto.
3. Demuestra que la elipse no contiene puntos del segmento abierto entre los focos.
4. ¿Por qué la hipérbola no corta a su eje secundario?
5. Demuestra que el vértice de una parábola es el punto de la parábola más cercano a la directriz.

Respuestas

1. $|(10, 16/3)| = 34/3$ y $|(0, 16/3)| = 16/3$; la diferencia es $18/3 = 6 = 2a$.
2. $(\pm 5, 0)$; el lado recto por $(3, 0)$: $(3, \pm 16/5)$, longitud $32/5$.
3. En $[F_1, F_2]$, $r_1 + r_2 = 2c < 2a$ (G1-002.T7).
4. En el eje secundario $r_1 = r_2$ (G1-004.T3), así que $|r_1 - r_2| = 0 \neq 2a$.
5. Sea G el pie de X en ℓ. Por la desigualdad del triángulo, $2p = d(F, \ell) \leq |F-G| \leq |F-X|+|X-G| = 2\,d(X, \ell)$, así que $d(X, \ell) \geq p$; en V, $d(V, \ell) = |V - H| = p$.

G1-029 · Ecuaciones canónicas

Motivación

> **El arriate y los micrófonos**
> El arriate del jardinero (estacas en $(\pm 3, 0)$, cuerda de 10 m) tiene por borde $x^2/25 + y^2/16 = 1$; en el punto de abscisa x la cuerda mide $5 + 3x/5$ del lado de la estaca izquierda. Dos micrófonos en $(\pm 5, 0)$ oyen un estallido; si el sonido recorrió 6 m menos hasta el de la derecha, el estallido ocurrió en la rama derecha de $x^2/9 - y^2/16 = 1$, y muy lejos casi sobre una de las rectas $y = \pm 4x/3$.
> Dónde falla la analogía: la cuerda tiene grosor y el sonido real rebota.

Parte 1 · La elipse canónica

Teorema G1-029.T1 (elipse canónica)

Si $0 \le c < a$, $b := \sqrt{a^2 - c^2}$ y $F_{1,2} := (\mp c, 0)$: $|X - F_1| + |X - F_2| = 2a \iff x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. En ella $|X - F_1| = a + cx/a$ y $|X - F_2| = a - cx/a$.

> **Idea de la demostración**
> La diferencia de los cuadrados de los radios focales es lineal en x; con su suma se despeja cada radio sin raíces. Al regresar, hay que ver que $a + cx/a$ es positivo para poder sacar raíz.

Demostración. Sean $X = (x, y)$, $r_i := |X - F_i|$; $b > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$.

1. Por G1-002.T3, $r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - c)^2 + y^2$ y $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$.
2. ($\Rightarrow$) Si $r_1 + r_2 = 2a$, entonces $(r_1 - r_2) \cdot 2a = 4cx$ y $r_1 - r_2 = 2cx/a$ (K8). Sumando y restando, $r_1 = a + cx/a$ y $r_2 = a - cx/a$.

3. Elevando $r_1 = a + cx/a$ al cuadrado (C1-003.T9):

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2},$$
$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2,$$
$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2,$$

y dividiendo entre b^2: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

4. ($\Leftarrow$) Si $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, entonces $x^2/a^2 \leq 1$ y $|x| \leq a$ (C1-004.T3, C1-003.T9).
5. Con $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$ y $b^2 + c^2 = a^2$:

$$r_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2.$$

6. Como $|x| \leq a$, $a + cx/a \geq a - c > 0$, y por G1-002.T2, $r_1 = a + cx/a$. Igual $r_2^2 = (a - cx/a)^2$ con $a - cx/a \geq a - c > 0$, así que $r_2 = a - cx/a$.
7. Sumando, $r_1 + r_2 = 2a$. Las fórmulas de los radios valen en todo punto de la elipse (pasos 2 o 6). ■

> **⚠ Elevar al cuadrado**
>
> $\sqrt{x} = -1$ elevado da $x = 1$, que no es solución: elevar puede agregar puntos. El paso 6 es el que garantiza que aquí no pasa.

Parte 2 · Hipérbola, asíntotas, parábola y sistema natural

Teorema G1-029.T2 (hipérbola canónica)

Si $0 < a < c$, $b := \sqrt{c^2 - a^2}$ y $F_{1,2} := (\mp c, 0)$: $\big||X - F_1| - |X - F_2|\big| = 2a \iff x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; la rama $x \geq a$ es la de $|X - F_1| - |X - F_2| = 2a$.

Demostración. Sean r_i como antes; $b^2 = c^2 - a^2$ y $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$.

1. ($\Rightarrow$) Si $r_1 - r_2 = 2a\varepsilon$ con $\varepsilon = \pm 1$, entonces $r_1 + r_2 = 2cx\varepsilon/a$ y $r_1 = \varepsilon(a + cx/a)$.
2. Elevando: $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + c^2x^2/a^2$, es decir $x^2(1 - c^2/a^2) + y^2 = a^2 - c^2$, o $-\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = -b^2$, que es $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.
3. ($\Leftarrow$) Si $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, entonces $x^2 \geq a^2$ y $|x| \geq a$. Con $y^2 = b^2(x^2/a^2 - 1)$: $r_1^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 +$

$2cx+a^2=(a+cx/a)^2$ y $r_2^2=(a-cx/a)^2$, así que $r_1=|a+cx/a|$ y $r_2=|a-cx/a|$ (G1-002.T2).

4. Como $|cx/a|\geq c>a$: si $x\geq a, cx/a>a, r_1=a+cx/a, r_2=cx/a-a$ y $r_1-r_2=2a$. Si $x\leq -a$, $cx/a<-a, r_1=-a-cx/a, r_2=a-cx/a$ y $r_1-r_2=-2a$ (C1-004.T3).
5. En ambos casos $|r_1-r_2|=2a$, y como todo punto de la curva tiene $x\geq a$ o $x\leq -a$, la rama $x\geq a$ es exactamente la de $r_1-r_2=2a$. ■

Definición G1-029.D1 (asíntotas)

Las asíntotas de $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ son las rectas $bx-ay=0$ y $bx+ay=0$.

Teorema G1-029.T3 (las asíntotas)

La hipérbola no corta a sus asíntotas, y para todo $\varepsilon>0$ existe $M>0$ tal que todo punto de la hipérbola con $|x|>M$ está a distancia $<\varepsilon$ de una de ellas.

Idea de la demostración

La distancia a la asíntota es $b(|x|-\sqrt{x^2-a^2})/c$; al racionalizar, queda menor que $a^2b/(c|x|)$.

Demostración.

1. Si $bx-ay=0$, entonces $y=bx/a$ y $x^2/a^2-y^2/b^2=0\neq 1$; igual con $bx+ay=0$. No hay cortes.
2. Sea X en la hipérbola: $|x|\geq a$ y $|y|=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (G1-029.T2, G1-002.T2).
3. Si $xy\geq 0$, se usa $bx-ay=0$: como x, y tienen el mismo signo, $|bx-ay|=\big|b|x|-a|y|\big|$, y por G1-023.T3 la distancia es $|b|x|-a|y||/\sqrt{a^2+b^2}=|b|x|-a|y||/c$. Si $xy<0$ se usa $bx+ay=0$ y se obtiene lo mismo.
4. $b|x|-a|y|=b\big(|x|-\sqrt{x^2-a^2}\big)=\dfrac{a^2b}{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}$, que es >0 y $\leq a^2b/|x|$ (C1-003.T7).
5. Sea $\varepsilon>0$ y $M:=a^2b/(c\varepsilon)>0$. Si $|x|>M$, la distancia es $\leq a^2b/(c|x|)<a^2b/(cM)=\varepsilon$ (C1-003.T7). ■

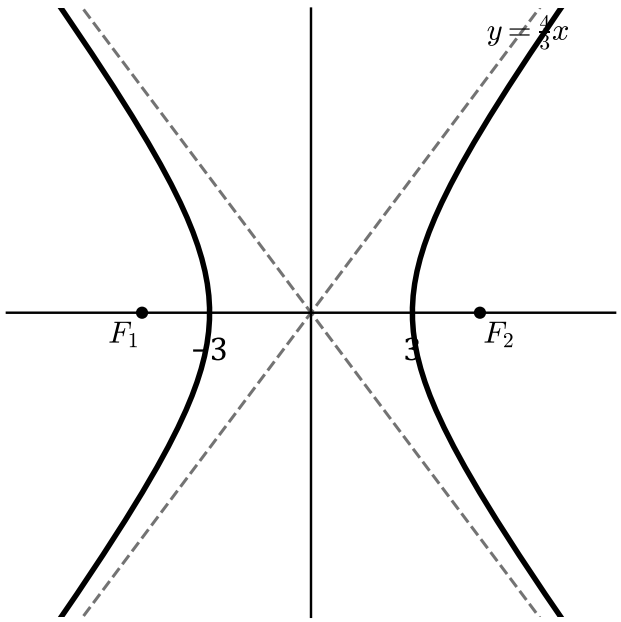


Figura 21: La hipérbola $x^2/9 - y^2/16 = 1$ y sus asíntotas $y = \pm 4x/3$.

Teorema G1-029.T4 (parábola canónica)

Si $p > 0$, $F = (p, 0)$ y $\ell = \{x = -p\}$: $|X - F| = d(X, \ell) \iff y^2 = 4px$.

Demostración.

1. $|X - F|^2 = (x - p)^2 + y^2$ (G1-002.T3) y $d(X, \ell) = |x + p|$ (G1-023.T3 con la recta $x + 0y = -p$).
2. Ambos son ≥ 0, así que son iguales $\iff$ sus cuadrados lo son (C1-003.T9): $(x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$.
3. Desarrollando, $x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \iff y^2 = 4px$. ■

Definición G1-029.D2 (sistema natural)

Para una elipse o hipérbola con $F_1 \neq F_2$: $u := (F_2 - F_1)/(2c)$ y $m(x', y') := O + x'u + y'u^{\perp}$; para una circunferencia, cualquier u unitario; para una parábola: $u := (F - H)/|F - H|$ y $m(x', y') := V + x'u + y'u^{\perp}$. Las coordenadas **naturales** de X son $(x', y') = m^{-1}(X)$. Las **asíntotas** de una hipérbola cualquiera son las imágenes por m de las de G1-029.D1, y el **eje** de la parábola es m(eje x). Las asíntotas no dependen de qué foco se llame F_1: cambiarlo cambia u por $-u$, es decir m por $m \circ (-I)$, y $-I$ conserva las asíntotas canónicas.

En efecto, $(-I)$ lleva $bx - ay = 0$ en sí misma ($b(-x) - a(-y) = -(bx - ay)$), y lo mismo la otra; y $(-u)^\perp = -u^\perp$, así que $O + x'(-u) + y'(-u)^\perp = m(-x', -y')$.

Teorema G1-029.T5 (toda cónica es un movimiento de una canónica)

En coordenadas naturales, toda elipse, hipérbola o parábola tiene su ecuación canónica: $C = m(C_0)$, con C_0 la cónica canónica de los mismos a, c (o p).

Demostración.

1. $(u, u^\perp)$ es un marco ortonormal (G1-003.T2), así que m es un movimiento (G1-008.D2).
2. *Elipse e hipérbola.* $m(\mp c, 0) = O \mp cu = O \mp (F_2 - F_1)/2$, que son F_1 y F_2 (G1-001.T3). Por G1-028.T1, m lleva la cónica C_0 de focos $(\mp c, 0)$ y semieje a en la de focos F_1, F_2 y semieje a, que es C; y C_0 es la canónica por G1-029.T1 o G1-029.T2. Para la circunferencia, $c = 0$ y $m(0, 0) = O$.
3. *Parábola.* Con $|F - H| = 2p$ (G1-028.D2): $m(p, 0) = V + pu = \frac{F+H}{2} + \frac{F-H}{2} = F$, y $m(\{x' = -p\}) = \{V - pu + y'u^\perp\} = L(H, u^\perp)$ (G1-008.T4).
4. ℓ pasa por H y $F - H$ es normal a ella (G1-003.T5), así que su director es múltiplo de $u^\perp$ (G1-003.T2) y $\ell = L(H, u^\perp)$ (G1-001.T4). Por G1-028.T1 y G1-029.T4, $m(\{y^2 = 4px\}) = C$. ■

Ejemplo G1-029.E1

$x^2/25 + y^2/9 = 1$: focos $(\pm 4, 0)$, lado recto $18/5$; $x^2/9 - y^2/16 = 1$: focos $(\pm 5, 0)$, asíntotas $y = \pm 4x/3$.

1. $a = 5, b = 3, c = \sqrt{25 - 9} = 4$ (G1-029.T1).
2. En $x = 4$: $y^2 = 9(1 - 16/25) = 81/25$, $y = \pm 9/5$; el lado recto mide $18/5$.
3. $a = 3, b = 4, c = \sqrt{9 + 16} = 5$ (G1-029.T2); asíntotas $4x \mp 3y = 0$ (G1-029.D1).

Por qué cada hipótesis

⚠ $c < a$ **(elipse),** $a < c$ **(hipérbola)**

Con $c = a$, $b = 0$ y la ecuación ni siquiera está definida; el lugar es un segmento o dos rayos (G1-028).

⚠ $p > 0$

Con $p = 0$ el foco está en la directriz y el lugar es la recta $y = 0$.

Ejercicios

1. Encuentra la ecuación canónica de la elipse de focos $(\pm 1, 0)$ que pasa por $(0, 2)$.
2. ¿Qué rama de $x^2/4 - y^2 = 1$ contiene a $(-2\sqrt{2}, 1)$? Verifica con los radios focales.
3. Encuentra el foco y la directriz de $y^2 = 10x$.
4. Encuentra M tal que los puntos de $x^2 - y^2 = 1$ con $|x| > M$ estén a menos de 0.001 de una asíntota.
5. Demuestra que $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con $b > a$ es una elipse de focos $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$.

Respuestas

1. $c = 1, b = 2, a^2 = 5$: $x^2/5 + y^2/4 = 1$.
2. $x \leq -a$: la de $r_1 - r_2 = -4$. Con $a = 2, c = \sqrt{5}$ y el paso 4 de G1-029.T2: $r_1 = -a - cx/a = -2 + \sqrt{10}, r_2 = a - cx/a = 2 + \sqrt{10}$, y $r_1 - r_2 = -4$.
3. $4p = 10$: foco $(5/2, 0)$, directriz $x = -5/2$.
4. $a = b = 1, c = \sqrt{2}$: $M = 1/(\sqrt{2} \cdot 0.001) \approx 707.2$.
5. La canónica $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ (semieje b, focos $(\pm\sqrt{b^2 - a^2}, 0)$, G1-029.T1) se lleva en el conjunto dado con el movimiento $(x, y) \mapsto (y, x)$ (marco e_2, e_1), que manda los focos a $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$ (G1-028.T1).

G1-030 · Traslaciones y cónicas con ejes paralelos

Motivación

> **La pista del parque**
> En el mapa de la ciudad (origen en el zócalo, en km) la pista de patinaje de un parque es $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. Completando cuadrados, $4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$: es la elipse $(x-1)^2/9 + (y+2)^2/4 = 1$, de centro $(1, -2)$, 6 km de largo y 4 km de ancho. Mover el origen al centro de la pista la vuelve canónica.
> Dónde falla la analogía: una pista real tiene carriles con ancho; aquí es una curva.

Definiciones

Definición G1-030.D1 (polinomio cuadrático)

$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ con coeficientes $(A, \dots, F) \in \mathbb{R}^6$; es **de segundo grado** si $(A, B, C) \neq 0$. Su **lugar** es $\{f = 0\}$.

Resultados

Teorema G1-030.T0 (los coeficientes son únicos)

Si $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, todos los coeficientes son 0.

Demostración.

1. $f(x, 0) = Ax^2 + Dx + F = 0$ para todo x; por G1-020.T7, $A = D = F = 0$.

2. $f(0,y) = Cy^2 + Ey + F = 0$ para todo y; por G1-020.T7, $C = E = 0$.
3. Queda $f(x,y) = Bxy$, y $f(1,1) = B = 0$. ■

En consecuencia, si dos polinomios cuadráticos dan la misma función, tienen los mismos coeficientes (se aplica T0 a su diferencia).

Teorema G1-030.T1 (cambio de coordenadas afín)

Si $m(X) = x_1w_1 + x_2w_2 + b$ con $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$, $f \circ m$ es un polinomio cuadrático; si w_1, w_2 son independientes, m es biyectiva, m^{-1} es de la misma forma, y f es de segundo grado $\iff f \circ m$ lo es.

Demostración.

1. Las coordenadas de $m(X)$ son expresiones de primer grado en (x_1, x_2): $x_1w_{11} + x_2w_{21} + b_1$ y $x_1w_{12} + x_2w_{22} + b_2$. Al sustituirlas en f y desarrollar (K1-K9), queda un polinomio de grado ≤ 2 en x_1, x_2: un polinomio cuadrático.
2. Si w_1, w_2 son independientes, son base de $\mathbb{R}^2$ y para cada y hay un único (x_1, x_2) con $x_1w_1 + x_2w_2 = y - b$ (G1-019.T1): m es biyectiva (C1-011.T1). Por G1-003.T3 (con $\det(w_1, w_2) \neq 0$), las soluciones son expresiones de primer grado en y: $m^{-1}(y) = y_1w_1' + y_2w_2' + b'$.
3. w_1', w_2' son independientes: si $\alpha w_1' + \beta w_2' = 0$ con $(\alpha, \beta) \neq 0$, entonces $m^{-1}(y + (\alpha, \beta)) = m^{-1}(y)$, contra la inyectividad.
4. Si f es de segundo grado y $f \circ m$ no lo fuera, $f \circ m$ sería de grado ≤ 1, y $f = (f \circ m) \circ m^{-1}$ también (sustituir expresiones de primer grado en uno de grado ≤ 1 da grado ≤ 1); por la unicidad de los coeficientes (G1-030.T0), $A = B = C = 0$, contradicción. El recíproco es igual con m^{-1}. ■

Teorema G1-030.T2 (traslación de ejes)

Con $X = X' + (h,k)$: $A(x-h)^2 + C(y-k)^2 = K$ se lee $Ax'^2 + Cy'^2 = K$. Si $A \neq 0$, $Ax^2 + Dx = A(x + D/(2A))^2 - D^2/(4A)$ (completar el cuadrado).

Demostración.

1. Con $x' = x - h, y' = y - k$ las dos ecuaciones son la misma igualdad.
2. G1-005.T1 con $a = A, b = D, c = 0$ da $Ax^2 + Dx = A(x + D/(2A))^2 - D^2/(4A)$. ■

Teorema G1-030.T3 (clasificación de $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $(A, C) \neq 0$)

Si $AC > 0$: elipse (circunferencia si $A = C$), un punto o vacío. Si $AC < 0$: hipérbola o dos rectas que se cortan. Si $AC = 0$ (digamos $A = 0$): con $D \neq 0$, parábola de eje paralelo al eje x; con $D = 0$, dos rectas paralelas, una recta o vacío. En los casos no vacíos de cónica, los ejes son paralelos a los coordenados.

Idea de la demostración

Se completa el cuadrado en cada variable con coeficiente no nulo y se traslada; el signo de AC y el del término independiente deciden el caso.

Demostración. Multiplicar la ecuación por -1 no cambia el lugar. Se usan dos movimientos auxiliares: $S(x, y) := (y, x)$ (marco (e_2, e_1)) y $\sigma(x, y) := (-x, y)$ (marco $(-e_1, e_2)$), además de las traslaciones $\tau(X') := X' + (h, k)$ (G1-008.D2); sus composiciones son movimientos (G1-008.T4).

1. $AC > 0$. Multiplicando por -1 si hace falta, $A, C > 0$. Por G1-030.T2, con $h := -D/(2A)$, $k := -E/(2C)$ y $K := D^2/(4A) + E^2/(4C) - F$, la ecuación es $Ax'^2 + Cy'^2 = K$.
2. Si $K > 0$, con $\alpha := K/A$, $\beta := K/C > 0$: $x'^2/\alpha + y'^2/\beta = 1$. Si $\alpha \geq \beta$, es la elipse canónica con $a = \sqrt{\alpha}$, $b = \sqrt{\beta}$, $c = \sqrt{\alpha - \beta}$ (G1-029.T1); si $\alpha < \beta$, es la imagen por S de la canónica $x^2/\beta + y^2/\alpha = 1$. El lugar es su imagen por τ (o $\tau \circ S$): una elipse (G1-028.T1). Si $A = C$, $\alpha = \beta$, $c = 0$: circunferencia.
3. Si $K = 0$: $Ax'^2 + Cy'^2 = 0$ con $A, C > 0$ obliga $x' = y' = 0$ (C1-003.T5, C1-003.T9): el punto (h, k). Si $K < 0$: el lado izquierdo es ≥ 0; vacío.
4. $AC < 0$. Multiplicando por -1 si hace falta, $A > 0 > C$, y como antes $Ax'^2 + Cy'^2 = K$. Si $K > 0$: $x'^2/(K/A) - y'^2/(K/(-C)) = 1$, la hipérbola canónica (G1-029.T2, con $c^2 = a^2 + b^2 > a^2$). Si $K < 0$: $y'^2/(K/C) - x'^2/(-K/A) = 1$, la imagen por S de una canónica. En ambos casos, una hipérbola (G1-028.T1).
5. Si $K = 0$: $Ax'^2 = -Cy'^2$, es decir $(\sqrt{A}\,x' - \sqrt{-C}\,y')(\sqrt{A}\,x' + \sqrt{-C}\,y') = 0$ (G1-002.D2), y por C1-002.T5 el lugar es la unión de dos rectas por (h, k) con normales $(\sqrt{A}, \mp\sqrt{-C})$, que no son paralelas ($\det = 2\sqrt{A}\sqrt{-C} \neq 0$): se cortan (G1-023.T2).
6. $A = 0, C \neq 0$. Completando en y: $C(y-k)^2 + Dx + F' = 0$ con $k = -E/(2C)$ y $F' := F - E^2/(4C)$.
7. Si $D \neq 0$: con $h := -F'/D$, $(y-k)^2 = -\frac{D}{C}(x-h)$, es decir $y'^2 = 4p'x'$ con $4p' := -D/C \neq 0$. Si $p' > 0$ es la parábola canónica (G1-029.T4); si $p' < 0$, es la imagen por σ de $y^2 = 4|p'|x$. El lugar es una parábola (G1-028.T1).

8. Si $D = 0$: $(y-k)^2 = -F'/C =: K'$. Si $K' > 0$, $y = k \pm \sqrt{K'}$: dos rectas paralelas; si $K' = 0$, la recta $y = k$; si $K' < 0$, vacío (G1-002.T2). El caso $C = 0$, $A \neq 0$ es igual intercambiando x y y.
9. *Ejes.* En cada caso de cónica, el lugar es $m(C_0)$ con $m = \tau$, $\tau \circ S$ o $\tau \circ \sigma$, cuya parte lineal lleva los ejes coordenados en rectas paralelas a los ejes coordenados (G1-008.T4). ■

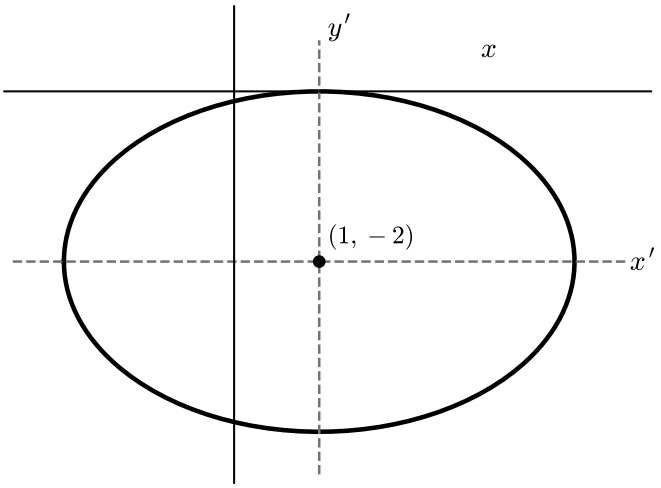


Figura 22: La elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ y los ejes trasladados a su centro $(1, -2)$.

Ejemplo G1-030.E1
$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ es la elipse $(x-1)^2/9 + (y+2)^2/4 = 1$; $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ son las rectas $y = \pm(x-1)$.

1. $4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) + 4 = 4(x-1)^2 - 4 + 9(y+2)^2 - 36 + 4$, así que la ecuación es $4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$; dividiendo entre 36 se obtiene la canónica trasladada (G1-030.T3, caso $AC > 0$, $K = 36 > 0$).
2. $x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x-1)^2 - y^2 = (x - 1 - y)(x - 1 + y)$: caso $AC < 0$, $K = 0$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $(A, C) \neq 0$
Con $A = C = 0$ la ecuación es $Dx + Ey + F = 0$: una recta, el vacío o todo $\mathbb{R}^2$ (G1-023.T1).

⚠ Sin término xy

$xy = 1$ no se puede tratar completando cuadrados en x y en y por separado; hace falta una rotación (G1-031).

⚠ El signo de AC no basta

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ tiene $AC > 0$ y es vacío; $x^2 - y^2 = 0$ tiene $AC < 0$ y son dos rectas.

Ejercicios

1. Clasifica $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$.
2. Clasifica $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$ y encuentra su vértice y su foco.
3. Clasifica $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.
4. ¿Para qué F es $x^2 + y^2 - 2x + F = 0$ una circunferencia, un punto o vacío?
5. Demuestra que $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq 0$ es una circunferencia, un punto o vacío.

Respuestas

1. $(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 0$: el punto $(-1, 1)$.
2. $(y-2)^2 = 8(x-1)$: parábola con $p = 2$, vértice $(1, 2)$, foco $(3, 2)$.
3. $9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$: hipérbola $(x-1)^2/4 - (y+2)^2/9 = 1$.
4. $(x-1)^2 + y^2 = 1 - F$: circunferencia si $F < 1$, el punto $(1, 0)$ si $F = 1$, vacío si $F > 1$.
5. Dividiendo entre A es G1-005.T2 (o el caso $AC > 0$ con $A = C$).

G1-031 · Rotaciones y la ecuación general de 2.º grado

Motivación

> **El barrio de calles diagonales**
> En un barrio con calles en diagonal, la pista de un parque es $5x^2+4xy+2y^2 = 1$ (km). El término $4xy$ dice que está girada respecto a los ejes del mapa. Si se usan como ejes las direcciones $u = (2,1)/\sqrt{5}$ y $u^{\perp} = (-1,2)/\sqrt{5}$, la ecuación queda $6x'^2 + y'^2 = 1$: una elipse de semiejes $1/\sqrt{6}$ y 1, cuyo eje largo apunta en la dirección $(-1,2)$. Ninguna cuenta usa ángulos: u sale de resolver una ecuación de segundo grado.
> Dónde falla la analogía: las calles reales no son exactamente rectas ni perpendiculares.

Parte 1 · Forma cuadrática, invariantes y teorema espectral

Definición G1-031.D1 (forma cuadrática)

$Q(X) := Ax^2 + Bxy + Cy^2 = X \cdot MX$ con $M := \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$ (simétrica: $MX \cdot Y = X \cdot MY$).

Discriminante $\Delta := B^2 - 4AC$.

En efecto, $MX = (Ax + \frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x + Cy)$, así que $X \cdot MX = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, y $MX \cdot Y = Axy_1 + \frac{B}{2}(yy_1 + xy_2) + Cyy_2 = X \cdot MY$ (G1-002.D1).

Teorema G1-031.T1 (rotación de ejes e invariantes)

Con $X = R(c,s)X'$, $f(X) = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F$ con $A' = Ac^2 + Bcs + Cs^2$, $C' = As^2 - Bcs + Cc^2$, $B' = 2(C-A)cs + B(c^2 - s^2)$; $A' + C' = A + C$ y $B'^2 - 4A'C' = \Delta$.

Demostración. Con $x = cx' - sy'$, $y = sx' + cy'$ (G1-011.D1):

1. Desarrollando (K1, K2, K6, K9), el coeficiente de x'^2 en $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ es $Ac^2 + Bcs + Cs^2$; el de y'^2, $As^2 - Bcs + Cc^2$; y el de $x'y'$, $-2Acs + B(c^2 - s^2) + 2Ccs$. Los términos lineales dan $D' = Dc + Es$, $E' = -Ds + Ec$, y F no cambia.
2. *Traza.* $A' + C' = A(c^2 + s^2) + C(s^2 + c^2) = A + C$, pues $c^2 + s^2 = 1$.
3. *Discriminante.* Sean $\alpha := A - C$, $p := c^2 - s^2$, $q := 2cs$; entonces $p^2 + q^2 = (c^2 + s^2)^2 = 1$ y

$$A' - C' = (A - C)(c^2 - s^2) + 2Bcs = \alpha p + Bq, \qquad B' = -\alpha q + Bp.$$

4. Así

$$\begin{aligned}(A' - C')^2 + B'^2 &= \alpha^2 p^2 + 2\alpha Bpq + B^2 q^2 + \alpha^2 q^2 - 2\alpha Bpq + B^2 p^2 \\ &= (\alpha^2 + B^2)(p^2 + q^2) = (A - C)^2 + B^2.\end{aligned}$$

5. Como $4A'C' = (A' + C')^2 - (A' - C')^2$,

$$B'^2 - 4A'C' = (A' - C')^2 + B'^2 - (A' + C')^2 = (A - C)^2 + B^2 - (A + C)^2 = B^2 - 4AC. \quad \blacksquare$$

Teorema G1-031.T2 (teorema espectral 2×2, sin trigonometría)

Existen un vector unitario $u = (c, s)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $Mu = \lambda_1 u$ y $Mu^\perp = \lambda_2 u^\perp$; con $X = R(c, s)X'$, $Q(X) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Además $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$ y $\lambda_1 \lambda_2 = AC - B^2/4 = -\Delta/4$.

Idea de la demostración

El polinomio $\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2/4)$ tiene raíces reales; de una sale un vector propio unitario u. Por la simetría de M, $u^\perp$ también es propio, y en la base $(u, u^\perp)$ no quedan términos cruzados.

Demostración.

1. *Caso $B = 0$.* $u := e_1$, $\lambda_1 := A$, $\lambda_2 := C$: $Me_1 = Ae_1$, $Me_2 = Ce_2$ y $u^\perp = e_2$.
2. *Caso $B \neq 0$.* El discriminante de $\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2/4)$ es $(A + C)^2 - 4AC + B^2 = (A - C)^2 + B^2 > 0$; sea λ_1 su raíz mayor (G1-005.T1).
3. $v := (B/2, \lambda_1 - A) \neq 0$ (pues $B \neq 0$), y

$$Mv = \Big(\frac{B}{2}\lambda_1,\ \frac{B^2}{4} + C(\lambda_1 - A)\Big).$$

Como $\lambda_1^2-(A+C)\lambda_1+AC-B^2/4=0$, se tiene $\lambda_1(\lambda_1-A)=C\lambda_1-AC+B^2/4$, que es la segunda componente: $Mv=\lambda_1 v$. Sea $u:=v/|v|$ (G1-002.T3), unitario con $Mu=\lambda_1 u$.

4. En ambos casos, por la simetría, $(Mu^\perp)\cdot u=u^\perp\cdot Mu=\lambda_1\,u^\perp\cdot u=0$ (G1-003.T2). Así $Mu^\perp\in\{w:w\cdot u=0\}=\{tu^\perp\}$ (G1-003.T2): $Mu^\perp=\lambda_2 u^\perp$ para algún λ_2.
5. $R(c,s)X'=(cx'-sy',sx'+cy')=x'u+y'u^\perp$ (G1-011.D1). Por G1-002.T1,

$$Q(X)=(x'u+y'u^\perp)\cdot(\lambda_1 x'u+\lambda_2 y'u^\perp)=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2,$$

pues $u\cdot u=u^\perp\cdot u^\perp=1$ y $u\cdot u^\perp=0$.

6. Con la notación de G1-031.T1, $A'=Q(u)=\lambda_1$, $C'=Q(u^\perp)=\lambda_2$ y $B'=Q(u+u^\perp)-A'-C'=0$ (evaluando en $X'=e_1,e_2,e_1+e_2$). Por G1-031.T1, $\lambda_1+\lambda_2=A+C$ y $-4\lambda_1\lambda_2=\Delta$. ■

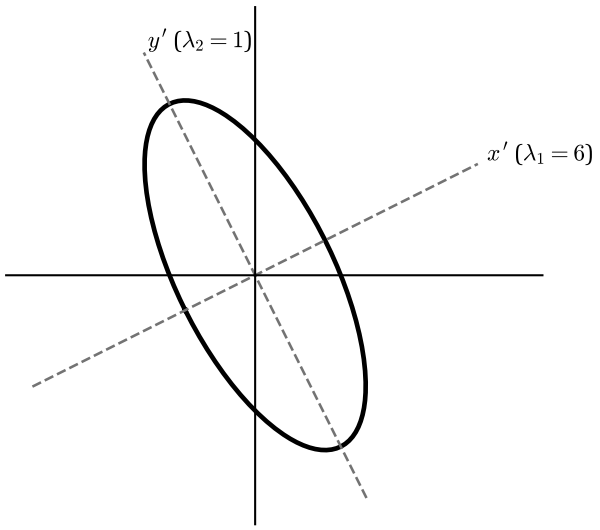


Figura 23: La elipse $5x^2+4xy+2y^2=1$ y los ejes rotados: $Mu=6u$, $Mu^\perp=u^\perp$.

Parte 2 · Clasificación por el discriminante

Teorema G1-031.T3 (clasificación por el discriminante)

El lugar de una ecuación de segundo grado es: si $\Delta<0$, una elipse, un punto o vacío; si $\Delta>0$, una hipérbola o dos rectas que se cortan; si $\Delta=0$, una parábola, dos rectas paralelas, una recta o vacío.

Idea de la demostración

Se rota con G1-031.T2; la ecuación queda sin xy, con $A'C' = -\Delta/4$, y se aplica G1-030.T3. La rotación es un movimiento: no cambia el tipo.

Demostración. Sea f de segundo grado y $R := R(c, s)$ la rotación de G1-031.T2.

1. Por G1-031.T1 y G1-031.T2, $f(RX') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F$, y $f \circ R$ es de segundo grado (G1-030.T1; R tiene columnas independientes), así que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$.
2. $\lambda_1\lambda_2 = -\Delta/4$: $\Delta < 0 \iff \lambda_1\lambda_2 > 0$; $\Delta > 0 \iff \lambda_1\lambda_2 < 0$; $\Delta = 0 \iff$ algún $\lambda_i = 0$ (C1-002.T5).
3. Por G1-030.T3 (con $A = \lambda_1$, $C = \lambda_2$), $\{f \circ R = 0\}$ es, respectivamente: elipse, punto o vacío; hipérbola o dos rectas que se cortan; parábola, dos rectas paralelas, una recta o vacío.
4. $X \in \{f = 0\} \iff R^{-1}X \in \{f \circ R = 0\}$, es decir $\{f = 0\} = R(\{f \circ R = 0\})$.
5. R es un movimiento (G1-011.T1): lleva elipses, hipérbolas y parábolas en cónicas del mismo tipo (G1-028.T1), un punto en un punto, cada recta $L(P, v)$ en la recta $L(RP, Rv)$ (G1-008.T4), así que dos rectas paralelas en dos paralelas y dos que se cortan en dos que se cortan (R es biyectiva). ■

Ejemplo G1-031.E1

$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$: $\Delta = -24$, $\lambda = 1$ y 6, es una elipse de semiejes 1 y $1/\sqrt{6}$; $xy = 1$ es una hipérbola ($\Delta = 1$, $\lambda = \pm 1/2$).

1. $\Delta = 16 - 40 = -24$; $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ (G1-031.T2), con $v = (2, 6 - 5) = (2, 1)$.
2. En los ejes rotados, $6x'^2 + y'^2 = 1$, es decir $x'^2/(1/6) + y'^2 = 1$: elipse de semiejes $1/\sqrt{6}$ y 1 (G1-030.T3).
3. $xy = 1$: $A = C = 0$, $B = 1$, $\Delta = 1 > 0$; $\lambda^2 - 1/4 = 0$, $\lambda = \pm 1/2$. Queda $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = 1$: hipérbola de semiejes $\sqrt{2}$ (G1-031.T3).

Por qué cada hipótesis

⚠ Segundo grado

$x = 0$ tiene $\Delta = 0$ y es una recta, pero no es de segundo grado: el teorema no habla de ella.

⚠ Que la transformación sea una rotación

Con $X = 2X'$ (no es rotación), Q se vuelve $4Q$ y Δ se multiplica por 16. El signo se conserva, pero los semiejes no; y con transformaciones no ortogonales $A + C$ cambia.

⚠ Las degeneradas

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ ($\Delta = -4$) es vacío y $(x + y)^2 = 1$ ($\Delta = 0$) son dos rectas paralelas: el signo de Δ da la familia, no garantiza una cónica propia.

Ejercicios

1. Clasifica $x^2 + xy + y^2 = 3$ y encuentra sus semiejes.
2. Clasifica $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 8$.
3. Encuentra la rotación que quita el término xy de $2x^2 + 4xy - y^2$.
4. Demuestra que si $A = C$ y $B \neq 0$, la rotación de G1-031.T2 es por $u = (1, 1)/\sqrt{2}$.
5. Clasifica $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$.

Respuestas

1. $\Delta = -3$; $\lambda = 3/2, 1/2$: $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$, semiejes $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$.
2. $\Delta = 64 > 0$; $\lambda = 8, -2$: $8x'^2 - 2y'^2 = 8$, hipérbola.
3. $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $v = (2, 1)$, $u = (2, 1)/\sqrt{5}$: queda $3x'^2 - 2y'^2$.
4. $\lambda_1 = A + |B|/2$; si $B > 0$, $v = (B/2, B/2)$; si $B < 0$, $\lambda_1 = A - B/2$ y $v = (B/2, -B/2)$, proporcional a $(1, -1)$: en ese caso $u = (1, -1)/\sqrt{2}$ (y $u^{\perp} = (1, 1)/\sqrt{2}$).
5. $\Delta = 0$; $\lambda_1 = 2$, $v = (-1, 1)$, $u = (-1, 1)/\sqrt{2}$: queda $2x'^2 + 2\sqrt{2}\,y' = 0$, una parábola.

G1-032 · Excentricidad y secciones de un cono

Motivación

> **El robot de limpieza y la linterna**
> Un robot de limpieza se programa para estar siempre a la mitad de distancia del cargador que de la pared; el cargador está a 3 m de la pared. El robot recorre una elipse de 4 m de largo con el cargador en un foco, y la pared resulta ser su *directriz*. Y una linterna que ilumina una pared deja una mancha cuya orilla es una elipse, una parábola o una hipérbola, según qué tan inclinada esté la pared respecto al haz: de ahí el nombre de «secciones cónicas».
> Dónde falla la analogía: el robot mide con error, la luz se difumina en la orilla, y la linterna solo ilumina un manto del cono.

Parte 1 · Foco, directriz y excentricidad

Definición G1-032.D1 (cónica foco-directriz)

Para $e > 0$, $F \in \mathbb{R}^2$ y una recta ℓ con $F \notin \ell$: $C(e, F, \ell) := \{X : |X - F| = e \cdot d(X, \ell)\}$; e es la **excentricidad**.

Teorema G1-032.T1 ($e < 1$, $e = 1$, $e > 1$)

$C(1, F, \ell)$ es la parábola de foco F y directriz ℓ. Si $0 < e < 1$ ($e > 1$), con $p := d(F, \ell)$, $C(e, F, \ell)$ es la elipse (hipérbola) de semieje $a = pe/|1 - e^2|$ y $c = ae$, con F como foco. Recíprocamente, toda elipse que no es circunferencia y toda hipérbola es $C(e, F_i, \ell_i)$ con $e = c/a$ para cada foco F_i y su **directriz** ℓ_i (en coordenadas naturales, $x = \pm a/e$).

Idea de la demostración

Con un movimiento se pone el foco en $(c,0)$ y la directriz en $x = a/e$. Ahí la condición es $(x-c)^2+y^2=(ex-a)^2$, que con $c=ae$ es la ecuación canónica.

Demostración.

1. $e=1$. Es la definición de parábola (G1-028.D1).
2. *Lema en posición canónica.* Para $a>0$, $e>0$, $e\neq 1$ y $c:=ae$, la condición $|X-(c,0)| = e\cdot|x-a/e|$ equivale (elevando, ambos lados ≥ 0, C1-003.T9; y $d(X,\{x=a/e\})=|x-a/e|$ por G1-023.T3) a

$$(x-c)^2+y^2=(ex-a)^2 \iff x^2(1-e^2)+y^2=a^2-c^2=a^2(1-e^2).$$

   Si $e<1$, dividiendo entre $a^2(1-e^2)>0$: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ con $b^2=a^2-c^2$, la elipse canónica de focos $(\pm c,0)$ ($c<a$, G1-029.T1). Si $e>1$: $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ con $b^2=c^2-a^2$, la hipérbola canónica ($c>a$, G1-029.T2). Lo mismo con $(-c,0)$ y $x=-a/e$ (cambiando x por $-x$).
3. *Directo.* Sean $p:=d(F,\ell)>0$ ($F\notin\ell$), $a:=pe/|1-e^2|$ y $c:=ae$. Entonces $a/e-c=a(1-e^2)/e$ y $|a/e-c|=p$.
4. Sea H el pie de F en ℓ (G1-003.T5), con $|H-F|=p$, y $w:=(H-F)/(a/e-c)$, unitario. Sea $m(x',y'):=F+(x'-c)w+y'w^\perp$: es un movimiento (marco $(w,w^\perp)$, G1-008.D2) con $m(c,0)=F$.
5. $m(a/e,y')=F+(a/e-c)w+y'w^\perp=H+y'w^\perp$. Como ℓ pasa por H y es perpendicular a $F-H\parallel w$, su director es múltiplo de $w^\perp$ (G1-003.T2) y $m(\{x'=a/e\})=\ell$ (G1-001.T4, G1-008.T4).
6. Por G1-028.T1 (m conserva distancias a puntos y a conjuntos), $m^{-1}(C(e,F,\ell))=C(e,(c,0),\{x'=a/e\})$, que por el paso 2 es la elipse (hipérbola) canónica. Por G1-028.T1, $C(e,F,\ell)$ es la elipse (hipérbola) de focos $m(\pm c,0)$ —uno es F— y semieje a.
7. *Recíproco.* Sea C una elipse con $c>0$ (no circunferencia) o una hipérbola, m su movimiento natural y C_0 la canónica (G1-029.D2, G1-029.T5). Con $e:=c/a$, el paso 2 dice $C_0=C(e,(\pm c,0),\{x=\pm a/e\})$. Por G1-028.T1, $C=m(C_0)=C(e,F_i,\ell_i)$ con $F_i=m(\pm c,0)$ y $\ell_i:=m(\{x=\pm a/e\})$. ■

El robot

$e=1/2, p=3$: $a=(3/2)/(3/4)=2, c=1, b=\sqrt{3}$. En coordenadas naturales el robot recorre $x^2/4+y^2/3=1$, con el cargador en $(1,0)$ y la pared en $x=a/e=4$, a 3 m del cargador.

⚠⚠ Cálculo II · se cita

La siguiente pieza usa el bloque trigonométrico de `TEOREMAS-G1.md`, demostrado en C2-014: **TR.1** (π, sen y cos continuas, periodo 2π, $\cos(-x)=\cos x$, $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen} x$, $\cos 0=1$, $\operatorname{sen} 0=0$), **TR.2** ($\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ y las fórmulas de suma) y **TR.3** (en particular $\cos\pi=-1$, $\operatorname{sen}\pi=0$).

Teorema G1-032.T2 ⚠ TR (ecuación polar)

Si $F=0$ y $\ell=\{x=-p\}$ $(p>0)$, $C(e,F,\ell)=\{P(ep/(1-e\cos\theta),\theta):\theta\in\mathbb{R},\ e\cos\theta\neq 1\}$ (polares con r con signo, G1-014.D1). Si $e\leq 1$, todo punto tiene $r>0$ en esa forma.

Demostración. Para $X=P(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$: $|X|=|r|$ (TR.2, G1-002.T2) y $d(X,\ell)=|r\cos\theta+p|$ (G1-023.T3).

1. $\supset$. Si $r=ep/(1-e\cos\theta)$, entonces $r-er\cos\theta=ep$, es decir $r=e(r\cos\theta+p)$, y tomando valor absoluto $|X|=e\,d(X,\ell)$.
2. $\subset$. $0\notin C$: $|0|=0\neq ep=e\,d(0,\ell)$. Sea $X\in C$, $X\neq 0$; por G1-014.T1, $X=P(\rho,\theta)$ con $\rho=|X|>0$. La condición es $\rho=e|\rho\cos\theta+p|$.
3. Si $\rho\cos\theta+p\geq 0$: $\rho(1-e\cos\theta)=ep>0$, así que $e\cos\theta\neq 1$ y $\rho=ep/(1-e\cos\theta)$: X está en la forma con $r=\rho>0$.
4. Si $\rho\cos\theta+p<0$: $\rho(1+e\cos\theta)=-ep$. Con $\theta':=\theta+\pi$, $\cos\theta'=-\cos\theta$ (TR.2 con $\cos\pi=-1$, $\operatorname{sen}\pi=0$, TR.3), así que $1-e\cos\theta'=1+e\cos\theta=-ep/\rho\neq 0$ y $ep/(1-e\cos\theta')=-\rho$. Por G1-014.T2, $P(-\rho,\theta+\pi)=P(\rho,\theta)=X$: X está en la forma con $r=-\rho$.
5. *Si $e\leq 1$, el caso del paso 4 no ocurre.* Si $\rho\cos\theta+p<0$, entonces $\rho=-e(\rho\cos\theta+p)\leq-(\rho\cos\theta+p)$, es decir $\rho(1+\cos\theta)\leq -p<0$; pero $1+\cos\theta\geq 0$ (TR.2: $\cos^2\theta\leq 1$), contradicción. Así todo punto está en la forma con $r>0$. ■

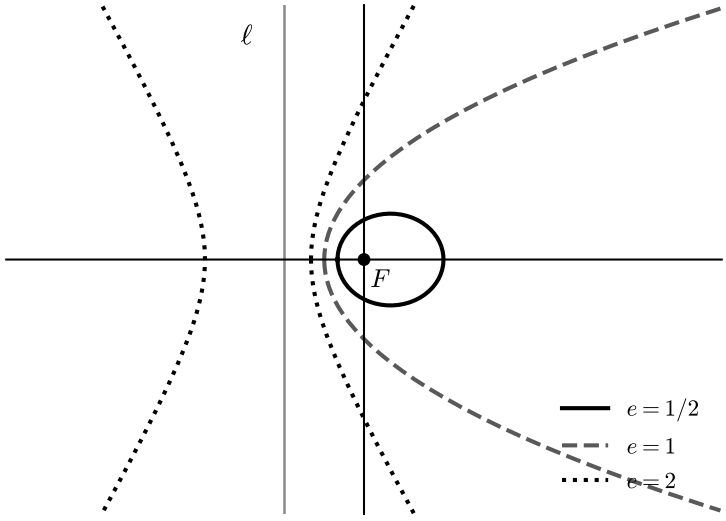


Figura 24: Cónicas $|X| = e\, d(X, \{x = -1\})$ con $e = 1/2$ (elipse), $e = 1$ (parábola) y $e = 2$ (hipérbola).

Parte 2 · Plano ∩ cono

Definición G1-032.D2 (cono y cónicas en un plano del espacio)

Para $k > 0$, el **cono circular recto** $K := \{x^2 + y^2 = k^2 z^2\}$ (vértice 0, eje z). Si $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ es un plano con punto P_0 y par ortonormal (u, w) que genera su dirección, la **carta** $\varphi(x', y') := P_0 + x'u + y'w$ es una isometría de $\mathbb{R}^2$ sobre Π; $S \subset \Pi$ es una elipse, hipérbola, parábola, recta, … si $\varphi^{-1}(S)$ lo es.

Que φ sea isometría: $|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 = |(x_1 - y_1)u + (x_2 - y_2)w|^2 = |x - y|^2$ (u, w ortonormales, G1-002.T1); y es sobre $\Pi = \Pi(P_0, u, w)$ (G1-025.T1).

Teorema G1-032.T4 (la carta no importa)

Si φ y ψ son cartas de un mismo plano Π, $\psi^{-1} \circ \varphi$ es un movimiento de $\mathbb{R}^2$; por tanto que $S \subset \Pi$ sea elipse, hipérbola, parábola, recta, dos rectas o un punto no depende de la carta. Si M es un movimiento de $\mathbb{R}^3$ y φ es carta de Π, $M \circ \varphi$ es carta de $M(\Pi)$.

Demostración. Sean $\varphi(x) = P_0 + x_1 u + x_2 w$ y $\psi(x) = Q_0 + x_1 u' + x_2 w'$, y $n' := u' \times w'$.

1. Por G1-021.T5, (u', w', n') es base ortonormal. La dirección de Π es $\langle u', w' \rangle = \langle u, w \rangle$ (G1-025.T1),

así que $u, w \perp n'$ (G1-021.T4).

2. Para $Y \in \Pi$, $Y - Q_0 \in \langle u', w' \rangle$, y por G1-021.T1, $Y - Q_0 = ((Y - Q_0) \cdot u')u' + ((Y - Q_0) \cdot w')w'$: $\psi^{-1}(Y) = ((Y - Q_0) \cdot u', (Y - Q_0) \cdot w')$.
3. Entonces $\psi^{-1}(\varphi(x)) = x_1 W_1 + x_2 W_2 + b$ con $W_1 := (u \cdot u', u \cdot w')$, $W_2 := (w \cdot u', w \cdot w')$ y $b := ((P_0 - Q_0) \cdot u', (P_0 - Q_0) \cdot w')$.
4. Por G1-021.T1 con la base (u', w', n') y $u \cdot n' = w \cdot n' = 0$: $|W_1|^2 = |u|^2 = 1$, $|W_2|^2 = 1$ y $W_1 \cdot W_2 = u \cdot w = 0$. Así $\psi^{-1} \circ \varphi$ es un movimiento de $\mathbb{R}^2$ (G1-008.D2).
5. Como $\psi^{-1}(S) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(S))$, y los movimientos llevan elipses, hipérbolas y parábolas en cónicas del mismo tipo (G1-028.T1, G1-029.T5), rectas en rectas (G1-008.T4) y puntos en puntos, el tipo no depende de la carta.
6. Si $M(x) = \ell_M(x) + b_M$ es un movimiento de $\mathbb{R}^3$, $M(\varphi(x)) = M(P_0) + x_1 \ell_M(u) + x_2 \ell_M(w)$; $(\ell_M(u), \ell_M(w))$ es ortonormal (G1-022.T4) y genera la dirección de $M(\Pi)$ (G1-022.T4: $M(\Pi) = \Pi(M(P_0), \ell_M(u), \ell_M(w))$). Es una carta de $M(\Pi)$. ■

Teorema G1-032.T3 (secciones del cono)

Sean $\Pi = \{n \cdot X = d\}$ con $n = (n_1, n_2, n_3)$ unitario y $\kappa := n_3^2 - k^2(n_1^2 + n_2^2)$. $\Pi \cap K$ es: si $\kappa > 0$, una elipse (circunferencia $\iff n_1 = n_2 = 0$) cuando $d \neq 0$, y el punto 0 cuando $d = 0$; si $\kappa < 0$, una hipérbola ($d \neq 0$) o dos rectas por el vértice ($d = 0$); si $\kappa = 0$, una parábola ($d \neq 0$) o una recta ($d = 0$).

Idea de la demostración

Una rotación alrededor del eje z (que no cambia el cono) lleva la normal al plano yz. Con una carta explícita, la sección es $x'^2 + \kappa y'^2 + (\text{lineal}) + \text{cte} = 0$, que se clasifica con G1-030.T3.

Demostración. Sea $\rho := \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$; como $|n| = 1$, $\rho^2 + n_3^2 = 1$.

1. *Reducción.* Si $\rho > 0$, sea R la rotación de $\mathbb{R}^2$ con $R((n_1, n_2)/\rho) = e_2$ (G1-011.T2) y $M(x, y, z) := (R(x, y), z)$: sus columnas $(Re_1, 0)$, $(Re_2, 0)$, e_3 son ortonormales, así que M es un movimiento de $\mathbb{R}^3$ (G1-022.D4).
2. M conserva K: R conserva $x^2 + y^2$ (G1-011.T1) y z no cambia. Y si $MX = (x', y', z)$, como R conserva el producto punto, $(n_1, n_2) \cdot (x, y) = \rho\, e_2 \cdot R(x, y) = \rho y'$: $n \cdot X = \rho y' + n_3 z$. Así $M(\Pi) = \Pi' := \{\rho y + n_3 z = d\}$ y $M(\Pi \cap K) = \Pi' \cap K$ (M es biyectiva, G1-022.T4).
3. Si ψ es una carta de Π', $M^{-1} \circ \psi$ es carta de Π (G1-032.T4; M^{-1} es movimiento, G1-022.T4) y

$(M^{-1}\circ\psi)^{-1}(\Pi\cap K)=\psi^{-1}(\Pi'\cap K)$. Por G1-032.T4 basta clasificar $\Pi'\cap K$. (Si $\rho=0$, Π ya es Π'.)

4. *Carta.* $P_0:=d(0,\rho,n_3)$ está en Π' ($d(\rho^2+n_3^2)=d$); $u:=e_1$, $w:=(0,n_3,-\rho)$ son ortonormales y $\perp(0,\rho,n_3)$, así que generan la dirección de Π' (G1-021.T4). La carta es $\psi(x',y')=(x',\ d\rho+n_3y',\ dn_3-\rho y')$.
5. *Ecuación.* $\psi(x',y')\in K\iff x'^2+(d\rho+n_3y')^2-k^2(dn_3-\rho y')^2=0$, es decir

$$x'^2+\kappa y'^2+2d\rho n_3(1+k^2)\,y'+d^2(\rho^2-k^2n_3^2)=0.$$

6. $\kappa\neq0$. Completando el cuadrado en y' (G1-030.T2), con $Y:=y'+d\rho n_3(1+k^2)/\kappa$:

$$x'^2+\kappa Y^2=d^2\,\frac{\rho^2n_3^2(1+k^2)^2-(\rho^2-k^2n_3^2)\kappa}{\kappa}=\frac{d^2k^2}{\kappa},$$

pues $(\rho^2-k^2n_3^2)(n_3^2-k^2\rho^2)-\rho^2n_3^2(1+k^2)^2=-k^2(\rho^2+n_3^2)^2=-k^2$ (desarrollando ambos productos).

7. Por G1-030.T3 ($A=1$, $C=\kappa$, término independiente $K=d^2k^2/\kappa$): si $\kappa>0$, elipse para $d\neq0$ ($K>0$) y el punto $(x',Y)=0$ para $d=0$, que es $\psi(0,0)=P_0=0$, el vértice. Si $\kappa<0$: hipérbola para $d\neq0$ ($K<0$, $AC<0$) y dos rectas que se cortan para $d=0$; como $P_0=0$, pasan por el vértice.
8. $\kappa=0$. Entonces $n_3^2=k^2\rho^2$; si $\rho=0$ sería $n_3=0$ y $|n|=0$: luego $\rho\neq0$ y $n_3\neq0$. La ecuación es $x'^2+2d\rho n_3(1+k^2)y'+\text{cte}=0$: si $d\neq0$ el coeficiente de y' es $\neq0$ y es una parábola (G1-030.T3, caso $C=0$, $E\neq0$); si $d=0$ es $x'^2=0$, la recta $x'=0$, por el vértice.
9. *Circunferencia.* Si $\rho=0$, $\kappa=n_3^2=1$ y no hay término lineal: $x'^2+y'^2=d^2k^2$, circunferencia. Si $\rho>0$, $\kappa=n_3^2-k^2\rho^2<n_3^2\le1$, así que $\kappa\neq1$. Con $r:=|d|k/\sqrt{\kappa}$, el conjunto $x'^2+\kappa Y^2=r^2$ contiene a $(\pm r,0)$ y a $(0,\pm r/\sqrt{\kappa})$. Si fuera una circunferencia $C(O',r')$, O' equidistaría de $(\pm r,0)$ y de $(0,\pm r/\sqrt{\kappa})$, así que estaría en las mediatrices $x=0$ y $y=0$ (G1-004.T3): $O'=0$, y entonces $r=r'=r/\sqrt{\kappa}$, es decir $\kappa=1$, contradicción. **Una elipse con $\kappa\neq1$ no es circunferencia.** Por G1-032.T4 esto no depende de la carta. ■

Ejemplo G1-032.E1

El plano $z=1$ corta $x^2+y^2=z^2$ en una circunferencia; el plano $y=z-1$ (paralelo a una generatriz), en una parábola.

1. $k=1$; $z=1$: $n=e_3$, $d=1$, $\rho=0$, $\kappa=1>0$: circunferencia (G1-032.T3).
2. $y=z-1\iff-y+z=1$; con $n=(0,-1,1)/\sqrt{2}$ y $d=1/\sqrt{2}$: $\kappa=\frac12-\frac12=0$ y $d\neq0$: parábola. La recta $t(0,1,1)$ está en el cono y $(0,-1,1)\cdot(0,1,1)=0$: el plano es paralelo a esa generatriz.

La linterna

Con $k = 1/2$ y la pared de normal $(n_1, 0, n_3)$: $\kappa = n_3^2 - n_1^2/4$. Para $n = (3/5, 0, 4/5)$, $\kappa = 0.55 > 0$: elipse; para $n = (2, 0, 1)/\sqrt{5}$, $\kappa = 0$: parábola (la pared es paralela a la generatriz de dirección $(-1/2, 0, 1)$); si la normal se inclina más, $\kappa < 0$: hipérbola.

Por qué cada hipótesis

⚠ $F \notin \ell$

Si $F \in \ell$, $p = 0$ y $C(e, F, \ell)$ es el punto F ($e < 1$), la perpendicular a ℓ por F ($e = 1$) o dos rectas por F ($e > 1$).

⚠ n **unitario**

$z = 1$ también se escribe $2z = 2$; con $n = (0, 0, 2)$ la fórmula daría $\kappa = 4$, $d = 2$. El signo de κ no cambia, pero las constantes de la prueba (por ejemplo $\rho^2 + n_3^2 = 1$) sí.

⚠ **Cono circular**

En el cono elíptico $x^2 + 4y^2 = z^2$, el plano $z = 1$ da la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$, que no es circunferencia aunque $n = e_3$.

Ejercicios

1. Encuentra la excentricidad y las directrices de $x^2/25 + y^2/9 = 1$.
2. Demuestra que la excentricidad de una hipérbola equilátera ($a = b$) es $\sqrt{2}$.
3. Clasifica la sección de $x^2 + y^2 = z^2$ por el plano $x + 2z = 1$.
4. ¿Para qué inclinaciones de la normal de un plano por el vértice la sección es solo el vértice?
5. Escribe la ecuación polar ⚠ TR de la parábola de foco 0 y directriz $x = -2$.

Respuestas

1. $c = 4$, $e = 4/5$, directrices $x = \pm 25/4$.
2. $c^2 = 2a^2$, $e = c/a = \sqrt{2}$.

3. $n = (1, 0, 2)/\sqrt{5}, \kappa = 4/5 - 1/5 = 3/5 > 0, d \neq 0$: elipse.
4. Con $d = 0$: si $\kappa > 0$, es decir $n_3^2 > k^2(n_1^2 + n_2^2)$.
5. $e = 1, p = 2$: $r = 2/(1 - \cos\theta), \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

G1-033 · Tangente a una cónica y propiedad focal

Motivación

> **El billar elíptico**
> Una mesa de billar tiene borde elíptico $x^2/25+y^2/9=1$ (en decímetros) y una marca en el foco $F_1=(-4,0)$. Una bola que sale de la marca y choca en $P=(3,12/5)$ rebota y pasa por el otro foco $F_2=(4,0)$; y lo mismo pasa choque donde choque. Para verlo hace falta la recta del borde en P —la tangente— y su perpendicular, la normal. Ninguna de las dos necesita derivadas.
> Dónde falla la analogía: «ángulo de incidencia = ángulo de reflexión» es física (una bola real tiene efecto y la banda tiene grosor); el teorema es una igualdad de cosenos.

Parte 1 · La tangente por raíz doble

Teorema G1-033.T1 (desarrollo en una recta)
Para f cuadrático (G1-031.D1, con $L:=(D,E)$), $P_0\in\mathbb{R}^2$ y $v\in\mathbb{R}^2$: $f(P_0+tv)=f(P_0)+t\,G_f(P_0)\cdot v+t^2Q(v)$, donde $G_f(P_0):=2MP_0+L$.

Demostración. $f(X)=Q(X)+L\cdot X+F$ con $Q(X)=X\cdot MX$ (G1-031.D1).

1. Por G1-002.T1 y la simetría de M, $Q(P_0+tv)=P_0\cdot MP_0+t(P_0\cdot Mv+v\cdot MP_0)+t^2v\cdot Mv=Q(P_0)+2t\,MP_0\cdot v+t^2Q(v)$.
2. $L\cdot(P_0+tv)=L\cdot P_0+t\,L\cdot v$.
3. Sumando con F: $f(P_0+tv)=f(P_0)+t(2MP_0+L)\cdot v+t^2Q(v)$. ■

Definición G1-033.D1 (tangente por raíz doble)

Sea P_0 con $f(P_0) = 0$. La recta $L(P_0, v)$ es **tangente** a $\{f = 0\}$ en P_0 si $t = 0$ es raíz doble de $t \mapsto f(P_0 + tv)$, es decir, $G_f(P_0) \cdot v = 0$. P_0 es **singular** si $G_f(P_0) = 0$.

⚠ Rectas contenidas en cónicas degeneradas

Si $Q(v) = 0$ y $G_f(P_0) \cdot v = 0$, entonces $f(P_0 + tv) \equiv 0$: la recta está contenida en $\{f = 0\}$ y D1 la llama tangente. Eso solo ocurre en cónicas degeneradas (por ejemplo, en el par de rectas $x^2 - y^2 = 0$, cada recta es «tangente» en sus puntos distintos de 0); en elipses, hipérbolas y parábolas no pasa (G1-033.T3).

Teorema G1-033.T2 (ecuación de la tangente: polarización)

Si $f(P_0) = 0$ y $G_f(P_0) \neq 0$, hay una única tangente en P_0: $G_f(P_0) \cdot (X - P_0) = 0$, equivalente a $X \cdot MP_0 + L \cdot (X + P_0)/2 + F = 0$. Para las canónicas: $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1, xx_0/a^2 - yy_0/b^2 = 1$ y $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

Idea de la demostración

La condición de raíz doble es lineal en v: las direcciones tangentes son los múltiplos de $G^\perp$, y la tangente es la recta por P_0 normal a G.

Demostración. Sea $G := G_f(P_0) \neq 0$.

1. Por G1-033.D1, $L(P_0, v)$ es tangente $\iff G \cdot v = 0 \iff v = \lambda G^\perp$ con $\lambda \neq 0$ (G1-003.T2; $v \neq 0$ por ser director).
2. Todas esas rectas son $L(P_0, G^\perp)$ (G1-001.T4 (a)), que es $N(P_0, G) = \{G \cdot (X - P_0) = 0\}$ (G1-023.T1).
3. *Forma polar.* Como $f(P_0) = 0$, $Q(P_0) = -L \cdot P_0 - F$. Entonces

$$\begin{aligned} G \cdot (X - P_0) &= 2X \cdot MP_0 + L \cdot X - 2Q(P_0) - L \cdot P_0 \\ &= 2X \cdot MP_0 + L \cdot X + L \cdot P_0 + 2F = 2\Big[X \cdot MP_0 + L \cdot \frac{X + P_0}{2} + F\Big]. \end{aligned}$$

4. *Elipse:* $f = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$, $M = \operatorname{diag}(1/a^2, 1/b^2)$, $L = 0$, $F = -1$: la tangente es $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$. *Hipérbola:* igual con $-1/b^2$. *Parábola:* $f = y^2 - 4px$, $M = \operatorname{diag}(0, 1)$, $L = (-4p, 0)$, $F = 0$: $yy_0 - 2p(x + x_0) = 0$. ■

Teorema G1-033.T3 (la tangente es geométrica)

Para la ecuación canónica de una elipse, hipérbola o parábola, ningún punto es singular, y $L(P_0, v)$ es tangente en $P_0 \iff$ corta a la cónica solo en P_0 y (hipérbola) no es paralela a una asíntota, (parábola) no es paralela al eje.

Demostración. Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ en la cónica y $G := G_f(P_0)$; por G1-033.T1, los cortes de $L(P_0, v)$ son los t con $t(G \cdot v + tQ(v)) = 0$.

1. *No singulares.* Elipse e hipérbola: $G = (2x_0/a^2, \pm 2y_0/b^2)$ es 0 solo si $P_0 = 0$, que no está en ellas. Parábola: $G = (-4p, 2y_0) \neq 0$.
2. *Direcciones con $Q(v) = 0$.* Elipse: $Q(v) = v_1^2/a^2 + v_2^2/b^2 > 0$ si $v \neq 0$. Hipérbola: $Q(v) = 0 \iff v_1^2/a^2 = v_2^2/b^2 \iff v \parallel (a, \pm b)$, los directores de las asíntotas (G1-029.D1). Parábola: $Q(v) = v_2^2 = 0 \iff v \parallel e_1$, el eje.
3. *En esas direcciones, $G \cdot v \neq 0$.* Hipérbola con $v = (a, \varepsilon b)$: $G \cdot v = 2x_0/a - 2\varepsilon y_0/b$; si fuera 0, $x_0/a = \varepsilon y_0/b$ y $x_0^2/a^2 - y_0^2/b^2 = 0 \neq 1$. Parábola: $G \cdot e_1 = -4p \neq 0$. Así la recta corta solo en P_0 ($t = 0$) y **no** es tangente.
4. ($\Rightarrow$) Si $L(P_0, v)$ es tangente, $G \cdot v = 0$, así que (paso 3) v no es asintótica ni del eje y $Q(v) \neq 0$. Los cortes son $t^2 Q(v) = 0$: solo $t = 0$.
5. ($\Leftarrow$) Si la recta corta solo en P_0 y no es asintótica ni del eje, $Q(v) \neq 0$ (paso 2), y las raíces son $t = 0$ y $t = -G \cdot v/Q(v)$; como solo hay una, $G \cdot v = 0$: es tangente. ■

Corolario G1-033.C1 (tangente a cualquier cónica)

Para toda elipse, hipérbola o parábola C, con $f := f_0 \circ m^{-1}$ (f_0 la ecuación canónica y m el movimiento natural), la tangente de G1-033.D1 en cada $P_0 \in C$ existe, es única y tiene la caracterización geométrica de G1-033.T3 (con las asíntotas y el eje de C de G1-029.D2); por eso no depende del sistema natural elegido, y los movimientos llevan tangentes en tangentes.

Demostración. Sean $C = m(C_0)$ (G1-029.T5), ℓ' la parte lineal de m^{-1} y $Q_0 := m^{-1}(P_0)$.

1. f es cuadrático (G1-030.T1) y $\{f = 0\} = m(\{f_0 = 0\}) = C$.
2. $m^{-1}(P_0 + tv) = Q_0 + t\ell'(v)$ (G1-008.T4), así que $f(P_0 + tv) = f_0(Q_0 + t\ell'(v))$ para todo t. Los dos lados son polinomios de grado ≤ 2 en t (G1-033.T1); por G1-020.T7 sus coeficientes coinciden: $G_f(P_0) \cdot v = G_{f_0}(Q_0) \cdot \ell'(v)$.

3. Así $L(P_0, v)$ es tangente a $C \iff L(Q_0, \ell'(v)) = m^{-1}(L(P_0, v))$ lo es a C_0. Por G1-033.T2 y T3 hay una única tangente a C_0 en Q_0, luego una única tangente a C en P_0, su imagen por m.
4. *Caracterización.* m es biyectiva: $L(P_0, v)$ corta a C solo en $P_0 \iff m^{-1}(L(P_0, v))$ corta a C_0 solo en Q_0; y es paralela a una asíntota (al eje) de $C \iff$ su imagen lo es a una de C_0, porque las asíntotas y el eje de C son, por definición, las imágenes por m de los de C_0 (G1-029.D2). Por G1-033.T3, la tangente a C es la única recta por P_0 que corta a C solo ahí y no es asintótica (o del eje).
5. *No depende de m.* La caracterización del paso 4 solo usa C, sus asíntotas y su eje; y estos no dependen del sistema natural (G1-029.D2).
6. *Movimientos.* Si M es un movimiento, $M(C)$ es una cónica del mismo tipo (G1-028.T1) y $M \circ m$ es su sistema natural o $m' \circ S$ con $S(x, y) := (x, -y)$ (si M invierte la orientación, G1-011.T5). S conserva C_0, sus asíntotas (las intercambia) y el eje x; así M lleva asíntotas y eje de C en los de $M(C)$, y por el paso 4 lleva la tangente en P_0 en la tangente en $M(P_0)$. ■

> ⚠ **Nota**
>
> Por G1-035.C1 (posterior) la ecuación de C es única salvo factor, así que la tangente tampoco depende de la ecuación elegida. Ninguna prueba usa esa nota.

Corolario G1-033.C2 (coincide con la derivada)

Sea f cuadrático, I un intervalo abierto, $h : I \to \mathbb{R}$ con $f(x, h(x)) = 0$ en I, h derivable en $x_0 \in I$ (C1-027.D1) y $G_f(P_0) \neq 0$ con $P_0 = (x_0, h(x_0))$. Entonces la tangente de G1-033.T2 es $y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$.

Demostración. Sea $G = (G_1, G_2) := G_f(P_0)$ y $k(t) := h(x_0 + t) - h(x_0)$ para $t \neq 0$ con $x_0 + t \in I$.

1. $P_0 + (t, k(t)) = (x_0 + t, h(x_0 + t))$ está en $\{f = 0\}$, y por G1-033.T1 con $v = (t, k)$ (y $Q(sv) = s^2 Q(v)$): $0 = G_1 t + G_2 k + At^2 + Btk + Ck^2$.
2. Dividiendo entre $t \neq 0$: $0 = G_1 + G_2 \dfrac{k}{t} + At + Bk + Ck\dfrac{k}{t}$.
3. Cuando $t \to 0$: $k(t)/t \to h'(x_0)$ (C1-027.D1, C1-017.T2); $k(t) \to 0$, porque h es continua en x_0 (C1-028.T1, C1-022.D1, C1-022.T0); y $t \to 0$ (C1-017.E1).
4. Por el álgebra de límites (C1-018.T1), el lado derecho tiende a $G_1 + G_2 h'(x_0)$. El lado izquierdo es la constante 0 (C1-017.E1), y por la unicidad del límite (C1-017.T1), $G_1 + G_2 h'(x_0) = 0$.
5. $G_2 \neq 0$: si no, $G_1 = 0$ y $G = 0$, contra la hipótesis.
6. La tangente $G_1(x - x_0) + G_2(y - h(x_0)) = 0$ es $y - h(x_0) = -(G_1/G_2)(x - x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$. ■

⚠ Regla de citas

Cálculo I es del mismo semestre que G1: los límites y la derivada se citan por id (TEMARIO, decisión 3). Ninguna pieza de G1 usa G1-033.C2; es una comprobación de que la definición algebraica es la de siempre.

Parte 2 · Propiedad focal

Teorema G1-033.T4 (propiedad focal de la elipse)

En P de la elipse canónica, con $r_i := |P - F_i|$: $(F_1 - P)/r_1 + (F_2 - P)/r_2 = -(2ab^2/(r_1 r_2))(x_0/a^2, y_0/b^2)$: la normal en P forma ángulos iguales con $F_1 - P$ y $F_2 - P$ (es la bisectriz del ángulo F_1PF_2 cuando F_1PF_2 es triángulo; un rayo que sale de un foco se refleja hacia el otro).

Idea de la demostración

Con los radios focales sin raíces de G1-029.T1 se calcula la suma de los unitarios hacia los focos: es un múltiplo negativo del vector normal. Esa suma forma ángulos iguales con los dos radios.

Demostración. Sean $P = (x_0, y_0)$, $F_{1,2} = (\mp c, 0)$, $e_i := (F_i - P)/r_i$ y $w := e_1 + e_2$.

1. Por G1-029.T1, $r_1 = a + cx_0/a$, $r_2 = a - cx_0/a$; así $r_1 + r_2 = 2a$ y $r_1 - r_2 = 2cx_0/a$.
2. $r_2(F_1 - P) + r_1(F_2 - P) = \big(c(r_1 - r_2) - x_0(r_1 + r_2),\ -y_0(r_1 + r_2)\big)$ (G1-002.T1).
3. Con el paso 1 y $c^2 - a^2 = -b^2$:

$$\Big(\frac{2c^2x_0}{a} - 2ax_0,\ -2ay_0\Big) = \Big(-\frac{2b^2x_0}{a},\ -2ay_0\Big) = -2ab^2\Big(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\Big).$$

4. Dividiendo entre $r_1r_2 > 0$: $w = -\dfrac{2ab^2}{r_1r_2}\Big(\dfrac{x_0}{a^2}, \dfrac{y_0}{b^2}\Big) = -\dfrac{ab^2}{r_1r_2}G_f(P)$, con $G_f(P) \neq 0$ normal a la tangente (G1-033.T2). En particular $w \neq 0$ y la recta $L(P, w)$ es la normal.
5. *Bisectriz.* $|e_1| = |e_2| = 1$ y $w \cdot e_1 = 1 + e_1 \cdot e_2 = w \cdot e_2$ (G1-002.T1), así que $\cos\angle(w, e_1) = \cos\angle(w, e_2)$ (G1-006.D1): la normal forma ángulos iguales con $F_1 - P$ y $F_2 - P$. Cuando F_1PF_2 es un triángulo, w es la dirección w_P de la bisectriz de G1-010.T5. ■

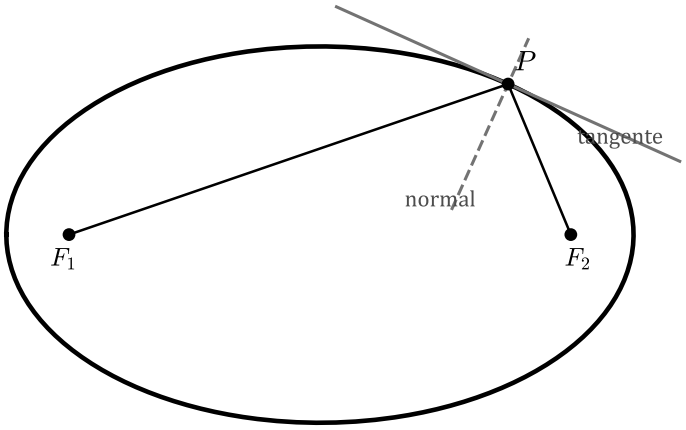


Figura 25: El billar elíptico: en P, la normal biseca el ángulo entre los radios focales.

Teorema G1-033.T5 (propiedad focal de la hipérbola)

En P de la hipérbola canónica, $G_f(P) \cdot \big((F_1 - P)/r_1 + (F_2 - P)/r_2\big) = 0$: la tangente en P forma ángulos iguales con $F_1 - P$ y $F_2 - P$ (es la bisectriz del ángulo F_1PF_2 cuando F_1PF_2 es triángulo).

Demostración. Sean e_i, w como antes y $G := G_f(P) = (2x_0/a^2, -2y_0/b^2)$.

1. *Rama $x_0 \geq a$.* Por G1-029.T2, $r_1 = a + cx_0/a, r_2 = cx_0/a - a$; $r_1 - r_2 = 2a, r_1 + r_2 = 2cx_0/a$.
2. $N := r_2(F_1 - P) + r_1(F_2 - P) = \big(2ac - 2cx_0^2/a,\ -2cx_0y_0/a\big)$.
3. $$G \cdot N = \frac{2x_0}{a^2} \cdot \frac{2c(a^2 - x_0^2)}{a} + \frac{2y_0}{b^2} \cdot \frac{2cx_0y_0}{a} = \frac{4cx_0}{a}\Big[1 - \Big(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\Big)\Big] = 0.$$
4. *Rama $x_0 \leq -a$.* $r_1 = -a - cx_0/a, r_2 = a - cx_0/a$: $r_1 - r_2 = -2a, r_1 + r_2 = -2cx_0/a$, y N es el opuesto del del paso 2; $G \cdot N = 0$ igual. Dividiendo entre r_1r_2: $G \cdot w = 0$.
5. *Bisectriz.* Si $y_0 \neq 0$, F_1, P, F_2 no están alineados y $e_1 \neq -e_2$, así que $w \neq 0$; $w \perp G$ es director de la tangente (G1-003.T2, G1-033.T2), y como en G1-033.T4, $\cos\angle(w, e_1) = \cos\angle(w, e_2)$.
6. Si $y_0 = 0$, $P = (\pm a, 0)$ está entre los focos, $e_2 = -e_1$ (ángulo llano) y la tangente $x = \pm a$ es perpendicular a e_1: forma ángulos iguales (rectos) con e_1 y e_2. ■

Teorema G1-033.T6 (propiedad focal de la parábola)

En P de $y^2 = 4px$, $\cos\angle(F-P, G_f(P)) = \cos\angle(e_1, G_f(P))$: la normal forma ángulos iguales con el radio focal y con el eje (los rayos paralelos al eje se reflejan hacia el foco).

Demostración. Sean $P = (x_0, y_0)$, $F = (p, 0)$ y $G := G_f(P) = (-4p, 2y_0)$ (G1-033.T2).

1. $P \neq F$ (F no está en la parábola: $|F-F| = 0 \neq 2p = d(F,\ell)$), y $|F-P| = d(P,\ell) = x_0 + p$ (G1-029.T4, $x_0 \geq 0$).
2. $G \cdot (F-P) = -4p(p-x_0) - 2y_0^2 = -4p^2 + 4px_0 - 8px_0 = -4p(p+x_0)$, usando $y_0^2 = 4px_0$.
3. Así $\cos\angle(F-P, G) = \dfrac{-4p(p+x_0)}{(p+x_0)|G|} = -\dfrac{4p}{|G|} = \dfrac{G\cdot e_1}{|G|} = \cos\angle(e_1, G)$ (G1-006.D1). ■

Ejemplo G1-033.E1 (billar elíptico)

En $x^2/25 + y^2/9 = 1$, la tangente en $(3, 12/5)$ es $3x/25 + 4y/15 = 1$, y la normal en ese punto biseca el ángulo entre los radios focales a $(\pm 4, 0)$ (de longitudes $37/5$ y $13/5$).

1. $9/25 + (144/25)/9 = 9/25 + 16/25 = 1$: el punto está en la elipse. Por G1-033.T2, la tangente es $3x/25 + (12/5)y/9 = 1$, es decir $3x/25 + 4y/15 = 1$.
2. $c = 4$; $r_1 = 5 + 4\cdot 3/5 = 37/5$ y $r_2 = 5 - 12/5 = 13/5$ (G1-029.T1).
3. Por G1-033.T4, la normal biseca el ángulo F_1PF_2.

Por qué cada hipótesis

⚠ $G_f(P_0) \neq 0$

Para $f = x^2 - y^2$ en $P_0 = 0$, $G = 0$ y toda recta por 0 cumple la condición de raíz doble: el punto es singular y no hay «la» tangente.

⚠ Un solo corte no basta

La recta por $(3, 0)$ con dirección $(3, 4)$ corta a $x^2/9 - y^2/16 = 1$ solo en $(3, 0)$ y no es tangente (la tangente ahí es $x = 3$): es paralela a una asíntota.

⚠ Elipse: la normal; hipérbola: la tangente

En la elipse la bisectriz de F_1PF_2 es la normal; en la hipérbola, la tangente. Confundirlas invierte la propiedad.

Ejercicios

1. Encuentra la tangente a $x^2/9 - y^2/16 = 1$ en $(5, 16/3)$.
2. Encuentra la tangente a $y^2 = 8x$ en $(2, 4)$ y comprueba que corta al eje x en $(-2, 0)$.
3. Demuestra que la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en P_0 es $\perp$ al radio (compárala con G1-012.T6).
4. Comprueba G1-033.C2 para la rama superior de $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4)$.
5. ¿Por qué un rayo paralelo al eje de una antena parabólica llega al foco? Explica con G1-033.T6.

Respuestas

1. $5x/9 - (16/3)y/16 = 1$, es decir $5x/9 - y/3 = 1$.
2. $4y = 4(x + 2)$, $y = x + 2$; en $y = 0$, $x = -2$.
3. $G = 2P_0$; la tangente $P_0 \cdot (X - P_0) = 0$ es $\perp$ a $P_0 - O$.
4. $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $h'(3) = -3/4$; la tangente $3x + 4y = 25$ tiene pendiente $-3/4$.
5. La normal forma ángulos iguales con e_1 y con $F - P$: un rayo que llega en la dirección $-e_1$ se refleja en la dirección de $F - P$.

G1-034 · Cónicas parametrizadas

Motivación

> **La cortadora láser**
> Una cortadora láser solo sabe sumar, multiplicar y dividir, y debe recortar una placa con borde $x^2/25 + y^2/9 = 1$ (en cm). La fórmula $t \mapsto (5(1-t^2)/(1+t^2),\ 6t/(1+t^2))$ le basta: $t = 0$ da $(5, 0)$, $t = 1$ da $(0, 3)$, $t = 1/2$ da $(3, 12/5)$, y recorre todo el borde salvo el punto $(-5, 0)$. No hace falta ni seno ni coseno.
> Dónde falla la analogía: una máquina real avanza en pasos finitos del parámetro.

Resultados

Teorema G1-034.T1 (elipse racional)

$t \mapsto (a(1-t^2)/(1+t^2),\ 2bt/(1+t^2))$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ sin $(-a, 0)$: la recta por $(-a, 0)$ con director (a, bt) corta otra vez en ese punto.

> **Idea de la demostración**
> La elipse es la circunferencia unitaria estirada por $(x, y) \mapsto (ax, by)$; basta componer con G1-015.T2.

Demostración. Sea $\varphi(t) := ((1-t^2)/(1+t^2), 2t/(1+t^2))$.

1. Por G1-015.T2, φ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $C(0,1) \setminus \{(-1, 0)\}$.
2. $A(x, y) := (ax, by)$ es biyectiva, con inversa $(X, Y) \mapsto (X/a, Y/b)$ (C1-011.T1), y $(x, y) \in C(0,1) \iff x^2 + y^2 = 1 \iff (ax)^2/a^2 + (by)^2/b^2 = 1 \iff A(x, y)$ está en la elipse (G1-005.T2, G1-029.T1).
3. $A(-1, 0) = (-a, 0)$, así que $A \circ \varphi$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre la elipse sin $(-a, 0)$ (composición

de biyecciones, C1-011.T1), y $A(\varphi(t))$ es la fórmula del enunciado.

4. $A(\varphi(t)) - (-a,0) = \left(\frac{a(1-t^2)+a(1+t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2}\right) = \frac{2}{1+t^2}(a,bt)$: el punto está en $L((-a,0),(a,bt))$ (G1-001.D3).
5. Un punto $(-a+sa, sbt)$ de esa recta está en la elipse $\Leftrightarrow (s-1)^2+s^2t^2=1 \Leftrightarrow s\,(s(1+t^2)-2)=0$: $s=0$ o $s=2/(1+t^2)$ (C1-002.T5, C1-003.T5). El segundo corte es justo $A(\varphi(t))$. ■

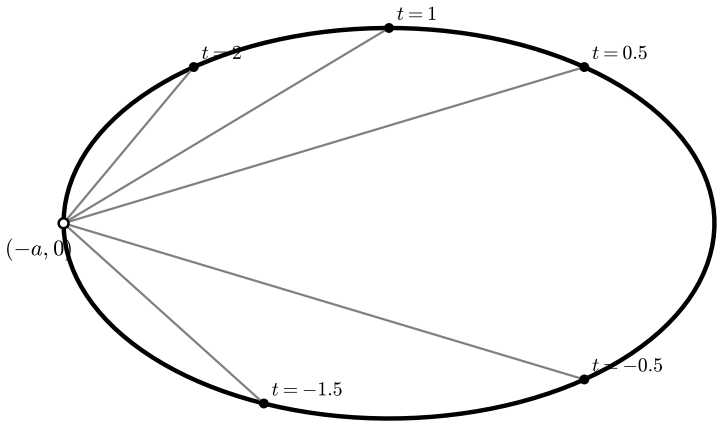


Figura 26: Rectas por $(-a,0)$ con director (a,bt): cada una corta la elipse en un segundo punto.

Teorema G1-034.T2 (hipérbola racional)

$t \mapsto (a(1+t^2)/(1-t^2),\ 2bt/(1-t^2))$ es una biyección de $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ sin $(-a,0)$, con inversa $(x,y) \mapsto ay/(b(x+a))$.

Demostración. Sean $\psi(t)$ la fórmula y $g(x,y) := ay/(b(x+a))$.

1. *Está en la hipérbola.* $\frac{(1+t^2)^2-4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = 1$.
2. *No es* $(-a,0)$*:* $a(1+t^2)/(1-t^2) = -a$ daría $1+t^2 = -(1-t^2)$, es decir $1=-1$.
3. *Dominio de g.* En la hipérbola, $x=-a$ obliga $y^2 = b^2(1-1) = 0$; así todo punto distinto de $(-a,0)$ tiene $x \neq -a$ y g está definida.
4. $g \circ \psi = \mathrm{id}$. Como $a(1+t^2)+a(1-t^2) = 2a$, $g(\psi(t)) = \frac{a\cdot 2bt/(1-t^2)}{b\cdot 2a/(1-t^2)} = t$.
5. $\psi \circ g = \mathrm{id}$. Sea (x,y) en la hipérbola, distinto de $(-a,0)$, y $t := g(x,y)$. Si $t=\pm1$, $ay = \pm b(x+a)$, y sustituyendo, $x^2/a^2 - (x+a)^2/a^2 = 1$, es decir $x=-a$: excluido. Así $t \neq \pm1$.
6. $(x,y)-(-a,0) = (x+a,y) = \frac{x+a}{a}(a,bt)$ (pues $bt(x+a)/a = y$): (x,y) está en $L((-a,0),(a,bt))$ con parámetro $s' = (x+a)/a \neq 0$.

7. Un punto $(-a+sa, sbt)$ de esa recta está en la hipérbola $\iff (s-1)^2 - s^2t^2 = 1 \iff s(s(1-t^2)-2) = 0$. Como $s' \neq 0$, $s' = 2/(1-t^2)$, y el punto es $\psi(t)$. Por C1-011.T1, ψ es biyectiva con inversa g. ■

Teorema G1-034.T3 (rama de hipérbola)

$s \mapsto (a(s+1/s)/2,\ b(s-1/s)/2)$ es una biyección de $(0,\infty)$ sobre la rama $x \geq a$, con inversa $(x,y) \mapsto x/a + y/b$; en $(-\infty, 0)$, sobre la rama $x \leq -a$.

Demostración.

1. *Está en la hipérbola.* $\frac{1}{4}(s+1/s)^2 - \frac{1}{4}(s-1/s)^2 = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$.
2. *Rama.* Si $s > 0$: $(s+1/s)/2 \geq 1 \iff s^2+1 \geq 2s \iff (s-1)^2 \geq 0$ (C1-003.T7, C1-003.T9), así que $x \geq a$. Si $s < 0$, con $-s > 0$: $(s+1/s)/2 = -((-s)+1/(-s))/2 \leq -1$ y $x \leq -a$.
3. *Inversa a la izquierda.* $x/a + y/b = (s+1/s)/2 + (s-1/s)/2 = s$.
4. *Sobre.* Sea (x,y) en la rama $x \geq a$ y $s := x/a + y/b$. Como $(x/a+y/b)(x/a-y/b) = 1$, $s \neq 0$ y $1/s = x/a - y/b$. Además $|y/b| = \sqrt{x^2/a^2 - 1} < x/a$ (G1-002.T2), así que $s > 0$. Entonces $(s+1/s)/2 = x/a$ y $(s-1/s)/2 = y/b$: el punto es la imagen de s.
5. La rama $x \leq -a$ es igual, con $s < 0$ (ahí $|y/b| < -x/a$ da $s < 0$). Por C1-011.T1 son biyecciones. ■

Teorema G1-034.T4 (parábola)

$t \mapsto (pt^2, 2pt)$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $y^2 = 4px$, con inversa $(x,y) \mapsto y/(2p)$.

Demostración.

1. $(2pt)^2 = 4p^2t^2 = 4p(pt^2)$: está en la parábola (G1-029.T4).
2. $y/(2p)$ aplicado a $(pt^2, 2pt)$ da t.
3. Si $y^2 = 4px$ y $t := y/(2p)$: $pt^2 = y^2/(4p) = x$ y $2pt = y$. Por C1-011.T1, es biyectiva. ■

⚠⚠ Cálculo II · se cita

Las dos piezas siguientes usan el bloque trigonométrico de `TEOREMAS-G1.md`, demostrado en C2-014: **TR.1-TR.3** (seno y coseno, $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$, $\cos > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$) y **TR.4** (tan = sen / cos, biyectiva de $(-\pi/2, \pi/2)$ sobre $\mathbb{R}$), además de G1-013.T5 (ángulo doble), que se de-

muestra con ellos.

Teorema G1-034.T5 ⚠ TR (elipse trigonométrica)

$t \mapsto (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$ es una biyección de $(-\pi, \pi]$ sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Demostración. Por G1-015.T3 ⚠ TR, la traza de $t \mapsto (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$ es $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ (pues $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t = 1$, TR.2) y la restricción a $(-\pi, \pi]$ es biyectiva; por G1-029.T1 (con $a \geq b$, o con los ejes intercambiados) ese conjunto es la elipse. ■

Ejemplo G1-034.E1 ⚠ TR

Con $t = \tan(\theta/2)$ ($\theta \in (-\pi, \pi)$), $((1 - t^2)/(1 + t^2), 2t/(1 + t^2)) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$: las dos parametrizaciones de la circunferencia se corresponden.

1. $\theta/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$, así que $\cos(\theta/2) > 0$ (TR.3 y paridad, TR.1) y t está definido (TR.4).
2. Multiplicando numerador y denominador por $\cos^2(\theta/2)$ y usando $\cos^2 + \mathrm{sen}^2 = 1$ (TR.2):

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta, \qquad \frac{2t}{1 + t^2} = 2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{sen}\,\theta$$

(G1-013.T5). Así la parametrización racional de G1-015.T2 recorre la circunferencia como θ, salvo $\theta = \pi$, que corresponde al punto excluido $(-1, 0)$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El punto excluido

Ningún t da $(-a, 0)$ en G1-034.T1: $1 - t^2 = -(1 + t^2)$ es imposible. Es el punto desde el que se trazan las rectas.

⚠ $t \neq \pm 1$ en la hipérbola

Con $t = \pm 1$ la recta por $(-a, 0)$ tiene director $(a, \pm b)$, paralelo a una asíntota: no vuelve a cortar.

Ejercicios

1. Encuentra el parámetro t de G1-034.T1 que da $(4, 9/5)$ en $x^2/25 + y^2/9 = 1$.
2. Usa G1-034.T1 con $t = p/q$ para producir tres puntos de coordenadas racionales de $x^2/4 + y^2 = 1$.
3. Parametriza la rama $x \geq 3$ de $x^2/9 - y^2/16 = 1$ y encuentra el s de $(5, 16/3)$.
4. Demuestra que $t \mapsto (t, t^2)$ también es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $y = x^2$ y compárala con G1-034.T4.
5. ⚠ TR. ¿Qué valor de θ corresponde a $t = 1$ en G1-034.E1?

Respuestas

1. Por la inversa de G1-015.T2 con $(x/a, y/b) = (4/5, 3/5)$: $t = (3/5)/(1 + 4/5) = 1/3$.
2. $t = 0, 1, 1/2$: $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(6/5, 4/5)$.
3. $s = x/3 + y/4 = 5/3 + 4/3 = 3$.
4. Inversa $(x, y) \mapsto x$; es la parábola $x^2 = y$ (eje vertical), un movimiento de una canónica.
5. $\tan(\theta/2) = 1, \theta = \pi/2$: el punto $(0, 1)$.

G1-035 · Familias de cónicas

Motivación

> **Dos faros y un cometa**
> Un barco recibe señales de dos faros en $(\pm 5, 0)$ (km). Con el eco mide la suma de sus distancias a los faros, y con la diferencia de tiempos de llegada, la diferencia. Si está en $(3, 4)$, la suma lo pone en la elipse $x^2/45 + y^2/20 = 1$ y la diferencia en la hipérbola $x^2/5 - y^2/20 = 1$; las dos tienen los focos en los faros y se cortan en ángulo recto. Y un astrónomo que anota cinco posiciones de un cometa, sin tres alineadas, conoce ya su órbita completa: por cinco puntos así pasa una sola cónica.
> Dónde falla la analogía: las mediciones reales tienen error, la Tierra es curva y una órbita real no es exactamente plana.

Parte 1 · La familia confocal

Definición G1-035.D1 (familia confocal)

Para $c > 0$ y $\lambda \in (0, c^2) \cup (c^2, \infty)$: $C_\lambda := \{x^2/\lambda + y^2/(\lambda - c^2) = 1\}$; es una elipse si $\lambda > c^2$ y una hipérbola si $0 < \lambda < c^2$, en ambos casos de focos $(\pm c, 0)$.

En efecto, si $\lambda > c^2$, es la elipse canónica con $a^2 = \lambda$, $b^2 = \lambda - c^2$ y $a^2 - b^2 = c^2$ (G1-029.T1); si $0 < \lambda < c^2$, es $x^2/\lambda - y^2/(c^2 - \lambda) = 1$, la hipérbola canónica con $a^2 = \lambda < c^2$ y $a^2 + b^2 = c^2$ (G1-029.T2).

Teorema G1-035.T1 (por cada punto pasan una elipse y una hipérbola)

Si $x_0 y_0 \neq 0$, existen exactamente dos λ con $(x_0, y_0) \in C_\lambda$: uno en $(0, c^2)$ y otro en (c^2, ∞).

Demostración.

1. Para $\lambda \notin \{0, c^2\}$, multiplicando por $\lambda(\lambda - c^2) \neq 0$ (K8): $(x_0, y_0) \in C_\lambda \iff g(\lambda) = 0$, con

$$g(\lambda) := x_0^2(\lambda - c^2) + y_0^2\lambda - \lambda(\lambda - c^2) = -\lambda^2 + (x_0^2 + y_0^2 + c^2)\lambda - x_0^2c^2.$$

2. $g(0) = -x_0^2c^2 < 0$ y $g(c^2) = y_0^2c^2 > 0$ (C1-003.T5, pues $x_0, y_0 \neq 0$).
3. Por G1-005.T1, $-g(\lambda) = (\lambda - h)^2 - \Delta/4$ con h y Δ del polinomio; como $g(c^2) > 0, \Delta > 0$, y g tiene dos raíces $\lambda_1 < \lambda_2$ con $g(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.
4. $g(c^2) > 0$ da $(c^2 - \lambda_1)(c^2 - \lambda_2) < 0$: $\lambda_1 < c^2 < \lambda_2$ (C1-003.T4).
5. $g(0) = -\lambda_1\lambda_2 < 0$ da $\lambda_1\lambda_2 > 0$, y como $\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0$ (C1-003.T9).
6. Así $\lambda_1 \in (0, c^2), \lambda_2 \in (c^2, \infty)$, y por el paso 1 son los únicos λ admisibles con $(x_0, y_0) \in C_\lambda$. ■

Teorema G1-035.T2 (se cortan en ángulo recto)

Si $x_0y_0 \neq 0$ y $\lambda_1 < c^2 < \lambda_2$ son los de G1-035.T1, las tangentes a C_{λ_1} y a C_{λ_2} en (x_0, y_0) son perpendiculares.

Idea de la demostración

Al restar las ecuaciones de las dos cónicas en el punto común queda $(\lambda_2 - \lambda_1)$ por el producto punto de las normales.

Demostración.

1. C_{λ_i} está en forma canónica; por G1-033.T2 (y G1-033.C1) su tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ tiene normal $G_i = 2(x_0/\lambda_i,\ y_0/(\lambda_i - c^2)) \neq 0$.
2. Como P_0 está en las dos:

$$\frac{x_0^2}{\lambda_1} + \frac{y_0^2}{\lambda_1 - c^2} = 1 = \frac{x_0^2}{\lambda_2} + \frac{y_0^2}{\lambda_2 - c^2}.$$

3. Restando, con $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$ (K8, K9) y lo mismo para $\lambda_i - c^2$:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\Big[\frac{x_0^2}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{y_0^2}{(\lambda_1 - c^2)(\lambda_2 - c^2)}\Big] = 0.$$

4. Como $\lambda_2 \neq \lambda_1$, el corchete es 0, y es $G_1 \cdot G_2/4$.
5. Normales ortogonales $\iff$ tangentes perpendiculares (G1-023.T2). ■

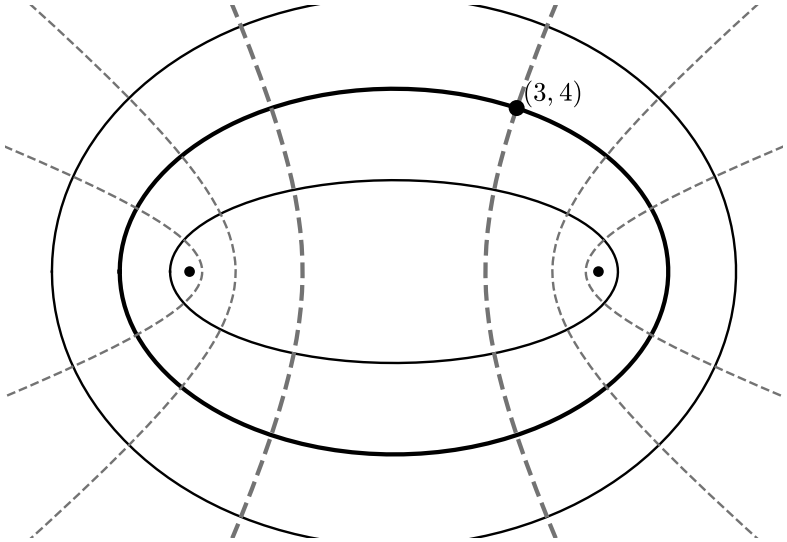


Figura 27: La familia confocal de focos $(\pm 5, 0)$; por $(3, 4)$ pasan $x^2/45 + y^2/20 = 1$ y $x^2/5 - y^2/20 = 1$.

Parte 2 · Haces y cinco puntos

Definición G1-035.D2 (haz)

Para f, g cuadráticos, el **haz** que generan es $\{\lambda f + \mu g : (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}$. Una **cónica por** $P_1, \ldots, P_k$ es el lugar de un f cuadrático no nulo (como vector de $\mathbb{R}^6$) que se anula en ellos.

Teorema G1-035.T3 (un cuadrático que se anula en una recta se factoriza)

Si f es cuadrático y se anula en la recta $\{ax + by = k\}$, entonces $f = (ax + by - k) \cdot g$ con g de grado ≤ 1. Si se anula en tres puntos distintos de una recta, se anula en toda ella.

Demostración.

1. *Tres puntos.* Sea la recta $L(P, v)$ y f nulo en $P + t_i v$ con t_1, t_2, t_3 distintos. Por G1-033.T1, $f(P + tv) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Si $\alpha \neq 0$, hay a lo más dos raíces (G1-005.T1); si $\alpha = 0 \neq \beta$, una sola. Luego $\alpha = \beta = 0$, y $\gamma = f(P + t_1 v) = 0$: f se anula en toda la recta.
2. *Factorización.* Sea $\ell = \{ax + by = k\}$, $(a, b) \neq 0$, $N := |(a, b)|$, $P_0 := k(a, b)/N^2 \in \ell$ y $u := (-b, a)/N$, unitario y director de ℓ (G1-023.T1). $m(x, y) := P_0 + xu + yu^{\perp}$ es un movimiento (G1-008.D2).

3. $f \circ m$ es cuadrático (G1-030.T1): $f(m(x,y)) = A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F'$. Como $f(m(x,0)) = f(P_0 + xu) = 0$ para todo x, G1-020.T7 da $A' = D' = F' = 0$, y $f \circ m = y\,(B'x + C'y + E')$.
4. Por G1-008.T4, $m^{-1}(X) = ((X - P_0)\cdot u, (X - P_0)\cdot u^{\perp})$, y con $u^{\perp} = -(a,b)/N$, $(X - P_0)\cdot u^{\perp} = -(ax + by - k)/N$. Así, como funciones,

$$f(X) = (f\circ m)(m^{-1}(X)) = (ax+by-k)\cdot g(X), \quad g(X) := -\frac{1}{N}\big(B'(X-P_0)\cdot u + C'(X-P_0)\cdot u^{\perp} + E'\big),$$

con g de grado ≤ 1.
5. La igualdad es de funciones; por G1-030.T0 aplicado a la diferencia, también de coeficientes. ■

Teorema G1-035.T4 (cinco puntos determinan una cónica)

Si $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{R}^2$ y no hay tres alineados, existe un f cuadrático no nulo que se anula en los cinco, y cualquier otro es un múltiplo escalar de f.

Idea de la demostración

Existencia: cinco ecuaciones homogéneas en seis incógnitas. Unicidad: una combinación de dos soluciones que además se anula en un tercer punto de la recta P_1P_2 se factoriza como (recta)·(lineal); la parte lineal tendría que anularse en P_3, P_4, P_5, que no están alineados.

Demostración. Escribe $P_i = (x_i, y_i)$ y sea ℓ_{12} la ecuación de la recta P_1P_2 (G1-023.T1).

1. *Existencia.* $f(P_i) = Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F = 0$ $(i = 1, \dots, 5)$ son 5 ecuaciones homogéneas en las 6 incógnitas $(A, \dots, F)$. Por G1-019.T3 hay una solución no nula f.
2. *Punto auxiliar.* $Q := 2P_2 - P_1 = P_1 + 2(P_2 - P_1)$ está en la recta P_1P_2 y es distinto de P_1 y P_2 (G1-001.T4; $P_1 \neq P_2$).
3. *Lema: si $h \neq 0$ es cuadrático y se anula en $P_1, \dots, P_5$, entonces $h(Q) \neq 0$.* Si $h(Q) = 0$, h se anula en tres puntos distintos de la recta P_1P_2, luego en toda ella, y $h = \ell_{12} \cdot g_1$ con g_1 de grado ≤ 1 (G1-035.T3).
4. P_3, P_4, P_5 no están en la recta P_1P_2 (no hay tres alineados, G1-001.T5), así que $\ell_{12}(P_j) \neq 0$ y, por C1-002.T5, $g_1(P_3) = g_1(P_4) = g_1(P_5) = 0$.
5. Si $g_1 = \alpha x + \beta y + \gamma$ con $(\alpha, \beta) \neq 0$, $\{g_1 = 0\}$ es una recta (G1-023.T1) que contiene a P_3, P_4, P_5: contradicción. Luego $\alpha = \beta = 0$ y $\gamma = g_1(P_3) = 0$: $g_1 = 0$ y $h = 0$, contra $h \neq 0$. Esto prueba el lema.

6. *Unicidad.* Sea g cuadrático no nulo que se anula en los cinco. Por el lema, $f(Q) \neq 0$. El cuadrático $h := g(Q)f - f(Q)g$ se anula en $P_1, \dots, P_5$ y en Q; por el lema, $h = 0$ (como vector de coeficientes, G1-030.T0). Así $g = (g(Q)/f(Q))f$. ■

Corolario G1-035.C1 (la cónica por cinco puntos es única y no degenerada)

La cónica de G1-035.T4 es única (como conjunto) y es una elipse, una hipérbola o una parábola.

Demostración.

1. *Única.* Dos cuadráticos no nulos que se anulan en los cinco puntos son proporcionales (G1-035.T4), y $\{cf = 0\} = \{f = 0\}$ si $c \neq 0$.
2. *Si f no es de segundo grado*, $f = Dx + Ey + F$. Si $(D, E) \neq 0$, $\{f = 0\}$ es una recta (G1-023.T1) con cinco puntos sin tres alineados: imposible. Si $D = E = 0$, $F \neq 0$ ($f \neq 0$) y $\{f = 0\} = \emptyset$: imposible.
3. *Si es de segundo grado*, por G1-031.T3 su lugar es una elipse, hipérbola o parábola, o bien vacío, un punto, una recta o dos rectas. Vacío y un punto no contienen cinco puntos distintos; una recta no los contiene sin tres alineados.
4. *Dos rectas $L_1 \cup L_2$.* Sea k el número de los P_i que están en L_1. Si $k \geq 3$, tres están alineados. Si $k \leq 2$, al menos $5 - k \geq 3$ no están en L_1, así que están en L_2 (conteo de un conjunto finito, como en el palomar C1-005.T10): tres alineados. En ambos casos, contradicción. Solo quedan elipse, hipérbola y parábola. ■

Teorema G1-035.T5 (cónicas por cuatro puntos)

Si $P_1, \dots, P_4$ no tienen tres alineados y ℓ_{ij} denota la ecuación de la recta P_iP_j, los cuadráticos que se anulan en $P_1, \dots, P_4$ son exactamente $\lambda\ell_{12}\ell_{34} + \mu\ell_{13}\ell_{24}$.

Demostración. Sean $f := \ell_{12}\ell_{34}$ y $g := \ell_{13}\ell_{24}$, cuadráticos que se anulan en $P_1, \dots, P_4$ (cada P_i anula uno de los factores); también lo hace cada $\lambda f + \mu g$.

1. *Un quinto punto, sin elegir.* Sea $x^* := 1 +$ max de las abscisas de los P_i (C1-005.T13). La recta $x = x^*$ no pasa por ningún P_i; corta a cada recta P_iP_j no vertical en exactamente un punto (G1-023.T2) y no corta a las verticales ($x = x_i \neq x^*$). Sea $y^* := 1 +$ max de las ordenadas de esos a lo más seis puntos ($y^* := 0$ si no hay ninguno), y $P_5 := (x^*, y^*)$.
2. P_5 no está en ninguna recta P_iP_j: estaría en $x = x^*$ y sería uno de esos puntos, de ordenada $< y^*$.

Así $P_1, \dots, P_5$ no tienen tres alineados, y $f(P_5) \neq 0$, $g(P_5) \neq 0$ (C1-002.T5).

3. $g' := g - (g(P_5)/f(P_5))f$ se anula en $P_1, \dots, P_5$. *Es no nulo:* si $g = \kappa f$ con $\kappa \neq 0$, entonces $\{g = 0\} = \{f = 0\}$. El punto medio M de $[P_1, P_2]$ (G1-001.T3) está en la recta P_1P_2, así que $f(M) = 0$ y $g(M) = 0$: M está en la recta P_1P_3 o en la P_2P_4.
4. Si $M \in P_1P_3$: como $M \neq P_1$, la recta P_1M es la P_1P_3 y también la P_1P_2 (G1-001.T4 (b)), así que P_1, P_2, P_3 están alineados. Si $M \in P_2P_4$: igual, P_1, P_2, P_4 alineados. Contradicción en ambos casos.
5. Sea h cuadrático que se anula en $P_1, \dots, P_4$, y $h' := h - (h(P_5)/f(P_5))f$, que se anula en $P_1, \dots, P_5$. Si $h' = 0$, h es múltiplo de f. Si no, por G1-035.T4, $h' = \kappa' g'$. En ambos casos $h = \lambda f + \mu g$ para ciertos λ, μ. ■

Ejemplo G1-035.E1

Por $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ los cuadráticos son $\lambda((x+y)^2 - 1) + \mu xy$; la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es el miembro $\lambda = 1, \mu = -2$, y es la única cónica por esos cuatro puntos y $(3/5, 4/5)$.

1. Con $P_1 = (1,0), P_2 = (0,1), P_3 = (-1,0), P_4 = (0,-1)$ (sin tres alineados): $\ell_{12} = x+y-1$, $\ell_{34} = x+y+1$, $\ell_{13} = y$, $\ell_{24} = x$. Así $f = (x+y)^2 - 1$ y $g = xy$ (G1-035.T5).
2. $f - 2g = x^2 + y^2 - 1$.
3. $(3/5, 4/5)$ no está en ninguna de las seis rectas ($x + y = 7/5$, $x - y = -1/5$, $x, y \neq 0$) y cumple $9/25 + 16/25 = 1$. Por G1-035.C1 la cónica por los cinco es única: la circunferencia. (También: $f(P_5) = 24/25$, $g(P_5) = 12/25$, y $\lambda f + \mu g$ se anula en P_5 solo si $\mu = -2\lambda$.)

El cometa

Las posiciones $(5,0)$, $(-5,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$, $(3, 12/5)$ no tienen tres alineadas. El sistema de G1-035.T4 tiene las soluciones múltiplos de $(A, \dots, F) = (1, 0, 25/9, 0, 0, -25)$: la órbita es $x^2/25 + y^2/9 = 1$, una elipse (verificado en `tools/checks/G1-035.py`).

Por qué cada hipótesis

⚠ $x_0y_0 \neq 0$ en G1-035.T1

En $(3,0)$ con $c=5$: $g(\lambda)=(\lambda-25)(9-\lambda)$, y el único λ admisible es 9: solo pasa la hipérbola $x^2/9-y^2/16=1$.

⚠ Mismos focos en G1-035.T2

$x^2/25+y^2/9=1$ y $x^2/9-y^2/16=1$ (focos ±4 y ±5) se cortan en $x^2=5625/481$, $y^2=2304/481$, y ahí el producto de las normales es $x^2/225-y^2/144=9/481\neq0$: no son perpendiculares.

⚠ Cinco puntos sin tres alineados

Con cuatro alineados, $(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1)$, los cuadráticos xy y $y(y-1)$ se anulan en los cinco y no son proporcionales. Con tres alineados, $(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1)$, la cónica es única pero degenerada: $y(y-1)=0$. Y con cuatro puntos hay todo un haz (G1-035.T5).

Ejercicios

1. Encuentra la elipse y la hipérbola de focos $(\pm2,0)$ que pasan por $(1,1)$.
2. Verifica que esas dos se cortan en ángulo recto en $(1,1)$.
3. Encuentra la cónica por $(0,0),(1,0),(0,1),(1,2),(2,1)$ y clasifícala.
4. Demuestra que si un cuadrático se anula en dos rectas que se cortan, es un múltiplo del producto de sus ecuaciones.
5. ¿Cuántos pares de rectas por los cuatro puntos contiene el haz $\lambda((x+y)^2-1)+\mu xy$? Encuéntralos.

Respuestas

1. $g(\lambda)=-\lambda^2+6\lambda-4=0$: $\lambda=3\pm\sqrt{5}$; elipse $\lambda=3+\sqrt{5}$, hipérbola $\lambda=3-\sqrt{5}$.
2. Es G1-035.T2 (o la cuenta directa con las normales).
3. Con el sistema de G1-035.T4: $x^2-xy+y^2-x-y=0$ ($\Delta=-3<0$), una elipse.
4. Por G1-035.T3, $f=\ell_1 g$; g de grado ≤ 1 se anula en los puntos de L_2 fuera de L_1 (infinitos), así que g es múltiplo de ℓ_2.

5. Tres: f $(P_1P_2 \cup P_3P_4)$, g $(P_1P_3 \cup P_2P_4)$ y $f - 4g = (x-y)^2 - 1$ $(P_1P_4 \cup P_2P_3)$, uno por cada manera de repartir los cuatro puntos en dos pares.