Geometría analítica II

Todas las demostraciones, explicadas paso a paso

Geometría Analítica II · según el programa de la Facultad de Ciencias, UNAM

Guillermo Izquierdo

con revisión de Claude Opus 5.5 (Anthropic)

PyPro · pypro.mx · 2026

Prólogo

Este libro continúa la serie de geometría con el mismo objetivo que el primero: **demostrar todo**. Cada teorema que aparece aquí se demuestra completo, paso a paso, sin «es fácil ver», sin «se deja al lector» y sin usar nada que no se haya demostrado antes, en este libro o en los anteriores. Ningún hecho se toma «porque se ve en el dibujo»: superficie reglada, plano tangente, isometría, geodésica, circunferencia generalizada y recta hiperbólica se **definen**, y lo que se afirma de ellos se prueba.

El recorrido sigue el programa de **Geometría Analítica II** (clave 0245) de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en sus temas y en su orden: las **superficies cuádricas** (cilindros, superficies de revolución, la ecuación de segundo grado sin términos mixtos y su reducción a una lista de formas, simetrías, extensión y trazas, las superficies regladas —el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico son **doblemente reglados**— y el plano tangente); las **transformaciones** (lineales y su matriz, vectores propios, las transformaciones rígidas, **toda isometría del plano es traslación, rotación, reflexión o reflexión con deslizamiento**, el **teorema de Euler** y el **movimiento helicoidal de Chasles** en el espacio, el **teorema espectral 3 × 3** para eliminar los términos mixtos, las transformaciones afines y la clasificación afín de las cónicas, la perspectiva, y la geometría como estudio de invariantes en el sentido de Klein); la **geometría de la esfera** (círculos máximos, la distancia esférica y su desigualdad del triángulo, **las curvas más cortas son arcos de círculo máximo**, la trigonometría esférica y el triángulo polar); y las **transformaciones de Möbius** (los complejos como geometría del plano, la proyección estereográfica, **las Möbius llevan circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas**, la razón cruzada y, como final, la **geometría hiperbólica** en el semiplano superior, donde por un punto pasan infinitas paralelas, con su distancia y su desigualdad del triángulo).

Cómo está hecho

- **Continúa a Geometría Analítica I.** El plano es $\mathbb{R}^2$ y el espacio es $\mathbb{R}^3$, como en el primer libro. Los resultados de *Geometría analítica I* y de *Cálculo diferencial* (1.er semestre) se citan con su número, por ejemplo «(G1-032.D2)» o «(C1-002.T5)», sin marca; los de este libro empiezan con G2.
- **Cálculo II va en paralelo y se cita por id.** Este curso es del 2.º semestre, como *Cálculo integral*.

De ese curso se usan solo unas pocas piezas, siempre por su número y sin marca: particiones, una integral constante, logaritmo y exponencial, seno, coseno y sus inversas, y la longitud de una curva plana (por ejemplo «(C2-014.T8)»). Las piezas del primer libro marcadas ⚠ TR se citan aquí sin la marca, y la trigonometría se toma directamente de C2-014: su prueba es del mismo semestre. No se cita ningún curso posterior.

- **Los números complejos se construyen dentro.** $\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}^2$ con un producto; que es un campo, el conjugado, el módulo, la forma polar, De Moivre y las raíces de la unidad se demuestran aquí, sin esperar a *Álgebra superior II*.
- **El álgebra lineal necesaria se demuestra dentro, hasta dimensión 3.** La matriz de una transformación, composición = producto, el cambio de base, la inversa por la adjunta, **det(AB) = det A · det B** (por la unicidad de las funciones trilineales alternantes), el polinomio característico, el **teorema espectral 3 × 3** y el eje de una rotación se prueban aquí. No se cita nada de *Álgebra lineal I*, que es posterior.
- **Las cuádricas: una lista exhaustiva, no una clasificación.** Se demuestra que toda ecuación de segundo grado en tres variables se lleva por un movimiento a una de 17 formas; **no** se afirma que las 17 sean distintas entre sí (varias tienen el mismo lugar, el vacío). Solo se prueba que algunas de ellas no son congruentes, con invariantes explícitos. En cambio, la clasificación afín de las cónicas sí incluye la unicidad.
- ⚠ **def: área y volumen.** El factor |det A| de áreas y volúmenes descansa en las definiciones de área y volumen del primer libro y se marca ⚠ def; la teoría del área es de *Cálculo en varias variables II*. Solo dos piezas lo usan, y solo para calcular esa misma área o ese volumen.
- **Cada paso dice qué usa.** Las justificaciones aparecen entre paréntesis con el número del resultado que se aplica. Detrás del libro hay un inventario de **196 piezas** (46 definiciones, 120 teoremas, 4 corolarios y 26 ejemplos) en el que cada una declara de qué depende, y un programa comprueba que ninguna use algo posterior.
- **Sin elecciones ocultas.** Cuando una prueba necesita «un» vector, «una» raíz o «un» movimiento, se dice cuál.
- **Intuición primero, formalidad siempre.** Cada capítulo abre con una situación cotidiana (la mancha de sol que deja un tragaluz, el torno del alfarero, una torre de enfriamiento hecha de rectas, los filtros de una aplicación de fotos, una calcomanía que se deforma, las vías del tren que se juntan en una foto, un vuelo de Madrid a Nueva York, una liga sobre un balón, una lámpara en el polo de una esfera de vidrio, una hormiga que da pasos del tamaño de su altura) y dice dónde falla la analogía. Después vienen la definición o el teorema formal, su demostración y un contraejemplo por cada hipótesis.

Cómo leerlo

Cada capítulo corresponde a una clase en video (algunos, a dos partes) del curso *Geometría analítica II: todas las demostraciones, explicadas paso a paso* de PyPro (pypro.mx). Se puede leer solo, pero funciona mejor junto con el video: el video da la idea y la imagen; el libro da cada detalle por escrito.

Los recuadros ayudan a orientarse:

- **Teorema, definición, ejemplo:** el enunciado exacto, tal como se usa después.
- **Idea:** la estrategia de la demostración en una o dos frases.
- **En la vida diaria:** la situación cotidiana y el límite de la analogía.
- **Cuidado:** errores frecuentes, lo que pasa si se quita una hipótesis y por qué una pieza lleva ⚠.

Al final de cada capítulo hay ejercicios con sus respuestas.

Agradecimientos

A la **Facultad de Ciencias de la UNAM**, por un plan de estudios extraordinario y por haber formado a tantas generaciones de matemáticas y matemáticos. Este libro sigue su programa de Geometría Analítica II y no existiría sin él.

A los creadores de **Claude**, en Anthropic, por su esfuerzo de condensar el conocimiento del mundo en un modelo capaz de revisar, cuestionar y verificar cada línea de una demostración. Claude Opus 5.5 revisó la estructura lógica de este libro: que cada enunciado esté completo, que ningún paso use algo no demostrado y que no haya contradicciones entre capítulos ni con *Geometría analítica I*, *Cálculo diferencial* y *Cálculo integral*.

A quienes estudian este material: después de las rectas y las cónicas, la geometría se vuelve el estudio de lo que no cambia cuando todo se mueve.

Guillermo Izquierdo

Índice general

Prólogo I

Agradecimientos IV

G2-001 · Cilindros 1

G2-002 · Superficies de revolución 7

G2-003 · La ecuación de 2.º grado sin términos mixtos 14

G2-004 · Simetrías, extensión y trazas; ejes paralelos 22

G2-005 · Superficies regladas 29

G2-006 · Plano tangente a una cuádrica 37

G2-007 · Transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 42

G2-008 · La matriz de una transformación 48

G2-009 · Subespacios invariantes y vectores propios 56

G2-010 · Transformaciones rígidas 62

G2-011 · Las isometrías del plano 70

G2-012 · Isometrías del espacio 75

G2-013 · Eliminación de los términos mixtos en tres variables 82

G2-014 · Transformaciones afines 87

G2-015 · Perspectiva 95

G2-016 · La geometría como estudio de invariantes 103

G2-017 · Círculos máximos y distancia en la esfera **109**

G2-018 · Geodésicas **116**

G2-019 · Trigonometría esférica **123**

G2-020 · Los complejos como geometría del plano **131**

G2-021 · El plano extendido y la proyección estereográfica **137**

G2-022 · Transformaciones de Möbius **143**

G2-023 · Razón cruzada **152**

G2-024 · Geometría hiperbólica: el semiplano superior **156**

G2-025 · Distancia hiperbólica **162**

G2-026 · Cierre de Geometría Analítica **170**

G2-001 · Cilindros

Motivación

> **El tragaluz y la mancha de sol**
> Un tragaluz circular de radio 1 m está en un techo horizontal, el plano $z = 0$. El sol entra con rayos paralelos de dirección $v = (1, 0, 1)$, inclinados 45°. Cada rayo que pasa por el borde del tragaluz es una recta; todas juntas forman un tubo de luz inclinado. ¿Qué forma tiene la mancha en el piso, 3 m abajo?
> La intuición dice «una elipse alargada». La respuesta es otra: una circunferencia de radio 1, igual al tragaluz, corrida 3 m. La elipse aparece solo si cortas el tubo perpendicular a los rayos.
> Dónde falla la analogía: los rayos del sol divergen medio grado; la mancha real tiene el borde difuso.

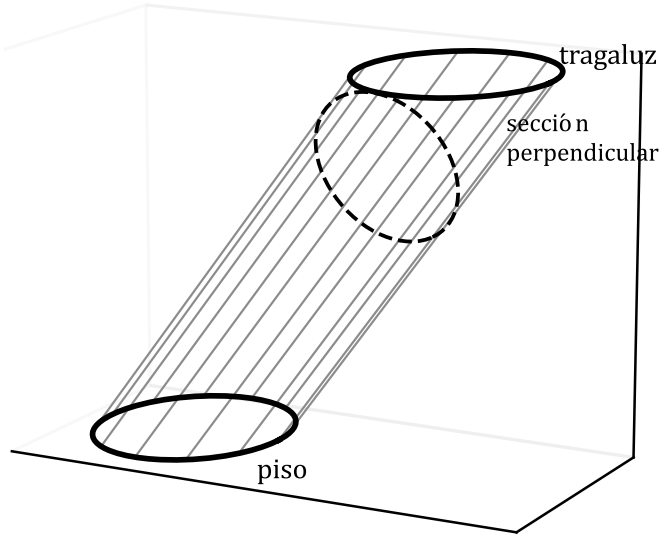


Figura 1: El haz del tragaluz: la directriz (techo), las generatrices paralelas a v, la mancha del piso (circunferencia) y la sección perpendicular a v (elipse, punteada).

Definición y proyección paralela

Definición G2-001.D1 (cilindro)

Para $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$: $\mathrm{Cil}(\Gamma, v) := \{P + tv : P \in \Gamma,\ t \in \mathbb{R}\}$ (en particular $\mathrm{Cil}(\emptyset, v) = \emptyset$), la unión de las rectas $L(P, v)$ con $P \in \Gamma$ (las **generatrices**; Γ es una **directriz**). Si Γ está en un plano $\Pi = \{n \cdot X = k\}$ con $n \cdot v \neq 0$ y es una elipse, hipérbola o parábola de Π (G1-032.D2), $\mathrm{Cil}(\Gamma, v)$ es un **cilindro sobre una cónica** (elíptico, hiperbólico o parabólico).

Teorema G2-001.T1 (proyección paralela)

Sean $\Pi = \{n \cdot X = k\}$ y v con $n \cdot v \neq 0$. Para cada $X \in \mathbb{R}^3$, la recta $L(X, v)$ corta a Π en exactamente

un punto,

$$\pi_v(X) := X - \frac{n \cdot X - k}{n \cdot v}\, v,$$

y $\pi_v(X + tv) = \pi_v(X)$. Para $\Gamma \subset \Pi$: $X \in \mathrm{Cil}(\Gamma, v) \iff \pi_v(X) \in \Gamma$.

Idea de la demostración

Un punto $X + tv$ está en Π cuando una ecuación de primer grado en t se cumple; como $n \cdot v \neq 0$, tiene una sola solución. Estar en el cilindro es que el rayo por X llegue a Π dentro de Γ.

Demostración.

1. Por G1-002.T1, $n \cdot (X + tv) = n \cdot X + t\,(n \cdot v)$.
2. Así $X + tv \in \Pi \iff n \cdot X + t\,(n \cdot v) = k \iff t = \dfrac{k - n \cdot X}{n \cdot v}$ (K8, pues $n \cdot v \neq 0$).
3. Hay exactamente un t, luego exactamente un punto en $L(X, v) \cap \Pi$, y es $X + \frac{k - n \cdot X}{n \cdot v} v = \pi_v(X)$ (G1-001.T1).
4. Para $X + tv$:

$$\begin{aligned} \pi_v(X + tv) &= X + tv - \frac{n \cdot X + t\,(n \cdot v) - k}{n \cdot v}\, v \\ &= X + tv - \frac{n \cdot X - k}{n \cdot v}\, v - tv = \pi_v(X) \end{aligned}$$

   (G1-002.T1, G1-001.T1).
5. ($\Rightarrow$) Si $X = P + tv$ con $P \in \Gamma \subset \Pi$, por el paso 4, $\pi_v(X) = \pi_v(P)$. Como P está en $L(P, v) \cap \Pi$, el paso 3 da $\pi_v(P) = P \in \Gamma$.
6. ($\Leftarrow$) Si $\pi_v(X) \in \Gamma$, entonces $X = \pi_v(X) + \frac{n \cdot X - k}{n \cdot v}\, v$ (G1-001.T1) es de la forma $P + tv$ con $P \in \Gamma$, así que $X \in \mathrm{Cil}(\Gamma, v)$ (G2-001.D1). ■

Ecuación sin una variable

Teorema G2-001.T2 (ecuación sin una variable)

Para $S \subset \mathbb{R}^2$ sean $S \times \mathbb{R} := \{(x,y,z) : (x,y) \in S\}$ y $S \times \{0\} := \{(x,y,0) : (x,y) \in S\}$. Entonces $S \times \mathbb{R} = \mathrm{Cil}(S \times \{0\}, e_3)$; en particular, para $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el lugar $\{(x,y,z) : F(x,y) = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ es el cilindro de dirección e_3 sobre el lugar de F en el plano $z = 0$. Recíprocamente, si $S' \subset \mathbb{R}^3$ cumple $X + te_3 \in S'$ para todos $X \in S'$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $S' = \mathrm{Cil}(S' \cap \{z = 0\}, e_3)$. Lo mismo con x o y en lugar de z.

Idea de la demostración
Con $\Pi = \{z = 0\}$ y $v = e_3$, la proyección paralela borra la tercera coordenada.

Demostración.

1. Con $n = e_3, k = 0$ y $v = e_3$: $n \cdot v = 1 \neq 0$ y, por G2-001.T1, $\pi_{e_3}(x,y,z) = (x,y,z) - z\,e_3 = (x,y,0)$.
2. $S \times \{0\} \subset \Pi$. Por G2-001.T1, $X \in \mathrm{Cil}(S \times \{0\}, e_3) \iff (x,y,0) \in S \times \{0\} \iff (x,y) \in S \iff X \in S \times \mathbb{R}$.
3. Con $S := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$, el lugar $\{(x,y,z) : F(x,y) = 0\}$ es $S \times \mathbb{R}$, y el paso 2 lo identifica con el cilindro.
4. *Recíproco.* Sea $\Gamma := S' \cap \{z = 0\}$. Si $X = (x,y,z) \in S'$, la hipótesis con $t = -z$ da $\pi_{e_3}(X) = X - ze_3 \in S'$, y está en $\{z = 0\}$: $\pi_{e_3}(X) \in \Gamma$. Por G2-001.T1, $X \in \mathrm{Cil}(\Gamma, e_3)$.
5. Si $X = P + te_3$ con $P \in \Gamma \subset S'$, la hipótesis da $X \in S'$.
6. Los pasos 4 y 5 dan $S' = \mathrm{Cil}(\Gamma, e_3)$. Con x (o y) se repite todo con $\Pi = \{x = 0\}$, $v = e_1$ (o $\{y = 0\}$, e_2). ■

⚠ El conjunto vacío

Si $S = \emptyset$ (por ejemplo $x^2 + y^2 = -1$), ambos lados de G2-001.T2 son vacíos, porque $\mathrm{Cil}(\emptyset, v) = \emptyset$ (G2-001.D1): el enunciado sigue valiendo, sin excepción.

Cilindros cuádricos

Teorema G2-001.T3 (cilindros cuádricos)

Para $a, b, p > 0$, los lugares de $\mathbb{R}^3$ $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y $y^2 = 4px$ son los cilindros de dirección e_3 sobre la elipse, la hipérbola y la parábola canónicas del plano $z = 0$; la sección por cada plano $z = c$ es la traslación por ce_3 de esa cónica.

Demostración.

1. En el plano, $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ es una elipse (G1-029.T1 si $a \geq b$; si $a < b$, por G1-030.T3: $AC > 0$ y el lugar contiene a $(a, 0)$ y a $(0, b)$, así que no es vacío ni un punto); $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ es la hipérbola canónica (G1-029.T2 con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$) y $y^2 = 4px$ la parábola canónica (G1-029.T4).
2. Ninguna de las tres ecuaciones contiene z. Por G2-001.T2, cada lugar es el cilindro de dirección e_3 sobre la cónica correspondiente del plano $z = 0$; como $e_3 \cdot e_3 = 1 \neq 0$, es un cilindro sobre una cónica (G2-001.D1, G1-032.D2 con la carta $(x', y') \mapsto (x', y', 0)$).
3. *Sección.* (x, y, c) está en el lugar $\iff$ (x, y) cumple la ecuación $\iff$ $(x, y, c) = (x, y, 0) + ce_3$ con $(x, y, 0)$ en la cónica de $z = 0$. Con la carta $\varphi(x', y') = ce_3 + x'e_1 + y'e_2$ del plano $z = c$, la imagen inversa de la sección es la misma cónica de $\mathbb{R}^2$ (G1-032.D2). ■

Ejemplo G2-001.E1 (el haz del tragaluz)

El cilindro sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, con dirección $v = (1, 0, 1)$ es $\{(x - z)^2 + y^2 = 1\}$: $\pi_v(x, y, z) = (x - z, y, 0)$.

1. $\Pi = \{z = 0\}$: $n = e_3$, $k = 0$, $n \cdot v = 1$. Por G2-001.T1, $\pi_v(x, y, z) = (x, y, z) - z(1, 0, 1) = (x - z, y, 0)$.
2. $X \in \mathrm{Cil}(\Gamma, v) \iff \pi_v(X) \in \Gamma \iff (x - z)^2 + y^2 = 1$.
3. *El piso* $z = -3$: $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, circunferencia de radio 1 y centro $(-3, 0, -3)$.
4. *Sección perpendicular a* v: en el plano $x + z = 0$ con la carta $X = x'u + y'e_2$, $u = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ (ortonormal con e_2), $x - z = \sqrt{2}\,x'$ y la ecuación queda $2x'^2 + y'^2 = 1$: elipse de semiejes $1/\sqrt{2}$ y 1.

Por qué cada hipótesis

⚠ $n \cdot v \neq 0$

Con $\Pi = \{z = 0\}$ y $v = e_1$, la recta $L(X, v)$ es paralela al plano: si $z \neq 0$ no lo corta y si $z = 0$ está contenida en él. No hay «exactamente un punto» y π_v no existe.

⚠ **La invariancia en el recíproco**

La esfera $S' = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ no cumple $X + te_3 \in S'$. Su traza con $z = 0$ es la circunferencia unitaria, y el cilindro sobre ella, $x^2 + y^2 = 1$, contiene a $(1, 0, 5) \notin S'$.

⚠ **Que falte de verdad una variable**

$z = x^2 + y^2$ no es un cilindro: contiene a 0 pero no a $0 + e_3 = (0, 0, 1)$, pues $1 \neq 0$; ni a $0 + e_1$ ni a $0 + e_2$. Ninguna dirección coordenada lo deja invariante.

Ejercicios

1. Escribe la ecuación del cilindro sobre la parábola $y = x^2$, $z = 0$, con dirección $v = (0, 1, 1)$.
2. Demuestra que $\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 4\}$ es un cilindro y di su dirección y una directriz.
3. Para $\Pi = \{x + y + z = 1\}$ y $v = (1, 1, 1)$, calcula $\pi_v(0, 0, 0)$ y $\pi_v(2, -1, 3)$.
4. Demuestra que si $\Gamma \subset \Pi$ y $n \cdot v \neq 0$, entonces $\mathrm{Cil}(\Gamma, v) \cap \Pi = \Gamma$.
5. ¿Es un cilindro el lugar $(x - y)^2 = 1$? Encuentra una dirección v que lo deje invariante.

Respuestas

1. $\pi_v(x, y, z) = (x, y - z, 0)$, así que el cilindro es $y - z = x^2$.
2. No contiene y: por G2-001.T2 (con y), es $\mathrm{Cil}(\Gamma, e_2)$ con Γ la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$ del plano $y = 0$.
3. $n \cdot v = 3$; $\pi_v(0) = 0 - \frac{-1}{3}(1, 1, 1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; $\pi_v(2, -1, 3) = (2, -1, 3) - \frac{3}{3}(1, 1, 1) = (1, -2, 2)$.
4. Si $X \in \Pi$, $\pi_v(X) = X$ (el coeficiente es 0); por G2-001.T1, $X \in \mathrm{Cil} \iff X \in \Gamma$.
5. Sí: con $v = (1, 1, 0)$, $(x + t) - (y + t) = x - y$, y también con $v = e_3$. Son dos planos paralelos.

G2-002 · Superficies de revolución

Motivación

> **El torno del alfarero y la antena**
> En un torno, el alfarero marca la silueta de la pieza con la mano; el giro hace el resto: cada punto de la silueta describe una circunferencia horizontal con centro en el eje. Una antena parabólica se fabrica igual: se gira la parábola $z = x^2/4$ alrededor del eje z. ¿Qué ecuación tiene la antena? Un punto del borde a 2 m del eje, ¿a qué altura queda?
> La respuesta será $z = (x^2 + y^2)/4$: la coordenada x del perfil se reemplaza por la distancia al eje, $\sqrt{x^2 + y^2}$. El borde queda a 1 m de altura, la del foco.
> Dónde falla la analogía: una antena real es solo un pedazo de la superficie y el receptor no está exactamente en el foco.

Circunferencia de giro

Definición G2-002.D1 (circunferencia de giro; superficie de revolución)

Sea $\ell = L(A, w)$ con $|w| = 1$ (el **eje**). Para $P \in \mathbb{R}^3$, su **circunferencia de giro** es

$$\Gamma_P := \{X : (X - A) \cdot w = (P - A) \cdot w \text{ y } d(X, \ell) = d(P, \ell)\}$$

(el punto P si $P \in \ell$). Para $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, la **superficie de revolución generada por** Γ es $\mathrm{Rev}(\Gamma, \ell) := \bigcup_{P \in \Gamma} \Gamma_P$; S es **de revolución con eje** ℓ si $S = \mathrm{Rev}(S, \ell)$.

La primera condición dice que X está en el plano perpendicular al eje que pasa por P (la «altura» medida sobre el eje); la segunda, que X está a la misma distancia del eje.

Teorema G2-002.T1 (giro alrededor del eje z)

Para ℓ = el eje z ($A = 0, w = e_3$): $d(X, \ell) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\Gamma_P = \{(x, y, z_P) : x^2 + y^2 = x_P^2 + y_P^2\}$, la circunferencia de centro $(0, 0, z_P)$ y radio $r_P := \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ del plano $z = z_P$ (el punto P si $r_P = 0$). Además $\Gamma_P = \{\rho(P) : \rho(x, y, z) = (R(c, s)(x, y), z),\ c^2 + s^2 = 1\}$.

Demostración.

1. Por G1-003.T5 con $A = 0$ y $v = e_3$, el pie de X en el eje es $F = \text{proy}_{e_3}(X) = (X \cdot e_3)e_3 = (0, 0, z)$ (G1-003.D2, G1-002.T1), y $d(X, \ell) = |X - F| = |(x, y, 0)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (G1-002.T3).
2. $(X - 0) \cdot e_3 = z$. Por G2-002.D1, $X \in \Gamma_P \iff z = z_P$ y $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$.
3. Para $a, b \geq 0$, $\sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b$ (G1-002.T2). Así $\Gamma_P = \{(x, y, z_P) : x^2 + y^2 = r_P^2\}$; si $r_P = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ obliga $x = y = 0$ (C1-003.T9) y $\Gamma_P = \{P\}$.
4. *Las rotaciones.* $R(c, s)$ conserva el producto punto (G1-011.T1), así que $|R(c, s)(x_P, y_P)|^2 = r_P^2$ y $\rho(P) = (R(c, s)(x_P, y_P), z_P) \in \Gamma_P$.
5. Recíprocamente, sea $X = (x, y, z_P) \in \Gamma_P$. Si $r_P = 0$, $X = P = \rho(P)$ con $R(1, 0) = I$ (G1-011.D1). Si $r_P > 0$, los vectores $(x_P, y_P)/r_P$ y $(x, y)/r_P$ son unitarios (G1-002.T3) y G1-011.T2 da una rotación $R(c, s)$ que lleva el primero en el segundo; por linealidad (G1-011.T1), $R(c, s)(x_P, y_P) = (x, y)$, es decir $X = \rho(P)$. ■

La ecuación de una superficie de revolución

Teorema G2-002.T2 (ecuación de una superficie de revolución)

Sean $D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $F : D \to \mathbb{R}$ y el **perfil** $\Gamma := \{(r, 0, z) : (r, z) \in D,\ F(r, z) = 0\}$ (en el semiplano $y = 0, x \geq 0$). Entonces

$$\text{Rev}(\Gamma, \text{eje } z) = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D \text{ y } F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}.$$

Si $\sigma(x, y, z) := (-x, y, z)$, entonces $\Gamma_{\sigma(P)} = \Gamma_P$, así que $\text{Rev}(\Gamma \cup \sigma(\Gamma), \text{eje } z) = \text{Rev}(\Gamma, \text{eje } z)$: un perfil simétrico respecto al eje genera lo mismo que su mitad.

> **Idea de la demostración**
> X está en la superficie si su altura y su distancia al eje son las de un punto del perfil; para un punto $(r, 0, z)$ del perfil, esa distancia es r.

Demostración.

1. Para $P = (r, 0, z_P) \in \Gamma$, por G2-002.T1, $\Gamma_P = \{(x, y, z_P) : \sqrt{x^2 + y^2} = r_P\}$, y $r_P = \sqrt{r^2} = |r| = r$ porque $r \geq 0$ (G1-002.T2).
2. ($\subset$) Si $X \in \text{Rev}(\Gamma)$, hay $P = (r, 0, z_P) \in \Gamma$ con $X \in \Gamma_P$ (G2-002.D1). Por el paso 1, $z = z_P$ y $\sqrt{x^2 + y^2} = r$; como $(r, z_P) \in D$ y $F(r, z_P) = 0$, se cumple $(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D$ y $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.
3. ($\supset$) Si $(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D$ y $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, sea $P := (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$. Entonces $P \in \Gamma$ y, por el paso 1, Γ_P contiene a X; luego $X \in \text{Rev}(\Gamma)$.
4. *Simetría.* $\sigma(P) = (-x_P, y_P, z_P)$ tiene la misma tercera coordenada y la misma $x^2 + y^2$ que P, así que, por G2-002.T1, $\Gamma_{\sigma(P)} = \Gamma_P$.
5. Por G2-002.D1,

$$\text{Rev}(\Gamma \cup \sigma(\Gamma)) = \bigcup_{P \in \Gamma} \Gamma_P \cup \bigcup_{P \in \Gamma} \Gamma_{\sigma(P)} = \bigcup_{P \in \Gamma} \Gamma_P = \text{Rev}(\Gamma). \quad \blacksquare$$

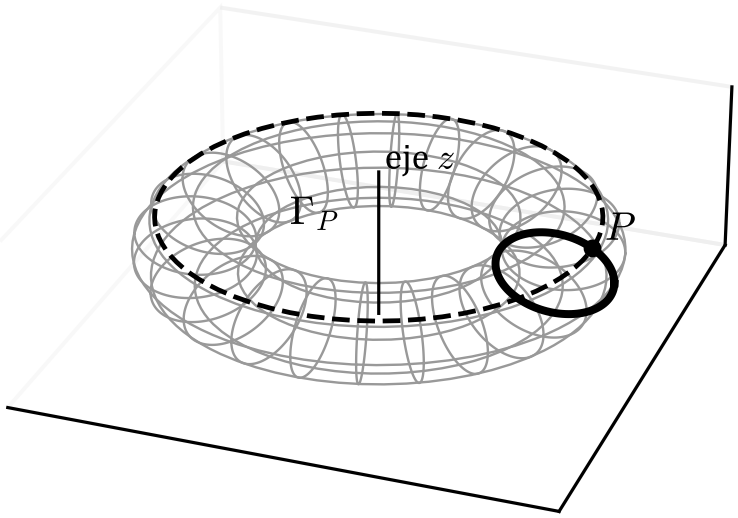


Figura 2: El perfil (trazo grueso) en el semiplano $y = 0, x \geq 0$; la circunferencia de giro Γ_P de uno de sus puntos (punteada) y el toro que barren todas.

Las cónicas giradas

Corolario G2-002.C1 (generadas por cónicas)

Girando alrededor del eje z ($a, c, k > 0$): la elipse $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ ($y = 0$) da el **elipsoide de revolución** $(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/c^2 = 1$; la parábola $z = x^2/a^2$, el **paraboloide de revolución** $z = (x^2+y^2)/a^2$; la hipérbola $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ (el eje z es su eje secundario), el **hiperboloide de una hoja** $(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/c^2 = 1$; la hipérbola $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$ (el eje z es su eje focal), el **hiperboloide de dos hojas** $z^2/c^2 - (x^2 + y^2)/a^2 = 1$; el par de rectas $x = \pm kz$, el **cono** $x^2 + y^2 = k^2z^2$.

Demostración.

1. Cada curva es $C = \{(x,0,z) : G(x^2,z) = 0\}$ para una función G de dos variables: $G(s,z) = s/a^2 + z^2/c^2 - 1$ (elipse), $z - s/a^2$ (parábola), $s/a^2 - z^2/c^2 - 1$ (una hoja), $z^2/c^2 - s/a^2 - 1$ (dos hojas) y $s - k^2z^2$ (rectas: $x = \pm kz \iff x^2 = k^2z^2$, por C1-002.T5 aplicado a $(x - kz)(x + kz)$).
2. Sea $\Gamma := \{(r,0,z) : r \geq 0,\ G(r^2,z) = 0\}$, el perfil de G2-002.T2 con $D = [0,\infty) \times \mathbb{R}$ y $F(r,z) := G(r^2,z)$. Un punto $(x,0,z) \in C$ con $x < 0$ es $\sigma(-x,0,z)$ con $(-x,0,z) \in \Gamma$, pues $(-x)^2 = x^2$. Así $C = \Gamma \cup \sigma(\Gamma)$.
3. Por G2-002.T2, $\mathrm{Rev}(C) = \mathrm{Rev}(\Gamma) = \{G((\sqrt{x^2+y^2})^2, z) = 0\}$, y $(\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + y^2$ (G1-002.T2).
4. Sustituyendo $s = x^2 + y^2$ en cada G salen las cinco ecuaciones del enunciado. ■

> **La antena del gancho**
> $z = x^2/4$ es la parábola con $a = 2$: la antena es $z = (x^2 + y^2)/4$. Con $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, la altura del foco $(0,0,1)$ de $x^2 = 4z$.

El toro

> **Ejemplo G2-002.E1 (toro)**
> Para $0 < \rho < R$, la circunferencia $(x - R)^2 + z^2 = \rho^2$ del plano $y = 0$ está en $x > 0$ y genera el **toro** $(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = \rho^2$, que es también el lugar $(x^2+y^2+z^2+R^2-\rho^2)^2 = 4R^2(x^2+y^2)$. No es una cuádrica (G2-003.E2).

Demostración.

1. En la circunferencia, $(x-R)^2 \leq \rho^2$, así que $|x-R| \leq \rho$ (G1-002.T2) y $x \geq R - \rho > 0$ (C1-003.T9). Es un perfil de G2-002.T2 con $F(r,z) := (r-R)^2 + z^2 - \rho^2$.
2. Por G2-002.T2, el toro es $\{(r-R)^2 + z^2 = \rho^2\}$ con $r := \sqrt{x^2+y^2}$.
3. Desarrollando, $(r-R)^2 + z^2 = \rho^2 \iff r^2 + z^2 + R^2 - \rho^2 = 2Rr$.
4. Si se cumple el paso 3, elevando al cuadrado, $(r^2 + z^2 + R^2 - \rho^2)^2 = 4R^2r^2$.
5. Recíprocamente, si $(r^2 + z^2 + R^2 - \rho^2)^2 = (2Rr)^2$, entonces $r^2 + z^2 + R^2 - \rho^2 = \pm 2Rr$ (C1-002.T5 aplicado a la diferencia de cuadrados). El signo $-$ diría $(r+R)^2 + z^2 = \rho^2$, imposible porque $(r+R)^2 \geq R^2 > \rho^2$ (C1-003.T9, $r \geq 0$). Queda el signo $+$, que es el paso 3.
6. Con $r^2 = x^2 + y^2$, los pasos 4 y 5 dan la ecuación de cuarto grado. ■

La parametrización del toro de G1-016.E1 tiene por traza este mismo conjunto; aquí no se usa.

> **La llanta**
> Con $R = 3$ y $\rho = 1$ (decímetros): $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 = 36(x^2 + y^2)$. Contiene a $(4, 0, 0)$: $24^2 = 576 = 36 \cdot 16$; y a $(3, 0, 1)$: $18^2 = 324 = 36 \cdot 9$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El perfil en $x \geq 0$

Si el perfil cruza el eje, por ejemplo la circunferencia $(x - 1)^2 + z^2 = 4$ de $y = 0$, la fórmula $(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = 4$ solo recuerda la mitad $x \geq 0$. El punto $(-1, 0, 0)$ de la circunferencia gira a radio 1 y produce $(1, 0, 0)$, pero $(1 - 1)^2 + 0 = 0 \neq 4$: la fórmula pierde ese punto de la superficie. Por eso G2-002.T2 pide $D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

⚠ El perfil simétrico

La curva $z = x^3$ de $y = 0$ no es de la forma $G(x^2, z) = 0$. Su mitad $x \geq 0$ genera $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ y su mitad $x < 0$ genera otra superficie, $z = -(x^2 + y^2)^{3/2}$. G2-002.C1 usa que cada cónica sea simétrica respecto al eje de giro.

Ejercicios

1. Escribe la superficie que genera la recta $z = 2x$ $(y = 0, x \geq 0)$ al girar alrededor del eje z.
2. Gira la elipse $x^2/4 + z^2 = 1$ alrededor del eje x (no del z). ¿Qué ecuación sale?
3. Demuestra que la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es de revolución con eje z.
4. Comprueba que $(1, 2, 1)$ no está en el toro de la llanta y que $(0, 2, 0)$ sí.
5. ¿Es de revolución con eje z la superficie $z = x^2 + 2y^2$? Justifica con dos puntos.

Respuestas

1. $F(r, z) = z - 2r$: $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2/4$.
2. El papel de z lo hace x: $x^2/4 + (y^2 + z^2) = 1$, un elipsoide de revolución alargado.
3. Es $G(x^2, z) = 0$ con $G(s, z) = s + z^2 - 1$; por G2-002.C1 (caso elipse con $a = c = 1$) es Rev de la

circunferencia del plano $y = 0$.

4. $r = \sqrt{5}$: $(\sqrt{5} - 3)^2 + 1 \approx 1.58 \neq 1$. $(0, 2, 0)$: $r = 2$, $(2 - 3)^2 + 0 = 1$.
5. No: $(1, 0, 1)$ está y $(0, 1, 1)$ no $(2 \neq 1)$, aunque los dos están a distancia 1 del eje y a altura 1.

G2-003 · La ecuación de 2.º grado sin términos mixtos

Motivación

> **La torre de enfriamiento y el canal solar**
> En el plano de una planta de energía, una torre de enfriamiento aparece como
>
> $$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 2z + 7 = 0.$$
>
> ¿Qué forma tiene y dónde está su centro? Completando cuadrados se lee $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 - (z-1)^2 = 1$: un hiperboloide de una hoja con centro $(1, -2, 1)$. Un canal solar, $y^2 - 2x + 4y = 0$, resulta un cilindro parabólico.
> Este capítulo demuestra que siempre se puede hacer así cuando no hay términos xy, yz, zx: con movimientos (que no deforman) toda cuádrica sin términos mixtos se lleva a una de 17 formas. Dónde falla la analogía: una torre o un canal reales son pedazos acotados; las superficies del catálogo casi nunca lo son.

Parte 1 · Polinomios cuadráticos y reducción por movimientos

Definición G2-003.D1 (polinomio cuadrático en tres variables; cuádrica)

$f(X) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$, con coeficientes $(a_{ij}, b_i, c) \in \mathbb{R}^{10}$ y $X = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Con la tabla simétrica M ($m_{ii} := a_{ii}$, $m_{ij} = m_{ji} := a_{ij}/2$ si $i < j$), $MX := (\sum_j m_{ij} x_j)_i$ y $L := (b_1, b_2, b_3)$: $f(X) = X \cdot MX + L \cdot X + c$, y $MX \cdot Y = X \cdot MY$. f es **de segundo grado** si $M \neq 0$. Una **cuádrica** es el lugar $\{f = 0\}$ de un f de segundo grado; f es **sin términos mixtos** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$: $f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G$.

Las dos identidades se comprueban desarrollando (G1-002.D1, G1-002.T1): $X \cdot MX = \sum_i m_{ii} x_i^2 +$

$\sum_{i<j} 2m_{ij}x_ix_j = \sum_{i\le j} a_{ij}x_ix_j$ y $MX \cdot Y = \sum_{i,j} m_{ij}x_jy_i = \sum_{i,j} m_{ji}x_jy_i = X \cdot MY$, porque $m_{ij} = m_{ji}$.

Teorema G2-003.T1 (los coeficientes son únicos)

Si $f(X) = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^3$, todos los coeficientes de f son 0.

Demostración.

1. $g_3(x,y) := f(x,y,0) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$ es un polinomio cuadrático de dos variables (G1-030.D1) que vale 0 en todo $\mathbb{R}^2$. Por G1-030.T0, $a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_1 = b_2 = c = 0$.
2. Igual, $f(x,0,z)$ da $a_{13} = a_{33} = b_3 = 0$, y $f(0,y,z)$ da $a_{23} = 0$.
3. Entre los tres aparecen los diez coeficientes. ■

Teorema G2-003.T2 (cambio de coordenadas afín)

Sea $m(X') := x'_1w_1 + x'_2w_2 + x'_3w_3 + b$ con $w_1, w_2, w_3, b \in \mathbb{R}^3$. Entonces $f \circ m$ es un polinomio cuadrático. Si w_1, w_2, w_3 son independientes, m es biyectiva y $m^{-1}(Y) = ((Y-b)\cdot w_1^*, (Y-b)\cdot w_2^*, (Y-b)\cdot w_3^*)$ con $w_1^* := (w_2 \times w_3)/[w_1,w_2,w_3]$, $w_2^* := (w_3 \times w_1)/[w_1,w_2,w_3]$, $w_3^* := (w_1 \times w_2)/[w_1,w_2,w_3]$; m^{-1} es de la misma forma, f es de segundo grado $\Leftrightarrow$ $f \circ m$ lo es, y m lleva el lugar de $f \circ m$ sobre el lugar de f.

Demostración.

1. La coordenada i de $m(X')$ es $\ell_i(X') := \sum_k x'_k(w_k)_i + b_i$, una función afín de X'. El producto de dos funciones afines, desarrollado (K1, K2, K6, K9), es un polinomio cuadrático en X'; sumas y múltiplos de polinomios cuadráticos lo son. Así $f \circ m = \sum a_{ij}\ell_i\ell_j + \sum b_i\ell_i + c$ es cuadrático.
2. *Inversa.* Si w_1, w_2, w_3 son independientes, $[w_1,w_2,w_3] \neq 0$ (G1-022.T2) y los w_j^* están definidos. Por la simetría cíclica y la alternancia de G1-022.T1, $w_1^* \cdot w_1 = \frac{w_1\cdot(w_2\times w_3)}{[w_1,w_2,w_3]} = 1$, $w_1^* \cdot w_2 = \frac{[w_2,w_2,w_3]}{[w_1,w_2,w_3]} = 0$, y en general $w_i^* \cdot w_j = 1$ si $i = j$ y 0 si no.
3. Sea $n(Y) := ((Y-b)\cdot w_1^*, (Y-b)\cdot w_2^*, (Y-b)\cdot w_3^*)$. Si $Y = m(X')$, entonces $Y - b = \sum_j x'_jw_j$ y $(Y-b)\cdot w_i^* = \sum_j x'_j(w_j \cdot w_i^*) = x'_i$ (G1-002.T1): $n \circ m = \mathrm{id}$.
4. Dado Y, por Cramer (G1-026.T4) existe X' con $\sum_j x'_jw_j = Y - b$, es decir $m(X') = Y$; entonces $m(n(Y)) = m(n(m(X'))) = m(X') = Y$: $m \circ n = \mathrm{id}$. Por C1-011.T1, m es biyectiva y $m^{-1} = n$.
5. *Misma forma.* $n(Y) = \sum_k y_kc_k + b'$ con $c_k := ((w_1^*)_k, (w_2^*)_k, (w_3^*)_k)$ y $b' := -(b\cdot w_1^*, b\cdot w_2^*, b\cdot w_3^*)$. Si $\sum_k y_kc_k = 0$, entonces $n(Y) = n(0)$ y, como n es inyectiva, $Y = 0$: los c_k son independientes.

6. *Grado.* Si f tiene $M = 0$, cada ℓ_i entra con grado ≤ 1 y $f \circ m$ tiene grado ≤ 1. Si $f \circ m$ tuviera grado ≤ 1, entonces $(f \circ m) \circ n$ también (un polinomio de grado ≤ 1 compuesto con la función afín n del paso 5 tiene grado ≤ 1); pero $(f \circ m) \circ n = f$ como funciones, así que los coeficientes de la diferencia son 0 (G2-003.T1) y f tendría $M = 0$. Luego f es de segundo grado $\iff f \circ m$ lo es.
7. *Lugares.* $X' \in \{f \circ m = 0\} \iff m(X') \in \{f = 0\}$; como m es biyectiva, $m(\{f \circ m = 0\}) = \{f = 0\}$. ■

Lema G2-003.T5 (composición de movimientos de $\mathbb{R}^3$)

Si m_1 y m_2 son movimientos de $\mathbb{R}^3$ (G1-022.D4), $m_1 \circ m_2$ es un movimiento. Son movimientos: las traslaciones $X \mapsto X + b$; las permutaciones de coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ (σ una biyección de $\{1, 2, 3\}$); los cambios de signo $x_i \mapsto -x_i$; y la rotación $R(c, s)$ aplicada a dos coordenadas, dejando fija la tercera.

Demostración.

1. Sean $m_1(x) = \ell_1(x) + b_1$ con $\ell_1(x) := \sum_i x_i w_i$ y $m_2(x) = \sum_j x_j w'_j + b_2$, con (w_i) y (w'_j) bases ortonormales. ℓ_1 es lineal (G1-001.T1), así que
$$m_1(m_2(x)) = \sum_j x_j\, \ell_1(w'_j) + \ell_1(b_2) + b_1.$$
2. $\ell_1(v) = m_1(v) - m_1(0)$. Como m_1 conserva el producto punto de diferencias (G1-022.T4), $\ell_1(w'_j) \cdot \ell_1(w'_k) = (w'_j - 0) \cdot (w'_k - 0) = w'_j \cdot w'_k$: los $\ell_1(w'_j)$ son ortonormales y, por G1-021.T1, forman una base. Por G1-022.D4, $m_1 \circ m_2$ es un movimiento.
3. *Traslación:* $X + b = \sum x_i e_i + b$, base e_1, e_2, e_3.
4. *Permutación:* el vector $\sum_j x_j e_{\sigma^{-1}(j)}$ tiene en la coordenada i el x_j con $\sigma^{-1}(j) = i$, es decir $x_{\sigma(i)}$. Las columnas $e_{\sigma^{-1}(1)}, e_{\sigma^{-1}(2)}, e_{\sigma^{-1}(3)}$ son los tres e_i en otro orden (σ^{-1} es inyectiva): ortonormales.
5. *Cambio de signo:* columnas e_j $(j \neq i)$ y $-e_i$, ortonormales.
6. *Rotación en dos coordenadas,* por ejemplo (y, z): $(x, cy - sz, sy + cz) = xe_1 + y(0, c, s) + z(0, -s, c)$; como $c^2 + s^2 = 1$, las columnas son ortonormales (G1-011.T1). Igual con (x, y) o (x, z). ■

Teorema G2-003.T3 (reducción por movimientos)

Sea $f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G$ de segundo grado. Existe un movimiento m de $\mathbb{R}^3$ (G1-022.D4), compuesto de una traslación, una permutación de las coordenadas y, si hace falta, una rotación $R(c, s)$ en el plano de dos coordenadas, tal que $f \circ m$ tiene una de las formas (i) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta$ con $\alpha\beta\gamma \neq 0$; (ii) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \varepsilon z$ con $\alpha\beta\varepsilon \neq 0$; (iii) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta$ con $\alpha\beta \neq 0$; (iv) $\alpha x^2 + \varepsilon y$ con $\alpha\varepsilon \neq 0$; (v) $\alpha x^2 + \delta$ con $\alpha \neq 0$.

Idea de la demostración

Sin términos mixtos cada cuadrado se completa por separado. Lo que queda es lineal en las variables sin cuadrado; si son dos, una rotación las junta en una.

Demostración. En cada paso se reemplaza f por $f \circ m'$ con m' un movimiento; por G2-003.T2, el resultado sigue siendo de segundo grado y sin términos mixtos (los cambios de cada paso no mezclan una variable con cuadrado con otra).

1. Sea k el número de coeficientes no nulos entre A, B, C; $k \geq 1$ porque f es de segundo grado. Sea σ la permutación que pone primero, en orden creciente, los índices con coeficiente no nulo y después los demás, también en orden (no hay nada que elegir). Con la permutación de coordenadas p de σ (G2-003.T5),
$$f \circ p = \sum_{i \leq k} \alpha_i x_i^2 + \sum_i d_i x_i + G, \qquad \alpha_i \neq 0.$$
2. *Completar cuadrados.* Para $i \leq k$, $\alpha_i x_i^2 + d_i x_i = \alpha_i (x_i + h_i)^2 - d_i^2/(4\alpha_i)$ con $h_i := d_i/(2\alpha_i)$ (G1-005.T1). Con la traslación $\tau(X') := X' - h$, $h := (h_1, \dots, h_k, 0, \dots)$ (G1-030.T2),
$$f \circ p \circ \tau = \sum_{i \leq k} \alpha_i x_i^2 + \sum_{i > k} d_i x_i + G', \qquad G' := G - \sum_{i \leq k} \frac{d_i^2}{4\alpha_i}.$$
3. $k = 3$*:* es la forma (i), con $\delta := G'$.
4. $k = 2$*:* queda $\alpha x^2 + \beta y^2 + \varepsilon z + G'$. Si $\varepsilon \neq 0$, la traslación $z \mapsto z - G'/\varepsilon$ da (ii); si $\varepsilon = 0$, es (iii).
5. $k = 1$*:* queda $\alpha x^2 + Ey + Fz + G'$ (con E, F los coeficientes que sobreviven). Si $(E, F) \neq 0$, sea $N := |(E, F)|$ y $(c, s) := (E, F)/N$, unitario (G1-002.T3). Con la rotación de (y, z), $r(x, y, z) := (x, cy - sz, sy + cz)$ (G2-003.T5; es la de G1-011.T2 que lleva e_1 en (c, s)):
$$E(cy - sz) + F(sy + cz) = (Ec + Fs)y + (Fc - Es)z = Ny + 0 \cdot z,$$

pues $Ec + Fs = (E^2 + F^2)/N = N$ y $Fc - Es = (FE - EF)/N = 0$. Queda $\alpha x^2 + Ny + G'$, y la traslación $y \mapsto y - G'/N$ da (iv) con $\varepsilon = N$.

6. $k = 1$, $E = F = 0$: es (v).
7. Los casos se distinguen por k y por si los coeficientes lineales que sobreviven son nulos, sin elegir nada. La composición de los movimientos usados es un movimiento (G2-003.T5), y por G2-003.T2 lleva el lugar de $f \circ m$ sobre el de f. ■

⚠ Por qué hace falta la rotación

En $x^2 + 3y + 4z + 5 = 0$ no hay cuadrado en y ni en z. La rotación con $(c, s) = (3/5, 4/5)$ da $3y + 4z = 5y'$ y la ecuación queda $x^2 + 5y' + 5 = 0$: forma (iv) tras trasladar.

Parte 2 · Las 17 formas

Teorema G2-003.T4 (las 17 formas: toda cuádrica es congruente a una de ellas)

Toda cuádrica sin términos mixtos es la imagen por un movimiento de $\mathbb{R}^3$ del lugar de una de estas ecuaciones ($a, b, c, p > 0$):

con centro: (1) elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$; (2) hiperboloide de una hoja $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$; (3) hiperboloide de dos hojas $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$; (4) cono $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$; (5) un punto $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$; (6) vacío $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = -1$;

sin centro: (7) paraboloide elíptico $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$; (8) paraboloide hiperbólico $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$;

cilíndricas: (9) cilindro elíptico $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; (10) cilindro hiperbólico $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; (11) dos planos que se cortan $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$; (12) una recta $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$; (13) vacío $x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$; (14) cilindro parabólico $x^2 = 4py$; (15) dos planos paralelos $x^2 = a^2$; (16) un plano $x^2 = 0$; (17) vacío $x^2 = -a^2$.

Los lugares de (5), (11), (12) y (16) son $\{0\}$, los planos $x/a = \pm y/b$, el eje z y el plano $x = 0$. El enunciado es **de existencia** (la lista es exhaustiva); no afirma que la forma sea única: (6), (13) y (17) tienen el mismo lugar, $\emptyset$, y G2-005.C1 distingue solo algunas de las demás.

Idea de la demostración
En cada una de las cinco formas de G2-003.T3 se multiplica por un escalar y se ordenan los signos con movimientos; cada coeficiente positivo se escribe $1/a^2$. El número de signos positivos decide el nombre.

Demostración. Dos observaciones previas:

- Si $\lambda \neq 0$, $\{\lambda g = 0\} = \{g = 0\}$ (C1-002.T5).
- Los cambios de signo $x_i \mapsto -x_i$ y las permutaciones de coordenadas son movimientos (G2-003.T5); componerlos con m da otro movimiento, y el lugar se transforma según G2-003.T2.

Sea m el movimiento de G2-003.T3, de modo que $\{f = 0\} = m(\{f \circ m = 0\})$ (G2-003.T2). Todo coeficiente positivo α se escribe $\alpha = 1/a^2$ con $a := 1/\sqrt{\alpha} > 0$ (G1-002.T2).

1. *Forma (i), $\delta \neq 0$.* Al dividir entre $-\delta$: $\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 = 1$ con $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$. Se permutan las coordenadas para poner primero los positivos. Con 3, 2, 1 o 0 positivos sale (1), (2), (3) o (6), respectivamente (en (6), los tres negativos se escriben $-1/a^2$, etc.).
2. *Forma (i), $\delta = 0$.* Si α, β, γ tienen el mismo signo, multiplicando por -1 si hace falta, los tres son positivos: (5). Si no, multiplicando por -1 si hace falta, hay exactamente dos positivos; se permutan para que el negativo vaya al final: (4).
3. *Forma (ii).* $\alpha x^2 + \beta y^2 + \varepsilon z = 0 \iff z = \alpha' x^2 + \beta' y^2$ con $\alpha' := -\alpha/\varepsilon$, $\beta' := -\beta/\varepsilon$. Ambos positivos: (7). Uno positivo y uno negativo: se permutan x, y para que el positivo vaya primero: (8). Ambos negativos: con $z \mapsto -z$ queda $z = |\alpha'|x^2 + |\beta'|y^2$: (7).
4. *Forma (iii).* Si $\delta \neq 0$, al dividir entre $-\delta$: $\alpha' x^2 + \beta' y^2 = 1$; dos positivos (9), uno (10, permutando), ninguno (13). Si $\delta = 0$: mismo signo (12), signos distintos (11, multiplicando por -1 y permutando si hace falta).
5. *Forma (iv).* $\alpha x^2 + \varepsilon y = 0 \iff x^2 = -(\varepsilon/\alpha)y$. Si $-\varepsilon/\alpha > 0$ es (14) con $p := -\varepsilon/(4\alpha)$; si no, con $y \mapsto -y$ es (14) con $p := \varepsilon/(4\alpha)$.
6. *Forma (v).* $x^2 = -\delta/\alpha$: positivo (15) con $a := \sqrt{-\delta/\alpha}$, cero (16), negativo (17).
7. *Los lugares.* (5): una suma de términos ≥ 0 es 0 solo si cada uno lo es (C1-003.T9), así que $x = y = z = 0$. (12): igual, $x = y = 0$: el eje z. (16): $x^2 = 0 \iff x = 0$ (C1-002.T5). (11): $x^2/a^2 - y^2/b^2 = (x/a - y/b)(x/a + y/b) = 0 \iff x/a = y/b$ o $x/a = -y/b$ (C1-002.T5).
8. (6), (13) y (17) piden una suma de términos ≥ 0 igual a un número negativo: son vacías. ■

Ejemplo G2-003.E1

$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 2z + 7 = 0$ es $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 - (z-1)^2 = 1$: un hiperboloide de una hoja de centro $(1, -2, 1)$ (tipo (2) con $a = 1, b = 1/\sqrt{2}, c = 1$); $y^2 - 2x + 4y = 0$ es $(y+2)^2 = 2(x+2)$, un cilindro parabólico (tipo (14) con $p = 1/2$).

1. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, $2y^2 + 8y = 2(y+2)^2 - 8$, $-z^2 + 2z = -(z-1)^2 + 1$ (G1-005.T1); la suma de las constantes es $-1 - 8 + 1 + 7 = -1$.
2. Así la ecuación es $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 - (z-1)^2 = 1$; con $2 = 1/b^2$, $b = 1/\sqrt{2}$.
3. $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$, así que $y^2 - 2x + 4y = (y+2)^2 - 2(x+2)$. Intercambiando $x \leftrightarrow y$ y trasladando por $(-2, -2, 0)$ queda $x^2 = 2y = 4 \cdot \frac{1}{2} y$.

Ejemplo G2-003.E2 (el toro no es una cuádrica)

Ningún polinomio cuadrático de tres variables tiene por lugar el toro de G2-002.E1.

Demostración.

1. Supón que f es cuadrático y $\{f = 0\}$ es el toro $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = \rho^2$, $0 < \rho < R$.
2. En el eje x ($y = z = 0$), $(|t| - R)^2 = \rho^2 \iff |t| = R \pm \rho$ (G1-002.T2), así que el toro contiene los cuatro puntos $(t, 0, 0)$ con $t \in \{\pm(R + \rho), \pm(R - \rho)\}$, distintos porque $R - \rho > 0$.
3. $g(t) := f(t, 0, 0) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ se anula en esos cuatro números.
4. Si $\alpha \neq 0$, g tiene a lo más dos raíces (G1-005.T1); si $\alpha = 0 \neq \beta$, una. Luego $\alpha = \beta = 0$, y entonces $\gamma = g(R + \rho) = 0$: $g \equiv 0$.
5. En particular $f(0) = 0$ y el origen estaría en el toro; pero $(0 - R)^2 + 0^2 = R^2 \neq \rho^2$. Contradicción. ■

Por qué cada hipótesis

⚠ Sin términos mixtos

$xy - z = 0$ no se deja completar por separado: el término xy mezcla dos variables. Hace falta una rotación de los ejes x, y (G2-013) para llevarlo a $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - z = 0$, tipo (8).

⚠ Existencia, no unicidad

$x^2+y^2+z^2=-1$, $x^2+y^2=-1$ y $x^2=-1$ son las formas (6), (13) y (17): tres renglones de la lista, un solo lugar, $\emptyset$. La lista cubre todos los casos; no dice que dos formas distintas den lugares que no se puedan mover uno en el otro.

⚠ Movimientos, no cualquier cambio

Con $(x,y,z)\mapsto(2x,y,z)$, que no es un movimiento, la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ se vuelve el elipsoide $4x^2+y^2+z^2=1$. Los semiejes a,b,c de la lista solo tienen sentido porque se usan movimientos.

Ejercicios

1. Reduce $2x^2-y^2+4x+6y-9=0$ (sin z) y di su tipo.
2. Reduce $x^2-4y+2z=0$ y di su tipo.
3. Demuestra que $x^2+y^2+z^2+2x+2=0$ es vacío.
4. ¿Qué tipo es $-x^2-y^2+z^2=1$? ¿Y $-x^2-y^2+z^2=0$?
5. Demuestra que si f es sin términos mixtos y $f(X)=f(-X)$ para todo X, entonces $D=E=F=0$.

Respuestas

1. $2(x+1)^2-(y-3)^2=9+2-9=2$: $(x+1)^2-(y-3)^2/2=1$, cilindro hiperbólico (10).
2. $k=1$, $(E,F)=(-4,2)$, $N=2\sqrt{5}$: tras la rotación, $x^2+2\sqrt{5}\,y'=0$, es decir $x^2=4\cdot(\sqrt{5}/2)\,(-y')$: cilindro parabólico (14) con $p=\sqrt{5}/2$.
3. $(x+1)^2+y^2+z^2=-1<0$: forma (6).
4. Al permutar (z primero) es $z^2-x^2-y^2=1$: un positivo, tipo (3), dos hojas. La segunda es el cono (4).
5. $f(X)-f(-X)=2(Dx+Ey+Fz)=0$ para todo X; con $X=e_1,e_2,e_3$, $D=E=F=0$.

G2-004 · Simetrías, extensión y trazas; ejes paralelos

Motivación

> **Rebanar la torre**
> La torre de enfriamiento $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se entiende rebanándola. Los cortes horizontales $z = k$ son circunferencias que crecen al alejarse de la cintura. Los cortes verticales $x = k$ son hipérbolas… salvo uno: el plano $x = 1$, que toca la cintura, la corta en dos rectas, $y = z$ y $y = -z$. Este capítulo da las herramientas para leer una cuádrica: sus simetrías, si es acotada o no, y sus secciones planas, que siempre son cónicas o degeneradas.
> Dónde falla la analogía: una torre de concreto no deja ver sus rectas; las torres de varillas metálicas sí (G2-005).

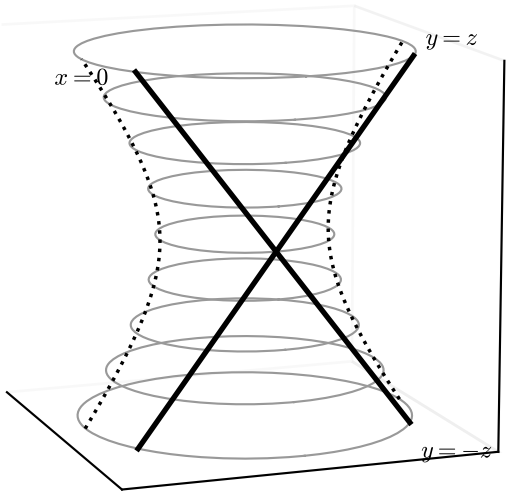


Figura 3: Trazas de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$: circunferencias horizontales (gris), la hipérbola $x = 0$ (punteada) y las dos rectas del plano $x = 1$.

Simetrías

Teorema G2-004.T1 (simetrías de las canónicas)

Sean $\sigma_1(x, y, z) := (-x, y, z)$, $\sigma_2(x, y, z) := (x, -y, z)$ y $\sigma_3(x, y, z) := (x, y, -z)$, las simetrías respecto a los planos coordenados (G1-004.D1). Si $f \circ \sigma_i = f$, el lugar de f es simétrico respecto a σ_i (G1-004.D2); $\sigma_1\sigma_2$ es la simetría respecto al eje z (y cíclicamente) y $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -\mathrm{id}$ es la simetría respecto al origen. Las formas (1)-(6), (9)-(13) y (15)-(17) de G2-003.T4 son simétricas respecto a los tres planos coordenados, los tres ejes y el origen; (7) y (8), respecto a $x = 0, y = 0$ y el eje z; (14), respecto a $x = 0, z = 0$ y el eje y.

Demostración.

1. Para $H = N(0, e_1)$, G1-004.D1 da $\sigma_H(P) = P - 2(P \cdot e_1)e_1 = (-x, y, z) = \sigma_1(P)$; igual σ_2, σ_3 con e_2, e_3.
2. Sea $S := \{f = 0\}$ y $f \circ \sigma_i = f$. Si $X \in S$, $f(\sigma_i(X)) = f(X) = 0$: $\sigma_i(S) \subset S$. Como $\sigma_i \circ \sigma_i = \mathrm{id}$

(G1-004.T1), $S = \sigma_i(\sigma_i(S)) \subset \sigma_i(S)$. Así $\sigma_i(S) = S$.

3. $\sigma_1\sigma_2(X) = (-x, -y, z)$. El pie de X en el eje z es $F = (0, 0, z)$ (G1-003.T5), y $2F - X = (-x, -y, z)$: es σ_L con L el eje z (G1-004.D1). Cíclicamente para los ejes x, y.
4. $\sigma_1\sigma_2\sigma_3(X) = -X = 2 \cdot 0 - X$: la simetría respecto al origen.
5. Si $f \circ \sigma_i = f$ y $f \circ \sigma_j = f$, entonces $f \circ (\sigma_i\sigma_j) = (f \circ \sigma_i) \circ \sigma_j = f$, y el paso 2 vale para la composición (que también es su propia inversa).
6. En (1)-(6), (9)-(13) y (15)-(17) las variables solo aparecen al cuadrado: $f \circ \sigma_i = f$ para $i = 1, 2, 3$.
7. En (7) y (8), $f = z - x^2/a^2 \mp y^2/b^2$ es invariante por σ_1 y σ_2, luego por $\sigma_1\sigma_2$ (eje z). En (14), $f = x^2 - 4py$ es invariante por σ_1, σ_3 y $\sigma_1\sigma_3$, la simetría respecto al eje y. ■

Extensión

Definición G2-004.D1 (acotado)

$S \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe K con $|X| \leq K$ para todo $X \in S$; si no, es **no acotado**: para todo $K > 0$ hay $X \in S$ con $|X| > K$.

Teorema G2-004.T2 (extensión)

El elipsoide (1) está en $\{|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$, luego es acotado; el hiperboloide de dos hojas (3) cumple $|x| \geq a$ y es la unión disjunta de sus partes $x \geq a$ y $x \leq -a$, ambas no vacías; el paraboloide elíptico (7) está en $z \geq 0$. Las formas (2), (3), (4), (7)-(12) y (14)-(16) no son acotadas.

Demostración.

1. En (1), $x^2/a^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (C1-003.T9), así que $x^2 \leq a^2$ y $|x| \leq a$ (G1-002.T2); igual $|y| \leq b$, $|z| \leq c$. Entonces $|X|^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ (G1-002.T3).
2. En (3), $x^2/a^2 = 1 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \geq 1$, así que $|x| \geq a$: cada punto tiene $x \geq a$ o $x \leq -a$, no ambas. $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$ están en (3).
3. En (7), $z = x^2/a^2 + y^2/b^2 \geq 0$ (C1-003.T9).
4. *No acotadas* (G2-004.D1). Basta, para cada forma, una familia de puntos $X(t)$ del lugar con $|X(t)| \geq k|t|$, $k > 0$: dado K, C1-007.C1 da $n \in \mathbb{N}$ con $n > K/k$, y $|X(n)| > K$.

   – (2): $(a\sqrt{1 + t^2}, 0, ct)$, pues $(1 + t^2) - t^2 = 1$; $|X(t)| \geq c|t|$.

- (3): $(a\sqrt{1+t^2}, bt, 0)$; $|X(t)| \geq b|t|$.
- (4): $(at, 0, ct)$; $|X(t)| \geq a|t|$.
- (7) y (8): $(at, 0, t^2)$; $|X(t)| \geq a|t|$.
- (9)-(12) y (14)-(16): sus ecuaciones no contienen z, así que son cilindros de dirección e_3 (G2-001.T2); cada una contiene un punto X_0 ($(a, 0, 0)$ en (9), (10), (15); el origen en (11), (12), (14), (16)) y entonces toda la recta $X_0 + te_3$, con $|X_0 + te_3| \geq |z_0 + t|$. ■

Secciones planas

Teorema G2-004.T3 (secciones planas)

Sean f cuadrático de segundo grado en $\mathbb{R}^3$ y Π un plano con carta $\varphi(x', y') = P_0 + x'u + y'w$ (G1-032.D2). Entonces $g := f \circ \varphi$ es un polinomio cuadrático de dos variables y $\Pi \cap \{f = 0\} = \varphi(\{g = 0\})$; en consecuencia la sección es una elipse, hipérbola o parábola de Π, o un punto, una recta, dos rectas (paralelas o que se cortan), el vacío o todo Π. Si f no tiene términos mixtos y $\Pi = \{z = k\}$ ($u = e_1, w = e_2, P_0 = ke_3$), $g(x', y') = f(x', y', k)$ tampoco tiene término $x'y'$.

Idea de la demostración

La carta es afín; f compuesta con funciones afines sigue siendo cuadrática, y en el plano la clasificación ya está hecha (G1-031.T3).

Demostración.

1. Cada coordenada de $\varphi(x', y')$ es $p_i + x'u_i + y'w_i$, afín en (x', y'). Al sustituir en $f = \sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c$ (G2-003.D1), cada producto de dos funciones afines es un polinomio de grado ≤ 2 en (x', y') (K1, K2, K6, K9): g es un polinomio cuadrático de dos variables (G1-030.D1).
2. φ es una biyección de $\mathbb{R}^2$ sobre Π (G1-032.D2, C1-011.T1). Así $X \in \Pi \cap \{f = 0\} \iff X = \varphi(X')$ con $f(\varphi(X')) = 0 \iff X \in \varphi(\{g = 0\})$.
3. Si g es de segundo grado, por G1-031.T3 su lugar es una elipse, un punto, el vacío, una hipérbola, dos rectas que se cortan, una parábola, dos rectas paralelas o una recta.
4. Si g tiene grado ≤ 1, $g = Dx' + Ey' + F'$: si $(D, E) \neq 0$, $\{g = 0\}$ es una recta (G1-023.T1); si $D = E = 0$, es el vacío ($F' \neq 0$) o todo $\mathbb{R}^2$ ($F' = 0$).
5. Por G1-032.D2, $S \subset \Pi$ es una elipse, hipérbola, parábola, recta, … de Π si $\varphi^{-1}(S)$ lo es; con el paso 2, $\varphi^{-1}(\Pi \cap \{f = 0\}) = \{g = 0\}$.

6. Si $\Pi = \{z = k\}$ con esa carta, $\varphi(x', y') = (x', y', k)$ y $g(x', y') = f(x', y', k)$. Como f no tiene términos xy, xz, yz, el único producto de dos variables distintas que podría dar $x'y'$ no aparece; los términos xz, yz ausentes tampoco. ■

⚠ La carta tiene que ser ortonormal

Con $\varphi(x', y') = (2x', y', 0)$ (no es una carta: $|2e_1| \neq 1$), la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por $z = 0$ se lee $4x'^2 + y'^2 = 1$, una elipse, cuando en realidad es una circunferencia. El tipo se conservaría, pero las medidas no: G1-032.D2 pide (u, w) ortonormal para que φ sea una isometría.

Cuádricas trasladadas

Teorema G2-004.T4 (cuádricas trasladadas)

Para $X_0 \in \mathbb{R}^3$, el lugar de $X \mapsto f(X - X_0)$ es $X_0 + \{f = 0\}$, y las simetrías de G2-004.T1 se trasladan con él (planos, ejes y centro por X_0). En particular $A(x-h)^2 + B(y-k)^2 + C(z-l)^2 = K$ es la forma correspondiente de G2-003.T4 con centro (h, k, l).

Demostración.

1. $f(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in \{f = 0\} \iff X \in X_0 + \{f = 0\}$ (es G2-003.T2 con el cambio $m(X') = X' - X_0$, cuyo lugar se mueve por m^{-1}).
2. Si σ es una simetría de $S := \{f = 0\}$, la función $\tilde{\sigma}(X) := X_0 + \sigma(X - X_0)$ cumple $\tilde{\sigma}(X_0 + S) = X_0 + \sigma(S) = X_0 + S$.
3. *Plano.* Para σ_H con $H = N(0, n)$: $X_0 + (X - X_0) - 2\frac{(X - X_0)\cdot n}{|n|^2} n = \sigma_{H'}(X)$ con $H' = N(X_0, n)$, el plano paralelo por X_0 (G1-004.D1).
4. *Eje.* Para $L = L(0, v)$, el pie de $X - X_0$ es $F(X - X_0) = \text{proy}_v(X - X_0)$ y el pie de X en $L' = L(X_0, v)$ es $X_0 + \text{proy}_v(X - X_0)$ (G1-003.T5). Entonces $X_0 + 2F(X - X_0) - (X - X_0) = 2(X_0 + F(X - X_0)) - X = \sigma_{L'}(X)$.
5. *Centro.* $X_0 - (X - X_0) = 2X_0 - X = \sigma_{X_0}(X)$.
6. Si $A(x-h)^2 + B(y-k)^2 + C(z-l)^2 = K$, con $X_0 = (h, k, l)$ es el lugar de $X \mapsto f(X - X_0)$ para $f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - K$, que G2-003.T4 (sin traslación) lleva a una de sus formas con centro en el origen; por los pasos 1-5, el centro y las simetrías pasan a X_0. ■

Ejemplo G2-004.E1 (trazas del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$)
Las secciones $z = k$ son las circunferencias de centro $(0, 0, k)$ y radio $\sqrt{1 + k^2}$; las secciones $x = k$ son las hipérbolas $y^2 - z^2 = 1 - k^2$ si $|k| \neq 1$ y el par de rectas $y = \pm z$ si $k = \pm 1$ (anuncio de G2-005).

1. $z = k$: $x^2 + y^2 = 1 + k^2 > 0$, la circunferencia de centro $(0, 0, k)$ y radio $\sqrt{1 + k^2}$ del plano $z = k$ (G1-005.T2 en la carta $(x', y') \mapsto (x', y', k)$).
2. $x = k$, $|k| \neq 1$: con la carta $(y', z') \mapsto (k, y', z')$, $y'^2 - z'^2 = 1 - k^2 \neq 0$; al dividir entre $1 - k^2$ es una hipérbola (G1-030.T3: $AC < 0$ y no son dos rectas porque el lado derecho no es 0).
3. $x = \pm 1$: $y'^2 - z'^2 = (y' - z')(y' + z') = 0$, las rectas $y' = z'$ y $y' = -z'$ (C1-002.T5).

Por qué cada hipótesis

⚠ Segundo grado

Con $f = z$ (de grado 1) y $\Pi = \{z = 0\}$, la «sección» es todo Π. Si f es de segundo grado, también puede salir todo Π: $f = z^2$ con $\Pi = \{z = 0\}$; por eso la lista de G2-004.T3 lo incluye.

⚠ Que la sección sea degenerada

El elipsoide (1) cortado por $z = c$ da $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$, un punto; por $z = 2c$, el vacío. «Las secciones paralelas a los planos coordenados son elipses» solo es cierto para $|z| < c$.

Ejercicios

1. Encuentra las trazas $z = k$ del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y di su tipo según k.
2. ¿Respecto a qué planos es simétrica $x^2 + 2y^2 - 4z = 0$?
3. Demuestra que el cono (4) no es acotado y que su sección por $z = c$ ($c \neq 0$) es una elipse.
4. Escribe la ecuación del elipsoide con centro $(1, 2, -1)$ y semiejes 2, 1, 3 paralelos a los ejes.
5. Demuestra que la sección del cilindro parabólico $x^2 = 4py$ por el plano $y = x$ es un par de rectas paralelas.

Respuestas

1. $x^2 - y^2 = k$: hipérbola si $k \neq 0$ (eje focal x si $k > 0$, y si $k < 0$); las rectas $y = \pm x$ si $k = 0$.
2. Respecto a $x = 0$ y $y = 0$ (y al eje z): las variables x, y aparecen al cuadrado; z no.
3. $(at, 0, ct)$ está en (4) y $|X| \geq a|t|$. En $z = c$: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = c^2/c^2 = 1$.
4. $(x-1)^2/4 + (y-2)^2 + (z+1)^2/9 = 1$.
5. Con la carta $(s, z') \mapsto (s/\sqrt{2}, s/\sqrt{2}, z')$: $s^2/2 = 4ps/\sqrt{2}$, es decir $s(s - 4\sqrt{2}p) = 0$: dos rectas paralelas $s = 0$ y $s = 4\sqrt{2}p$ del plano (dirección e_3).

G2-005 · Superficies regladas

Motivación

> **Dos aros y unos hilos**
> Une dos aros horizontales con hilos tensos verticales: tienes un cilindro. Gira ahora el aro de arriba un cuarto de vuelta. Los hilos siguen rectos, pero la superficie se cierra en una «cintura»: es un hiperboloide de una hoja. Si giras el aro hacia el otro lado obtienes la misma superficie con hilos inclinados al revés. Por cada punto pasan exactamente dos hilos, uno de cada familia. Una papa frita en forma de silla de montar, $z = x^2 - y^2$, tiene la misma propiedad: puedes apoyar una regla que la toque a todo lo largo, en dos direcciones. Un huevo o un tazón no la tienen. Dónde falla la analogía: los hilos tienen grosor y se tocan cerca de la cintura; las rectas no.

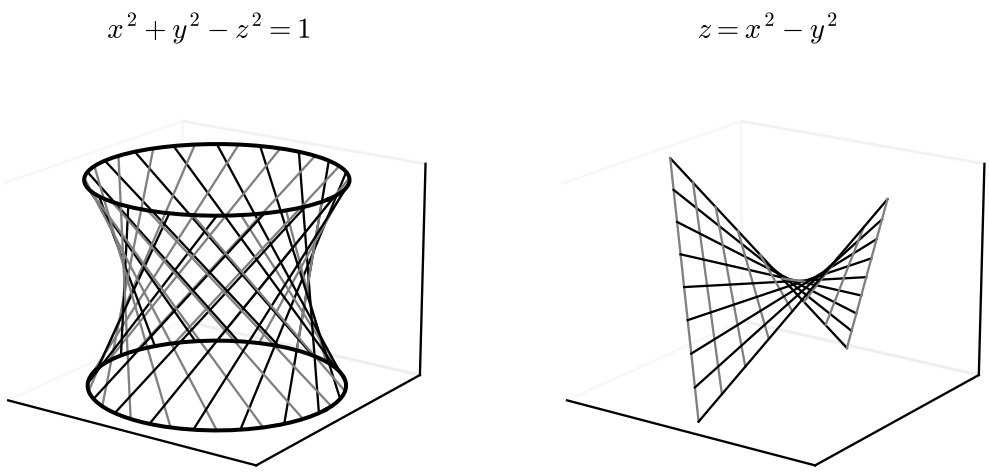


Figura 4: Las dos familias de rectas del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (con los aros $z = \pm 1$) y del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

Parte 1 · Rectas en una cuádrica; el hiperboloide de una hoja

Definición G2-005.D1 (reglada)

$S \subset \mathbb{R}^3$ es **reglada** si por cada punto de S pasa al menos una recta contenida en S, y **doblemente reglada** si por cada punto pasan al menos dos rectas distintas contenidas en S.

Teorema G2-005.T1 (desarrollo en una recta)

Para $f(X) = X \cdot MX + L \cdot X + c$ (G2-003.D1), $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$:

$$f(P_0 + tv) = f(P_0) + t\, G_f(P_0) \cdot v + t^2 Q(v),$$

con $Q(v) := v \cdot Mv$ y $G_f(P_0) := 2MP_0 + L$ (el **vector polar**). Para $v \neq 0$, la recta $L(P_0, v)$ está contenida en $\{f = 0\} \iff f(P_0) = 0$, $G_f(P_0) \cdot v = 0$ y $Q(v) = 0$.

Demostración.

1. $X \mapsto MX$ es lineal (cada coordenada $\sum_j m_{ij} x_j$ lo es), así que $M(P_0 + tv) = MP_0 + tMv$.
2. Por G1-002.T1,

$$(P_0 + tv) \cdot M(P_0 + tv) = P_0 \cdot MP_0 + t\, P_0 \cdot Mv + t\, v \cdot MP_0 + t^2\, v \cdot Mv.$$

3. Por la simetría $MX \cdot Y = X \cdot MY$ (G2-003.D1), $P_0 \cdot Mv = MP_0 \cdot v$; así los dos términos centrales suman $2t\, MP_0 \cdot v$.
4. Además $L \cdot (P_0 + tv) = L \cdot P_0 + t\, L \cdot v$. Sumando, $f(P_0 + tv) = (P_0 \cdot MP_0 + L \cdot P_0 + c) + t(2MP_0 + L) \cdot v + t^2\, v \cdot Mv$.
5. La recta está contenida en $\{f = 0\} \iff$ el polinomio en t del paso 4 vale 0 para todo $t \iff$ sus tres coeficientes son 0 (G1-020.T7). ■

Teorema G2-005.T2 (conos y cilindros)

Todo cilindro $\mathrm{Cil}(\Gamma, v)$ es reglado. Para $V \notin \Gamma$, el **cono** de vértice V sobre Γ, $\mathrm{Cono}(V, \Gamma) := \bigcup_{P \in \Gamma} L(V, P - V)$, es reglado. La cuádrica (4) de G2-003.T4 es el cono de vértice 0 sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ del plano $z = c$, y (9), (10), (14) son cilindros sobre cónicas: todas son regladas.

Demostración.

1. *Cilindro.* Si $X = P + tv$ con $P \in \Gamma$, entonces $X \in L(P, v)$ y $L(X, v) = L(P, v)$ (G1-001.T4(a)), que está contenida en $\mathrm{Cil}(\Gamma, v)$ (G2-001.D1).
2. *Cono.* Si $X \in \mathrm{Cono}(V, \Gamma)$, hay $P \in \Gamma$ con $X \in L(V, P - V)$; como $V \notin \Gamma$, $P - V \neq 0$ y $L(V, P - V)$ es una recta contenida en el cono que pasa por X.
3. *La forma (4).* Sea $f := x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2$, de modo que $f(tX) = t^2 f(X)$. Sea E_c la elipse $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ z = c\}$; $0 \notin E_c$ porque $c \neq 0$.
4. Si $P \in E_c$, $f(P) = 1 - 1 = 0$, luego $f(tP) = 0$ para todo t: $L(0, P) \subset \{f = 0\}$.
5. Si $X \in \{f = 0\}$ y $X \neq 0$, entonces $z \neq 0$: si $z = 0$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$ y $x = y = 0$ (C1-003.T9). Sea $P := (c/z)X$: su tercera coordenada es c y $f(P) = (c/z)^2 f(X) = 0$, así que $x_P^2/a^2 + y_P^2/b^2 = c^2/c^2 = 1$ y $P \in E_c$; además $X = (z/c)P \in L(0, P)$. El origen está en todas las $L(0, P)$. Así $\{f = 0\} = \mathrm{Cono}(0, E_c)$.
6. (9), (10), (14) no contienen z: son cilindros de dirección e_3 (G2-001.T2) sobre una elipse, una hipérbola y una parábola (G2-001.T3, con $x \leftrightarrow y$ en (14)). Por los pasos 1 y 2, todas son regladas. ■

Teorema G2-005.T3 (el hiperboloide de una hoja es doblemente reglado)

Sean $S : x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ y $D(x, y, z) := (x/a, y/b, z/c)$. Para $\varepsilon = \pm 1$ y $w \in \mathbb{R}^2$ unitario sea $\ell_\varepsilon(w) := \{D^{-1}(w + t\varepsilon w^\perp, t) : t \in \mathbb{R}\}$ (la **familia** ε). Entonces cada $\ell_\varepsilon(w)$ es una recta contenida en S; por cada $P_0 \in S$ pasa exactamente una recta de cada familia; y ninguna otra recta está contenida en S. Así, por cada punto de S pasan exactamente dos rectas de S.

Aquí (p, z) con $p \in \mathbb{R}^2$ denota el punto (p_1, p_2, z) de $\mathbb{R}^3$.

> **Idea de la demostración**
> Con D basta el caso $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Por G2-005.T1, una dirección $(v_1, v_2, 1)$ funciona si cumple una ecuación de segundo grado y una lineal: hay exactamente dos soluciones. Cada una es la recta de una familia.

Demostración.

1. *Reducción.* D es lineal y biyectiva, con $D^{-1}(x, y, z) = (ax, by, cz)$, y $X \in S \iff D(X) \in S_1$, donde $S_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Como $D^{-1}(P + tv) = D^{-1}P + tD^{-1}v$ y $D^{-1}v \neq 0$ si $v \neq 0$, D^{-1} lleva

las rectas contenidas en S_1 biyectivamente sobre las contenidas en S, y conserva «pasar por un punto». Basta probar todo para S_1, donde $\ell_\varepsilon(w) = \{(w + t\varepsilon w^\perp, t)\}$.

2. *Cada $\ell_\varepsilon(w)$ está en S_1.* $(w + t\varepsilon w^\perp, t) = (w, 0) + t(\varepsilon w^\perp, 1)$ es la recta $L((w, 0), (\varepsilon w^\perp, 1))$. Como $w \cdot w^\perp = 0$ y $|w^\perp| = |w| = 1$ (G1-003.T2), $|w + t\varepsilon w^\perp|^2 = 1 + t^2$ (G1-002.T3), y $(1 + t^2) - t^2 = 1$.
3. *Rectas por $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S_1$.* Aquí $M = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$, $L = 0$, $c = -1$: $Q(v) = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2$ y $G_f(P_0) = 2(x_0, y_0, -z_0)$. Por G2-005.T1, $L(P_0, v) \subset S_1 \iff$

$$v_1^2 + v_2^2 = v_3^2 \quad \text{y} \quad x_0 v_1 + y_0 v_2 = z_0 v_3.$$

4. Si $v_3 = 0$, la primera da $v_1 = v_2 = 0$ (C1-003.T9) y $v = 0$. Así $v_3 \neq 0$ y $L(P_0, v) = L(P_0, v/v_3)$ (G1-001.T4(a)): basta buscar direcciones con $v_3 = 1$.
5. Sea $p := (x_0, y_0)$; como $P_0 \in S_1$, $|p|^2 = 1 + z_0^2$. Sean $\rho := \sqrt{1 + z_0^2} > 0$ y $u := p/\rho$, unitario. Por G1-008.T3, $(v_1, v_2) = \alpha u + \beta u^\perp$ con $\alpha = (v_1, v_2) \cdot u$, $\beta = (v_1, v_2) \cdot u^\perp$, y $v_1^2 + v_2^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
6. Las condiciones del paso 3 con $v_3 = 1$ son $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y $p \cdot (v_1, v_2) = \rho\alpha = z_0$. Luego $\alpha = z_0/\rho$ y $\beta^2 = 1 - z_0^2/\rho^2 = 1/\rho^2$, es decir $\beta = \pm 1/\rho$ (G1-002.T2); y las dos opciones cumplen ambas condiciones.
7. Hay exactamente dos direcciones con $v_3 = 1$, no proporcionales (sus β difieren); por G1-001.T4(d) dan dos rectas distintas por P_0, y son las únicas rectas de S_1 que pasan por P_0.
8. *La recta de la familia ε por P_0.* $P_0 \in \ell_\varepsilon(w) \iff$ hay t con $(w + t\varepsilon w^\perp, t) = (p, z_0) \iff t = z_0$ y $w + \varepsilon z_0 w^\perp = p$.
9. Sea $J := R(0, 1)$, lineal con $Jx = x^\perp$ (G1-011.T1) y $J^2 = -I$ ($(x^\perp)^\perp = -x$, G1-003.T2). Entonces

$$(I - \varepsilon z_0 J)(I + \varepsilon z_0 J) = I - z_0^2 J^2 = (1 + z_0^2) I,$$

y lo mismo en el otro orden. Aplicando $I - \varepsilon z_0 J$ a $(I + \varepsilon z_0 J)w = p$:

$$w = \frac{p - \varepsilon z_0 p^\perp}{1 + z_0^2},$$

única; y esta w cumple la ecuación, por la identidad en el otro orden.

10. Es unitaria: $|p - \varepsilon z_0 p^\perp|^2 = |p|^2 + z_0^2 |p|^2 = (1 + z_0^2)^2$ (G1-002.T3, G1-003.T2). Así, por P_0 pasa exactamente una recta de la familia ε.
11. Su dirección es $(\varepsilon w^\perp, 1)$ con

$$\varepsilon w^\perp = \frac{\varepsilon p^\perp + z_0 p}{1 + z_0^2} = \frac{z_0}{\rho} u + \frac{\varepsilon}{\rho} u^\perp,$$

usando $(p^\perp)^\perp = -p$: tiene $\beta = \varepsilon/\rho$. Las familias $+1$ y -1 dan las dos rectas del paso 7, una cada una.

12. Toda recta contenida en S_1 pasa por alguno de sus puntos P_0, y por el paso 7 es una de las dos rectas por P_0, que son de las familias (paso 11): no hay otras. ■

> **Los hilos del gancho**
> Con $w = (1,0)$, $w^\perp = (0,1)$: $\ell_{+1}(w) = \{(1,t,t)\}$ y $\ell_{-1}(w) = \{(1,-t,t)\}$. El tramo $|t| \le 1$ de la primera va de $(1,-1,-1)$ a $(1,1,1)$: dos puntos de los aros $x^2+y^2=2$, $z = \mp 1$, que desde arriba forman un ángulo recto. Girando w por la circunferencia de la cintura salen todos los hilos.

Parte 2 · El paraboloide hiperbólico y las cuádricas sin rectas

Teorema G2-005.T4 (el paraboloide hiperbólico es doblemente reglado)

Sea $S: z = x^2/a^2 - y^2/b^2$. Para $\varepsilon = \pm 1$ y $k \in \mathbb{R}$, $\ell_\varepsilon(k) := \{X : x/a - \varepsilon y/b = k,\ z = k(x/a + \varepsilon y/b)\}$ es una recta de dirección $(a, \varepsilon b, 2k)$ contenida en S; por cada $P_0 \in S$ pasa exactamente una recta de cada familia (la de $k = x_0/a - \varepsilon y_0/b$), y ninguna otra recta está contenida en S. Dos rectas distintas contenidas en S nunca son paralelas.

Demostración.

1. Con $f := x^2/a^2 - y^2/b^2 - z$: $M = \operatorname{diag}(1/a^2, -1/b^2, 0)$, $L = (0,0,-1)$, y
$$Q(v) = \frac{v_1^2}{a^2} - \frac{v_2^2}{b^2} = \Big(\frac{v_1}{a} - \frac{v_2}{b}\Big)\Big(\frac{v_1}{a} + \frac{v_2}{b}\Big), \qquad G_f(P_0) = \Big(\frac{2x_0}{a^2}, -\frac{2y_0}{b^2}, -1\Big).$$
2. Sea $P_0 \in S$ y $v \neq 0$ con $L(P_0, v) \subset S$; por G2-005.T1, $Q(v) = 0$ y $G_f(P_0)\cdot v = 0$.
3. Si $v_1 = v_2 = 0$, $G_f \cdot v = -v_3 = 0$ y $v = 0$: imposible. Si no, por C1-002.T5 se anula algún factor de Q; no los dos, porque entonces $v_1/a = v_2/b = -v_2/b$ y $v_1 = v_2 = 0$. Hay un único ε con $v_1/a - \varepsilon v_2/b = 0$, es decir $v_2 = \varepsilon(b/a)v_1$; ahí $v_1 \neq 0$ y, normalizando $v_1 = a$ (G1-001.T4(a)), $v = (a, \varepsilon b, v_3)$.
4. $G_f(P_0)\cdot v = 2x_0/a - 2\varepsilon y_0/b - v_3 = 0 \iff v_3 = 2k$ con $k := x_0/a - \varepsilon y_0/b$. Así hay a lo más una recta de S por P_0 con cada ε, de dirección $(a, \varepsilon b, 2k)$.
5. $\ell_\varepsilon(k)$ *es una recta.* Es la intersección de dos planos de normales $n_1 = (1/a, -\varepsilon/b, 0)$ y $n_2 = (k/a, \varepsilon k/b, -1)$. Si $\lambda n_1 + \mu n_2 = 0$, la tercera coordenada da $\mu = 0$ y luego $\lambda = 0$: son indepen-

dientes, $n_1 \times n_2 \neq 0$ (G1-021.T2), y por G1-026.T5(b) la intersección es una recta de dirección

$$n_1 \times n_2 = \left(\frac{\varepsilon}{b}, \frac{1}{a}, \frac{2\varepsilon k}{ab}\right) = \frac{\varepsilon}{ab}(a, \varepsilon b, 2k).$$

6. *Está en S.* En $\ell_\varepsilon(k)$, $z = k(x/a + \varepsilon y/b) = (x/a - \varepsilon y/b)(x/a + \varepsilon y/b) = x^2/a^2 - y^2/b^2$, pues $\varepsilon^2 = 1$.
7. *Por P_0.* Con $k = x_0/a - \varepsilon y_0/b$, P_0 cumple la primera ecuación, y la segunda porque $z_0 = x_0^2/a^2 - y_0^2/b^2 = k(x_0/a + \varepsilon y_0/b)$. Si $P_0 \in \ell_\varepsilon(k')$, la primera ecuación da $k' = k$: una sola recta de cada familia pasa por P_0, y por el paso 4 coincide con la única recta de S por P_0 con ese ε.
8. *No hay otras.* Toda recta de S pasa por un $P_0 \in S$ y, por los pasos 3-7, es $\ell_\varepsilon(k)$ con $k = x_0/a - \varepsilon y_0/b$.
9. *No hay paralelas.* Si $\ell_\varepsilon(k)$ y $\ell_{\varepsilon'}(k')$ tienen direcciones proporcionales, $(a, \varepsilon' b, 2k') = \lambda(a, \varepsilon b, 2k)$; la primera coordenada da $\lambda = 1$ ($a \neq 0$), y luego $\varepsilon' = \varepsilon$, $k' = k$: son la misma recta. ■

Teorema G2-005.T5 (cuádricas sin rectas)

El elipsoide (1), el hiperboloide de dos hojas (3) y el paraboloide elíptico (7) no contienen ninguna recta.

Demostración. Por G2-005.T1, una recta $L(P_0, v)$, $v \neq 0$, en el lugar exige $Q(v) = 0$ y $G_f(P_0) \cdot v = 0$.

1. *(1).* $Q(v) = v_1^2/a^2 + v_2^2/b^2 + v_3^2/c^2 = 0$ obliga $v = 0$ (C1-003.T9).
2. *(7).* Con $f = x^2/a^2 + y^2/b^2 - z$: $Q(v) = v_1^2/a^2 + v_2^2/b^2 = 0$ da $v_1 = v_2 = 0$, y $G_f \cdot v = 2x_0 v_1/a^2 + 2y_0 v_2/b^2 - v_3 = -v_3 = 0$: $v = 0$.
3. *(3).* Con $f = x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 - 1$: $Q(v) = 0 \iff v_1^2/a^2 = v_2^2/b^2 + v_3^2/c^2$, y $G_f \cdot v = 0 \iff x_0 v_1/a^2 = y_0 v_2/b^2 + z_0 v_3/c^2$.
4. El lado derecho es $(y_0/b, z_0/c) \cdot (v_2/b, v_3/c)$. Por Cauchy–Schwarz en $\mathbb{R}^2$ (G1-002.T5),

$$\frac{|x_0||v_1|}{a^2} \leq \left|\left(\frac{y_0}{b}, \frac{z_0}{c}\right)\right| \left|\left(\frac{v_2}{b}, \frac{v_3}{c}\right)\right| = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1} \cdot \frac{|v_1|}{a},$$

   usando $P_0 \in (3)$ y $Q(v) = 0$.
5. Si $v_1 \neq 0$, como $\sqrt{x_0^2/a^2 - 1} < |x_0|/a$ (G1-002.T2), el lado derecho es $< (|x_0|/a)(|v_1|/a)$: contradicción. Luego $v_1 = 0$, y $Q(v) = 0$ da $v_2 = v_3 = 0$ (C1-003.T9). ■

Corolario G2-005.C1 (se distinguen)

Ningún movimiento de $\mathbb{R}^3$ lleva una de las cuádricas (1), (2), (3), (7), (8) sobre otra de ellas: (1) es la única acotada; (2) y (8) contienen rectas y (1), (3), (7) no; (2) contiene dos rectas paralelas distintas y (8) no; (3) tiene un centro de simetría (un P con $\sigma_P(S) = S$, G1-004.D1) y (7) no. (Los demás tipos de G2-003.T4 no se distinguen aquí.)

Demostración. Sea $m(x) = \ell(x) + b$ un movimiento (ℓ lineal, G1-022.D4).

1. m es una isometría biyectiva cuya inversa es un movimiento y lleva cada recta $L(P, v)$ sobre $L(m(P), \ell(v))$ (G1-022.T4). Dos rectas paralelas distintas van a dos rectas con la misma dirección $\ell(v)$, distintas porque m es inyectiva.
2. Si S es acotada, $m(S)$ también: $|m(X) - m(0)| = |X|$.
3. $m(2P - X) = 2\ell(P) - \ell(X) + b = 2m(P) - m(X)$. Si $\sigma_P(S) = S$, entonces $\sigma_{m(P)}(m(S)) = \{m(2P - X) : X \in S\} = m(\sigma_P(S)) = m(S)$: $m(P)$ es un centro de $m(S)$.
4. Por los pasos 1-3 (aplicados a m y a m^{-1}), «ser acotada», «contener una recta», «contener dos rectas paralelas distintas» y «tener un centro de simetría» se conservan por movimientos.
5. (1) es acotada y (2), (3), (7), (8) no (G2-004.T2).
6. (2) y (8) contienen rectas (G2-005.T3, T4); (3) y (7) no (G2-005.T5).
7. En (2), $\{(a, bt, ct)\}$ y $\{(-a, bt, ct)\}$ son las rectas de las familias $+1$ y -1 con $w = (1, 0)$ y $w = (-1, 0)$ (G2-005.T3): direcciones iguales $(0, b, c)$ y distintas porque x difiere. En (8) no hay dos rectas paralelas distintas (G2-005.T4).
8. (3) es simétrica respecto a 0 (G2-004.T1). Si σ_P fijara (7), que está en $z \geq 0$ (G2-004.T2), los puntos $\sigma_P(at, 0, t^2) = 2P - (at, 0, t^2)$ tendrían tercera coordenada $2p_3 - t^2 < 0$ para $t^2 > 2p_3$ (existe un tal t natural por C1-007.C1): contradicción. ■

Ejemplo G2-005.E1

Por $(1, 0, 0)$ pasan las rectas $\{(1, t, t)\}$ y $\{(1, t, -t)\}$ de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; por $(1, 1, 0)$ pasan las rectas $\{(1 + t, 1 + t, 0)\}$ y $\{(1 + t, 1 - t, 4t)\}$ de $z = x^2 - y^2$.

1. $1 + t^2 - t^2 = 1$ en ambas; son $\ell_{+1}((1, 0))$ y $\ell_{-1}((1, 0))$ (G2-005.T3).
2. Con $a = b = 1$: $k = x_0 - \varepsilon y_0 = 0$ para $\varepsilon = 1$, dirección $(1, 1, 0)$; $k = 2$ para $\varepsilon = -1$, dirección $(1, -1, 4)$ (G2-005.T4).
3. Comprobación: $(1 + t)^2 - (1 + t)^2 = 0$ y $(1 + t)^2 - (1 - t)^2 = 4t$.

Por qué cada hipótesis

⚠ El signo menos

El elipsoide $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el tazón $z = x^2 + y^2$ difieren del hiperboloide y de la silla en un signo. Ese signo es el que permite $Q(v) = 0$ con $v \neq 0$: sin él no hay rectas (G2-005.T5).

⚠ w unitario

Con $w = 2e_1$, el punto $(2, 2\varepsilon t, t)$ da $4 + 4t^2 - t^2 \neq 1$: la «recta» $\ell_\varepsilon(w)$ se sale de la superficie. El parámetro de cada familia recorre la circunferencia de la cintura.

⚠ Lo que C1 no distingue

C1 no dice que el cono (4) y los cilindros sean distintos entre sí, ni compara dos cuádricas del mismo tipo con semiejes distintos. G2-003.T4 sigue siendo una lista de existencia.

Ejercicios

1. Encuentra las dos rectas de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que pasan por $(1, 1, 1)$.
2. Encuentra las dos rectas de $z = xy$ que pasan por el origen.
3. Demuestra que la esfera no contiene rectas usando solo G2-005.T1.
4. ¿Es reglado el cilindro parabólico $x^2 = 4y$? ¿Doblemente reglado?
5. Demuestra que dos rectas de la misma familia del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ no se cortan.

Respuestas

1. $p = (1, 1)$, $z_0 = 1$, $\rho = \sqrt{2}$, $w = (p - \varepsilon p^\perp)/2$: para $\varepsilon = 1$, $w = (1, 0)$ y la recta $(1, t, t)$; para $\varepsilon = -1$, $w = (0, 1)$, $w^\perp = (-1, 0)$ y la recta $(t, 1, t)$. Ambas pasan por $(1, 1, 1)$ en $t = 1$.
2. $f = xy - z$: $Q(v) = v_1 v_2$, $G(0) = (0, 0, -1)$: $v_3 = 0$ y $v_1 v_2 = 0$: los ejes x e y.
3. $Q(v) = |v|^2 = 0$ solo si $v = 0$.
4. Reglado (cilindro, G2-005.T2). No doblemente: por (0, 0, 0), $Q(v) = v_1^2 = 0$ y $G \cdot v = -4v_2 = 0$ dejan solo $v \parallel e_3$.
5. Si dos rectas de la familia ε se cortaran en P_0, serían dos rectas de la familia ε por P_0; por G2-005.T3 hay solo una, así que serían la misma.

G2-006 · Plano tangente a una cuádrica

Motivación

> **La tabla contra la pelota y contra la torre**
> Apoya una tabla plana contra una pelota de radio 3, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, en el punto $(1, 2, 2)$: la toca en un solo punto y es perpendicular al radio. Apoya ahora el mismo plano contra la torre $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en el punto $(1, 0, 0)$ de la cintura: el plano tangente, $x = 1$, corta a la torre en dos rectas completas.
> En este capítulo la tangencia se define sin derivadas, como en Geometría I: una recta es tangente si la toca con raíz doble. En un punto no singular, todas las tangentes juntas forman un plano.
> Dónde falla la analogía: una tabla no puede atravesar la torre; el plano tangente sí la atraviesa.

La recta tangente

Definición G2-006.D1 (tangente por raíz doble; punto singular)

Sean f cuadrático en $\mathbb{R}^3$ y P_0 con $f(P_0) = 0$. La recta $L(P_0, v)$ es **tangente** a $\{f = 0\}$ en P_0 si $t = 0$ es raíz doble de $t \mapsto f(P_0 + tv)$, es decir, si $G_f(P_0) \cdot v = 0$ (G2-005.T1; como en G1-033.D1). P_0 es **singular** si $G_f(P_0) = 0$.

La equivalencia está en G2-005.T1: con $f(P_0) = 0$, $f(P_0 + tv) = t\,(G_f(P_0) \cdot v) + t^2 Q(v)$, y $t = 0$ es raíz doble exactamente cuando el coeficiente de t es 0.

El plano tangente

Teorema G2-006.T1 (el plano tangente; polarización)

Si $f(P_0) = 0$ y $G_f(P_0) \neq 0$, la unión de las rectas tangentes en P_0 es el plano

$$T_{P_0} := \{X : G_f(P_0) \cdot (X - P_0) = 0\},$$

que también se escribe $X \cdot MP_0 + L \cdot (X + P_0)/2 + c = 0$. Para las canónicas: $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 + zz_0/c^2 = 1$ (elipsoide), $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 - zz_0/c^2 = 1$ (una hoja), $xx_0/a^2 - yy_0/b^2 - zz_0/c^2 = 1$ (dos hojas) y $(z + z_0)/2 = xx_0/a^2 \pm yy_0/b^2$ (paraboloides).

Idea de la demostración
Las direcciones tangentes son los v con $G \cdot v = 0$: un plano por el origen. La forma polarizada sale al restar $f(P_0) = 0$.

Demostración. Sea $G := G_f(P_0) \neq 0$.

1. $T_{P_0} = N(P_0, G)$ es un plano (G1-025.T1).
2. ($\subset$) Si $X \in L(P_0, v)$ con $G \cdot v = 0$, $X = P_0 + tv$ y $G \cdot (X - P_0) = t\, G \cdot v = 0$ (G1-002.T1).
3. ($\supset$) Sea $X \in T_{P_0}$. Si $X \neq P_0$, $v := X - P_0 \neq 0$ cumple $G \cdot v = 0$ y $X \in L(P_0, v)$, una tangente. Si $X = P_0$: el plano T_{P_0} tiene otro punto $X_1 \neq P_0$ (G1-025.T1 lo escribe como $\Pi(P_0, u, w)$), y P_0 está en la tangente $L(P_0, X_1 - P_0)$.
4. *Polarización.* Por G1-002.T1 y la simetría $MP_0 \cdot X = X \cdot MP_0$ (G2-003.D1),

$$G \cdot (X - P_0) = 2X \cdot MP_0 + L \cdot X - 2P_0 \cdot MP_0 - L \cdot P_0.$$

5. Como $f(P_0) = P_0 \cdot MP_0 + L \cdot P_0 + c = 0$, se tiene $-2P_0 \cdot MP_0 = 2L \cdot P_0 + 2c$. Sustituyendo,

$$G \cdot (X - P_0) = 2X \cdot MP_0 + L \cdot X + L \cdot P_0 + 2c = 2\Big[X \cdot MP_0 + L \cdot \frac{X + P_0}{2} + c\Big].$$

6. *Canónicas.* Elipsoide: $M = \mathrm{diag}(1/a^2, 1/b^2, 1/c^2)$, $L = 0$, constante -1: $X \cdot MP_0 - 1 = xx_0/a^2 + yy_0/b^2 + zz_0/c^2 - 1$. Una y dos hojas: lo mismo con los signos de M. Paraboloides $f = x^2/a^2 \pm y^2/b^2 - z$: $M = \mathrm{diag}(1/a^2, \pm 1/b^2, 0)$, $L = (0, 0, -1)$, constante 0: $xx_0/a^2 \pm yy_0/b^2 - (z + z_0)/2 = 0$. (Que en todos sus puntos $G \neq 0$ es el teorema siguiente, G2-006.T2; aquí es hipótesis.) ■

Teorema G2-006.T2 (puntos singulares de las canónicas)

En las cuádricas (1), (2), (3), (7) y (8) de G2-003.T4 ningún punto es singular; en el cono (4) el único punto singular es el vértice 0.

Demostración.

1. En (1)-(4), $L = 0$ y M es diagonal con entradas $\pm 1/a^2, \pm 1/b^2, \pm 1/c^2$, así que $G_f(P_0) = 2MP_0 = 2(\pm x_0/a^2, \pm y_0/b^2, \pm z_0/c^2)$, que es 0 solo si $P_0 = 0$.
2. 0 no está en (1), (2), (3) (la ecuación da $0 = 1$) y sí en (4).
3. En (7) y (8), $G_f(P_0) = (2x_0/a^2, \pm 2y_0/b^2, -1) \neq 0$. ■

Teorema G2-006.T3 (tangente de una cuádrica reglada)

Si $P_0 \in S = \{f = 0\}$ no es singular, toda recta contenida en S que pasa por P_0 está en T_{P_0}. Para el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico, $T_{P_0} \cap S$ es exactamente la unión de las dos rectas de S por P_0.

Demostración.

1. Si $L(P_0, v) \subset S$, por G2-005.T1, $G_f(P_0) \cdot v = 0$: es tangente y, por G2-006.T1, está en T_{P_0}.
2. Sea S el hiperboloide (2) o el paraboloide (8); sus puntos no son singulares (G2-006.T2). Por el paso 1 y G2-005.T3, T4, las dos rectas de S por P_0 están en $T_{P_0} \cap S$.
3. Recíprocamente, sea $X = P_0 + w \in T_{P_0} \cap S$ con $w \neq 0$. Entonces $G \cdot w = 0$ y, por G2-005.T1, $0 = f(P_0 + w) = 0 + G \cdot w + Q(w) = Q(w)$.
4. Así $L(P_0, w)$ cumple las tres condiciones de G2-005.T1 y está contenida en S: es una de las dos rectas de S por P_0 (G2-005.T3, T4), y contiene a X. ■

Teorema G2-006.T4 (no depende de las coordenadas)

Sean $m(X') = \sum_i x'_i w_i + b$ con w_1, w_2, w_3 independientes, $\ell(v') := \sum_i v'_i w_i$ y $g := f \circ m$. Entonces $L(X'_0, v')$ es tangente a $\{g = 0\}$ en $X'_0 \iff L(m(X'_0), \ell(v'))$ es tangente a $\{f = 0\}$ en $m(X'_0)$; X'_0 es singular para $g \iff m(X'_0)$ lo es para f; y m lleva el plano tangente de $\{g = 0\}$ en X'_0 sobre el de $\{f = 0\}$ en $m(X'_0)$.

Demostración.

1. g es un polinomio cuadrático (G2-003.T2), de la forma $X' \cdot M'X' + L' \cdot X' + c'$ (G2-003.D1).
2. Como ℓ es lineal, $m(X'_0 + tv') = m(X'_0) + t\,\ell(v')$, así que $g(X'_0 + tv') = f(m(X'_0) + t\ell(v'))$ para todo t.
3. Por G2-005.T1, los dos lados son polinomios de grado ≤ 2 en t; por G1-020.T7 sus coeficientes coinciden: $g(X'_0) = f(m(X'_0))$ y $G_g(X'_0) \cdot v' = G_f(m(X'_0)) \cdot \ell(v')$ para todo v'.
4. ℓ es biyectiva (G2-003.T2 con $b = 0$) y $\ell(v') \neq 0$ si $v' \neq 0$. Con el paso 3, $L(X'_0, v')$ es tangente $\iff L(m(X'_0), \ell(v'))$ lo es.
5. *Singulares.* $G_g(X'_0) = 0 \iff G_g(X'_0) \cdot v' = 0$ para todo v' (con $v' = G_g(X'_0)$, G1-002.T1) $\iff G_f(m(X'_0)) \cdot w = 0$ para todo w (pues ℓ es suprayectiva) $\iff G_f(m(X'_0)) = 0$.
6. *Planos.* $m(L(X'_0, v')) = L(m(X'_0), \ell(v'))$ por el paso 2. Por el paso 4 y la biyectividad de ℓ, m lleva el conjunto de tangentes en X'_0 sobre el de tangentes en $m(X'_0)$, y por G2-006.T1 sus uniones son los planos tangentes. ■

Ejemplo G2-006.E1

El plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en $(1, 2, 2)$ es $x + 2y + 2z = 9$ (perpendicular al radio); el de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $(1, 0, 0)$ es $x = 1$, que corta a la superficie en las dos rectas $\{(1, t, \pm t)\}$.

1. $1 + 4 + 4 = 9$. Con $M = I$, $L = 0$, constante -9: $X \cdot P_0 - 9 = x + 2y + 2z - 9$ (G2-006.T1), y $G = 2P_0$ es paralelo al radio.
2. $M = \text{diag}(1, 1, -1)$, constante -1: $X \cdot MP_0 - 1 = x - 1$.
3. En $x = 1$: $1 + y^2 - z^2 = 1 \iff (y - z)(y + z) = 0$: las rectas $y = z$, $y = -z$ (G2-006.T3, G2-005.E1).

Por qué cada hipótesis

⚠ P_0 en la superficie

Si $f(P_0) \neq 0$, $f(P_0 + tv)$ tiene término constante $\neq 0$ y $t = 0$ no es raíz: la definición no aplica. Por eso G2-006.D1 parte de $f(P_0) = 0$.

⚠ Puntos singulares

En el vértice del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $G = 0$: $f(tv) = t^2 Q(v)$ tiene raíz doble en $t = 0$ para *todo* v. Las «tangentes» llenan $\mathbb{R}^3$ y no hay plano tangente.

⚠ El plano tangente puede cortar

En el hiperboloide de una hoja, $(2, 0, \sqrt{3})$ y $(-1, 0, 0)$ están en la superficie y en lados opuestos del plano tangente $x = 1$. Que el plano deje la superficie de un solo lado es propio del elipsoide, no de la tangencia.

Ejercicios

1. Escribe el plano tangente a $x^2/4 + y^2 + z^2/9 = 1$ en $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$.
2. Escribe el plano tangente a $z = x^2 - y^2$ en $(1, 1, 0)$ y comprueba que contiene las dos rectas de G2-005.E1.
3. ¿Qué puntos singulares tiene el cilindro $x^2 + y^2 = 1$? ¿Y $x^2 - y^2 = 0$?
4. Demuestra que el plano tangente a la esfera $|X|^2 = r^2$ en P_0 es perpendicular a P_0.
5. Encuentra los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ donde el plano tangente es paralelo a $x + y + z = 0$.

Respuestas

1. $x/4 + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$.
2. $(z + 0)/2 = x - y$, es decir $z = 2x - 2y$; $(1 + t, 1 + t, 0)$: $0 = 0$; $(1 + t, 1 - t, 4t)$: $4t = 4t$.
3. $G = (2x_0, 2y_0, 0) = 0$ solo si $x_0 = y_0 = 0$, que no está en $x^2 + y^2 = 1$: ninguno. En $x^2 - y^2 = 0$, todo el eje z es singular.
4. $G = 2P_0$ y $T_{P_0} = \{P_0 \cdot (X - P_0) = 0\}$.
5. $G = 2(x, 2y, 3z) \parallel (1, 1, 1)$: $(x, y, z) = \lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; en el elipsoide $\lambda^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 6$, $\lambda = \pm 6/\sqrt{11}$.

G2-007 · Transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Motivación

> **El mazo de cartas**
> Empuja de lado un mazo de cartas: cada carta se corre en proporción a su altura. Si el mazo mide 1 (en unidades de su alto) y la carta de arriba se corre k, el punto (x, y) va a $(x + ky, y)$. Es una **cizalla**. El doble de altura se corre el doble, y correr dos alturas sumadas es sumar los corrimientos: la cizalla es lineal. ¿Conserva distancias? ¿Qué puntos no se mueven?
> Con $k = 1$, e_2 va a $(1, 1)$, de longitud $\sqrt{2}$: las distancias cambian. Solo la carta de abajo (el eje x) queda fija.
> Dónde falla la analogía: las cartas reales se doblan un poco; la cizalla mueve cada recta horizontal sin deformarla.

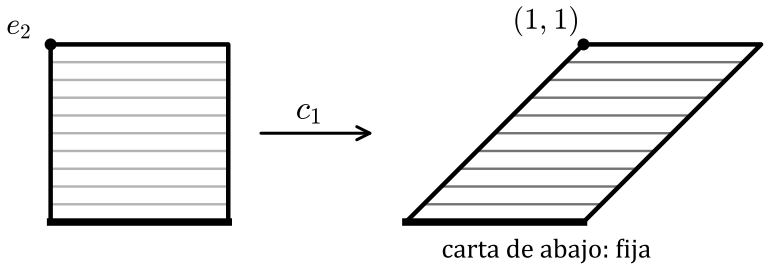


Figura 5: La cizalla c_1: el cuadrado unitario (el mazo de perfil) va al paralelogramo; la carta de abajo queda fija y e_2 va a $(1, 1)$.

Definición y primeras propiedades

Definición G2-007.D1 (transformación lineal)

Para $n, m \in \{2, 3\}$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **lineal** si $T(u + v) = Tu + Tv$ y $T(cv) = cTv$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. (La misma definición vale entre espacios vectoriales, G1-017.D1.)

Teorema G2-007.T1 (determinada por una base)

Si T es lineal, $T0 = 0$ y $T(\sum_i a_i v_i) = \sum_i a_i T v_i$. Si $v_1, \dots, v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^m$ son cualesquiera, existe una única lineal T con $Tv_i = w_i$, a saber $T(\sum_i a_i v_i) := \sum_i a_i w_i$.

Demostración.

1. $T0 = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T0 = 0$ (G1-017.T1).
2. Por inducción en el número k de sumandos (C1-005.T1): $k = 1$ es $T(a_1 v_1) = a_1 T v_1$; si vale para k, $T(\sum_{i \le k+1} a_i v_i) = T(\sum_{i \le k} a_i v_i) + T(a_{k+1} v_{k+1}) = \sum_{i \le k+1} a_i T v_i$.
3. *Existencia.* Cada x se escribe de una sola manera $x = \sum_i a_i v_i$ (G1-019.T1), así que $T(x) := \sum_i a_i w_i$ es una función bien definida (C1-010.D1).
4. Si $x = \sum a_i v_i$ e $y = \sum b_i v_i$, entonces $x + y = \sum (a_i + b_i) v_i$ y $cx = \sum (c a_i) v_i$ (G1-001.T1), así que $T(x + y) = \sum (a_i + b_i) w_i = Tx + Ty$ y $T(cx) = cTx$. Con $a_j = 1$ y los demás 0, $Tv_j = w_j$.
5. *Unicidad.* Si T' es lineal con $T' v_i = w_i$, por el paso 2, $T'(\sum a_i v_i) = \sum a_i w_i = T(\sum a_i v_i)$. ■

Definición G2-007.D2 (núcleo e imagen)

$\ker T := \{v : Tv = 0\}$ e $\operatorname{im} T := T(\mathbb{R}^n)$.

Teorema G2-007.T2 (núcleo, imagen y dimensiones)

$\ker T$ e $\operatorname{im} T$ son subespacios; T es inyectiva $\iff \ker T = \{0\}$; $\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = n$. Si $n = m$: T inyectiva $\iff$ T suprayectiva $\iff$ T biyectiva, y entonces T^{-1} es lineal.

> **Idea de la demostración**
> Una base del núcleo se extiende a una base de todo $\mathbb{R}^n$; las imágenes de los vectores agregados forman una base de la imagen.

Demostración.

1. *Subespacios.* $0 \in \ker T$ (G2-007.T1). Si $u, v \in \ker T$ y $a \in \mathbb{R}$, $T(u+v) = 0+0 = 0$ y $T(av) = a0 = 0$. Para la imagen: $0 = T0$, $Tu + Tv = T(u+v)$ y $aTu = T(au)$. Por G1-018.D1, ambos son subespacios.
2. *Inyectividad.* Si T es inyectiva y $Tv = 0 = T0$, entonces $v = 0$. Si $\ker T = \{0\}$ y $Tu = Tv$, entonces $T(u-v) = 0$, $u - v = 0$ y $u = v$.
3. *Dimensiones.* $\ker T$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, de dimensión n (G1-020.T5); por G1-020.T4 tiene una base $u_1, \dots, u_k$ con $k \leq n$, que por G1-020.T3 se extiende a una base $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ (si $k = 0$, se toma cualquier base).
4. *Generan.* Todo $x = \sum_i a_i u_i$, y $Tx = \sum_{i \leq k} a_i \cdot 0 + \sum_{i>k} a_i Tu_i$ (G2-007.T1).
5. *Son independientes.* Si $\sum_{i>k} a_i Tu_i = 0$, entonces $T(\sum_{i>k} a_i u_i) = 0$ y $\sum_{i>k} a_i u_i = \sum_{i \leq k} b_i u_i$ para ciertos b_i. La representación en la base es única (G1-019.T1): todos los a_i (y los b_i) son 0.
6. Así $Tu_{k+1}, \dots, Tu_n$ es una base de $\operatorname{im} T$ (si $k = n$, la imagen es $\{0\}$, de dimensión 0) y $\dim \operatorname{im} T = n - k$.
7. *Caso $n = m$.* T inyectiva $\iff k = 0 \iff \dim \operatorname{im} T = n \iff \operatorname{im} T = \mathbb{R}^n$ (G1-020.T4) $\iff T$ suprayectiva. Entonces es biyectiva y tiene inversa (C1-011.T1).
8. *T^{-1} es lineal.* $T(T^{-1}u + T^{-1}v) = u + v = T(T^{-1}(u+v))$; por la inyectividad, $T^{-1}u + T^{-1}v = T^{-1}(u+v)$. Igual, $T(cT^{-1}u) = cu$ da $T^{-1}(cu) = cT^{-1}u$. ■

Teorema G2-007.T3 (operaciones)

La composición de lineales es lineal; si $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son lineales y $c \in \mathbb{R}$, $S+T$ y cT (definidas punto a punto) son lineales.

Demostración.

1. $(S \circ T)(u+v) = S(Tu+Tv) = STu + STv$ y $(S \circ T)(cv) = S(cTv) = cSTv$ (C1-011.D1).
2. $(S+T)(u+v) = Su + Sv + Tu + Tv = (S+T)u + (S+T)v$ (G1-001.T1); igual con escalares y con cT. ■

Los ejemplos básicos

Definición G2-007.D3 (ejemplos básicos)

Para $k \in \mathbb{R}$, la **homotecia** $h_k(x) := kx$. Para $W = \langle u \rangle$ $(u \neq 0)$ o $W = \{x : x \cdot n = 0\}$ $(n \neq 0)$: la **proyección ortogonal** $p_W(x) := \text{proy}_u(x)$, resp. $p_W(x) := x - \text{proy}_n(x)$. Para $\Pi_0 := \{x : x \cdot n = 0\}$ y v con $n \cdot v \neq 0$, la **proyección paralela** a v sobre Π_0: $\pi_v(x) := x - ((n \cdot x)/(n \cdot v))v$ (G2-001.T1 con $k = 0$). La **reflexión** respecto a W: $\sigma_W(x) := 2p_W(x) - x$. La **cizalla** de $\mathbb{R}^2$: $c_k(x, y) := (x + ky, y)$.

Teorema G2-007.T4 (propiedades de los ejemplos)

Todos son lineales. $p_W \circ p_W = p_W$, $\text{im}\, p_W = W$ y $\ker p_W = W^\perp := \{x : x \cdot w = 0 \text{ para todo } w \in W\}$; $\pi_v \circ \pi_v = \pi_v$, $\text{im}\, \pi_v = \Pi_0$ y $\ker \pi_v = \langle v \rangle$; $\sigma_W \circ \sigma_W = \text{id}$ y σ_W es la simetría de G1-004.D1 respecto a W; h_k es biyectiva si $k \neq 0$; si $k \neq 0$, c_k es biyectiva y sus puntos fijos son exactamente los del eje x.

Demostración.

1. *Linealidad.* h_k: G1-001.T1. $\text{proy}_u(x) = \frac{x \cdot u}{|u|^2} u$ y π_v son lineales porque $x \mapsto x \cdot u$ lo es (G1-002.T1); $x - \text{proy}_n(x)$ y $\sigma_W = 2p_W - \text{id}$ son lineales por G2-007.T3; c_k lo es coordenada a coordenada.
2. p_W *con* $W = \langle u \rangle$. $p_W(x) \in W$, y $p_W(tu) = \frac{t\, u \cdot u}{|u|^2} u = tu$: p_W fija W. Luego $\text{im}\, p_W = W$ y $p_W(p_W(x)) = p_W(x)$. $p_W(x) = 0 \iff x \cdot u = 0 \iff x \cdot (tu) = 0$ para todo t: $\ker p_W = W^\perp$.
3. p_W *con* $W = \{x \cdot n = 0\}$. $p_W(x) \cdot n = x \cdot n - \frac{x \cdot n}{|n|^2} n \cdot n = 0$, así que $\text{im}\, p_W \subset W$; si $x \in W$, $p_W(x) = x$. Luego $\text{im}\, p_W = W$ y $p_W \circ p_W = p_W$. $p_W(x) = 0 \iff x = \frac{x \cdot n}{|n|^2} n \in \langle n \rangle$, y $p_W(tn) = 0$: $\ker p_W = \langle n \rangle$.
4. $\langle n \rangle = W^\perp$. En $\mathbb{R}^3$, completa $n/|n|$ a una base ortonormal $(n/|n|, u, v)$ (G1-021.T5) con $u \times v = \pm n/|n|$; por G1-021.T4, $W = \{x \cdot (u \times v) = 0\} = \langle u, v \rangle$ y $W^\perp = \{x : x \cdot u = x \cdot v = 0\} = \langle u \times v \rangle = \langle n \rangle$. En $\mathbb{R}^2$, $W = \langle n^\perp \rangle$ (G1-003.T2), $x - \text{proy}_n(x) = \text{proy}_{n^\perp}(x)$ (G1-008.T3 con $n/|n|$) y $W^\perp = \{x \cdot n^\perp = 0\} = \langle n \rangle$ (G1-003.T2): las dos definiciones de p_W coinciden.
5. π_v. $\pi_v(x) \cdot n = n \cdot x - \frac{n \cdot x}{n \cdot v} n \cdot v = 0$ y π_v fija Π_0: igual que en el paso 3, $\text{im}\, \pi_v = \Pi_0$ y $\pi_v \circ \pi_v = \pi_v$. $\pi_v(x) = 0 \iff x \in \langle v \rangle$, y $\pi_v(tv) = tv - tv = 0$: $\ker \pi_v = \langle v \rangle$.
6. σ_W. Por linealidad, $\sigma_W(\sigma_W(x)) = 2p_W(2p_W(x) - x) - (2p_W(x) - x) = 4p_W(x) - 2p_W(x) - 2p_W(x) + x = x$. Si $W = \langle u \rangle = L(0, u)$, el pie de x es $\text{proy}_u(x)$ (G1-003.T5) y $\sigma_W(x) = 2\,\text{proy}_u(x) - x$ es la de G1-004.D1. Si $W = N(0, n)$, $2(x - \text{proy}_n\, x) - x = x - 2\frac{x \cdot n}{|n|^2} n$, también la de G1-004.D1.

7. h_k y c_k. Si $k \neq 0$, $h_{1/k} \circ h_k = h_k \circ h_{1/k} = \mathrm{id}$. $c_{-k}(c_k(x,y)) = (x + ky - ky, y) = (x,y)$ y al revés, así que c_k es biyectiva. $c_k(x,y) = (x,y) \iff ky = 0 \iff y = 0$ (C1-002.T5, $k \neq 0$). ■

Ejemplo G2-007.E1

La proyección ortogonal sobre $x + y + z = 0$ es $x \mapsto x - ((x \cdot n)/3)n$ con $n = (1,1,1)$ y lleva e_1 en $(2/3, -1/3, -1/3)$; la proyección paralela a e_3 sobre $z = 0$ es $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$; la cizalla c_1 no es una isometría: $|c_1(e_2) - c_1(0)| = |(1,1)| = \sqrt{2} \neq |e_2|$.

1. $|n|^2 = 3$ y $e_1 \cdot n = 1$: $e_1 - \frac{1}{3}(1,1,1) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, que cumple $x + y + z = 0$.
2. Con $n = v = e_3$: $\pi_{e_3}(x,y,z) = (x,y,z) - ze_3$.
3. $c_1(e_2) = (0 + 1, 1)$ y $c_1(0) = 0$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Linealidad

$T(x,y) = (x + 1, y)$ no es lineal: $T0 = (1,0) \neq 0$. Su «núcleo» $\{(-1,0)\}$ no contiene a 0 y no es subespacio.

⚠ $n = m$

$T(x,y,z) = (x,y)$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ es suprayectiva y no inyectiva (ker T = eje z). La fórmula $1 + 2 = 3$ se cumple, pero «inyectiva $\iff$ suprayectiva» solo vale si $n = m$.

Ejercicios

1. Encuentra la única lineal T de $\mathbb{R}^2$ con $T(1,1) = (2,0)$ y $T(1,-1) = (0,4)$.
2. Calcula núcleo e imagen de $T(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$ y comprueba la fórmula de dimensiones.
3. Calcula la reflexión respecto a la recta $\langle(1,2)\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ aplicada a $(3,1)$.
4. Demuestra que la proyección paralela a $v = (1,1,1)$ sobre $z = 0$ no es la proyección ortogonal sobre $z = 0$.
5. Demuestra que la composición de dos cizallas c_k, c_l es la cizalla c_{k+l}.

Respuestas

1. $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1)$: $T(x, y) = (x + y, 2x - 2y)$.
2. $\ker T = \langle(1, -1, 1)\rangle$ (dim 1); la imagen es el plano $\{a - b - c = 0\}$ (dim 2); $1 + 2 = 3$.
3. $u = (1, 2)$, $\text{proy}_u(3, 1) = (1, 2)$: $\sigma(3, 1) = 2(1, 2) - (3, 1) = (-1, 3)$.
4. $\pi_v(0, 0, 1) = (0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 0) \neq 0 = p_W(0, 0, 1)$.
5. $c_l(c_k(x, y)) = (x + ky + ly, y)$.

G2-008 · La matriz de una transformación

Motivación

> **Los filtros de una app de fotos**
>
> Una app de fotos tiene «girar 90°», $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y «reflejar respecto al eje horizontal», $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si aplicas primero el giro y luego el reflejo obtienes $SR = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; en el otro orden, $RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son dos fotos distintas: componer es multiplicar matrices, y el orden importa.
>
> En la segunda parte, un molde cúbico de 1 L se deforma con una matriz de determinante 2: su volumen pasa a 2 L. Que el determinante de un producto sea el producto de los determinantes es el teorema central.
>
> Dónde falla la analogía: una app guarda la foto en píxeles; girarla 90° es exacto, otros ángulos redondean.

Parte 1 · Matrices, composición y cambio de base

Definición G2-008.D1 (matrices)

Una matriz $m \times n$ es $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$; sus **columnas** son $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax := \sum_j x_j a_j$, es decir $(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j$. Para A de $m \times n$ y B de $n \times p$, AB es la matriz $m \times p$ con $(AB)_{ik} := \sum_j a_{ij} b_{jk}$ (columnas $Ab_1, \dots, Ab_p$). Identidad I (columnas $e_1, \dots, e_n$); suma y producto por escalar entrada a entrada; **transpuesta** A^{T} con $(A^{\mathsf{T}})_{ij} := a_{ji}$; **traza** $\operatorname{tr} A := \sum_i a_{ii}$ $(n \times n)$. La **matriz** de una lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es $[T]$, de columnas $Te_1, \dots, Te_n$.

Teorema G2-008.T1 (matriz y composición)

$x \mapsto Ax$ es lineal; toda lineal T cumple $Tx = [T]x$, y $[T]$ es la única matriz con esa propiedad. $[S \circ T] = [S][T]$; $(AB)C = A(BC)$; $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$; $AI = IA = A$. El producto no es conmutativo: $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Idea de la demostración

Las columnas de AB son Ab_k; con la linealidad, $(AB)x = A(Bx)$. Todo lo demás es la unicidad de la matriz.

Demostración.

1. *Lineal.* $A(x + y) = \sum_j (x_j + y_j)a_j = Ax + Ay$ y $A(cx) = cAx$ (G1-001.T1).
2. $Tx = [T]x$. $x = \sum_j x_j e_j$ (G1-001.T1), así que $Tx = \sum_j x_j Te_j = [T]x$ (G2-007.T1).
3. *Unicidad.* Si $Bx = Tx$ para todo x, con $x = e_j$: $b_j = Be_j = Te_j$; las columnas coinciden y $B = [T]$.
4. *Columnas de AB.* La coordenada i de Ab_k es $\sum_j a_{ij}b_{jk} = (AB)_{ik}$ (G2-008.D1). Por el paso 1, $(AB)x = \sum_k x_k Ab_k = A(\sum_k x_k b_k) = A(Bx)$.
5. $[S \circ T] = [S][T]$. Por los pasos 2 y 4, $([S][T])x = [S]([T]x) = S(Tx)$; por el paso 3, $[S][T]$ es la matriz de $S \circ T$, que es lineal (G2-007.T3).
6. *Asociatividad.* $((AB)C)x = (AB)(Cx) = A(B(Cx))$ y $(A(BC))x = A((BC)x) = A(B(Cx))$ (paso 4, C1-011.T2); por el paso 3, $(AB)C = A(BC)$.
7. *Distributivas e identidad.* $A(B + C)x = A(Bx + Cx) = ABx + ACx$, $(B + C)Ax = BAx + CAx$ e $AIx = Ax = IAx$; el paso 3 da las igualdades de matrices.
8. *No conmutativo.* Por G2-008.D1: $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1;\ 0 + 1,\ 0 + 1) = (2, 1; 1, 1)$ y $(1, 1; 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0,\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (1, 1; 1, 2)$. ■

Definición G2-008.D2 (matriz invertible)

Una matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe B con $AB = BA = I$; tal B es única ($B' = B'(AB) = (B'A)B = B$) y se escribe A^{-1}.

Teorema G2-008.T2 (criterio de invertibilidad)

Para A de $n \times n$ ($n = 2, 3$) son equivalentes: A es invertible; sus columnas son independientes (una base de $\mathbb{R}^n$); $x \mapsto Ax$ es biyectiva; $\det A \neq 0$ (G1-022.D1, G1-002.D4); existe B con $AB = I$; existe B con $BA = I$. Además $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demostración. Sea $T(x) := Ax$.

1. *Invertible* ⇒ $AB = I$ *y* $BA = I$*:* por definición.
2. $AB = I$ ⇒ *biyectiva.* Para cada y, $T(By) = (AB)y = y$: T es suprayectiva y, por G2-007.T2 ($n = m$), biyectiva.
3. $BA = I$ ⇒ *biyectiva.* Si $Ax = Ay$, $x = BAx = BAy = y$: T es inyectiva y, por G2-007.T2, biyectiva.
4. *Biyectiva* ⇒ *invertible.* T^{-1} es lineal (G2-007.T2); con $B' := [T^{-1}]$, por G2-008.T1, $AB' = [T \circ T^{-1}] = I$ y $B'A = [T^{-1} \circ T] = I$.
5. *Columnas independientes* ⟺ *biyectiva.* $Ax = \sum_j x_j a_j = 0$ solo para $x = 0$ es exactamente la independencia (G1-019.D1), es decir $\ker T = \{0\}$, que equivale a inyectiva y a biyectiva (G2-007.T2). n vectores independientes de $\mathbb{R}^n$ son una base (G1-020.T3, G1-020.T5).
6. *Columnas independientes* ⟺ $\det A \neq 0$*:* G1-022.T2.
7. *Inversas.* $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ y, del mismo modo, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ (G2-008.T1). $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ dice que A es la inversa de A^{-1} (unicidad, G2-008.D2). Si $AB = I$, $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$. ■

Definición G2-008.D3 (coordenadas y matriz en una base)

Sean $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ y P la matriz de columnas $v_1, \dots, v_n$. Las **coordenadas** de x en $\mathcal{B}$ son $[x]_{\mathcal{B}} := (a_1, \dots, a_n)$ con $x = \sum_i a_i v_i$ (únicas, G1-019.T1), es decir $x = P[x]_{\mathcal{B}}$. Para T lineal en $\mathbb{R}^n$, su **matriz en la base** $\mathcal{B}$, $[T]_{\mathcal{B}}$, tiene columnas $[Tv_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [Tv_n]_{\mathcal{B}}$.

Teorema G2-008.T3 (cambio de base)

$[x]_{\mathcal{B}} = P^{-1}x$, $[Tx]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]P$. A y A' son **semejantes** si $A' = P^{-1}AP$ con P invertible; las matrices de T en dos bases son semejantes.

Demostración.

1. P es invertible (sus columnas son una base, G2-008.T2) y $x = P[x]_{\mathcal{B}}$ da $[x]_{\mathcal{B}} = P^{-1}x$.

2. Si $x = \sum_i a_i v_i$, $Tx = \sum_i a_i T v_i$ (G2-007.T1); como $y \mapsto [y]_{\mathcal{B}} = P^{-1}y$ es lineal (G2-008.T1), $[Tx]_{\mathcal{B}} = \sum_i a_i [Tv_i]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$ (G2-008.D1).
3. Para todo $c \in \mathbb{R}^n$, con $x := Pc$ (así $[x]_{\mathcal{B}} = c$): $[T]_{\mathcal{B}}c = [Tx]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]Pc$. Por la unicidad de G2-008.T1 (aplicada a $c \mapsto [T]_{\mathcal{B}}c$), $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]P$.
4. Con dos bases de matrices P y P': $[T] = P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1}$, y

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P'^{-1}P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1}P' = (P^{-1}P')^{-1}[T]_{\mathcal{B}}(P^{-1}P'),$$

con $(P^{-1}P')^{-1} = P'^{-1}P$ (G2-008.T2). ■

Teorema G2-008.T4 (transpuesta)

$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$; $Ax \cdot y = x \cdot A^{\mathsf{T}}y$ ($x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$); $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$; si A es invertible, $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

Demostración.

1. $((AB)^{\mathsf{T}})_{ik} = (AB)_{ki} = \sum_j a_{kj}b_{ji} = \sum_j (B^{\mathsf{T}})_{ij}(A^{\mathsf{T}})_{jk} = (B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}})_{ik}$ (K2).
2. $Ax \cdot y = \sum_i \big(\sum_j a_{ij}x_j\big)y_i = \sum_j x_j\big(\sum_i a_{ij}y_i\big) = x \cdot A^{\mathsf{T}}y$: es reagrupar una suma de a lo más nueve términos explícitos (C1-005.T12, G1-002.D1).
3. $((A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}})_{ij} = (A^{\mathsf{T}})_{ji} = a_{ij}$.
4. Por el paso 1, $A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{-1}A)^{\mathsf{T}} = I^{\mathsf{T}} = I$; por G2-008.T2, $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$. ■

Parte 2 · Inversa por la adjunta y $\det(AB)$

Teorema G2-008.T5 (inversa por la adjunta)

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\det A = ad - bc \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Si A es 3×3 de columnas a_1, a_2, a_3 y $\det A \neq 0$, A^{-1} es la matriz cuyas **filas** son $(a_2 \times a_3)/\det A$, $(a_3 \times a_1)/\det A$ y $(a_1 \times a_2)/\det A$.

Demostración.

1. 2×2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det A)I$; al dividir entre $\det A$ queda I, y G2-008.T2 da la inversa.
2. 3×3. Sea B la matriz de filas b_1, b_2, b_3 del enunciado. $(BA)_{ij} = b_i \cdot a_j$ (G2-008.D1). Con (i, k, l)

en orden cíclico ((1, 2, 3), (2, 3, 1) o (3, 1, 2)),

$$b_i \cdot a_j = \frac{(a_k \times a_l) \cdot a_j}{\det A} = \frac{[a_j, a_k, a_l]}{\det A}.$$

3. Si $j = i$, $[a_i, a_k, a_l] = [a_1, a_2, a_3] = \det A$ por la simetría cíclica (G1-022.T1): la entrada es 1.
4. Si $j \neq i$, $j \in \{k, l\}$ y el triple producto tiene dos columnas iguales: vale 0 (G1-022.T1).
5. Así $BA = I$ y, por G2-008.T2, $B = A^{-1}$. ■

Teorema G2-008.T6 (formas trilineales alternantes)

Sea $D : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineal en cada argumento con $D(u, v, w) = 0$ si dos argumentos son iguales. Entonces D cambia de signo al intercambiar dos argumentos y $D(u, v, w) = D(e_1, e_2, e_3) \cdot \det(u, v, w)$. Lo mismo para las formas bilineales alternantes de $\mathbb{R}^2$, con $\det(u, v)$.

Idea de la demostración

Al desarrollar u, v, w en la base canónica salen 27 términos; la alternancia mata 21 y la antisimetría da a los 6 restantes exactamente los signos del determinante.

Demostración. Sea $D_0 := D(e_1, e_2, e_3)$.

1. *Antisimetría en las posiciones 1 y 2.* Por la linealidad en las dos primeras posiciones,

   $$0 = D(u+v, u+v, w) = D(u, u, w)+D(u, v, w)+D(v, u, w)+D(v, v, w) = D(u, v, w)+D(v, u, w).$$

2. *Posiciones 2 y 3.* $0 = D(u, v + w, v + w) = D(u, v, w) + D(u, w, v)$.
3. *Posiciones 1 y 3.* $0 = D(u + w, v, u + w) = D(u, v, w) + D(w, v, u)$.
4. *Desarrollo.* Con $u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_j v_j e_j, w = \sum_k w_k e_k$ (G1-001.T1), la linealidad en cada posición da los 27 términos

   $$D(u, v, w) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_i v_j w_k \, D(e_i, e_j, e_k)$$

   (C1-005.T12; son sumas explícitas).
5. Los 21 términos con dos índices iguales valen 0 (alternancia).
6. *Signos de los 6 restantes* (con los pasos 1-3):

   – $D(e_1, e_2, e_3) = D_0$.

- $D(e_2, e_1, e_3) = -D_0$ (posiciones 1-2).
- $D(e_1, e_3, e_2) = -D_0$ (posiciones 2-3).
- $D(e_3, e_2, e_1) = -D_0$ (posiciones 1-3).
- $D(e_2, e_3, e_1) = -D(e_1, e_3, e_2) = +D_0$ (posiciones 1-3 y luego 2-3).
- $D(e_3, e_1, e_2) = -D(e_1, e_3, e_2) = +D_0$ (posiciones 1-2 y luego 2-3).

7. Sumando,

$$D(u, v, w) = D_0\,(u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2) = D_0 \det(u, v, w)$$

por G1-022.D1. La antisimetría general son los pasos 1-3.

8. *En* $\mathbb{R}^2$. $0 = D(u + v, u + v)$ da $D(v, u) = -D(u, v)$, y $D(u, v) = u_1v_2D(e_1, e_2) + u_2v_1D(e_2, e_1) = D(e_1, e_2)(u_1v_2 - u_2v_1) = D(e_1, e_2)\det(u, v)$ (G1-002.D4). ■

Teorema G2-008.T7 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$**)**

Para A, B de 3×3 (o de 2×2), $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. En consecuencia $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, $\det(P^{-1}AP) = \det A$ (así, el **determinante de una lineal**, $\det T := \det[T]_{\mathcal{B}}$, no depende de la base) y $\det(A^{\mathsf{T}}A) = (\det A)^2$.

Demostración.

1. Sea $D(u, v, w) := \det(Au, Av, Aw)$. Como $x \mapsto Ax$ es lineal (G2-008.T1) y det es lineal en cada columna (G1-022.T1), D es trilineal. Si dos argumentos son iguales, dos columnas lo son y $D = 0$ (G1-022.T1).
2. $D(e_1, e_2, e_3) = \det(a_1, a_2, a_3) = \det A$. Por G2-008.T6, $\det(Au, Av, Aw) = \det A \cdot \det(u, v, w)$.
3. Las columnas de AB son Ab_1, Ab_2, Ab_3 (G2-008.D1): $\det(AB) = \det A \cdot \det(b_1, b_2, b_3) = \det A \det B$.
4. $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$ (G1-022.T1: $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$), así que $\det A^{-1} = 1/\det A$.
5. $\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$. Por G2-008.T3, dos matrices de T son semejantes: $\det T$ no depende de la base.
6. $\det(A^{\mathsf{T}}A) = \det A^{\mathsf{T}} \det A = (\det A)^2$ porque $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$ (G1-022.T1).
7. En 2×2, lo mismo con la parte bilineal de G2-008.T6. ■

Teorema G2-008.T8 ⚠ def (det como factor de volumen)

Para A de 3×3 y $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, el volumen (G1-022.D2) del paralelepípedo de aristas Au, Av, Aw es $|\det A|$ veces el del de aristas u, v, w; en $\mathbb{R}^2$, el área (G1-021.D2) del paralelogramo de lados Au, Av es $|\det A|$ veces la del de lados u, v.

Demostración.

1. Sea C la matriz de columnas u, v, w; AC tiene columnas Au, Av, Aw (G2-008.D1).
2. Por G2-008.T7, $\det(Au, Av, Aw) = \det(AC) = \det A \cdot \det(u, v, w)$.
3. Por G1-022.T3 (⚠ def), el volumen es el valor absoluto del triple producto: $|\det(Au, Av, Aw)| = |\det A|\,|\det(u, v, w)|$.
4. En $\mathbb{R}^2$, el área es $|\det(u, v)|$ (G1-021.T6, ⚠ def) y $\det(Au, Av) = \det A \det(u, v)$. ■

Ejemplo G2-008.E1

La matriz A de columnas $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tiene $\det A = 2$ y $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Por G1-022.D1: $u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2 = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$.
2. $a_2 \times a_3 = (0,1,1) \times (1,0,1) = (1,1,-1)$; $a_3 \times a_1 = (1,0,1) \times (1,1,0) = (-1,1,1)$; $a_1 \times a_2 = (1,1,0) \times (0,1,1) = (1,-1,1)$ (G1-021.D1).
3. Divididas entre 2, son las filas de A^{-1} (G2-008.T5). El molde cúbico del gancho pasa a volumen 2 (G2-008.T8).

Por qué cada hipótesis

⚠ Alternante

$D(u,v,w) := u_1v_1w_1$ es trilineal pero no alternante: $D(e_1,e_1,e_1) = 1$, mientras que $D(e_1,e_2,e_3)\det(e_1,e_1,e_1) = 0$. Sin alternancia, G2-008.T6 falla.

⚠ $\det A \neq 0$

Con columnas $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $\det A = 0$ y $x \mapsto Ax$ aplasta todo al plano $z = 0$: no hay inversa y la fórmula de la adjunta dividiría entre 0.

⚠ El det no es aditivo

$\det(I + I) = \det(2I) = 8 \neq 1 + 1$ en 3×3. Solo el producto se comporta bien.

Ejercicios

1. Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre $x + y + z = 0$ (G2-007.E1).
2. Invierte $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ por la adjunta.
3. Demuestra que si A y B son invertibles $n \times n$, AB también, sin usar determinantes.
4. Sea $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$. Calcula $[T]_{\mathcal{B}}$ para $T(x,y) = (y,x)$.
5. Demuestra que $\det(cA) = c^3 \det A$ para A de 3×3.

Respuestas

1. Columnas $p(e_j) = e_j - \frac{1}{3}(1,1,1)$: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\det = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ y G2-008.T2.
4. $T(1,1) = (1,1), T(1,-1) = (-1,1) = -(1,-1)$: $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. det es lineal en cada una de las tres columnas (G1-022.T1).

G2-009 · Subespacios invariantes y vectores propios

Motivación

El tocadiscos y la lineal revuelta

Un tocadiscos gira todo el disco, pero deja en su lugar el eje: esa recta no cambia. En el plano, en cambio, el giro de un cuarto de vuelta mueve todas las direcciones. ¿Qué pasa en el espacio con una lineal cualquiera? Toma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

que gira, inclina y estira. Aun así, $B(1,7,10) = 3(1,7,10)$: la recta $\langle(1,7,10)\rangle$ no se mueve, solo se estira. Este capítulo demuestra que en $\mathbb{R}^3$ siempre es así: toda lineal tiene una recta y un plano invariantes.

Dónde falla la analogía: un tocadiscos real tiene juego en el eje; la rotación ideal no.

Definiciones

Definición G2-009.D1 (subespacio invariante; vector y valor propio; polinomio característico)

Sea T lineal en $\mathbb{R}^n$ con matriz A. Un subespacio W es **invariante** si $T(W) \subset W$. $v \neq 0$ es **vector propio** con **valor propio** $\lambda \in \mathbb{R}$ si $Tv = \lambda v$. El **polinomio característico** de A $(n \times n, n = 2, 3)$ es $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$.

Rectas invariantes y el polinomio característico

Teorema G2-009.T1 (rectas invariantes y raíces)

$\langle v\rangle$ ($v \neq 0$) es invariante $\iff$ v es vector propio. λ es valor propio de A $\iff$ $p_A(\lambda) = 0$. p_A es un polinomio (C1-010.D2) de grado n con coeficiente principal $(-1)^n$, coeficiente de λ^{n-1} igual a $(-1)^{n-1}$ tr A y término constante $\det A$; matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y por tanto la misma traza y el mismo det), y $p_{A^\mathsf{T}} = p_A$.

Demostración.

1. Si $\langle v\rangle$ es invariante, $Tv \in \langle v\rangle$: $Tv = \lambda v$. Si $Tv = \lambda v$, $T(tv) = t\lambda v \in \langle v\rangle$.
2. λ es valor propio $\iff$ $(A - \lambda I)v = 0$ tiene una solución $v \neq 0$ $\iff$ $x \mapsto (A - \lambda I)x$ no es inyectiva $\iff$ $\det(A - \lambda I) = 0$ (G2-008.T2).
3. $n = 2$. $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$ (G1-002.D4).
4. $n = 3$. Con columnas $u = (a_{11} - \lambda, a_{21}, a_{31})$, $v = (a_{12}, a_{22} - \lambda, a_{32})$, $w = (a_{13}, a_{23}, a_{33} - \lambda)$, los seis términos de G1-022.D1 son: $u_1v_2w_3 = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (\cdots)\lambda + a_{11}a_{22}a_{33}$; $u_2v_3w_1$ y $u_3v_1w_2$ son constantes; $u_3v_2w_1$, $u_2v_1w_3$, $u_1v_3w_2$ tienen grado 1 en λ. Así p_A tiene grado 3, coeficiente principal -1 y coeficiente de λ^2 igual a tr A.
5. El término constante es $p_A(0) = \det A$.
6. $P^{-1}(A - \lambda I)P = P^{-1}AP - \lambda I$, y por G2-008.T7, $p_{P^{-1}AP}(\lambda) = \det P^{-1}\, p_A(\lambda) \det P = p_A(\lambda)$ para todo λ. Por G1-020.T7 los coeficientes coinciden: misma traza y mismo det.
7. $(A - \lambda I)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} - \lambda I$ y $\det B^\mathsf{T} = \det B$ (G1-022.T1): $p_{A^\mathsf{T}} = p_A$. ■

Teorema G2-009.T2 (toda lineal de $\mathbb{R}^3$ tiene una recta invariante)

Si A es 3×3, p_A tiene una raíz real y A tiene un vector propio.

Demostración.

1. Por G2-009.T1, p_A es un polinomio de grado 3.
2. Todo polinomio de grado impar tiene una raíz real (C1-023.C3): hay λ_0 con $p_A(\lambda_0) = 0$.
3. Por G2-009.T1, λ_0 es valor propio: existe $v \neq 0$ con $Av = \lambda_0 v$. ■

Teorema G2-009.T3 (y un plano invariante)

Sean T lineal en $\mathbb{R}^3$ con matriz A y $n \neq 0$. El plano $\{x : x \cdot n = 0\}$ es invariante $\iff$ n es vector propio de A^T. Como A^T tiene un vector propio (G2-009.T2), T tiene un plano invariante.

Idea de la demostración

$Ax \cdot n = x \cdot A^\mathsf{T} n$: que A no saque a x del plano es lo mismo que $A^\mathsf{T} n$ siga siendo perpendicular al plano.

Demostración. Sea $W := \{x : x \cdot n = 0\}$.

1. ($\Leftarrow$) Si $A^\mathsf{T} n = \lambda n$ y $x \in W$, por G2-008.T4, $Ax \cdot n = x \cdot A^\mathsf{T} n = \lambda\, x \cdot n = 0$: $Ax \in W$.
2. ($\Rightarrow$) Si W es invariante, para todo $x \in W$, $x \cdot A^\mathsf{T} n = Ax \cdot n = 0$.
3. Por G1-025.T1, $W = \Pi(0, u, w)$ con (u, w) ortonormal y $u \times w = \pm n/|n|$; así $W = \langle u, w \rangle$.
4. Por el paso 2, $A^\mathsf{T} n \cdot u = A^\mathsf{T} n \cdot w = 0$, y por G1-021.T4, $A^\mathsf{T} n \in \langle u \times w \rangle = \langle n \rangle$: $A^\mathsf{T} n = \lambda n$. Como $n \neq 0$, es vector propio.
5. Por G2-009.T2 aplicado a A^T, hay un vector propio n de A^T; por el paso 1, $\{x \cdot n = 0\}$ es un plano invariante. ■

Vectores propios de valores distintos

Teorema G2-009.T4 (vectores propios de valores distintos)

Vectores propios $v_1, \ldots, v_k$ de valores propios distintos dos a dos son independientes. Si A es **simétrica** ($A^\mathsf{T} = A$), $Ax \cdot y = x \cdot Ay$ y los vectores propios de valores propios distintos son ortogonales.

Demostración.

1. Inducción en k (C1-005.T1). Si $k = 1$, $a_1 v_1 = 0$ con $v_1 \neq 0$ da $a_1 = 0$ (G1-017.T1).
2. Supón el resultado para $k-1$ y sea $\sum_{i \leq k} a_i v_i = 0$. Aplicando $A - \lambda_k I$: $\sum_{i<k} a_i(\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0$. Por la hipótesis de inducción, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, y como $\lambda_i \neq \lambda_k$, $a_i = 0$ para $i < k$ (C1-002.T5).
3. Queda $a_k v_k = 0$, así que $a_k = 0$ (G1-017.T1). Por G1-019.D1, son independientes.
4. Si $A^\mathsf{T} = A$, $Ax \cdot y = x \cdot A^\mathsf{T} y = x \cdot Ay$ (G2-008.T4).

5. Si $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\lambda_1\, v_1 \cdot v_2 = Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot Av_2 = \lambda_2\, v_1 \cdot v_2$, así que $(\lambda_1 - \lambda_2)\, v_1 \cdot v_2 = 0$ y $v_1 \cdot v_2 = 0$ (C1-002.T5). ■

Las rotaciones del plano

Teorema G2-009.T5 (las rotaciones del plano no tienen rectas invariantes)

Si $s \neq 0$, $R(c,s)$ no tiene vectores propios: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2c\lambda + 1$ tiene discriminante $4c^2 - 4 = -4s^2 < 0$.

Demostración.

1. $R(c,s) = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ (G1-011.D1), así que $p(\lambda) = (c-\lambda)^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + c^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + 1$.
2. Su discriminante es $4c^2 - 4 = 4(c^2 - 1) = -4s^2 < 0$ porque $s \neq 0$.
3. Por G1-005.T1 no tiene raíces reales, y por G2-009.T1 no hay valores ni vectores propios. ■

Ejemplo G2-009.E1

La cizalla c_1 tiene $p(\lambda) = (1-\lambda)^2$ y su única recta invariante es el eje x; la rotación $(x,y,z) \mapsto (-y,x,z)$ tiene $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, su única recta invariante es el eje z y su único plano invariante es $z = 0$.

1. $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $p(\lambda) = (1-\lambda)^2$, raíz 1. $(c_1 - I)v = (v_2, 0) = 0$ obliga $v_2 = 0$: los vectores propios son los de $\langle e_1 \rangle$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: desarrollando, $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$, con la única raíz real 1 (el factor $\lambda^2 + 1$ no tiene raíces, G1-005.T1). $(A - I)v = (-v_1 - v_2, v_1 - v_2, 0) = 0$ da $v_1 = v_2 = 0$: la recta $\langle e_3 \rangle$.
3. A^{T} tiene el mismo polinomio (G2-009.T1) y, igual, sus vectores propios son los de $\langle e_3 \rangle$; por G2-009.T3, el único plano invariante es $\{z = 0\}$.

La lineal revuelta del gancho

Desarrollando por la tercera fila, $p_B(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2+1)$. $(B-3I)v = 0$ da $-3v_1 - v_2 + v_3 = 0$ y $v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$, con solución $v = (1, 7, 10)$. Como $B^{\mathsf{T}}e_3 = 3e_3$, el plano $z = 0$ también es invariante, y en él B es el giro de un cuarto de vuelta.

Por qué cada hipótesis

⚠ Dimensión 3

En $\mathbb{R}^2$, $R(0,1)$ tiene $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$: no hay rectas invariantes. El argumento de G2-009.T2 usa que 3 es impar.

⚠ A^{T}, no A

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Ae_1 = e_1$, pero el plano $x = 0$ no es invariante: $Ae_2 = (1, 1, 0)$. El plano perpendicular a un vector propio de A no tiene por qué ser invariante.

⚠ Raíz doble no es dos rectas

La cizalla c_1 tiene la raíz doble 1 y una sola recta invariante. La multiplicidad de la raíz no cuenta direcciones.

Ejercicios

1. Encuentra valores y vectores propios de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que son ortogonales.
2. Demuestra que h_k deja invariante todo subespacio.
3. ¿Qué rectas deja invariantes la proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$?
4. Demuestra que si A es 2×2 y $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$, A tiene dos rectas invariantes distintas.
5. Encuentra un plano invariante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Respuestas

1. $p = \lambda^2 - 4\lambda + 3$: $\lambda = 1$ con $(1, -1)$ y $\lambda = 3$ con $(1, 1)$; $(1, -1) \cdot (1, 1) = 0$.
2. $h_k(W) = kW \subset W$ por ser subespacio.
3. Las del plano $z = 0$ ($\lambda = 1$) y el eje z ($\lambda = 0$).
4. El discriminante de $\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$ es $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A > 0$: dos raíces distintas (G1-005.T1) y, por G2-009.T4, dos vectores propios independientes, que generan dos rectas invariantes distintas.
5. $A^{\mathsf{T}} e_3 = 2e_3$ y $A^{\mathsf{T}} e_2 = e_2$: los planos $z = 0$ y $y = 0$ son invariantes (G2-009.T3); por ejemplo $A(x, 0, z) = (x, 0, 2z)$.

G2-010 · Transformaciones rígidas

Motivación

> **El calco y el azulejo**
> Calcas un dibujo en papel albanene y lo mueves sobre el escritorio: lo deslizas, lo giras, quizá lo volteas, pero nunca lo doblas ni lo estiras. Si sabes dónde quedaron tres marcas, (0, 0) en (2, 1), (1, 0) en (2, 2) y (0, 1) en (1, 1), sabes dónde quedó todo: el punto (3, −2) está en (4, 4). La razón es el teorema central de este capítulo: toda transformación que conserva distancias es una matriz ortogonal seguida de una traslación, aunque nadie haya dicho que fuera lineal.
> En la segunda parte, un azulejo cuadrado se puede recolocar en su hueco de exactamente 8 maneras: el grupo de simetrías del cuadrado.
> Dónde falla la analogía: un papel real se estira un poco; un azulejo real tiene dibujo y un lado de atrás.

Parte 1 · Matrices ortogonales e isometrías

Definición G2-010.D1 (matriz ortogonal)

A de $n \times n$ es **ortogonal** si $A^{\mathsf{T}}A = I$, es decir, si sus columnas son ortonormales. $O(n)$:= las ortogonales; $SO(n)$:= las ortogonales de det 1.

La equivalencia: $(A^{\mathsf{T}}A)_{ij} = \sum_k a_{ki}a_{kj} = a_i \cdot a_j$ (G2-008.D1, G1-002.D1).

Teorema G2-010.T1 (caracterizaciones)

Son equivalentes: A ortogonal; $Ax \cdot Ay = x \cdot y$ para todos x, y; $|Ax| = |x|$ para todo x. Si A es ortogonal: A es invertible con $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$, $AA^{\mathsf{T}} = I$, A^{T} es ortogonal, $\det A = \pm 1$, y el producto de dos ortogonales es ortogonal.

Demostración.

1. *Ortogonal ⇒ conserva el producto punto.* $Ax \cdot Ay = x \cdot A^{\mathsf{T}}Ay = x \cdot y$ (G2-008.T4).
2. *⇒ conserva la norma.* $|Ax|^2 = Ax \cdot Ax = x \cdot x = |x|^2$ (G1-002.T3).
3. *Conserva la norma ⇒ ortogonal.* Por polarización (G1-002.T3) y la linealidad,

$$Ax \cdot Ay = \frac{|A(x+y)|^2 - |A(x-y)|^2}{4} = \frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4} = x \cdot y.$$

   Entonces $(A^{\mathsf{T}}A)_{ij} = e_i \cdot A^{\mathsf{T}}Ae_j = Ae_i \cdot Ae_j = e_i \cdot e_j$ (G1-002.T1, G2-008.T4): $A^{\mathsf{T}}A = I$.
4. *Consecuencias.* $A^{\mathsf{T}}A = I$ y G2-008.T2 dan que A es invertible con $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$; luego $AA^{\mathsf{T}} = AA^{-1} = I$, que dice $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} = I$ (G2-008.T4): A^{T} es ortogonal.
5. $(\det A)^2 = \det(A^{\mathsf{T}}A) = \det I = 1$ (G2-008.T7), así que $\det A = \pm 1$.
6. $(AB)^{\mathsf{T}}(AB) = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AB = B^{\mathsf{T}}B = I$ (G2-008.T4, G2-008.T1). ■

Teorema G2-010.T2 (toda isometría es lineal ortogonal seguida de traslación)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ es una isometría (G1-004.D2), existe una única pareja (A, b) con $A \in O(n)$ y $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = Ax + b$ para todo x; $b = f(0)$.

> **Idea de la demostración**
> Restando $f(0)$ queda una isometría que fija el origen; por polarización conserva el producto punto, y entonces las coordenadas de $g(x)$ en la base $g(e_i)$ son las de x: la linealidad sale sola.

Demostración.

1. Sea $g(x) := f(x) - f(0)$. Entonces $|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$: g es isometría, $g(0) = 0$ y $|g(x)| = |g(x) - g(0)| = |x|$.
2. Por G1-002.T3, $|g(x) - g(y)|^2 = |g(x)|^2 - 2g(x) \cdot g(y) + |g(y)|^2$ y $|x - y|^2 = |x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2$. Como los lados izquierdos y los términos $|g(x)|^2 = |x|^2$, $|g(y)|^2 = |y|^2$ coinciden, $g(x) \cdot g(y) = x \cdot y$.
3. Sean $u_i := g(e_i)$. Por el paso 2, $u_i \cdot u_j = e_i \cdot e_j$: son ortonormales y, por G1-021.T1, forman una base.

4. Por G1-021.T1 y el paso 2,

$$g(x) = \sum_i (g(x) \cdot u_i)u_i = \sum_i (g(x) \cdot g(e_i))u_i = \sum_i (x \cdot e_i)u_i = \sum_i x_i u_i = Ax,$$

con A de columnas $u_1, \dots, u_n$ (G1-002.T1, G2-008.D1).

5. A tiene columnas ortonormales: $A \in O(n)$ (G2-010.D1), y $f(x) = Ax + f(0)$.
6. *Unicidad.* Si $Ax + b = A'x + b'$ para todo x, con $x = 0$ sale $b = b'$; luego $Ax = A'x$ para todo x y $A = A'$ (G2-008.T1). ■

Corolario G2-010.C1 (isometrías = movimientos)

Las isometrías de $\mathbb{R}^2$ (de $\mathbb{R}^3$) son exactamente los movimientos de G1-008.D2 (de G1-022.D4); toda isometría es biyectiva y su inversa, $x \mapsto A^{\mathsf{T}}(x - b)$, es isometría; la composición de isometrías es isometría: $(A, b) \circ (A', b') = (AA', Ab' + b)$. Dos triángulos de $\mathbb{R}^n$ son congruentes (G1-008.D1) $\iff$ existe una isometría que lleva uno en el otro, vértice a vértice.

Demostración.

1. Un movimiento $m(x) = \sum_i x_i w_i + b$ con (w_i) ortonormal es $Ax + b$ con A de columnas w_i, ortogonal; y es una isometría (G1-008.T4, G1-022.T4). Recíprocamente, por G2-010.T2 toda isometría es $Ax + b$ con columnas ortonormales: un movimiento.
2. $x \mapsto Ax + b$ con $A \in O(n)$ es isometría: $|A(x - y)| = |x - y|$ (G2-010.T1).
3. $A(A^{\mathsf{T}}(x-b))+b = x$ y $A^{\mathsf{T}}((Ax+b)-b) = x$ (G2-010.T1): es biyectiva con esa inversa (C1-011.T1), que es $A^{\mathsf{T}}x - A^{\mathsf{T}}b$ con $A^{\mathsf{T}} \in O(n)$: isometría por el paso 2.
4. $A(A'x + b') + b = (AA')x + (Ab' + b)$ y $AA' \in O(n)$ (G2-010.T1): isometría por el paso 2.
5. *Congruencia.* Por el paso 1, «existe una isometría» es «existe un movimiento», y G1-008.T5 (en $\mathbb{R}^2$) y G1-022.T5 (en $\mathbb{R}^3$) dan la equivalencia. ■

El calco del gancho

$b = f(0) = (2, 1)$, $Ae_1 = f(e_1) - b = (0, 1)$, $Ae_2 = f(e_2) - b = (-1, 0)$: $A = R(0, 1)$, ortogonal de det 1 (el calco se giró un cuarto de vuelta, no se volteó). $f(3, -2) = (2, 3) + (2, 1) = (4, 4)$.

Parte 2 · Grupos de transformaciones y el grupo diédrico

Definición G2-010.D2 (grupo de transformaciones)

Un **grupo de transformaciones** de un conjunto X es un conjunto G de biyecciones $X \to X$ que contiene a id_X y es cerrado bajo composición e inversas; un **subgrupo** es un subconjunto $H \subset G$ que también lo es. $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) :=$ las isometrías de $\mathbb{R}^n$.

Teorema G2-010.T3 (subgrupos)

$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ es un grupo de transformaciones. Son subgrupos suyos: las traslaciones $\tau_b(x) := x + b$; $O(n)$ (= las isometrías que fijan 0); $SO(n)$; $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n) := \{x \mapsto Ax + b : \det A = 1\}$ (los **movimientos directos**). Para $f = (A, b)$, $f \circ \tau_c \circ f^{-1} = \tau_{Ac}$.

Demostración.

1. *Isom.* Las isometrías son biyecciones; $\mathrm{id} = (I, 0)$; composiciones e inversas son isometrías (G2-010.C1).
2. *Traslaciones.* $\tau_0 = \mathrm{id}$, $\tau_b \circ \tau_c = \tau_{b+c}$, $\tau_b^{-1} = \tau_{-b}$; son isometrías (I, b).
3. *$O(n)$.* Una isometría (A, b) fija $0 \iff b = 0$ (G2-010.T2): son las $x \mapsto Ax$. $I \in O(n)$; productos e inversas ($A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$) son ortogonales (G2-010.T1).
4. *$SO(n)$.* $\det(AB) = \det A \det B = 1$ y $\det A^{-1} = 1/\det A = 1$ (G2-008.T7).
5. *Isom^+.* $(A, b) \circ (A', b') = (AA', Ab' + b)$ con $\det(AA') = 1$; la inversa es $(A^{\mathsf{T}}, -A^{\mathsf{T}}b)$ con $\det A^{\mathsf{T}} = \det A = 1$ (G1-022.T1).
6. *Conjugación.* $f(\tau_c(f^{-1}(x))) = A(A^{\mathsf{T}}(x - b) + c) + b = x - b + Ac + b = x + Ac$. ■

Definición G2-010.D3 (grupo de simetrías)

Para $S \subset \mathbb{R}^n$: $\mathrm{Sim}(S) := \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) : f(S) = S\}$.

Lema G2-010.T6 (reordenar una suma finita)

Si $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ y σ es una biyección de $\{1, \ldots, k\}$ en sí mismo, $\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Lo mismo para vectores de $\mathbb{R}^n$ (coordenada a coordenada) y, más adelante, para números complejos (G2-020.T1).

Demostración. Inducción en k (C1-005.T1).

1. $k = 1$: la única biyección es $\sigma = \mathrm{id}$.
2. Supón el lema para $k-1$ ($k \geq 2$) y sea $m := \sigma^{-1}(k)$. Partiendo la suma en $i < m$, $i = m$ e $i > m$ y conmutando el sumando $a_{\sigma(m)} = a_k$ al final (C1-005.D2, C1-005.T12(c), K1, K2):

$$\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} = \sum_{i<m} a_{\sigma(i)} + \sum_{m<i\leq k} a_{\sigma(i)} + a_k.$$

3. Sea $\tau(i) := \sigma(i)$ si $i < m$ y $\tau(i) := \sigma(i+1)$ si $m \leq i \leq k-1$. Sus valores están en $\{1, \dots, k-1\}$ (solo $\sigma(m)$ vale k). τ es inyectiva porque σ lo es, y suprayectiva: cada $j \leq k-1$ es $\sigma(i)$ con $i \neq m$, y entonces $j = \tau(i)$ si $i < m$ o $j = \tau(i-1)$ si $i > m$.
4. Recorriendo el índice en la segunda suma (C1-005.T12(c)), $\sum_{i<m} a_{\sigma(i)} + \sum_{m<i\leq k} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{\tau(i)}$, que por la hipótesis de inducción es $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$.
5. Sumando a_k, el paso 2 da $\sum_{i=1}^{k} a_i$ (C1-005.D2). Para vectores, se aplica en cada coordenada. ■

Teorema G2-010.T4 (subgrupo; el baricentro)

Sim(S) es un subgrupo de Isom($\mathbb{R}^n$). Para $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ y $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $f((v_1 + \cdots + v_k)/k) = (f(v_1) + \cdots + f(v_k))/k$; si $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ (distintos), toda $f \in \mathrm{Sim}(S)$ permuta los v_i y fija el baricentro $(v_1 + \cdots + v_k)/k$.

Demostración.

1. *Subgrupo.* $\mathrm{id}(S) = S$; si $f(S) = g(S) = S$, $f(g(S)) = S$ y $f^{-1}(S) = f^{-1}(f(S)) = S$.
2. *Baricentro.* $f(x) = Ax + b$ con A lineal (G2-010.T2), así que $f(\frac{1}{k}\sum v_i) = \frac{1}{k}\sum Av_i + b = \frac{1}{k}\sum(Av_i + b)$ (C1-005.T12(a), (b)).
3. Si $f(S) = S$, cada $f(v_i)$ es un único $v_{\sigma(i)}$ (los v_j son distintos); σ es inyectiva porque f lo es, y suprayectiva porque $f(S) = S$: una biyección de $\{1, \dots, k\}$ (C1-011.T1).
4. Por G2-010.T6, $\sum_i f(v_i) = \sum_i v_{\sigma(i)} = \sum_j v_j$, y el paso 2 da que f fija el baricentro. ■

Teorema G2-010.T5 (el grupo diédrico)

Sean $n \geq 3$, $\rho := R(2\pi/n)$ (G1-013.D1), $v_k := \rho^k e_1$ ($k \in \mathbb{Z}$) y $V_n := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ (los vértices del **polígono regular** de n lados). Entonces $v_{k+n} = v_k$, los $v_0, \dots, v_{n-1}$ son distintos, $v_0 + \cdots + v_{n-1} = 0$, y Sim($V_n$) consta exactamente de las $2n$ isometrías ρ^j y $\rho^j \circ S$ ($0 \leq j < n$), con

$S(x,y) := (x,-y)$: es el **grupo diédrico** D_n.

Idea de la demostración

Una simetría fija el centro, así que es ortogonal: girada o volteada. Queda determinada por adónde manda v_0. Son n destinos por 2 tipos, y todas sirven.

Demostración.

1. *Potencias.* Por G1-013.T2, $t \mapsto R(t)$ es un homomorfismo: $\rho^k = R(2\pi k/n)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ (con $\rho^{-k} := (\rho^{-1})^k$). $\rho^n = R(2\pi) = I$, y para $0 < k < n$, $2\pi k/n \notin 2\pi\mathbb{Z}$, así que $\rho^k \neq I$ (G1-013.T2).
2. $v_{k+n} = \rho^k \rho^n e_1 = v_k$. Para $k \in \mathbb{Z}$, con $q := \lfloor k/n \rfloor$ (C1-007.T2), $r := k - qn \in \{0, \dots, n-1\}$ y $v_k = v_r$: los índices se leen módulo n.
3. *Distintos.* Si $v_j = v_k$ con $0 \leq j < k < n$, aplicando ρ^{-j}, $\rho^{k-j} e_1 = e_1$; una rotación que fija un vector $\neq 0$ es I (G1-011.T2), contra el paso 1 ($0 < k - j < n$).
4. *Suma.* Sea $m := \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Por linealidad, $\rho m = \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}$, que es la misma suma reordenada por la biyección $k \mapsto k+1$ módulo n (paso 2, G2-010.T6): $\rho m = m$. Como $\rho \neq I$, G1-011.T2 impide que fije un vector $\neq 0$: $m = 0$.
5. *Toda simetría es de la lista.* Si $f \in \mathrm{Sim}(V_n)$, fija el baricentro $m/n = 0$ (G2-010.T4): $f = A$ con $A \in O(2)$ (G2-010.T3). Sus columnas son un marco ortonormal, así que $A = R(c,s)$ o $A = R(c,s)S$ (G1-011.T5).
6. $f(e_1) = f(v_0) \in V_n$, digamos $f(e_1) = v_j = \rho^j e_1$. Como $Se_1 = e_1$, en ambos casos $R(c,s)e_1 = \rho^j e_1$, y por la unicidad de G1-011.T2, $R(c,s) = \rho^j$: $f = \rho^j$ o $f = \rho^j S$.
7. *Todas son simetrías.* $\rho^j v_k = v_{j+k}$, y $k \mapsto j+k$ módulo n es una biyección de $\{0, \dots, n-1\}$: $\rho^j(V_n) = V_n$.
8. $SR(c,s)S(x,y) = SR(c,s)(x,-y) = S(cx+sy, sx-cy) = (cx+sy, -sx+cy) = R(c,-s)(x,y) = R(c,s)^{-1}(x,y)$ (G1-011.T1). Como $S^2 = I$, $S\rho^k S = (S\rho S)^k = \rho^{-k}$ y $Sv_k = S\rho^k S e_1 = \rho^{-k} e_1 = v_{-k}$. Con $k \mapsto -k$ módulo n (biyección), $S(V_n) = V_n$ y $\rho^j S(V_n) = V_n$.
9. *Son $2n$ distintas.* Si $\rho^j = \rho^k$, entonces $v_j = v_k$ y $j = k$ (paso 3); si $\rho^j S = \rho^k S$, multiplicando por S sale lo mismo. Una ρ^j (det 1) no es una $\rho^k S$ (det -1, G1-011.T5). ■

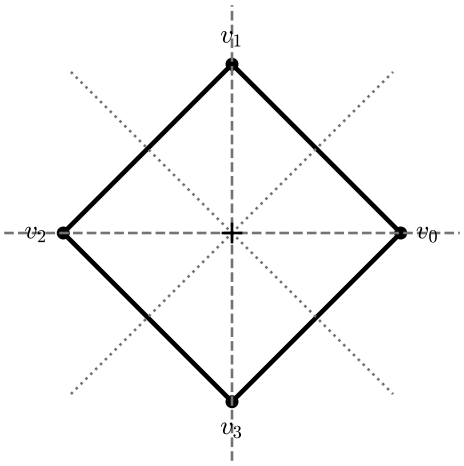


Figura 6: El cuadrado V_4 y sus cuatro ejes de reflexión; las otras cuatro simetrías son las rotaciones ρ^j.

Ejemplo G2-010.E1 (el azulejo)
Para el cuadrado $V_4 = \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$, $\mathrm{Sim}(V_4)$ tiene 8 elementos: $R(1,0)$, $R(0,1)$, $R(-1,0)$, $R(0,-1)$ y $(x,y) \mapsto (x,-y)$, (y,x), $(-x,y)$, $(-y,-x)$.

1. $n = 4$, $\rho = R(0,1)$: $\rho^0, \rho, \rho^2, \rho^3 = R(1,0), R(0,1), R(-1,0), R(0,-1)$.
2. $\rho^j S$: $S(x,y) = (x,-y)$; $R(0,1)(x,-y) = (y,x)$; $R(-1,0)(x,-y) = (-x,y)$; $R(0,-1)(x,-y) = (-y,-x)$.
3. Son las reflexiones respecto al eje x, a $y = x$, al eje y y a $y = -x$ (figura).

Por qué cada hipótesis

⚠ Conservar todas las distancias

$f(x) = 2x$ conserva ángulos pero no distancias: $A = 2I$ no es ortogonal. Y en $\mathbb{R}^2$, $f(x) := x$ si $x_1 \geq 0$ y $f(x) := -x$ si $x_1 < 0$ conserva $|x|$ pero no es isometría: $|f(e_1) - f(-e_1)| = 0 \neq 2$. G2-010.T2 necesita $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para *todos* x, y.

⚠ **Que sea isometría (en** Sim**)**

La cizalla c_1 lleva V_4 a $\{(1,0),(1,1),(-1,0),(-1,-1)\} \neq V_4$. De las 24 permutaciones de los cuatro vértices, solo 8 vienen de isometrías: intercambiar dos vértices vecinos dejando fijos los otros dos cambia distancias.

⚠ $n \geq 3$

Con $n = 1$, $\rho = I$, la «suma» es $e_1 \neq 0$ y toda rotación alrededor de e_1, $x \mapsto e_1 + R(c,s)(x - e_1)$, fija $V_1 = \{e_1\}$: $\mathrm{Sim}(V_1)$ es infinito.

Ejercicios

1. Demuestra que $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ es ortogonal y di si está en $SO(2)$.
2. Una isometría cumple $f(0) = (1,1)$, $f(e_1) = (1,2)$, $f(e_2) = (2,1)$. Encuentra f y di si voltea.
3. Demuestra que Sim del triángulo equilátero V_3 tiene 6 elementos y escríbelos.
4. Demuestra que la composición de dos isometrías de det -1 tiene det 1.
5. Demuestra que D_n no es conmutativo si $n \geq 3$.

Respuestas

1. Columnas $(3,4)/5$ y $(-4,3)/5$, ortonormales; $\det = (9+16)/25 = 1$: sí.
2. A con columnas $(0,1)$ y $(1,0)$: $f(x,y) = (y+1, x+1)$; $\det A = -1$: voltea.
3. $\rho = R(2\pi/3)$: $I, \rho, \rho^2, S, \rho S, \rho^2 S$ (G2-010.T5).
4. $\det(AA') = (-1)(-1) = 1$ (G2-008.T7).
5. $S\rho S = \rho^{-1}$ (paso 8), así que $S\rho = \rho^{-1}S$; si fuera ρS, $\rho^2 = I$, falso para $n \geq 3$.

G2-011 · Las isometrías del plano

Motivación

Huellas en la arena

Camina en línea recta sobre la arena. Tu huella izquierda está en $(0, 0.2)$, la derecha en $(1, -0.2)$, la siguiente izquierda en $(2, 0.2)$ (en pasos). ¿Qué movimiento lleva cada huella en la siguiente? No es una traslación (cambia izquierda por derecha) ni una reflexión (la huella avanza). Es las dos cosas a la vez: una **reflexión con deslizamiento**, $f(x, y) = (x + 1, -y)$.

Este capítulo demuestra que en el plano no hay más tipos: identidad, traslación, rotación, reflexión y reflexión con deslizamiento.

Dónde falla la analogía: las huellas reales no son simétricas exactas ni equiespaciadas.

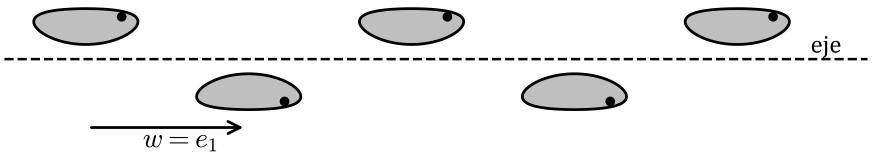


Figura 7: Huellas alternadas: cada una es la anterior reflejada en el eje (punteado) y corrida por $w = e_1$.

Las matrices ortogonales 2×2

Teorema G2-011.T1 (ortogonales 2×2)

Toda $A \in O(2)$ es una rotación $R(c, s)$ (si $\det A = 1$) o $R(c, s)S$ (si $\det A = -1$). Para $u \in \mathbb{R}^2$ unitario, la **reflexión** $\sigma_u(x) := 2(x \cdot u)u - x$ respecto a la recta $\langle u \rangle$ (la simetría de G1-004.D1 respecto a $L(0, u)$) es $R(u_1^2 - u_2^2, 2u_1u_2)S$, y toda $R(c, s)S$ es una σ_u: sirve $u := (1 + c, s)/|(1 + c, s)|$ si $c \neq -1$, y $u := e_2$ si $c = -1$.

Demostración.

1. Las columnas de $A \in O(2)$ son un marco ortonormal (G2-010.D1); por G1-011.T5, $A = R(c,s)$ o $A = R(c,s)S$, con $\det R(c,s) = c^2 + s^2 = 1$ y $\det(R(c,s)S) = \det\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = -1$.
2. El pie de x en $L(0,u)$ es $(x \cdot u)u$ (G1-003.T5), así que $\sigma_u(x) = 2(x \cdot u)u - x$ es la simetría de G1-004.D1.
3. Con $u_1^2 + u_2^2 = 1$: $\sigma_u(e_1) = 2u_1 u - e_1 = (u_1^2 - u_2^2, 2u_1u_2)$ y $\sigma_u(e_2) = 2u_2 u - e_2 = (2u_1u_2, u_2^2 - u_1^2)$. La matriz de $R(c,s)S$ tiene columnas (c,s) y $(s,-c)$; con $c := u_1^2 - u_2^2$, $s := 2u_1u_2$ (y $c^2 + s^2 = (u_1^2 + u_2^2)^2 = 1$) coinciden.
4. Recíprocamente, sea $R(c,s)S$. Si $c \neq -1$, $|(1+c, s)|^2 = 1 + 2c + c^2 + s^2 = 2(1+c) > 0$ y, con $u := (1+c, s)/\sqrt{2(1+c)}$:

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{(1+c)^2 - s^2}{2(1+c)} = \frac{2c + 2c^2}{2(1+c)} = c, \qquad 2u_1u_2 = \frac{2(1+c)s}{2(1+c)} = s.$$

5. Si $c = -1$, entonces $s = 0$, y $u = e_2$ da $u_1^2 - u_2^2 = -1$, $2u_1u_2 = 0$. Por el paso 3, $R(c,s)S = \sigma_u$. ■

La clasificación

Teorema G2-011.T2 (clasificación de las isometrías del plano)

Toda isometría $f(x) = Ax + b$ de $\mathbb{R}^2$ es exactamente una de: (a) la identidad; (b) una traslación τ_b con $b \neq 0$ ($A = I$); (c) una **rotación con centro** p, $f(x) = p + A(x - p)$ con $A = R(c,s) \neq I$, cuyo único punto fijo es p; (d) una **reflexión** σ_ℓ respecto a una recta ℓ ($A = \sigma_u$; sus puntos fijos son exactamente los de ℓ); (e) una **reflexión con deslizamiento** $\tau_w \circ \sigma_\ell$ con $w \neq 0$ paralelo a ℓ ($A = \sigma_u$; sin puntos fijos).

> **Idea de la demostración**
> Si A es una rotación distinta de I, el sistema $(I - A)p = b$ tiene solución única: hay un centro. Si A es una reflexión, b se parte en su componente a lo largo del espejo (el deslizamiento) y la perpendicular (que solo corre el espejo).

Demostración. Por G2-010.T2, $f(x) = Ax + b$ con $A \in O(2)$ única; por G2-011.T1, $A = R(c,s)$ o $A = \sigma_u$.

1. $A = I$. $f = \tau_b$: la identidad si $b = 0$ (a), una traslación sin puntos fijos si $b \neq 0$ (b).
2. $A = R(c,s) \neq I$. Si $c = 1$, $s = 0$ y $A = I$; así $c < 1$ (pues $c^2 \leq 1$). Entonces

$$\det(A - I) = (c-1)^2 + s^2 = c^2 - 2c + 1 + s^2 = 2 - 2c > 0,$$

   y en 2×2, $\det(I - A) = \det(A - I)$. Por G2-008.T2 hay un único p con $(I - A)p = b$.
3. Con ese p, $f(x) = Ax + (I - A)p = p + A(x - p)$: (c). Además $f(x) = x \iff (I - A)x = b \iff x = p$.
4. $A = \sigma_u$. Por G1-008.T3, $b = \alpha u + \beta u^\perp$ con $\alpha = b \cdot u$, $\beta = b \cdot u^\perp$. Sean $p := \beta u^\perp / 2$ y $\ell := L(p, u)$.
5. El pie de x en ℓ es $p + ((x - p) \cdot u)u$ (G1-003.T5), así que

$$\sigma_\ell(x) = 2p + 2((x-p)\cdot u)u - x = \sigma_u(x - p) + p = Ax - Ap + p.$$

   Como $p \cdot u = 0$, $Ap = 2(p \cdot u)u - p = -p$, y $\sigma_\ell(x) = Ax + 2p = Ax + \beta u^\perp$.
6. Entonces $f(x) = Ax + \alpha u + \beta u^\perp = \sigma_\ell(x) + \alpha u$: $f = \tau_{\alpha u} \circ \sigma_\ell$, con αu paralelo a ℓ.
7. Si $\alpha = 0$, $f = \sigma_\ell$ (d), cuyos puntos fijos son exactamente los de ℓ (G1-004.T2).
8. Si $\alpha \neq 0$: $\sigma_\ell(x) - x = 2(F - x)$ con F el pie, y $x - F \perp u$ (G1-003.T5); así $(f(x) - x) \cdot u = 0 + \alpha \neq 0$ y f no tiene puntos fijos (e).
9. *Exactamente una.* A es única (G2-010.T2); una rotación tiene det 1 y una reflexión det -1 (G2-011.T1). Con $A = I$, (a) y (b) se distinguen por b; con A rotación solo cabe (c); con A reflexión, (d) y (e) se distinguen por tener o no puntos fijos. ■

Componer reflexiones

Teorema G2-011.T3 (composición de dos reflexiones)

Sean $\ell_i = L(p_i, u_i)$ con u_i unitarios ($i = 1, 2$). Si $u_2 = \pm u_1$, $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \tau_{2h}$ con $h := (p_2 - p_1) - ((p_2 - p_1) \cdot u_1)u_1$. Si ℓ_1, ℓ_2 se cortan en q, $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$ es la rotación con centro q y parte lineal $\measuredangle(u_1, u_2)^2$. Toda rotación con centro y toda traslación es composición de dos reflexiones, y toda isometría del plano es composición de a lo más tres reflexiones.

Demostración.

1. *Por un punto común.* Si $q \in \ell_i$, $\ell_i = L(q, u_i)$ (G1-001.T4(a)) y, como en el paso 5 de G2-011.T2, $\sigma_{\ell_i}(x) = \sigma_{u_i}(x - q) + q$. Así $\sigma_{\ell_2}(\sigma_{\ell_1}(x)) = q + \sigma_{u_2}\sigma_{u_1}(x - q)$.
2. Sea $\rho := \measuredangle(u_1, u_2) = R(c, s)$ con $c = u_1 \cdot u_2$, $s = \det(u_1, u_2)$ (G1-011.T3); por G1-011.T2, $\rho u_1 = u_2$. Como $R(c,s)x = cx + sx^\perp$ (G1-011.D1), $u_1 = \rho^{-1}u_2 = cu_2 - su_2^\perp$.

3. $\sigma_{u_2}\sigma_{u_1}$ está en $O(2)$ (G2-010.T1) y tiene det $= (-1)(-1) = 1$ (G2-008.T7): es una rotación (G2-011.T1). Lleva u_1 en

$$\sigma_{u_2}(u_1) = 2(u_1 \cdot u_2)u_2 - u_1 = 2cu_2 - cu_2 + su_2^\perp = cu_2 + su_2^\perp = \rho u_2 = \rho^2 u_1.$$

   Por la unicidad de G1-011.T2, $\sigma_{u_2}\sigma_{u_1} = \rho^2$: con el paso 1, una rotación con centro q y parte lineal ρ^2.
4. *Paralelas.* Si $u_2 = \pm u_1$, $\sigma_{u_2} = \sigma_{u_1}$ (la fórmula es cuadrática en u). Para cada i, sea $p_i' := p_i - (p_i \cdot u_1)u_1$, la componente de p_i perpendicular a u_1 (G1-003.T4); $\sigma_{u_1}p_i' = -p_i'$ y $\sigma_{u_1}((p_i \cdot u_1)u_1) = (p_i \cdot u_1)u_1$. Como en el paso 5 de G2-011.T2, $\sigma_{\ell_i}(x) = \sigma_{u_1}(x - p_i) + p_i = \sigma_{u_1}x + 2p_i'$.
5. Entonces $\sigma_{\ell_2}(\sigma_{\ell_1}(x)) = \sigma_{u_1}(\sigma_{u_1}x + 2p_1') + 2p_2' = x - 2p_1' + 2p_2' = x + 2h$, pues $h = p_2' - p_1'$ por linealidad.
6. *Rotaciones.* Dada la rotación con centro q y parte lineal $R(c,s) \neq I$, por G2-011.T1 hay u unitario con $u_1^2 - u_2^2 = c$, $2u_1u_2 = s$, es decir $\measuredangle(e_1,u)^2 = R(u_1,u_2)^2 = R(c,s)$ (G1-011.T1). Como $R(c,s) \neq I, u \neq \pm e_1$ y las rectas $L(q,e_1), L(q,u)$ se cortan solo en q: por el paso 3, su composición es la rotación dada.
7. *Traslaciones.* Para $b \neq 0$, con $u_1 := b^\perp/|b|$, $\ell_1 := L(0,u_1)$ y $\ell_2 := L(b/2,u_1)$: $h = b/2 - ((b/2) \cdot u_1)u_1 = b/2$ y la composición es τ_b. La identidad es $\sigma_\ell \circ \sigma_\ell$.
8. *A lo más tres.* (a), (b), (c) son dos reflexiones; (d) es una; (e) es $\tau_w \circ \sigma_\ell$, tres. ■

Ejemplo G2-011.E1

$f(x,y) = (-y+1, x)$ es la rotación de centro $(1/2, 1/2)$ con parte lineal $R(0,1)$; $f(x,y) = (x+1, -y)$ es la reflexión con deslizamiento de eje el eje x y $w = e_1$.

1. $A = R(0,1)$, $b = (1,0)$; $(I-A)p = b$ es $p_1 + p_2 = 1$, $-p_1 + p_2 = 0$: $p = (1/2, 1/2)$ (con $\det(I-A) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$).
2. $A = S = \sigma_{e_1}$, $b = e_1$: $\alpha = 1, \beta = 0$, $\ell = L(0,e_1)$, el eje x (G2-011.T2).

Dos espejos a 45°

Con $u_1 = e_1$ y $u_2 = (1,1)/\sqrt{2}$: $\rho = R(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $\rho^2 = R(0,1)$. Dos espejos que forman 45° componen una rotación de un cuarto de vuelta alrededor de su arista: por eso en un espejo de esquina te ves sin invertir izquierda y derecha.

Por qué cada hipótesis

⚠ El plano

En $\mathbb{R}^3$, $x \mapsto -x$ es una isometría de det -1 con un único punto fijo: no es reflexión ni deslizamiento. La lista es propia del plano (el espacio, en G2-012).

⚠ Isometría

$h_2(x) = 2x$ tiene un solo punto fijo, como una rotación, pero no conserva distancias y no es ninguno de los cinco tipos.

⚠ Que las rectas se corten en un punto

Si $\ell_1 = \ell_2$, $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \mathrm{id}$; si son paralelas distintas, una traslación. La rotación aparece solo cuando las rectas se cortan en un único punto.

Ejercicios

1. Clasifica $f(x, y) = (y, x) + (1, -1)$.
2. Clasifica $f(x, y) = (-x + 4, -y + 2)$ y encuentra su centro.
3. Escribe la reflexión respecto a la recta $y = 2x$ como $R(c, s)S$.
4. Demuestra que la composición de dos reflexiones con deslizamiento es una traslación o una rotación.
5. Escribe la traslación por $(0, 3)$ como composición de dos reflexiones.

Respuestas

1. $A = \sigma_u$ con $u = (1, 1)/\sqrt{2}$; $b = (1, -1)$: $\alpha = b \cdot u = 0$, así que es una reflexión (respecto a $L(p, u)$ con $p = \beta u^{\perp}/2 = (1, -1)/2$).
2. $A = -I = R(-1, 0)$, $(I - A)p = 2p = (4, 2)$: media vuelta con centro $(2, 1)$.
3. $u = (1, 2)/\sqrt{5}$: $R(-3/5, 4/5)S$.
4. Las partes lineales tienen det -1 cada una; la composición, det 1 (G2-008.T7): es (a), (b) o (c).
5. Rectas horizontales $y = 0$ y $y = 3/2$ (con $u_1 = e_1$, $h = (0, 3/2)$).

G2-012 · Isometrías del espacio

Motivación

> **El balón y el tornillo**
> Gira un balón manteniendo su centro fijo, de modo que el punto que apuntaba en la dirección x pase a la dirección y, el de y a z y el de z a x. ¿Algún punto del balón acaba donde empezó? Sí: exactamente dos, $\pm(1,1,1)/\sqrt{3}$. Es el teorema de Euler: toda rotación del espacio tiene un eje. Si además el balón se traslada, el movimiento completo es el de un tornillo: un giro alrededor de una recta seguido de un avance a lo largo de ella (teorema de Chasles).
> Dónde falla la analogía: un balón real se deforma un poco al girarlo; un tornillo real avanza siempre en la misma proporción, y aquí el avance es cualquiera.

Parte 1 · Rotaciones con eje y el teorema de Euler

Definición G2-012.D1 (rotación alrededor de un eje)

Para $u \in \mathbb{R}^3$ unitario y $c^2 + s^2 = 1$:

$$\mathrm{Rot}(u; c, s)(x) := (x \cdot u)u + c\,(x - (x \cdot u)u) + s\,(u \times x).$$

Aquí $u^\perp := \{x : x \cdot u = 0\}$ es un **plano** (en $\mathbb{R}^3$; en $\mathbb{R}^2$, $u^\perp$ sigue siendo el giro de un cuarto de vuelta).

Teorema G2-012.T1 (las rotaciones de eje u)

$\mathrm{Rot}(u; c, s) \in SO(3)$, fija u y deja invariante el plano $u^\perp := \{x : x \cdot u = 0\}$; en una base ortonormal $(u, w, u \times w)$ (positiva, G1-021.T5) su matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$. Si $(c, s) \neq (1, 0)$, sus vectores fijos son exactamente los de $\langle u \rangle$.

Demostración. Sea $\mathrm{Rot} := \mathrm{Rot}(u; c, s)$, lineal en x (G1-002.T1, G1-021.T2).

1. *La base.* Por G1-021.T5, para w unitario con $w \cdot u = 0$, (u, w, n) con $n := u \times w$ es una base ortonormal. Es positiva: por la simetría cíclica (G1-022.T1), $[u, w, n] = n \cdot (u \times w) = |u \times w|^2 = |u|^2|w|^2 - (u \cdot w)^2 = 1$ (G1-021.T2).
2. *Imágenes.* $\mathrm{Rot}(u) = u + c \cdot 0 + s(u \times u) = u$. $\mathrm{Rot}(w) = 0 + cw + s\,n$. Por el doble producto (G1-021.T3), $u \times n = u \times (u \times w) = (u \cdot w)u - (u \cdot u)w = -w$, así que $\mathrm{Rot}(n) = cn - sw$. Esa es la matriz del enunciado en (u, w, n).
3. *Conserva la norma.* Si $x = au + bw + b'n$, entonces $\mathrm{Rot}(x) = au + (cb - sb')w + (sb + cb')n$ y, por G1-021.T1,

$$|\mathrm{Rot}(x)|^2 = a^2 + (cb - sb')^2 + (sb + cb')^2 = a^2 + (c^2 + s^2)(b^2 + b'^2) = |x|^2.$$

   Por G2-010.T1, [Rot] es ortogonal.
4. *Det 1.* Por G2-008.T7 (en la forma $\det(Au, Av, Aw) = \det A \det(u, v, w)$) y el paso 1, $\det[\mathrm{Rot}] = [\mathrm{Rot}\,u, \mathrm{Rot}\,w, \mathrm{Rot}\,n]$. Por la multilinealidad y la alternancia (G1-022.T1),

$$[u, cw + sn, cn - sw] = c^2[u, w, n] - s^2[u, n, w] = (c^2 + s^2)[u, w, n] = 1.$$

5. *Plano invariante.* Si $x \cdot u = 0$, $\mathrm{Rot}(x) = cx + s(u \times x)$ y $(u \times x) \cdot u = 0$ (G1-021.T2): $\mathrm{Rot}(x) \in u^\perp$.
6. *Vectores fijos.* Por el paso 3, $\mathrm{Rot}(x) = x \iff R(c, s)(b, b') = (b, b')$. Si $(c, s) \neq (1, 0)$, $R(c, s) \neq I$ no fija vectores $\neq 0$ (G1-011.T2): $b = b' = 0$ y $x \in \langle u \rangle$. Recíprocamente, $\mathrm{Rot}(au) = au$. ■

Teorema G2-012.T2 (Euler: toda rotación de $\mathbb{R}^3$ tiene eje)

Si $A \in SO(3)$, $\det(A - I) = 0$; por tanto existe u unitario con $Au = u$, y $A = \mathrm{Rot}(u; c, s)$ para algún (c, s) con $c^2 + s^2 = 1$. Si $A \neq I$, el eje $\langle u \rangle$ es único y $c = (\mathrm{tr}\,A - 1)/2$.

Idea de la demostración

En dimensión impar, $\det(A - I)$ resulta igual a su opuesto: es 0 y hay un vector fijo. En una base ortonormal que empieza en él, la matriz es un 1 en la esquina y una rotación 2×2 en el resto.

Demostración.

1. Como $AA^{\mathsf{T}} = I$ (G2-010.T1) y $\det A = 1$, por G2-008.T7,

$$\begin{aligned}\det(A - I) = \det(A - AA^{\mathsf{T}}) = \det\big(A(I - A^{\mathsf{T}})\big) = \det A \cdot \det(I - A^{\mathsf{T}}) \\ = \det\big((I - A)^{\mathsf{T}}\big) = \det(I - A),\end{aligned}$$

   usando $I - A^{\mathsf{T}} = (I - A)^{\mathsf{T}}$ y $\det B^{\mathsf{T}} = \det B$ (G1-022.T1).
2. En 3×3, $\det(-B) = (-1)^3 \det B = -\det B$ (linealidad en cada una de las tres columnas, G1-022.T1). Así $\det(I - A) = -\det(A - I)$, y con el paso 1, $\det(A - I) = 0$.
3. Por G2-008.T2 hay $v \neq 0$ con $(A - I)v = 0$; sea $u := v/|v|$, unitario, con $Au = u$.
4. Completa u a una base ortonormal positiva $(u, w, u \times w)$ (G1-021.T5, paso 1 de G2-012.T1) y sea Q la matriz con esas columnas: $Q \in SO(3)$. Sea $B := Q^{\mathsf{T}}AQ$; es ortogonal (G2-010.T1) con $\det B = \det Q^{\mathsf{T}} \det A \det Q = 1$ (G2-008.T7).
5. $Be_1 = Q^{\mathsf{T}}Au = Q^{\mathsf{T}}u = e_1$, pues $Q^{\mathsf{T}} = Q^{-1}$ y $Qe_1 = u$.
6. Las columnas de B son ortonormales ($B^{\mathsf{T}}B = I$) y la primera es e_1; las otras dos son ortogonales a e_1, así que empiezan con 0: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, y el bloque C tiene columnas ortonormales: $C \in O(2)$.
7. Por G1-022.D1, solo los términos con $u_1 = 1$ sobreviven: $\det B = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} = \det C = 1$. Por G1-011.T5 (con $\det(R(c,s)S) = -1$), $C = R(c,s)$.
8. Por G2-012.T1, B es la matriz de $\mathrm{Rot}(u; c, s)$ en la base $(u, w, u \times w)$; por G2-008.T3, $[\mathrm{Rot}(u; c, s)] = QBQ^{-1} = A$.
9. Si $A \neq I$, $(c, s) \neq (1, 0)$ y, por G2-012.T1, los vectores fijos son exactamente los de $\langle u \rangle$: el eje es único.
10. A y B son semejantes; por G2-009.T1 tienen la misma traza: $\mathrm{tr}\, A = 1 + 2c$. ■

Teorema G2-012.T3 (det -1: rotorreflexión)

Si $A \in O(3)$ y $\det A = -1$, entonces $-A \in SO(3)$ y, con $-A = \mathrm{Rot}(u; c, s)$, $A = \mathrm{Rot}(u; -c, -s) \circ \sigma_{u^\perp}$, donde $\sigma_{u^\perp}(x) := x - 2(x \cdot u)u$ es la reflexión respecto al plano $u^\perp$ (una **rotorreflexión**). Casos particulares: la reflexión respecto a un plano ($(-c, -s) = (1, 0)$) y la simetría central $-I$ ($(-c, -s) = (-1, 0)$).

Demostración.

1. $-A$ es ortogonal y $\det(-A) = (-1)^3 \det A = 1$ (G1-022.T1): por G2-012.T2, $-A = \mathrm{Rot}(u; c, s)$.
2. $\sigma_{u^\perp}$ es la simetría de G1-004.D1 respecto a $N(0, u)$. Sea $y := \sigma_{u^\perp}(x) = -(x \cdot u)u + (x - (x \cdot u)u)$;

entonces $y \cdot u = -(x \cdot u)$, $y - (y \cdot u)u = x - (x \cdot u)u$ y $u \times y = u \times x - 2(x \cdot u)(u \times u) = u \times x$ (G1-021.T2).

3. Por G2-012.D1,

$$\mathrm{Rot}(u; -c, -s)(y) = -(x \cdot u)u - c(x - (x \cdot u)u) - s(u \times x) = -\mathrm{Rot}(u; c, s)(x) = Ax.$$

4. Si $(-c, -s) = (1, 0)$, $\mathrm{Rot}(u; 1, 0) = \mathrm{id}$ y $A = \sigma_{u^\perp}$. Si $(-c, -s) = (-1, 0)$, $-A = \mathrm{Rot}(u; 1, 0) = I$ y $A = -I$. ■

Parte 2 · El teorema de Chasles

Teorema G2-012.T4 (Chasles)

Todo movimiento directo $f(x) = Ax + b$ de $\mathbb{R}^3$ ($A \in SO(3)$) es una traslación (si $A = I$) o un **movimiento helicoidal**: existen una recta $L(p, u)$ (u unitario, el eje de A) y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $f(x) = p + A(x - p) + \alpha u$ (giro alrededor de $L(p, u)$ seguido de la traslación αu a lo largo de ella; rotación pura si $\alpha = 0$).

Idea de la demostración

La parte de b a lo largo del eje es el avance. La parte perpendicular se absorbe eligiendo el punto p del eje, como el centro de una rotación del plano.

Demostración.

1. Si $A = I$, $f = \tau_b$.
2. Si $A \neq I$, por G2-012.T2, $A = \mathrm{Rot}(u; c, s)$ con $(c, s) \neq (1, 0)$, así que $c < 1$.
3. Por G1-003.T4, $b = \alpha u + b_\perp$ con $\alpha := b \cdot u$ y $b_\perp \cdot u = 0$. Con (u, w, n), $n = u \times w$, como en G2-012.T1, $b_\perp = \beta_2 w + \beta_3 n$ con $\beta_2 = b_\perp \cdot w$, $\beta_3 = b_\perp \cdot n$ (G1-021.T1; la componente en u es 0).
4. Se busca $p = p_2 w + p_3 n$. Por G2-012.T1, $Ap = (cp_2 - sp_3)w + (sp_2 + cp_3)n$, y $(I - A)p = b_\perp$ es el sistema

$$(1 - c)p_2 + sp_3 = \beta_2, \qquad -sp_2 + (1 - c)p_3 = \beta_3,$$

de determinante $(1 - c)^2 + s^2 = 2 - 2c > 0$. Por G1-003.T3 tiene solución única.

5. Entonces

$$Ax + b = A(x - p) + Ap + (I - A)p + \alpha u = p + A(x - p) + \alpha u.$$

6. $x \mapsto p + A(x - p)$ fija los puntos de $L(p, u)$ ($A(tu) = tu$) y gira alrededor de ella; luego se avanza αu. ■

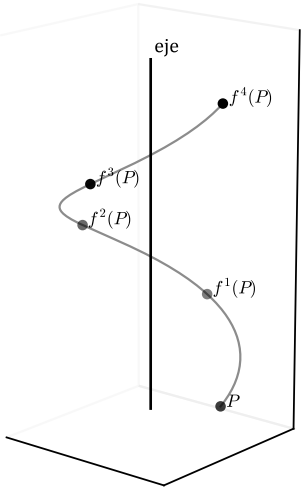


Figura 8: Órbita de un punto bajo el tornillo $f(x, y, z) = (-y, x, z + 1)$: un cuarto de vuelta y avance 1 en cada paso.

Ejemplo G2-012.E1

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la rotación de eje $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ con $c = (\operatorname{tr} A - 1)/2 = -1/2$; $f(x, y, z) = (-y, x, z + 1)$ es un movimiento helicoidal de eje z con $\alpha = 1$.

1. Las columnas de A son e_2, e_3, e_1, ortonormales, y $\det A = [e_2, e_3, e_1] = [e_1, e_2, e_3] = 1$ (G1-022.T1): $A \in SO(3)$.
2. $A(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ y $\operatorname{tr} A = 0$: $c = -1/2$, un tercio de vuelta (G2-012.T2).
3. $\mathrm{Rot}(e_3; 0, 1)(x) = ze_3 + (e_3 \times x) = (-y, x, z)$, y $b = e_3$: $\alpha = 1$, $b_\perp = 0$, $p = 0$.
4. Con la misma parte lineal y $b = (2, 0, 1)$: $\alpha = 1$, $b_\perp = (2, 0, 0)$, y $(I - A)p = b_\perp$ da $p = (1, 1, 0)$: tornillo de eje vertical por $(1, 1, 0)$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $\det A = 1$

$-I$ es ortogonal con $\det(-I - I) = -8 \neq 0$: no fija ningún vector distinto de 0. Euler necesita $\det A = 1$.

⚠ Dimensión 3

En $\mathbb{R}^2$, $\det(R(0,1) - I) = 2 \neq 0$: el paso 2 de G2-012.T2 usa $(-1)^3 = -1$.

⚠ Ortogonal

$A = \text{diag}(2, 1/2, 1)$ tiene det 1 y fija e_3, pero no es una rotación: no conserva distancias.

⚠ Movimiento directo en Chasles

$f(x, y, z) = (x, y, -z) + e_1$ tiene parte lineal de det -1: es una reflexión en $z = 0$ seguida de un deslizamiento, sin eje de giro.

Ejercicios

1. Encuentra el eje y c de $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Escribe $\text{Rot}(e_1; 0, 1)$ como matriz.
3. Demuestra que la composición de dos reflexiones en planos por el origen es una rotación.
4. Escribe $f(x, y, z) = (-x, -y, z) + (2, 4, 3)$ como tornillo.
5. Demuestra que si $A \in SO(3)$ y $\text{tr}\, A = 3$, entonces $A = I$.

Respuestas

1. $(A - I)v = 0$ da $v = (1, 1, 1)$; $\text{tr}\, A = 2$, $c = 1/2$ (60°).
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Cada una tiene det -1 y es ortogonal; el producto es ortogonal de det 1 (G2-010.T1, G2-008.T7).
4. $A = \mathrm{Rot}(e_3; -1, 0)$, $\alpha = 3$, $b_\perp = (2, 4, 0) = 2p$: $p = (1, 2, 0)$; media vuelta alrededor de la vertical por $(1, 2, 0)$ y avance 3.
5. $1 + 2c = 3$ da $c = 1$, $s = 0$ y $A = \mathrm{Rot}(u; 1, 0) = I$.

G2-013 · Eliminación de los términos mixtos en tres variables

Motivación

> **La lenteja girada y la lámpara**
> Una lenteja girada en el espacio tiene por superficie $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 1$. Los términos cruzados dicen que está inclinada respecto a los ejes. ¿Hacia dónde apunta su eje? ¿Es alargada o achatada? Girando los ejes a las direcciones propias de la matriz de la forma se lee $5x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2 = 1$: achatada, con el eje en la dirección $(1, 1, 1)$.
> Con la misma idea, la pantalla de una lámpara $xy + yz + zx = 1$ resulta un hiperboloide de dos hojas. Una sola rotación quita los tres términos mixtos; después basta G2-003.
> Dónde falla la analogía: una lenteja real no es exactamente un elipsoide de revolución, y una pantalla es solo un pedazo de superficie.

Parte 1 · El teorema espectral 3×3

Teorema G2-013.T1 (teorema espectral 3×3)

Si M es simétrica 3×3, existe $Q \in SO(3)$ con $Q^{\mathsf{T}} M Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; sus columnas q_1, q_2, q_3 son una base ortonormal positiva con $Mq_i = \lambda_i q_i$, y $p_M(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$.

> **Idea de la demostración**
> Una dirección propia sale del polinomio cúbico (G2-009.T2). Por la simetría, su plano perpendicular es invariante, y en ese plano ya se sabe diagonalizar con el teorema espectral 2×2 de G1-031.

Demostración.

1. Por G2-009.T2, M tiene un vector propio; normalizado (G1-002.T3), q_1 es unitario con $Mq_1 = \lambda_1 q_1$.
2. $W := \{x : x \cdot q_1 = 0\}$ *es invariante.* Como M es simétrica, $Mx \cdot y = x \cdot My$ (G2-009.T4). Si $x \cdot q_1 = 0$, $Mx \cdot q_1 = x \cdot Mq_1 = \lambda_1\, x \cdot q_1 = 0$.
3. *Una base.* Por G1-021.T5 hay w unitario con $w \cdot q_1 = 0$ tal que (q_1, w, w'), $w' := q_1 \times w$, es una base ortonormal; es positiva porque $[q_1, w, w'] = w' \cdot (q_1 \times w) = |q_1 \times w|^2 = 1$ (G1-022.T1, G1-021.T2). Por G1-021.T1, $W = \langle w, w' \rangle$.
4. M *en* W. Como $Mw, Mw' \in W$ (paso 2), por G1-021.T1,

$$Mw = (Mw \cdot w)w + (Mw \cdot w')w', \qquad Mw' = (Mw' \cdot w)w + (Mw' \cdot w')w'.$$

   Sea $N := \begin{pmatrix} Mw \cdot w & Mw' \cdot w \\ Mw \cdot w' & Mw' \cdot w' \end{pmatrix}$, simétrica porque $Mw' \cdot w = w' \cdot Mw = Mw \cdot w'$. Con $\varphi(a, b) := aw + bw'$, la linealidad da $M\varphi(a, b) = \varphi(N(a, b))$.
5. *El* 2×2. $N = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$ con $A := Mw \cdot w$, $B := 2\, Mw' \cdot w$, $C := Mw' \cdot w'$. Por G1-031.T2 hay (c, s) unitario y λ_2, λ_3 con $N(c, s) = \lambda_2(c, s)$ y $N(-s, c) = \lambda_3(-s, c)$.
6. Sean $q_2 := \varphi(c, s) = cw + sw'$ y $q_3 := \varphi(-s, c) = -sw + cw'$. Por el paso 4, $Mq_2 = \varphi(\lambda_2(c, s)) = \lambda_2 q_2$ y $Mq_3 = \lambda_3 q_3$.
7. *Ortonormal y positiva.* $|q_2|^2 = |q_3|^2 = c^2 + s^2 = 1$, $q_2 \cdot q_3 = -cs + sc = 0$, y ambos están en W (ortogonales a q_1). Por la multilinealidad y la alternancia (G1-022.T1), $[q_1, q_2, q_3] = c^2[q_1, w, w'] - s^2[q_1, w', w] = (c^2 + s^2)[q_1, w, w'] = 1$.
8. Sea Q la matriz de columnas q_1, q_2, q_3: $Q \in SO(3)$ (G2-010.D1). Por G2-008.T4 y G1-002.T1, $(Q^{\mathsf{T}}MQ)_{ij} = e_i \cdot Q^{\mathsf{T}}MQe_j = Qe_i \cdot MQe_j = q_i \cdot \lambda_j q_j$, que es λ_j si $i = j$ y 0 si no.
9. *El polinomio.* $Q^{\mathsf{T}} = Q^{-1}$ (G2-010.T1), así que $Q^{\mathsf{T}}MQ$ es semejante a M y $p_M = p_{Q^{\mathsf{T}}MQ}$ (G2-009.T1). Para una diagonal, G1-022.D1 deja solo el término $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. ■

La lenteja del gancho

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. $M(1, 1, 1) = 5(1, 1, 1)$, así que $q_1 = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, $\lambda_1 = 5$. Si $x + y + z = 0$, $Mx = 2x + (x \cdot (1, 1, 1))(1, 1, 1) = 2x$: en W, $N = 2I$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ con cualquier base ortonormal de W, por ejemplo $w = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$, $w' = q_1 \times w$.

Parte 2 · La reducción de toda cuádrica

Teorema G2-013.T2 (la rotación que quita los términos mixtos; reducción de toda cuádrica)

Sean $f(X) = X \cdot MX + L \cdot X + c$ de segundo grado y Q la de G2-013.T1. Con $X = QX'$: $f(QX') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + L' \cdot X' + c$ con $L' := Q^{\mathsf{T}}L$; la rotación $X' \mapsto QX'$ (un movimiento directo) elimina los términos mixtos. En consecuencia toda cuádrica es la imagen por un movimiento de $\mathbb{R}^3$ del lugar de una de las 17 formas de G2-003.T4 (existencia, sin unicidad, como allí).

Demostración.

1. Por G2-008.T4, $QX' \cdot M(QX') = X' \cdot Q^{\mathsf{T}}MQX' = X' \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)X' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ (G2-013.T1).
2. Por G2-008.T4, $L \cdot QX' = QX' \cdot L = X' \cdot Q^{\mathsf{T}}L$.
3. Así $f \circ Q$ tiene la forma del enunciado: sin términos mixtos. $X' \mapsto QX'$ es un movimiento directo (G1-022.D4: columnas ortonormales con $[q_1, q_2, q_3] = 1$). Por G2-003.T2 (con $w_i = q_i$, $b = 0$), $f \circ Q$ es de segundo grado y $\{f = 0\} = Q(\{f \circ Q = 0\})$.
4. Por G2-003.T4 hay un movimiento m y una de las 17 formas, de lugar F, con $\{f \circ Q = 0\} = m(F)$.
5. Entonces $\{f = 0\} = (Q \circ m)(F)$, y $Q \circ m$ es un movimiento (G2-010.C1). La salvedad de G2-003.T4 se hereda: no se afirma que la forma sea única. ■

Teorema G2-013.T3 (invariantes)

Bajo $X = QX'$ con $Q \in O(3)$, la parte cuadrática pasa de M a $Q^{\mathsf{T}}MQ$, que tiene el mismo polinomio característico; en particular $\operatorname{tr} M$ y $\det M$ son invariantes.

Demostración.

1. Como en el paso 1 de G2-013.T2 (G2-008.T4), la parte cuadrática de $f \circ Q$ es $X' \cdot Q^{\mathsf{T}}MQX'$, y $Q^{\mathsf{T}}MQ$ es simétrica: $(Q^{\mathsf{T}}MQ)^{\mathsf{T}} = Q^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}Q = Q^{\mathsf{T}}MQ$ (G2-008.T4). Por G2-003.T2 y la unicidad de coeficientes (G2-003.T1), es la tabla de $f \circ Q$.
2. $Q^{\mathsf{T}} = Q^{-1}$ (G2-010.T1): $Q^{\mathsf{T}}MQ = Q^{-1}MQ$ es semejante a M.
3. Por G2-009.T1, tienen el mismo polinomio característico, la misma traza y el mismo det. ■

Ejemplo G2-013.E1

$xy+yz+zx=1$: $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ tiene valores propios $1,-1/2,-1/2$ ($q_1=(1,1,1)/\sqrt{3}$), y la cuádrica es $x'^2-y'^2/2-z'^2/2=1$, un hiperboloide de dos hojas; $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx=1$ tiene valores propios $5,2,2$ y es el elipsoide de revolución $5x'^2+2y'^2+2z'^2=1$.

1. $M=\frac{1}{2}(J-I)$ con J la matriz de unos: $M(1,1,1)=\frac{1}{2}(3-1)(1,1,1)=(1,1,1)$ y, en $x+y+z=0$, $Mx=-\frac{1}{2}x$. Así $p_M(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})^2$ (G2-013.T1).
2. Con $L=0$ y constante -1 (G2-013.T2): $x'^2-\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}z'^2=1$, tipo (3) con $a=1$, $b=c=\sqrt{2}$.
3. La segunda: valores propios $5,2,2$ (parte 1); $5x'^2+2y'^2+2z'^2=1$, tipo (1) con semiejes $1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$: de revolución alrededor del eje q_1.
4. *Invariantes* (G2-013.T3): $\operatorname{tr}M=0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ y $\det M=\frac{1}{4}=1\cdot(-\frac{1}{2})^2$; para la segunda, $9=5+2+2$ y $20=5\cdot2\cdot2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ M simétrica

La rotación $(x,y,z)\mapsto(-y,x,z)$ tiene matriz no simétrica y un solo vector propio real, e_3: no hay base de vectores propios. G2-013.T1 usa la simetría en el paso 2 (para que el plano perpendicular sea invariante).

⚠ Iguales en la diagonal no es esfera

$3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx=1$ tiene la diagonal constante y no es una esfera: sus valores propios son $5,2,2$. La esfera pide $M=\lambda I$.

⚠ Sin unicidad

$x^2+y^2+z^2+2xy=-1$ se reduce a $2x'^2+z^2=-1$, la forma (13), cuyo lugar $\emptyset$ es el mismo de (6) y (17). La reducción es de existencia, como G2-003.T4.

Ejercicios

1. Diagonaliza $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ con una rotación.
2. Reduce $2xy + z^2 = 1$ y di su tipo.
3. Reduce $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 4$ y di su tipo.
4. Demuestra que si M es simétrica y $\det M < 0$, M tiene al menos un valor propio negativo.
5. Demuestra que $xy + yz + zx = 0$ es un cono.

Respuestas

1. $\lambda = 1, 3, 5$ con $(1, -1, 0)/\sqrt{2}$, $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$, e_3; el orden $(1, -1, 0)/\sqrt{2}$, $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$, e_3 tiene triple producto 1.
2. Valores propios $1, -1$ (en el plano xy) y 1: $x'^2 - y'^2 + z^2 = 1$, hiperboloide de una hoja.
3. $(x + y)^2 + z^2 = 4$: valores propios $2, 0, 1$; $2x'^2 + z^2 = 4$, cilindro elíptico (9).
4. Por G2-013.T1 y G2-009.T1, $\det M = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$; si los tres fueran ≥ 0, el producto sería ≥ 0 (C1-003.T9).
5. Por E1, $x'^2 - y'^2/2 - z'^2/2 = 0$, la forma (4) (con x' en el papel de z).

G2-014 · Transformaciones afines

Motivación

> **La calcomanía que se deforma**
> En una aplicación de fotos, la herramienta «deformar» toma una calcomanía triangular y deja arrastrar sus tres esquinas. Si $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ se arrastran a $(1,1)$, $(3,1)$ y $(2,4)$, ¿qué le pasa al resto del dibujo? Las rayas paralelas siguen paralelas, el punto medio de cada lado sigue en medio, pero el ángulo recto deja de serlo y el área se multiplica por 6. Y un logotipo redondo se vuelve una elipse: nunca una hipérbola.
> Dónde falla la analogía: la aplicación deforma una imagen finita de píxeles; aquí la transformación actúa en todo el plano y es exacta.

Parte 1 · El grupo afín y lo que conserva

Definición G2-014.D1 (transformación afín)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ con A invertible. Aff($\mathbb{R}^n$) := las afines.

Teorema G2-014.T1 (grupo)

Aff($\mathbb{R}^n$) es un grupo de transformaciones que contiene a Isom($\mathbb{R}^n$); la pareja (A, b) es única y $f^{-1}(y) = A^{-1}(y - b)$.

Demostración. Sea $f(x) = Ax + b$ afín.

1. *Unicidad de* (A, b). Si $Ax + b = A'x + b'$ para todo x, con $x = 0$ sale $b = b'$; entonces $Ax = A'x$ para todo x y, por la unicidad de la matriz de una lineal, $A = A'$ (G2-008.T1).
2. *Inversa.* $g(y) := A^{-1}(y - b) = A^{-1}y - A^{-1}b$ es afín, pues A^{-1} es invertible ($(A^{-1})^{-1} = A$, G2-008.T2).

3. $f(g(y)) = AA^{-1}(y-b)+b = y$ y $g(f(x)) = A^{-1}(Ax) = x$ (G2-008.D2, G2-008.T1). Así f es biyectiva y $f^{-1} = g$ (C1-011.T1).
4. *Composición.* Si $f'(x) = A'x + b'$, $f(f'(x)) = AA'x + (Ab' + b)$, y AA' es invertible con inverso $A'^{-1}A^{-1}$ (G2-008.T2): $f \circ f'$ es afín.
5. $\mathrm{id}(x) = Ix + 0$ es afín. Por 2-5, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ es un grupo de transformaciones (G2-010.D2).
6. Toda isometría es $x \mapsto Ax + b$ con $A \in O(n)$ (G2-010.T2), y A es invertible (G2-010.T1): es afín (G2-010.C1). ■

Teorema G2-014.T2 (qué conservan)

Una afín f lleva la recta $L(P,v)$ sobre $L(f(P),Av)$ y el plano $\Pi(P,u,v)$ sobre $\Pi(f(P),Au,Av)$; lleva rectas paralelas en paralelas y rectas que se cortan en rectas que se cortan; conserva la razón en una recta ($X-P=\lambda(Q-X) \Rightarrow f(X)-f(P)=\lambda(f(Q)-f(X))$); conserva combinaciones afines, $f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i)$ si $\sum_i \lambda_i = 1$ (baricentros, puntos medios); lleva segmentos sobre segmentos, convexos en convexos, $\mathrm{conv}\{v_1,\dots,v_k\}$ sobre $\mathrm{conv}\{f(v_1),\dots,f(v_k)\}$, conjuntos acotados en acotados, y semiplanos (semiespacios) abiertos sobre semiplanos (semiespacios) abiertos: los dos lados abiertos $\{n\cdot X > k\}$ y $\{n\cdot X < k\}$ de la recta (plano) $\{n\cdot X = k\}$ van sobre los dos lados abiertos de su recta (plano) imagen.

Idea de la demostración

Todo sale de una sola cuenta: $f(P+w) = f(P) + Aw$. La parte lineal mueve las direcciones y la traslación no las toca; como A es invertible, ninguna dirección se aplasta.

Demostración. Sea $f(x) = Ax + b$ con A invertible.

1. Para todo P y w, $f(P+w) = AP + Aw + b = f(P) + Aw$ (G2-008.T1). Si $w \neq 0$, $Aw \neq 0$, porque $x \mapsto Ax$ es inyectiva (G2-008.T2).
2. *Rectas.* Por 1, $f(P+tv) = f(P) + tAv$; al variar $t \in \mathbb{R}$, $f(L(P,v)) = L(f(P),Av)$, con $Av \neq 0$ (G1-001.D3).
3. *Planos.* $f(P+su+tv) = f(P) + sAu + tAv$. Si $\alpha Au + \beta Av = 0$, $A(\alpha u + \beta v) = 0$, así que $\alpha u + \beta v = 0$ y $\alpha = \beta = 0$ (u, v no proporcionales, G1-019.T2): Au, Av no son proporcionales y $f(\Pi(P,u,v)) = \Pi(f(P),Au,Av)$.
4. *Paralelas.* Si $L(P,v)$ y $L(Q,\mu v)$ son paralelas, sus imágenes tienen directores Av y μAv: son paralelas (2). Si dos rectas distintas tienen un punto común X, sus imágenes son distintas (f es

inyectiva, T1) y comparten $f(X)$.

5. *Razón.* Si $X - P = \lambda(Q - X)$, por 1 $f(X) - f(P) = A(X - P) = \lambda A(Q - X) = \lambda(f(Q) - f(X))$.
6. *Combinaciones afines.* Si $\sum_i \lambda_i = 1$, coordenada a coordenada (C1-005.T12)

$$f\Big(\sum_i \lambda_i v_i\Big) = \sum_i \lambda_i A v_i + \Big(\sum_i \lambda_i\Big) b = \sum_i \lambda_i (A v_i + b).$$

7. *Segmentos.* $[P, Q] = \{(1 - t)P + tQ : t \in [0, 1]\}$ (G1-001.D3); por 6, $f((1 - t)P + tQ) = (1 - t)f(P) + tf(Q)$ con el mismo t, así que $f([P, Q]) = [f(P), f(Q)]$.
8. *Convexos.* Si K es convexo (G1-023.D2) y $f(X), f(Y) \in f(K)$, por 7 $[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \subset f(K)$.
9. *Envolventes.* Las combinaciones convexas son afines con $\lambda_i \geq 0$ (G1-027.D1); por 6, f lleva la combinación de coeficientes λ_i de los v_i en la de los mismos coeficientes de los $f(v_i)$, y toda combinación convexa de los $f(v_i)$ se obtiene así.
10. *Acotados.* Con a_j las columnas de A, $|Ax| = |\sum_j x_j a_j| \leq \sum_j |x_j||a_j| \leq |x| \sum_j |a_j|$ (G1-002.T6, G1-002.T3). Si $|x| \leq R$ en S, entonces $|f(x)| \leq R \sum_j |a_j| + |b|$ en S.
11. *Semiplanos.* $Y \in f(S) \iff f^{-1}(Y) \in S$ (T1). Con $S = \{X : n \cdot X > k\}$, $n \neq 0$, y $Ax \cdot y = x \cdot A^{\mathsf{T}} y$ (G2-008.T4):

$$\begin{aligned} f(S) &= \{Y : n \cdot A^{-1}(Y - b) > k\} \\ &= \{Y : ((A^{-1})^{\mathsf{T}} n) \cdot Y > k + n \cdot A^{-1} b\}. \end{aligned}$$

12. $(A^{-1})^{\mathsf{T}}$ es invertible (G2-008.T4), así que $(A^{-1})^{\mathsf{T}} n \neq 0$: $f(S)$ es un semiplano (semiespacio) abierto (G1-023.D2, G1-025.D2). Con «<» y con «=» sale lo mismo, con el mismo vector y la misma constante: los dos lados de $\{n \cdot X = k\}$ van a los dos lados de su recta (plano) imagen. ■

Teorema G2-014.T3 (una única afín entre dos triángulos)

Si ABC y $A'B'C'$ son triángulos de $\mathbb{R}^2$, existe una única afín f con $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$. En $\mathbb{R}^3$, lo mismo para dos cuaternas de puntos no coplanares.

Demostración. En $\mathbb{R}^2$.

1. $B - A$ y $C - A$ no son proporcionales (G1-001.T5): son independientes (G1-019.T2), y la matriz P de columnas $B - A$, $C - A$ es invertible (G2-008.T2). Igual la matriz P' de columnas $B' - A'$, $C' - A'$.
2. Sea ℓ la lineal con $\ell(B - A) = B' - A'$ y $\ell(C - A) = C' - A'$ (G2-007.T1). Entonces $[\ell]P = P'$ (columna a columna, G2-008.D1), así que $[\ell] = P'P^{-1}$, invertible con inversa PP'^{-1} (G2-008.T2).

3. $f(x) := A' + \ell(x - A) = [\ell]x + (A' - [\ell]A)$ es afín (G2-014.D1), y $f(A) = A'$, $f(B) = A' + (B' - A') = B'$, $f(C) = C'$.
4. *Unicidad.* Si $g(x) = Mx + c$ cumple lo mismo, $M(B - A) = g(B) - g(A) = B' - A'$ y $M(C - A) = C' - A'$: M y $[\ell]$ coinciden en una base, luego son iguales (G2-007.T1), y $c = A' - MA$ también.
5. *En* $\mathbb{R}^3$. Si A, B, C, D no son coplanares, $B - A$, $C - A$, $D - A$ son independientes: si fueran dependientes estarían en un plano por el origen (G1-022.T2) y los cuatro puntos en un plano. Los pasos 1-4 se repiten con tres columnas. ■

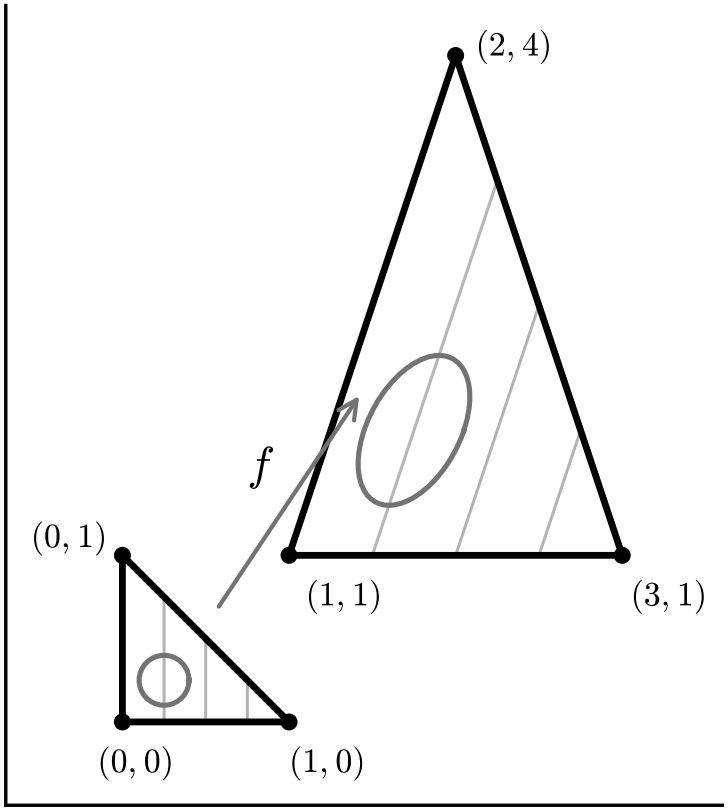


Figura 9: La afín de la calcomanía: el triángulo, sus rayas paralelas y una circunferencia, y sus imágenes.

Parte 2 · Las cónicas vistas por el grupo afín

Teorema G2-014.T4 (todas las elipses son afínmente equivalentes)

Para toda elipse E de $\mathbb{R}^2$ hay una afín f con $f(C(0,1)) = E$; lo mismo para toda hipérbola con $H_0 := \{x^2 - y^2 = 1\}$ y toda parábola con $P_0 := \{y = x^2\}$.

Demostración.

1. Por G1-029.T5, $E = m(E_0)$ con m un movimiento y $E_0 = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ canónica (G1-029.T1).
2. $D(x,y) := (ax, by)$ es lineal e invertible ($\det = ab \neq 0$). Si $x^2 + y^2 = 1$, $D(x,y)$ cumple $(ax)^2/a^2 + (by)^2/b^2 = 1$; si $(X,Y) \in E_0$, $(X/a, Y/b) \in C(0,1)$ y su imagen es (X,Y). Así $D(C(0,1)) = E_0$.
3. m es una isometría (G1-008.T4), luego afín (T1), y $f := m \circ D$ es afín (T1) con $f(C(0,1)) = E$.
4. *Hipérbola.* Con $H = m(H_1)$, $H_1 = \{x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1\}$ (G1-029.T5, G1-029.T2), el mismo D lleva H_0 sobre H_1 (la cuenta de 2 con el signo $-$).
5. *Parábola.* Con $P = m(P_1)$, $P_1 = \{y^2 = 4px\}$ (G1-029.T5, G1-029.T4), sea $g(x,y) := (py, 2px)$, de matriz $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 2p & 0 \end{pmatrix}$ y determinante $-2p^2 \neq 0$.
6. $P_0 = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$ y $g(t, t^2) = (pt^2, 2pt)$; por G1-034.T4, $t \mapsto (pt^2, 2pt)$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre P_1. Así $g(P_0) = P_1$ y $f := m \circ g$ sirve. ■

Teorema G2-014.T5 (clasificación afín de las cónicas)

El lugar de toda ecuación de segundo grado en dos variables es la imagen por una afín de exactamente uno de estos ocho conjuntos: la circunferencia $C(0,1)$; la hipérbola H_0; la parábola P_0; un punto $\{0\}$; dos rectas que se cortan $\{x^2 = y^2\}$; dos rectas paralelas $\{x^2 = 1\}$; una recta $\{x = 0\}$; el vacío.

Idea de la demostración

Existencia: G1-031.T3 dice qué puede ser el lugar, y para cada tipo hay una afín desde el modelo. Unicidad: se buscan propiedades que las afines biyectivas no cambian (número de puntos, rectas contenidas, paralelismo, acotación, lados de una recta) y se ve que separan a los ocho modelos.

Demostración de la existencia. Sea S el lugar.

1. Por G1-031.T3, S es una elipse, una hipérbola, una parábola, un punto, dos rectas que se cortan, dos paralelas, una recta o el vacío. Los tres primeros casos son T4.
2. Un punto $\{P\}$ es la imagen de $\{0\}$ por $x \mapsto x + P$; el vacío, la imagen de $\emptyset$ por la identidad.
3. *Dos rectas que se cortan*, $L(P,u) \cup L(P,v)$ con u, v no paralelos. $\{x^2 = y^2\}$ es $L(0,(1,1)) \cup L(0,(1,-1))$, pues $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$ (C1-002.T5). Sea ℓ lineal con $\ell(1,1) = u, \ell(1,-1) = v$ (G2-007.T1); su matriz es invertible (como en T3, paso 2), y $x \mapsto \ell(x)+P$ lleva cada recta modelo sobre la dada (T2).
4. *Dos paralelas distintas*, $L(P,v) \cup L(Q,v)$. $P - Q$ no es paralelo a v (si no, $Q \in L(P,v)$ y las rectas coincidirían, G1-001.T4). La lineal ℓ con $\ell(e_1) = (P-Q)/2$, $\ell(e_2) = v$ es invertible (G2-008.T2), y $f(x) := \ell(x) + (P+Q)/2$ lleva $L((\pm 1,0), e_2)$, que forman $\{x^2 = 1\}$, sobre $L(P,v)$ y $L(Q,v)$ (T2).
5. *Una recta* $L(P,v)$: con $\ell(e_2) = v$, $\ell(e_1) = v^\perp$ (no paralelo a v), $x \mapsto \ell(x) + P$ lleva $\{x = 0\} = L(0,e_2)$ sobre ella (T2).

Demostración de la unicidad. Si $S = f(S_1) = g(S_2)$ con S_1, S_2 modelos, entonces $S_2 = g^{-1}f(S_1)$ con $g^{-1}f$ afín (T1). Basta ver que dos modelos distintos no son imagen uno del otro por una afín h. Se usa que h y h^{-1} son biyecciones afines (T1), así que conservan todo lo que dice T2 en ambos sentidos.

1. *Número de puntos.* $\emptyset$ tiene 0, $\{0\}$ tiene 1, y los otros seis tienen al menos dos ($(\pm 1,0)$ está en $C(0,1)$, H_0 y $\{x^2 = 1\}$; $(0,0), (1,1)$ en P_0 y en $\{x^2 = y^2\}$; $(0,0), (0,1)$ en $\{x = 0\}$). Una biyección conserva ese número.
2. *Rectas contenidas en una cónica sin rectas.* Si $P_1 + tv \in \{F = 0\}$ para todo t, con $v \neq 0$, por G1-033.T1 $F(P_1) + tG_F(P_1) \cdot v + t^2 Q(v) = 0$ para todo t, y G1-020.T7 da $Q(v) = 0$ y $G_F(P_1) \cdot v = 0$.
3. Para $C(0,1)$: $Q(v) = v_1^2 + v_2^2 = 0$ obliga $v = 0$ (G1-002.T1). Para $P_0 = \{x^2 - y = 0\}$: $Q(v) = v_1^2$ da $v_1 = 0$, y $G_F(P_1) \cdot v = (2x_1, -1) \cdot (0, v_2) = -v_2 = 0$: $v = 0$.
4. Para H_0: $Q(v) = v_1^2 - v_2^2 = 0$ da $v_2 = \sigma v_1$ con $\sigma = \pm 1$ y $v_1 \neq 0$; entonces $G_F(P_1) \cdot v = (2x_1, -2y_1) \cdot v = 2v_1(x_1 - \sigma y_1) = 0$, así que $x_1 = \sigma y_1$ y $x_1^2 - y_1^2 = 0 \neq 1$, contra $P_1 \in H_0$. Ninguno de los tres contiene rectas; los otros tres modelos no vacíos sí.
5. *Cuántas rectas.* Si una recta L está en $L_1 \cup L_2$, tres puntos distintos de L caen en L_1 o L_2, y dos de ellos en la misma, digamos L_1 (C1-005.T10); por dos puntos pasa una sola recta (G1-001.T4): $L = L_1$. Así $\{x = 0\}$ contiene exactamente una recta, y $\{x^2 = 1\}$, $\{x^2 = y^2\}$ exactamente dos. Como h y h^{-1} llevan rectas en rectas (T2), h conserva el número de rectas contenidas.
6. *Paralelas o no.* Las dos rectas de $h(\{x^2 = 1\})$ son las imágenes de $x = \pm 1$, que son paralelas: son

paralelas (T2). Las de $\{x^2 = y^2\}$ se cortan. No son equivalentes.

7. *Acotación.* $C(0,1)$ es acotada. H_0 y P_0 no: contienen $(x, \sqrt{x^2-1})$ $(x \geq 1)$ y (t, t^2), de norma $\geq x$ y $\geq |t|$ (G1-002.T3). Por T2 para h y h^{-1}, $C(0,1)$ no es equivalente a ninguna de las dos.
8. *Lados de una recta.* La recta $x = 0$ no corta a H_0 ($-y^2 = 1$ es imposible), y $(1,0)$, $(-1,0) \in H_0$ están en los semiplanos opuestos $\{x > 0\}$, $\{x < 0\}$.
9. Si $ax + by = c$ no corta a P_0: con $b = 0$ (y $a \neq 0$), el punto $(c/a, c^2/a^2) \in P_0$ estaría en ella; luego $b \neq 0$ y $bt^2 + at - c$ no tiene raíces reales. Por G1-005.T1 tiene el signo de b para todo t: P_0 queda en un solo semiplano abierto de la recta.
10. Si $h(P_0) = H_0$, la recta $h^{-1}(\{x = 0\})$ no corta a P_0, que queda en uno de sus semiplanos abiertos (9); por T2 (paso 12), $H_0 = h(P_0)$ quedaría en uno solo de los semiplanos de $x = 0$, contra 8.
11. Los pasos 1-10 separan los ocho modelos dos a dos: 1 separa $\emptyset$ y $\{0\}$ de todo; 2-4 separan los tres sin rectas de los tres con rectas; 5-6 separan estos entre sí; 7 y 10 separan $C(0,1)$, H_0 y P_0. ■

Corolario G2-014.C1 ⚠ def (factor de áreas y volúmenes)

Si $f(x) = Ax + b$ es afín en $\mathbb{R}^2$, f lleva el paralelogramo $\{P + su + tv : s, t \in [0,1]\}$ sobre el de vértice $f(P)$ y lados Au, Av, cuya área es $|\det A|$ veces la original; en $\mathbb{R}^3$, lo mismo para los volúmenes de paralelepípedos.

Demostración.

1. $f(P + su + tv) = f(P) + sAu + tAv$ (T2, paso 1), con los mismos $s, t \in [0,1]$: la imagen es el paralelogramo de vértice $f(P)$ y lados Au, Av.
2. Por G2-008.T8 (⚠ def), su área es $|\det A|$ veces la del de lados u, v.
3. En $\mathbb{R}^3$, $f(P + ru + sv + tw) = f(P) + rAu + sAv + tAw$, y G2-008.T8 da el factor $|\det A|$ del volumen. ■

Ejemplo G2-014.E1

La afín con $(0,0) \mapsto (1,1)$, $(1,0) \mapsto (3,1)$, $(0,1) \mapsto (2,4)$ es $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + (1,1)$, de det 6: multiplica las áreas por 6 y no es una isometría ($|f(e_1) - f(0)| = 2$).

1. $b = f(0) = (1,1)$; las columnas de A son $f(e_1) - b = (2,0)$ y $f(e_2) - b = (1,3)$ (T3).
2. $\det A = 6$: el triángulo de área $1/2$ va a uno de área 3 (C1).
3. $|f(e_1) - f(0)| = |(2,0)| = 2 \neq 1 = |e_1 - 0|$: no conserva distancias.

Por qué cada hipótesis

⚠ A invertible

$f(x, y) = (x, 0)$ es de la forma $Ax + b$ con $\det A = 0$: aplasta el plano sobre una recta, no es biyectiva y lleva la circunferencia unitaria en el segmento $[-1, 1] \times \{0\}$, que no es ninguno de los ocho modelos.

⚠ Triángulos, no tres puntos cualesquiera

Si A, B, C están alineados, $f(B) - f(A)$ y $f(C) - f(A)$ son proporcionales para toda afín f (T2): no hay afín que los lleve a un triángulo, y si los tres de llegada también están alineados hay muchas.

⚠ Las afines no conservan ángulos ni distancias

En E1, el ángulo recto en $(0, 0)$ va al ángulo entre $(2, 0)$ y $(1, 3)$, cuyo producto punto es $2 \neq 0$. Por eso todas las elipses son equivalentes: la excentricidad no es un invariante afín.

Ejercicios

1. Encuentra la afín que lleva $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 0)$ y su factor de áreas.
2. Demuestra que una afín lleva el punto medio de $[P, Q]$ en el punto medio de $[f(P), f(Q)]$.
3. ¿Es afínmente equivalente $\{xy = 1\}$ a H_0? Da la afín.
4. Demuestra que una afín lleva el baricentro de un triángulo en el baricentro del triángulo imagen.
5. ¿Puede una afín llevar la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ en la parábola $y = x^2$? Justifica.

Respuestas

1. $b = (2, 0)$, columnas $(0, 1)$ y $(-2, 0)$: $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + (2, 0)$, $\det = 2$.
2. Es la combinación afín $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ (T2, paso 6).
3. Sí. La lineal $g(u, v) := (u + v, u - v)$, de $\det = -2$, cumple $xy = (u + v)(u - v) = u^2 - v^2$ si $(x, y) = g(u, v)$: lleva H_0 sobre $\{xy = 1\}$.
4. Combinación afín con $\lambda_i = 1/3$ (T2).
5. No: la elipse es acotada y la parábola no (T5, paso 7).

G2-015 · Perspectiva

Motivación

> **Las vías del tren y la linterna**
> En una foto, las dos vías del tren, que son paralelas, se juntan en un punto del horizonte. La cámara hace una **proyección central**: cada punto del suelo se ve en el punto donde el rayo que va al ojo corta la foto. Y si alumbras una pared con una linterna, el borde de la mancha de luz (un círculo del haz) se ve como una elipse, una parábola o una hipérbola según inclines la linterna. Dónde falla la analogía: la foto es un rectángulo finito y el ojo no es un punto; aquí el centro es un punto exacto y los planos son infinitos, así que aparecen puntos que no se ven (la recta de fuga).

Parte 1 · Proyección central, rectas y puntos de fuga

Definición G2-015.D1 (perspectiva)

Sean Π, Π' planos de $\mathbb{R}^3$ y $O \notin \Pi \cup \Pi'$, con $\Pi' = \{n \cdot Y = k\}$. La **perspectiva** de centro O de Π en Π' es

$$p(X) := O + \frac{k - n \cdot O}{n \cdot (X - O)}(X - O),$$

definida para $X \in \Pi$ con $n \cdot (X - O) \neq 0$: $p(X)$ es el único punto de Π' en la recta OX. La **recta de fuga** de Π es $\ell_f := \{X \in \Pi : n \cdot (X - O) = 0\}$ (los X cuya recta OX es paralela a Π').

La frase «único punto» es una cuenta: $O + t(X - O) \in \Pi' \iff n \cdot O + t\, n \cdot (X - O) = k$ (G1-002.T1), que tiene la única solución $t = (k - n \cdot O)/(n \cdot (X - O))$ si $n \cdot (X - O) \neq 0$, y ninguna si $n \cdot (X - O) = 0$ (pues $n \cdot O \neq k$).

Teorema G2-015.T1 (recta de fuga; inyectividad)

ℓ_f es vacía si Π es paralelo a Π' y es una recta si no. p es inyectiva en $\Pi \setminus \ell_f$, su imagen es $\Pi' \setminus \ell'_f$, con ℓ'_f la recta de fuga de Π' respecto a Π (mismo centro), y su inversa es la perspectiva de centro O de Π' en Π.

Demostración. Sea $\Pi = \{m \cdot X = k_0\}$ (G1-025.T1).

1. *Paralelos.* Si $n = \lambda m$, en Π vale $n \cdot (X - O) = \lambda k_0 - n \cdot O$, una constante. Si fuera 0, $m \cdot O = k_0$ y $O \in \Pi$, imposible. Así $\ell_f = \emptyset$.
2. *No paralelos.* $\ell_f = \Pi \cap \{n \cdot X = n \cdot O\}$ es la intersección de dos planos de normales no proporcionales: una recta (G1-026.T5(b)).
3. *Una recta por O corta a Π en a lo más un punto.* Si contuviera dos puntos $X \neq X'$ de Π, sería $L(X, X' - X)$ (G1-001.T4), y $m \cdot (X + t(X' - X)) = (1 - t)k_0 + tk_0 = k_0$: estaría en Π, y O también.
4. *Inyectividad.* Si $p(X) = p(X')$, X y X' están en la recta por O y $p(X)$ ($p(X) \neq O$ porque $O \notin \Pi'$), así que $X = X'$ por 3.
5. Sea p' la perspectiva de centro O de Π' en Π, definida fuera de $\ell'_f = \{Y \in \Pi' : m \cdot (Y - O) = 0\}$. Para $X \in \Pi \setminus \ell_f$, $p(X) = O + \lambda(X - O)$ con $\lambda = (k - n \cdot O)/(n \cdot (X - O)) \neq 0$, y $m \cdot (p(X) - O) = \lambda(k_0 - m \cdot O) \neq 0$: $p(X) \notin \ell'_f$.
6. $p'(p(X))$ es el único punto de Π en la recta $O\,p(X)$, que es la recta OX; ese punto es X. Igual, $p(p'(Y)) = Y$ para $Y \in \Pi' \setminus \ell'_f$. Luego $p : \Pi \setminus \ell_f \to \Pi' \setminus \ell'_f$ es biyectiva con inversa p' (C1-011.T1). ■

Teorema G2-015.T2 (rectas en rectas)

Si $L \subset \Pi$ es una recta distinta de ℓ_f y Σ es el plano que contiene a O y a L (G1-025.T2), $L' := \Sigma \cap \Pi'$ es una recta y $p(L \setminus \ell_f) = L' \setminus \ell'_f$.

Demostración.

1. $O \notin L$ ($O \notin \Pi$), así que O y dos puntos de L no están alineados y Σ es el único plano que los contiene (G1-025.T2); contiene a L (paso 3 de T1, con Σ en lugar de Π).
2. $\Sigma \neq \Pi'$, porque $O \in \Sigma \setminus \Pi'$.
3. Si Σ fuera paralelo a Π', sería $\{n \cdot (Y - O) = 0\}$ (normal n y pasa por O, G1-025.T1); entonces $L \subset \Sigma \cap \Pi = \ell_f$, y como ℓ_f es a lo más una recta (T1), $L = \ell_f$, contra la hipótesis.
4. Por 2 y 3, $L' = \Sigma \cap \Pi'$ es una recta (G1-026.T5(b)).

5. Si $X \in L \setminus \ell_f$, $p(X)$ está en la recta $OX \subset \Sigma$ y en Π': $p(X) \in L'$, y $p(X) \notin \ell'_f$ (T1).
6. Si $Y \in L' \setminus \ell'_f$, $X := p^{-1}(Y) \in \Pi$ está en la recta $OY \subset \Sigma$. Σ y Π son planos distintos (O) que contienen a L, así que $\Sigma \cap \Pi = L$ (G1-026.T5(b)): $X \in L \setminus \ell_f$ y $p(X) = Y$. ■

Teorema G2-015.T3 (paralelas → concurrentes: el punto de fuga)

Sean $L_1 \neq L_2$ rectas paralelas de Π, de dirección v, distintas de ℓ_f. Si $n \cdot v \neq 0$, sus rectas imagen $L'_1 \neq L'_2$ pasan por el **punto de fuga** $F_v := O + \frac{k - n \cdot O}{n \cdot v} v \in \Pi'$, que no es imagen de ningún punto de Π; si $n \cdot v = 0$, L'_1 y L'_2 son paralelas distintas de dirección v.

Demostración. Sea Σ_i el plano de O y L_i (T2), con $L'_i = \Sigma_i \cap \Pi'$.

1. Si $\Sigma_i = \{N_i \cdot X = c_i\}$, $N_i \cdot v = 0$ (v es diferencia de dos puntos de L_i) y $N_i \cdot O = c_i$: la recta $O + \langle v \rangle$ está en Σ_i.
2. *Si $n \cdot v \neq 0$.* $n \cdot F_v = n \cdot O + (k - n \cdot O) = k$: $F_v \in (O + \langle v \rangle) \cap \Pi' \subset \Sigma_i \cap \Pi' = L'_i$ para $i = 1, 2$.
3. *F_v no es imagen.* Si $p(X) = F_v$, X está en la recta $OF_v = O + \langle v \rangle$ ($F_v \neq O$). Pero $m \cdot v = 0$ (v es dirección de Π), así que $m \cdot (O + tv) = m \cdot O \neq k_0$: esa recta no toca a Π.
4. $L'_1 \neq L'_2$. Si $L'_1 = L'_2$, como $O \notin L'_1$, Σ_1 y Σ_2 contienen a O y a dos puntos de L'_1, no alineados, así que $\Sigma_1 = \Sigma_2$ (G1-025.T2) y $L_1 = \Sigma_1 \cap \Pi = L_2$ (paso 6 de T2).
5. *Si $n \cdot v = 0$.* $v \neq 0$ es ortogonal a N_i y a n, que no son proporcionales (paso 3 de T2), así que $v \in \langle N_i \times n \rangle$ (G1-021.T4), el director de L'_i (G1-026.T5(b)). Las dos imágenes tienen dirección v y son distintas por 4. ■

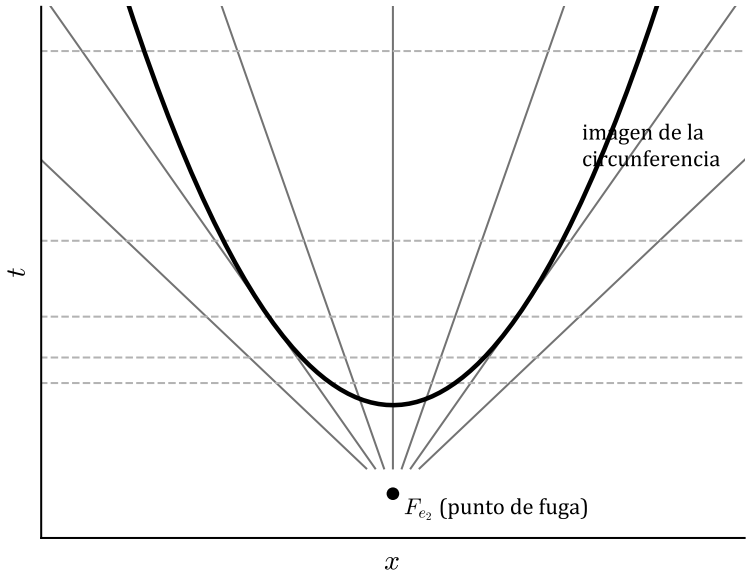


Figura 10: En la carta del plano $-y+z=2\sqrt{2}$, vistas desde 0: las rectas $x=c$ de $z=1$ (gris) concurren en el punto de fuga; las $y=c$ (punteadas) siguen paralelas; la circunferencia $x^2+y^2=1$ es la parábola (negro).

Parte 2 · Toda cónica es perspectiva de una circunferencia

Lema G2-015.T5 (mover la configuración)

(a) Sean $M(x)=Ax+b$ un movimiento de $\mathbb{R}^3$ ($A\in O(3)$, G2-010.C1) y p la perspectiva de centro O de Π en $\Pi'=\{n\cdot Y=k\}$. Entonces $M(\Pi')=\{An\cdot Y=k+An\cdot b\}$, $M(\ell_f)$ es la recta de fuga de $M(\Pi)$ respecto a $M(\Pi')$ con centro $M(O)$, y $M(p(X))=p_M(M(X))$ para $X\in\Pi\setminus\ell_f$, con p_M la perspectiva de centro $M(O)$ de $M(\Pi)$ en $M(\Pi')$. (b) Si φ es una carta de Π' y χ una carta de un plano Π_1 (G1-032.D2), existe un movimiento M de $\mathbb{R}^3$ con $M\circ\varphi=\chi$; en particular $M(\Pi')=\Pi_1$. (c) Si ψ es una carta de un plano y m un movimiento de $\mathbb{R}^2$, $\psi\circ m$ es una carta del mismo plano.

Demostración de (a).

1. M es biyectiva con $M^{-1}(Y)=A^{\mathsf{T}}(Y-b)$ (G2-010.C1). $Y\in M(\Pi')\iff n\cdot A^{\mathsf{T}}(Y-b)=k\iff An\cdot Y=k+An\cdot b$ (G2-008.T4).
2. Sean $n':=An$, $k':=k+An\cdot b$, $O':=M(O)$. Para $X\in\Pi$, como A conserva el producto punto

(G2-010.T1), $n' \cdot (M(X) - O') = An \cdot A(X - O) = n \cdot (X - O)$.

3. Por 2, $M(X)$ está en la recta de fuga de $M(\Pi)$ (respecto a $M(\Pi')$, centro O') $\iff X \in \ell_f$: esa recta es $M(\ell_f)$.
4. $k' - n' \cdot O' = k + An \cdot b - An \cdot (AO + b) = k - An \cdot AO = k - n \cdot O$ (G2-010.T1).
5. Con 2 y 4, para $X \in \Pi \setminus \ell_f$ y $\lambda := (k - n \cdot O)/(n \cdot (X - O))$:

$$p_M(M(X)) = O' + \lambda\,(M(X) - O') = AO + b + \lambda A(X - O) = A(O + \lambda(X - O)) + b = M(p(X)).$$

Demostración de (b).

6. Sean $\varphi(x,t) = P_0 + xu + tw$ y $\chi(x,t) = Q_0 + xu' + tw'$, con (u,w) y (u',w') pares ortonormales. Por G1-021.T5, $(b_1,b_2,b_3) := (u,w,u\times w)$ y $(b_1',b_2',b_3') := (u',w',u'\times w')$ son bases ortonormales.
7. $L(x) := \sum_i (x \cdot b_i) b_i'$ es lineal (G1-002.T1) y $L(b_j) = b_j'$. Por G1-021.T1, $L(x) \cdot L(y) = \sum_i (x \cdot b_i)(y \cdot b_i) = x \cdot y$: $[L] \in O(3)$ (G2-010.T1).
8. $M(X) := Q_0 + L(X - P_0)$ es un movimiento (G2-010.C1) y $M(\varphi(x,t)) = Q_0 + xL(u) + tL(w) = \chi(x,t)$. Así $M(\Pi') = M(\varphi(\mathbb{R}^2)) = \chi(\mathbb{R}^2) = \Pi_1$.

Demostración de (c).

9. Sean $\psi(x) = P_0 + x_1 u + x_2 w$ y $m(x) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + c$ con (w_1, w_2) un marco ortonormal (G1-008.D2). Entonces

$$\psi(m(x)) = \psi(c) + x_1(w_{11}u + w_{21}w) + x_2(w_{12}u + w_{22}w).$$

10. $u'' := w_{11}u + w_{21}w$ y $w'' := w_{12}u + w_{22}w$ cumplen $u'' \cdot w'' = w_1 \cdot w_2 = 0$ y $|u''| = |w_1| = 1$, $|w''| = |w_2| = 1$, porque (u,w) es ortonormal (G1-002.T1). Son dos vectores ortonormales de la dirección $\langle u,w\rangle$ del plano: $\psi \circ m$ es una carta del mismo plano (G1-032.D2). ■

Definición G2-015.D2 (circunferencia de un plano de $\mathbb{R}^3$)

Sean $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano, $c \in \Pi$ y $r > 0$. La **circunferencia de** Π de centro c y radio r es $\{Y \in \Pi : |Y - c| = r\}$. Si φ es una carta de Π (G1-032.D2), es $\varphi(C(\varphi^{-1}(c), r))$, con $C(\cdot, r)$ la circunferencia de $\mathbb{R}^2$ (G1-005.D1), porque φ es una isometría biyectiva de $\mathbb{R}^2$ sobre Π; así coincide con «$\varphi^{-1}(S)$ es una circunferencia» en el sentido de G1-032.D2.

En efecto, si $Y = \varphi(y)$, $|Y - c| = |\varphi(y) - \varphi(\varphi^{-1}(c))| = |y - \varphi^{-1}(c)|$ (G1-002.D3).

Teorema G2-015.T4 (toda cónica es perspectiva de una circunferencia)

Sean $r > 0$, $\Gamma := \{x^2 + y^2 = r^2, z = 1\}$ (una circunferencia del plano $\Pi := \{z = 1\}$, G2-015.D2), $O := 0$, $s > 0$ y μ con $s^2 + \mu^2 = 1$, $h \neq 0$, $\Pi' := \{-\mu y + sz = sh\}$ con la carta isométrica $\varphi(x,t) := (x, st, h + \mu t)$ (G1-032.D2) y $K := \{x^2 + y^2 = r^2 z^2\}$. La perspectiva de centro 0 de Π en Π' lleva $\Gamma \setminus \ell_f$ sobre $\Pi' \cap K$, y

$$\varphi^{-1}(\Pi' \cap K) = \{x^2 + (s^2 - r^2\mu^2)t^2 - 2r^2 h\mu t - r^2 h^2 = 0\}.$$

Para $a \geq b > 0$ y $p > 0$: con $\kappa := b^2/a^2$, $r = 1$, $s^2 = (1+\kappa)/2$, $\mu^2 = (1-\kappa)/2$ y $h = a\kappa/s$ es la elipse de semiejes b (en x) y a (en t); con $r^2 = 1 + 2b^2/a^2$, $s = \mu = 1/\sqrt{2}$ y $h = b^2/(ars)$ es la hipérbola de semieje focal a (en t) y semieje b; con $r = 1$, $s = \mu = 1/\sqrt{2}$ y $h = 2\sqrt{2}p$ es la parábola $x^2 = 4p(t + 2p)$. En consecuencia, toda elipse, hipérbola o parábola de un plano de $\mathbb{R}^3$ es la imagen por una perspectiva de una circunferencia menos sus puntos en la recta de fuga.

Idea de la demostración

El haz de la linterna es el cono K; la circunferencia Γ y la mancha en la pared son dos cortes del mismo cono, y la perspectiva desde el vértice pasa de uno al otro. En la carta de la pared, la mancha tiene una ecuación de segundo grado cuyos semiejes se ajustan con s, μ, h. Una cónica cualquiera se lleva a la modelo con un movimiento de $\mathbb{R}^3$ (lema T5).

Demostración. Aquí $n = (0, -\mu, s)$, $k = sh$ y $p(X) = \frac{sh}{n \cdot X} X$.

1. φ es una carta de Π': $-\mu(st) + s(h + \mu t) = sh$, y $(1,0,0)$, $(0,s,\mu)$ son ortonormales ($s^2 + \mu^2 = 1$; G1-032.D2).
2. Con $F(Y) := y_1^2 + y_2^2 - r^2 y_3^2$, $F(\lambda Y) = \lambda^2 F(Y)$, así que $K = \{F = 0\}$ es cerrado bajo múltiplos.
3. $p(\Gamma \setminus \ell_f) \subset \Pi' \cap K$. Si $X \in \Gamma$, $F(X) = r^2 - r^2 = 0$; $p(X)$ es múltiplo de X (2) y está en Π' (D1).
4. $\Pi' \cap K \subset p(\Gamma \setminus \ell_f)$. Sea $Y \in \Pi' \cap K$. Si $y_3 = 0$, $F(Y) = 0$ da $y_1 = y_2 = 0$ e $Y = 0$, pero $n \cdot 0 = 0 \neq sh$. Así $y_3 \neq 0$ y $X := Y/y_3$ tiene $x_3 = 1$ y $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ (2): $X \in \Gamma$. Además $n \cdot X = sh/y_3 \neq 0$ ($X \notin \ell_f$) y $p(X) = y_3 X = Y$.
5. *La ecuación en la carta.* $\varphi(x,t) \in K \iff x^2 + s^2 t^2 = r^2(h + \mu t)^2$, que al desarrollar es la ecuación del enunciado.
6. *Completar el cuadrado.* Con $\kappa := s^2 - r^2\mu^2 \neq 0$ y $s^2 = \kappa + r^2\mu^2$:

$$x^2 + \kappa\Big(t - \frac{r^2 h\mu}{\kappa}\Big)^2 = r^2 h^2 + \frac{r^4 h^2 \mu^2}{\kappa} = \frac{r^2 h^2 s^2}{\kappa}.$$

7. *Elipse.* $r = 1$: $\kappa = s^2 - \mu^2 = b^2/a^2$ y $r^2h^2s^2/\kappa = a^2\kappa^2/\kappa = b^2$. Queda $x^2/b^2 + (t - t_0)^2/a^2 = 1$ con $t_0 = h\mu/\kappa$: semiejes b en x y a en t.
8. *Hipérbola.* $s = \mu = 1/\sqrt{2}$: $\kappa = (1 - r^2)/2 = -b^2/a^2$, y $r^2h^2s^2 = b^4/a^2$, así que el lado derecho es $-b^2$: $(t - t_0)^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$, de semieje focal a en t y semieje b.
9. *Parábola.* $r = 1$, $s = \mu$: $\kappa = 0$ y la ecuación de 5 es $x^2 - 2h\mu t - h^2 = 0$, con $2h\mu = 4p$ y $h^2 = 8p^2$: $x^2 = 4p(t + 2p)$. (Las cuentas 6-9 están en `tools/checks/G2-015.py`.)
10. *Una cónica cualquiera.* Sea C una elipse, hipérbola o parábola de un plano Π_1 con carta ψ. Por G1-029.T5, $\psi^{-1}(C) = m(C_0)$ con m un movimiento de $\mathbb{R}^2$ y C_0 canónica (para la elipse, con $a \geq b$).
11. La cónica modelo de 7, 8 o 9 de los mismos parámetros es $\varphi^{-1}(p(\Gamma \setminus \ell_f)) = m_0(C_0)$ con $m_0(X, Y) := (Y, X + t_0)$ (elipse e hipérbola) o $m_0(X, Y) := (Y, X - 2p)$ (parábola $Y^2 = 4pX$): m_0 es un movimiento (marco (e_2, e_1), G1-008.D2).
12. $m \circ m_0^{-1}$ es un movimiento de $\mathbb{R}^2$ (G1-008.T4), y $\chi := \psi \circ m \circ m_0^{-1}$ es una carta de Π_1 (T5(c)). Por T5(b) hay un movimiento M de $\mathbb{R}^3$ con $M \circ \varphi = \chi$.
13. Entonces, con T5(a) y M biyectiva,

$$C = \psi(m(C_0)) = \chi(m_0(C_0)) = M(\varphi(m_0(C_0))) = M(p(\Gamma \setminus \ell_f)) = p_M(M(\Gamma) \setminus M(\ell_f)),$$

donde p_M es la perspectiva de centro $M(0)$ de $M(\Pi)$ en $M(\Pi') = \Pi_1$ y $M(\ell_f)$ su recta de fuga.
14. $M(\Gamma) = \{Y \in M(\Pi) : |Y - M(0, 0, 1)| = r\}$, porque M es una isometría biyectiva (G2-010.C1): es una circunferencia del plano $M(\Pi)$ (G2-015.D2). ■

Ejemplo G2-015.E1

Con $r = 1$, $s = \mu = 1/\sqrt{2}$ y $h = 2\sqrt{2}$ ($p = 1$), la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del plano $z = 1$ se ve desde 0 en el plano $-y + z = 2\sqrt{2}$ como la parábola $x^2 = 4(t + 2)$ de la carta φ; el único punto de Γ en la recta de fuga ($-y + z = 0$, $z = 1$) es $(0, 1, 1)$.

1. $\Pi' = \{-y/\sqrt{2} + z/\sqrt{2} = 2\}$, es decir $-y + z = 2\sqrt{2}$. Por T4, paso 9, la imagen es $x^2 = 4(t + 2)$.
2. ℓ_f: $n \cdot X = (1 - y)/\sqrt{2} = 0$ con $z = 1$, es decir $y = 1$; en Γ, $x^2 + 1 = 1$ da $x = 0$.
3. En la carta, $X = (x, y, 1) \mapsto (2\sqrt{2}\,x/(1 - y),\ 4y/(1 - y))$; las rectas $x = c$ van a rectas por el punto de fuga F_{e_2}, de carta $(0, -4)$, y las $y = c$ a las paralelas $t = 4c/(1 - c)$ (figura).

Por qué cada hipótesis

⚠ $O \notin \Pi \cup \Pi'$

Si $O \in \Pi$, todas las rectas OX con $X \in \Pi$ están en Π, y la «imagen» de Π es la recta $\Pi \cap \Pi'$: no hay biyección. Si $O \in \Pi'$, $p(X) = O$ para todo X.

⚠ **Quitar la recta de fuga**

En E1, $(0, 1, 1) \in \Gamma$ no tiene imagen: su rayo es paralelo a la pared. Por eso la imagen es la parábola entera y la circunferencia pierde un punto. Con la hipérbola se pierden dos.

⚠ **Las perspectivas no son afines**

Llevan paralelas en concurrentes (T3): no conservan paralelismo, así que no son afines (G2-014.T2), y no tienen por qué conservar el tipo afín de una cónica.

Ejercicios

1. En E1, calcula la imagen en la carta de la recta $x = 1$ de Π y verifica que pasa por $(0, -4)$.
2. Demuestra que si $\Pi \parallel \Pi'$, la perspectiva es la restricción de una homotecia con centro O.
3. Con $a = 2, b = 1$, calcula s, μ y h de la elipse de T4.
4. ¿Por qué la recta de fuga no corta a la imagen de ninguna recta de Π en un punto de Π'?
5. Da r, s, μ, h para que la imagen sea la hipérbola de semiejes $a = b = 1$.

Respuestas

1. $x' = 2\sqrt{2}/(1-y)$, $t = 4y/(1-y)$: $x' = 2\sqrt{2}(t+4)/4$, que vale 0 en $t = -4$.
2. $n \cdot (X - O)$ es constante $c \neq 0$ en Π (T1, paso 1), así que $p(X) = O + \lambda(X - O)$ con $\lambda = (k - n \cdot O)/c$ fijo.
3. $\kappa = 1/4$, $s^2 = 5/8$, $\mu^2 = 3/8$, $h = 2 \cdot \frac{1}{4}/s = \frac{1}{2}\sqrt{8/5} = \sqrt{2/5}$.
4. La pregunta tiene trampa: ℓ_f está en Π, no en Π'; lo que no tiene preimagen en Π' es ℓ'_f (T1), y los puntos de fuga F_v están en ℓ'_f (pues $m \cdot (F_v - O) = \lambda\, m \cdot v = 0$).
5. $r^2 = 3$, $s = \mu = 1/\sqrt{2}$, $h = 1/(\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2/3}$.

G2-016 · La geometría como estudio de invariantes

Motivación

> **La fotocopiadora**
> Una fotocopiadora tiene tres botones. «Copiar» no cambia nada de lugar más que la hoja: es una isometría. «Ampliar 200 %» duplica todas las distancias: los ángulos del dibujo siguen iguales. «Ajustar a lo ancho» estira solo en una dirección: las rectas siguen rectas y las paralelas paralelas, pero un cuadrado girado se vuelve un rombo y los ángulos cambian. Cada botón pertenece a un grupo de transformaciones, y cada grupo «ve» unas propiedades y no otras.
> Dónde falla la analogía: la fotocopiadora trabaja con una hoja finita y con tinta; aquí las transformaciones son de todo $\mathbb{R}^n$ y exactas.

Grupos, figuras equivalentes e invariantes

Definición G2-016.D1 (geometría de un grupo; invariantes)

Sea G un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^n$ (G2-010.D2). Dos figuras $S, S' \subset \mathbb{R}^n$ son **G-equivalentes** si $S' = g(S)$ para alguna $g \in G$; una función o propiedad Φ de las figuras es un **invariante de** G si $\Phi(g(S)) = \Phi(S)$ para toda $g \in G$ y toda S. La **geometría de** G estudia los invariantes de G (programa de Erlangen, Klein).

Teorema G2-016.T1 (la G-equivalencia es una equivalencia)

Ser G-equivalentes es reflexivo, simétrico y transitivo; si H es un subgrupo de G, todo invariante de G es invariante de H.

Demostración.

1. *Reflexiva.* $\mathrm{id} \in G$ y $S = \mathrm{id}(S)$ (G2-010.D2).
2. *Simétrica.* Si $S' = g(S)$ con $g \in G$, como g es biyectiva, $S = g^{-1}(S')$, y $g^{-1} \in G$ (G2-010.D2).
3. *Transitiva.* Si $S' = g(S)$ y $S'' = g'(S')$, entonces $S'' = (g' \circ g)(S)$ y $g' \circ g \in G$.
4. *Subgrupos.* Si $\Phi(g(S)) = \Phi(S)$ para toda $g \in G$, en particular para toda $g \in H \subset G$. ■

Mientras más grande es el grupo, menos invariantes tiene: «ser una circunferencia» es invariante de las isometrías, pero no de las afines.

Semejanzas

Definición G2-016.D2 (semejanza)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una **semejanza de razón** $k > 0$ si $|f(x) - f(y)| = k|x - y|$ para todos x, y. $\mathrm{Sem}(\mathbb{R}^n)$:= las semejanzas.

Teorema G2-016.T2 (semejanza = isometría ∘ homotecia)

f es una semejanza de razón $k \iff f = g \circ h_k$ con g isometría $\iff f(x) = kAx + b$ con A ortogonal. $\mathrm{Sem}(\mathbb{R}^n)$ es un grupo de transformaciones e $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Sem}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, con inclusiones estrictas: $h_2 \in \mathrm{Sem} \setminus \mathrm{Isom}$ y la cizalla $c_1 \in \mathrm{Aff} \setminus \mathrm{Sem}$ (en $\mathbb{R}^3$, su análoga $c_1'(x, y, z) := (x + y, y, z)$).

Idea de la demostración
Encoger primero por $1/k$ deja una transformación que conserva distancias: una isometría, que ya sabemos escribir como $Ax + b$.

Demostración.

1. *Semejanza ⇒ isometría ∘ homotecia.* Sea $g := f \circ h_{1/k}$. Entonces $|g(x) - g(y)| = |f(x/k) - f(y/k)| = k|x/k - y/k| = |x - y|$ (G1-002.T3): g es una isometría, y $g \circ h_k = f \circ h_{1/k} \circ h_k = f$.
2. *Isometría ∘ homotecia ⇒ fórmula.* Por G2-010.T2, $g(x) = Ax + b$ con $A \in O(n)$, así que $f(x) = g(kx) = kAx + b$.
3. *Fórmula ⇒ semejanza.* $|f(x) - f(y)| = |kA(x - y)| = k|A(x - y)| = k|x - y|$ (G1-002.T3, G2-010.T1).

4. *Grupo.* id es una semejanza de razón 1. Si $f = kAx + b$ y $f' = k'A'x + b'$, entonces $f(f'(x)) = kk'AA'x + (kAb' + b)$ con $AA' \in O(n)$ (G2-010.T1): semejanza de razón kk'.
5. f es biyectiva, pues h_k (G2-007.T4) y g (G2-010.C1) lo son, y $f^{-1}(y) = \frac{1}{k}A^{\mathsf{T}}y - \frac{1}{k}A^{\mathsf{T}}b$, con $A^{\mathsf{T}} \in O(n)$ (G2-010.T1): semejanza de razón $1/k$. Así $\mathrm{Sem}(\mathbb{R}^n)$ es un grupo de transformaciones (G2-010.D2).
6. *Inclusiones.* Una isometría es una semejanza de razón 1. kA es invertible, con inversa $\frac{1}{k}A^{\mathsf{T}}$ (G2-008.T2), así que toda semejanza es afín (G2-014.D1, G2-014.T1).
7. $h_2 \notin \mathrm{Isom}$. $|h_2(e_1) - h_2(0)| = 2 \neq 1 = |e_1|$.
8. $c_1 \notin \mathrm{Sem}$. c_1 es afín (G2-007.T4). Si fuera semejanza de razón k, de $|c_1(e_1) - c_1(0)| = |e_1| = 1$ saldría $k = 1$; pero $|c_1(e_2) - c_1(0)| = |(1,1)| = \sqrt{2} \neq 1 = |e_2|$ (G2-007.E1).
9. *En* $\mathbb{R}^3$. $c_1'(x,y,z) = (x + y, y, z)$ es lineal con inversa $(x,y,z) \mapsto (x - y, y, z)$, luego afín (G2-014.D1); $|c_1'(e_1) - c_1'(0)| = 1$ y $|c_1'(e_2) - c_1'(0)| = |(1,1,0)| = \sqrt{2}$, y la cuenta de 8 vale igual. ■

Qué conserva cada grupo

Teorema G2-016.T3 (qué conserva cada grupo)

(a) Las isometrías conservan distancias y cosenos de ángulos (G1-006.D1) y, ⚠ def, áreas y volúmenes. (b) Las semejanzas conservan razones de distancias y cosenos de ángulos, llevan rectas, planos, circunferencias y esferas en rectas, planos, circunferencias y esferas ($C(O,r) \mapsto C(f(O), kr)$; en $\mathbb{R}^3$, la circunferencia de un plano Π de centro c y radio r, G2-015.D2, va a la de $f(\Pi)$ de centro $f(c)$ y radio kr), y dos triángulos son semejantes (G1-009.D2) $\iff$ existe una semejanza que lleva uno en el otro, vértice a vértice. (c) Las afines conservan rectas, planos, paralelismo, razones sobre una recta, baricentros, convexidad y la clase afín de una cónica (G2-014.T5), pero no los cosenos de los ángulos: $\cos \angle(e_1, e_2) = 0$ y $\cos \angle(c_1 e_1, c_1 e_2) = 1/\sqrt{2}$.

Aquí «el ángulo en P entre Q y R» es $\angle(Q - P, R - P)$, y la transformación lo lleva al ángulo en $f(P)$ entre $f(Q)$ y $f(R)$.

Demostración de (a). Sea $f(x) = Ax + b$ con $A \in O(n)$ (G2-010.T2).

1. Las distancias, por definición de isometría (G1-004.D2).

2. $f(Q) - f(P) = A(Q - P)$, y A conserva productos punto y normas (G2-010.T1):

$$\cos \angle(Au, Av) = \frac{Au \cdot Av}{|Au||Av|} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \cos \angle(u, v).$$

3. ⚠ def: $\det A = \pm 1$ (G2-010.T1), y G2-008.T8 da el factor $|\det A| = 1$ para áreas de paralelogramos y volúmenes de paralelepípedos.

Demostración de (b). Sea $f(x) = kAx + b$ (T2).

4. *Razones.* $|f(x) - f(y)|/|f(z) - f(w)| = k|x - y|/(k|z - w|) = |x - y|/|z - w|$ si $z \neq w$.
5. *Cosenos.* Como en 2, con kA: $kAu \cdot kAv/(k|u|\, k|v|) = u \cdot v/(|u||v|)$.
6. *Rectas y planos.* f es afín (T2), y G2-014.T2.
7. *Circunferencias y esferas.* Si $|X - O| = r$, $|f(X) - f(O)| = kr$. Si $|Y - f(O)| = kr$, $X := f^{-1}(Y)$ cumple $|X - O| = |f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(O))| = \frac{1}{k} kr = r$ (f^{-1} es semejanza de razón $1/k$, T2). Así $f(C(O, r)) = C(f(O), kr)$. Si S es la circunferencia de un plano Π de centro c y radio r (G2-015.D2), $f(\Pi)$ es un plano (6), $f(c) \in f(\Pi)$, y el mismo argumento con $Y \in f(\Pi)$ (entonces $f^{-1}(Y) \in \Pi$) da $f(S) = \{Y \in f(\Pi) : |Y - f(c)| = kr\}$, la circunferencia de $f(\Pi)$ de centro $f(c)$ y radio kr.
8. *Triángulos, ⇐.* Si f lleva A, B, C en A', B', C', estos no están alineados (f es afín biyectiva y lleva rectas en rectas, G2-014.T2), $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ (D2) y los cosenos son iguales (5): son semejantes de razón k (G1-009.D2).
9. *Triángulos, ⇒.* Si ABC y $A'B'C'$ son semejantes de razón k, el triángulo $h_k(A)h_k(B)h_k(C)$ tiene lados $ka = a'$, $kb = b'$, $kc = c'$ y los cosenos de ABC (5), que son los de $A'B'C'$: es congruente con $A'B'C'$ (G1-008.D1). Por G2-010.C1 hay una isometría g que lo lleva en $A'B'C'$, y $g \circ h_k$ es una semejanza (T2).

Demostración de (c).

10. Rectas, planos, paralelismo, razones, baricentros y convexidad: G2-014.T2.
11. *Clase afín.* Si S es el lugar de $F = 0$ de segundo grado y g es afín, $g(S)$ es el lugar de $F \circ g^{-1}$, que es de segundo grado (G1-030.T1). Si $S = f(S_0)$ con S_0 un modelo de G2-014.T5, $g(S) = (g \circ f)(S_0)$, con $g \circ f$ afín (G2-014.T1): el mismo modelo.
12. *Cosenos no.* $c_1e_1 = (1, 0)$ y $c_1e_2 = (1, 1)$: $\cos \angle = 1/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} \neq 0 = \cos \angle(e_1, e_2)$ (G1-006.D1). ■

Grupo	Conserva	No conserva
Isom	distancias, ángulos, áreas (⚠ def)	—
Sem	razones de distancias, ángulos, circunferencias	distancias, áreas
Aff	rectas, paralelas, razones en una recta, baricentros, clase afín	ángulos, circunferencias

Ejemplo G2-016.E1
h_2 lleva $C(0,1)$ en $C(0,2)$; la afín $(x,y) \mapsto (2x,y)$ lleva $C(0,1)$ en la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$, que no es imagen de una circunferencia por ninguna semejanza: no es una circunferencia, pues una circunferencia por $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 1)$ tendría centro 0 (mediatrices) y radio 2 y 1 a la vez.

1. $h_2(C(0,1)) = C(0,2)$ por T3(b), paso 7.
2. $(x,y) \in C(0,1) \Rightarrow (2x)^2/4 + y^2 = 1$; y (X,Y) en la elipse viene de $(X/2, Y) \in C(0,1)$.
3. Si una semejanza llevara $C(O,r)$ en la elipse, la elipse sería $C(f(O), kr)$ (T3(b)). Pero el centro de una circunferencia por $(2,0)$ y $(-2,0)$ está en su mediatriz $x = 0$, y por $(0, \pm 1)$ en $y = 0$ (G1-004.T3): sería 0, con radio $|(2,0)| = 2$ y $|(0,1)| = 1$, imposible.

Por qué cada hipótesis

⚠ La razón k es la misma para todos los pares

$(x,y) \mapsto (2x,y)$ multiplica unas distancias por 2 y otras por 1: no es semejanza, y por eso cambia ángulos.

⚠ Invariante de un grupo grande ⇒ de uno chico, no al revés

El paralelismo es invariante afín, luego también de semejanzas e isometrías (T1). Pero «ser circunferencia» es invariante de semejanzas y no de afines (E1).

Ejercicios

1. Demuestra que la composición de dos homotecias h_k, $h_{k'}$ es $h_{kk'}$.
2. ¿Es $(x, y) \mapsto (3y + 1, -3x)$ una semejanza? ¿De qué razón?
3. ¿Hay algún invariante de las afines que no sea invariante de las isometrías?
4. Demuestra que una semejanza lleva el punto medio de $[P, Q]$ en el de $[f(P), f(Q)]$.
5. Demuestra que la razón de áreas de dos triángulos es un invariante afín (⚠ def).

Respuestas

1. $h_k(h_{k'}(x)) = kk'x$.
2. Sí: es $3Ax + (1, 0)$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$; razón 3 (T2).
3. No: por T1, todo invariante afín es invariante de cada subgrupo (semejanzas, isometrías).
4. Es afín (T2) y G2-014.T2.
5. Por G2-014.C1 las dos áreas se multiplican por el mismo $|\det A|$.

G2-017 · Círculos máximos y distancia en la esfera

Motivación

> **Volar por el paralelo o por el arco**
> Madrid y Nueva York están, aproximadamente, en el paralelo 40° norte, separadas 70° de longitud. Volar siempre hacia el oeste, por el paralelo, recorre unos 5,963 km. El arco del **círculo máximo** que las une mide unos 5,797 km: 166 km menos, y pasa más al norte (su punto medio está cerca de los 45.7° N). En un mapa plano esa ruta se ve curva; en la esfera es «la recta».
> Dónde falla la analogía: la Tierra no es una esfera exacta y los aviones no vuelan a ras del suelo; aquí la esfera es S^2, de radio 1 (las distancias de la Tierra se obtienen multiplicando por 6,371 km).

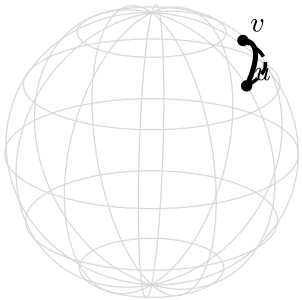


Figura 11: Dos puntos del paralelo 40° N separados 70°: el paralelo (punteado) y el arco del círculo máximo (continuo).

Parte 1 · Círculos máximos y la distancia esférica

Definición G2-017.D1 (la esfera y sus círculos máximos)

$S^2 := C(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = 1\}$. Un **círculo máximo** es $S^2 \cap \Pi$ con Π un plano por el origen. $u, v \in S^2$ son **antípodas** si $v = -u$.

Teorema G2-017.T1 (por dos puntos)

Si $u, v \in S^2$ y $v \neq \pm u$, u y v son independientes y $S^2 \cap \langle u, v\rangle$ es el único círculo máximo que los contiene. Si $v = -u$, cada plano por 0 que contiene a u da un círculo máximo que contiene a u y a v, y hay infinitos. Para todo par ortonormal (p, q) del plano de un círculo máximo, $\theta \mapsto (\cos\theta)p + (\operatorname{sen}\theta)q$ es una biyección de $(-\pi, \pi]$ sobre él.

Demostración.

1. *Independencia.* Si u, v fueran dependientes, $v = \lambda u$ (G1-019.T2, G1-001.T2) y $1 = |v| = |\lambda|$ (G1-002.T3): $v = \pm u$.
2. *Un plano por* 0 *es* $\langle p, q\rangle$ *con* (p, q) *ortonormal* (G1-025.T1 con $k = 0$), un subespacio de dimensión 2 (G1-020.T6).
3. *Unicidad.* Si un plano Π por 0 contiene a u y v, contiene a $\langle u, v\rangle$, de dimensión 2; por G1-020.T4, $\Pi = \langle u, v\rangle$. Y $S^2 \cap \langle u, v\rangle$ contiene a ambos.
4. *Antípodas.* Sea (u, w_1, w_2) ortonormal (G1-021.T5) y $c_t := (\cos t)w_1 + (\operatorname{sen} t)w_2$ para $t \in [0, \pi)$. Cada $\langle u, c_t\rangle$ contiene a u y a $-u$.
5. Si $\langle u, c_t\rangle = \langle u, c_{t'}\rangle$, entonces $c_{t'} = \alpha u + \beta c_t$; al multiplicar por u, $\alpha = 0$, y $|c_{t'}| = 1$ da $\beta = \pm 1$ (G1-021.T1). Así $(\cos t', \operatorname{sen} t') = \pm(\cos t, \operatorname{sen} t)$; el signo $-$ daría $t' - t - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ (G1-013.T1, C2-014.C1), imposible en $[0, \pi)$, y el $+$ da $t = t'$. Hay tantos planos como $t \in [0, \pi)$: infinitos.
6. *Parametrización.* Para $X = \alpha p + \beta q$, $|X|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (G1-021.T1, con (p, q) completado a base ortonormal). Así $X \in S^2 \iff (\alpha, \beta)$ es unitario $\iff (\alpha, \beta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ para un único $\theta \in (-\pi, \pi]$ (G1-013.T1). Como (α, β) es único (G1-019.T1), la función es biyectiva. ■

Definición G2-017.D2 (distancia esférica)

$d_S(u, v) := \arccos(u \cdot v) \in [0, \pi]$ para $u, v \in S^2$ (es la medida $m\angle(u, v)$ de G1-013.D2).

Está bien definida: $|u \cdot v| \leq |u||v| = 1$ (G1-002.T5) y arc cos está definida en $[-1, 1]$ (C2-014.D6).

Teorema G2-017.T2 (propiedades)

$d_S(u,v) = d_S(v,u) \geq 0$; $d_S(u,v) = 0 \iff u = v$; $d_S(u,v) = \pi \iff v = -u$; $d_S(u,-v) = \pi - d_S(u,v)$; $d_S(Au, Av) = d_S(u,v)$ para $A \in O(3)$; $|u - v| = 2\,\mathrm{sen}(d_S(u,v)/2)$.

Demostración. Sea $\delta := d_S(u,v)$, así que $\cos\delta = u \cdot v$ y $\delta \in [0,\pi]$.

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (G1-002.T1) y arc cos toma valores en $[0,\pi]$.
2. cos es inyectiva en $[0,\pi]$ con $\cos 0 = 1$ y $\cos\pi = -1$ (C2-014.T4): $\delta = 0 \iff u \cdot v = 1$ y $\delta = \pi \iff u \cdot v = -1$.
3. $u \cdot v = 1 = |u||v| \iff v = \lambda u$ con $\lambda \geq 0$ (G1-002.T5), y $|\lambda| = 1$: $v = u$. $u \cdot v = -1 \iff$ igualdad en Cauchy–Schwarz con $v = \lambda u$, $\lambda = u \cdot v = -1$: $v = -u$.
4. $\pi - \delta \in [0,\pi]$ y $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta = u \cdot (-v)$ (G1-013.T5): $d_S(u,-v) = \pi - \delta$.
5. Si $A \in O(3)$, $|Au| = 1$ y $Au \cdot Av = u \cdot v$ (G2-010.T1).
6. $|u - v|^2 = 2 - 2u \cdot v = 2 - 2\cos\delta = 4\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)$ (G1-002.T3, G1-013.T5), y $\mathrm{sen}(\delta/2) \geq 0$ porque $\delta/2 \in [0,\pi/2]$ (C2-014.T4): $|u - v| = 2\,\mathrm{sen}(\delta/2)$ (G1-002.T2). ■

Definición G2-017.D3 (arco menor)

Para $u, v \in S^2$ con $v \neq \pm u$, sean $\delta := d_S(u,v) \in (0,\pi)$ y $P_{uv} := (v - (u \cdot v)u)/\operatorname{sen}\delta$, unitario, ortogonal a u y con $v = (\cos\delta)u + (\operatorname{sen}\delta)P_{uv}$. El **arco menor** es $\mathrm{Arc}(u,v) := \{(\cos\theta)u + (\operatorname{sen}\theta)P_{uv} : \theta \in [0,\delta]\}$; $\mathrm{Arc}(u,u) := \{u\}$.

Las tres afirmaciones de la definición se verifican así: $\delta \in (0,\pi)$ por T2 y $\operatorname{sen}\delta > 0$ (C2-014.T4); $(v - (u \cdot v)u) \cdot u = 0$ (G1-003.T4); $|v - (u \cdot v)u|^2 = 1 - \cos^2\delta = \operatorname{sen}^2\delta$ (G1-002.T3, C2-014.T4); y despejando v sale la última igualdad.

Parte 2 · La desigualdad del triángulo y la longitud del arco

Teorema G2-017.T3 (desigualdad del triángulo esférica)

Para $u, v, w \in S^2$: $d_S(u,w) \le d_S(u,v) + d_S(v,w)$. Si $w \neq -u$, hay igualdad $\iff$ $v \in \mathrm{Arc}(u,w)$; si $w = -u$, siempre hay igualdad. Para $\theta, \theta' \in [0, \delta]$, los puntos de $\mathrm{Arc}(u,w)$ de parámetros $\theta \le \theta'$ están a distancia $\theta' - \theta$.

Idea de la demostración

Se miran u y w desde v: cada uno es «cos por v más sen por un vector tangente». El producto $u \cdot w$ es mínimo cuando los tangentes apuntan en sentidos opuestos, y ese mínimo es $\cos(\alpha+\beta)$.

Demostración. Sean $\alpha := d_S(u,v)$, $\beta := d_S(v,w)$, $\gamma := d_S(u,w)$.

1. *Última frase.* Con $P := P_{uw}$ y $X_\theta := (\cos\theta)u + (\operatorname{sen}\theta)P$, como u, P son ortonormales, $X_\theta \cdot X_{\theta'} = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' = \cos(\theta'-\theta)$ (C2-014.T8, C2-014.T5), con $\theta' - \theta \in [0,\delta] \subset [0,\pi]$: la distancia es $\theta' - \theta$ (C2-014.D6).
2. *Desigualdad.* Si $\alpha + \beta \ge \pi$, $\gamma \le \pi \le \alpha + \beta$. Si $\alpha = 0$, $u = v$ (T2) y es igualdad; igual si $\beta = 0$. Queda $\alpha, \beta > 0$ con $\alpha + \beta < \pi$, así que $u, w \neq \pm v$.
3. Por D3 (aplicada a v, u y a v, w), $u = (\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)p$ y $w = (\cos\beta)v + (\operatorname{sen}\beta)q$ con p, q unitarios ortogonales a v. Entonces

$$u \cdot w = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\,(p\cdot q) \ge \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha+\beta),$$

   pues $p \cdot q \ge -1$ (G1-002.T5), $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta > 0$ (C2-014.T4) y C2-014.T8.
4. $\cos\gamma \ge \cos(\alpha+\beta)$ con $\gamma, \alpha+\beta \in [0,\pi]$, y cos es estrictamente decreciente ahí (C2-014.T4): $\gamma \le \alpha + \beta$.
5. *Igualdad, $w = -u$.* $\beta = d_S(v,-u) = \pi - \alpha$ (T2): $\alpha + \beta = \pi = \gamma$.
6. *Igualdad, $w = u$.* $\gamma = 0 = \alpha + \beta$ obliga $\alpha = 0$, $v = u$, y $\mathrm{Arc}(u,u) = \{u\}$.
7. *Igualdad ⇒ arco, $w \neq \pm u$.* Si $\alpha = 0$, $v = u = X_0$; si $\beta = 0$, $v = w = X_\gamma$. Si no, $\alpha + \beta = \gamma < \pi$ y estamos en 3 con igualdad: $p \cdot q = -1$, así que $q = -p$ (G1-002.T5).
8. En la base ortonormal (v, p) del plano $\langle v, p\rangle$: $u = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $w = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$. Sea $e := (\operatorname{sen}\alpha, -\cos\alpha)$, unitario y ortogonal a u. Por C2-014.T8 y C2-014.T5,

$$\cos(\alpha+\beta)\,u + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\,e = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta) = w.$$

9. Como $\gamma = \alpha + \beta$ y $\operatorname{sen}\gamma > 0$, de 8 sale $e = (w - (\cos\gamma)u)/\operatorname{sen}\gamma = P_{uw}$ (D3). Y $(\cos\alpha)u + (\operatorname{sen}\alpha)e = (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha, 0) = v$, con $\alpha \in [0, \gamma]$: $v \in \operatorname{Arc}(u, w)$.
10. *Arco ⇒ igualdad.* Si $v = X_\theta$, por 1, $\alpha = \theta$ y $\beta = \gamma - \theta$: $\alpha + \beta = \gamma$. ■

Definición G2-017.D4 (longitud de una curva del espacio)

Sean $a < b$ y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Para una partición $P = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ de $[a, b]$ (C2-001.D1), $\ell(\gamma, P) := \sum_i |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$; γ es **rectificable** si estas sumas están acotadas superiormente, y entonces $\ell(\gamma) := \sup_P \ell(\gamma, P)$; si no, $\ell(\gamma) := \infty$. Si $\gamma = (x, y, 0)$, $\ell(\gamma, P)$ es la suma de C2-020.D1 para (x, y).

El supremo existe por el axioma S cuando las sumas están acotadas (C1-006.D1).

Teorema G2-017.T4 (la longitud del arco máximo es el ángulo)

Si $v \neq \pm u$ y $\delta := d_S(u, v)$, la curva $\gamma(\theta) := (\cos\theta)u + (\operatorname{sen}\theta)P_{uv}$, $\theta \in [0, \delta]$, tiene $\ell(\gamma) = \delta$.

Demostración.

1. u y P_{uv} son ortonormales (D3), así que (G1-021.T1, G1-002.T3)

$$|\gamma(\theta) - \gamma(\theta')|^2 = (\cos\theta - \cos\theta')^2 + (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta')^2.$$

2. Por 1, para toda partición P de $[0, \delta]$, $\ell(\gamma, P)$ es la suma de C2-020.D1 para la curva plana $c(\theta) := (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Luego $\ell(\gamma) = \ell(c)$.
3. cos y sen son de clase C^1 en $\mathbb{R}$ (C2-014.T6); por C2-020.T3, c es rectificable y

$$\ell(c) = \int_0^\delta \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^\delta 1\, d\theta = \delta$$

(C2-014.T5, C2-002.E1). ■

Ejemplo G2-017.E1
$d_S(e_1, (1,1,0)/\sqrt{2}) = d_S((1,1,0)/\sqrt{2}, e_2) = \pi/4$ y $(1,1,0)/\sqrt{2} \in \operatorname{Arc}(e_1, e_2)$, así que $d_S(e_1, e_2) = \pi/2 = \pi/4 + \pi/4$; en cambio $d_S(e_1, e_3) + d_S(e_3, e_2) = \pi > \pi/2$.

1. $e_1 \cdot (1,1,0)/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4)$ (G1-013.E1, C2-014.C1), igual con e_2.

2. $e_1 \cdot e_2 = 0 = \cos(\pi/2)$; $P_{e_1 e_2} = e_2$ y $(\cos\frac{\pi}{4})e_1 + (\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})e_2 = (1,1,0)/\sqrt{2}$: está en el arco (T3).
3. e_3 no está en $\operatorname{Arc}(e_1, e_2) \subset \{z = 0\}$: desigualdad estricta, $\pi/2 + \pi/2 > \pi/2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $v \neq \pm u$ en el arco menor

Si $v = -u$, $\operatorname{sen}\delta = 0$ y P_{uv} no está definido: hay infinitos semicírculos máximos de u a $-u$ (T1), ninguno privilegiado.

⚠ La distancia es el ángulo, no la cuerda

$|u - v| = 2\operatorname{sen}(\delta/2) < \delta$ si $\delta > 0$: la cuerda atraviesa la esfera. En el ejemplo de la Motivación, la cuerda mide $\approx$ 5,599 km (por el interior de la Tierra).

⚠ Los paralelos no son círculos máximos

El paralelo 40° N es $S^2 \cap \{z = \operatorname{sen} 40°\}$, un plano que no pasa por 0: por eso su arco no es el más corto.

Ejercicios

1. Calcula $d_S(u, v)$ para $u = (1,0,0)$ y $v = (0, 3/5, 4/5)$.
2. Demuestra que $d_S(-u, -v) = d_S(u, v)$.
3. ¿Cuál es el círculo máximo por e_1 y $(1,1,1)/\sqrt{3}$? Da su plano.
4. Verifica la desigualdad del triángulo para e_1, e_2, $(1,1,1)/\sqrt{3}$.
5. Demuestra que si $v \in \operatorname{Arc}(u, w)$, entonces $\operatorname{Arc}(u, v) \subset \operatorname{Arc}(u, w)$.

Respuestas

1. $u \cdot v = 0$: $d_S = \pi/2$.
2. $(-u) \cdot (-v) = u \cdot v$ (o T2 con $A = -I \in O(3)$).
3. El plano $\langle e_1, (1,1,1)\rangle = \{y = z\}$, de normal $e_1 \times (1,1,1) = (0,-1,1)$.

4. $d_S(e_1, e_2) = \pi/2 \leq 2 \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 1.91$.
5. Si $v = u$ es claro. Si $v = X_\theta$ con $\theta \in (0, \delta]$, $P_{uv} = (v - (\cos\theta)u)/\operatorname{sen}\theta = P_{uw}$ (D3), y los parámetros de $\operatorname{Arc}(u, v)$ son $[0, \theta] \subset [0, \delta]$.

G2-018 · Geodésicas

Motivación

> **La liga sobre el balón**
> Si estiras una liga entre dos puntos de un balón y la sueltas, se acomoda sola: se acorta hasta donde puede. Termina sobre un círculo máximo, por el arco menor. ¿Por qué ninguna otra curva sobre el balón es más corta? Y si los dos puntos son opuestos (polo norte y polo sur), la liga puede quedar en cualquier meridiano: hay infinitas soluciones.
> Dónde falla la analogía: la liga tiene grosor y fricción, y el balón no es una esfera perfecta. Aquí las curvas son funciones continuas $[a, b] \to S^2$ y su longitud es el supremo de las poligonales inscritas (G2-017.D4).

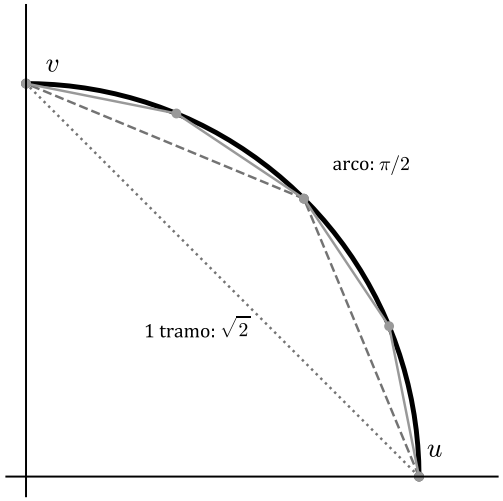


Figura 12: Poligonales inscritas en el arco de u a v ($\delta = \pi/2$): con 1, 2 y 4 tramos miden $\sqrt{2} \approx 1.414$, ≈ 1.531 y ≈ 1.561; el arco mide $\pi/2 \approx 1.571$.

Parte 1 · Ninguna curva es más corta que el arco

Teorema G2-018.T1 (refinar y partir)

Para $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$: si la partición Q refina a P, $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q)$; $\ell(\gamma, P) \ge |\gamma(b) - \gamma(a)|$; para $c \in (a,b)$, $\ell(\gamma) = \ell(\gamma|[a,c]) + \ell(\gamma|[c,b])$ (con $x + \infty = \infty$). La longitud no cambia al trasladar el parámetro: si $\eta(t) := \gamma(t + t_0)$ en $[a - t_0, b - t_0]$, $\ell(\eta) = \ell(\gamma)$.

Demostración.

1. *Un punto más.* Si $s \in (t_{i-1}, t_i)$, por G1-002.T6

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le |\gamma(t_i) - \gamma(s)| + |\gamma(s) - \gamma(t_{i-1})|,$$

   y los demás sumandos no cambian: $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, P \cup \{s\})$.
2. *Refinar.* $Q \setminus P$ es finito; por inducción en su número de puntos (C1-005.T1), agregándolos uno por uno con 1, $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, Q)$.
3. *Cota inferior.* $\gamma(b) - \gamma(a) = \sum_i (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$ (C1-005.T12, coordenada a coordenada), y la desigualdad del triángulo (G1-002.T6, por inducción) da $|\gamma(b) - \gamma(a)| \le \ell(\gamma, P)$.
4. *Aditividad, $\le$.* Sea P partición de $[a,b]$. $P \cup \{c\}$ la refina y se parte en P_1 de $[a,c]$ y P_2 de $[c,b]$ (C2-001.D1). Por 2,

$$\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma|[a,c], P_1) + \ell(\gamma|[c,b], P_2) \le \ell(\gamma|[a,c]) + \ell(\gamma|[c,b]).$$

   Si el lado derecho es finito, es cota superior de las $\ell(\gamma, P)$ y $\ell(\gamma)$ es menor o igual (C1-006.D1).
5. *Aditividad, $\ge$.* Si P_1, P_2 son particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$, $P_1 \cup P_2$ lo es de $[a,b]$ y $\ell(\gamma|[a,c], P_1) + \ell(\gamma|[c,b], P_2) = \ell(\gamma, P_1 \cup P_2) \le \ell(\gamma)$. Si $\ell(\gamma)$ es finito, tomando supremo en P_1 y luego en P_2 (C1-006.T2) sale $\ell(\gamma|[a,c]) + \ell(\gamma|[c,b]) \le \ell(\gamma)$; si alguna restricción no es rectificable, sus sumas no están acotadas y tampoco las de γ: ambos lados son ∞.
6. *Traslación.* $P \mapsto P - t_0$ es una biyección entre las particiones de $[a,b]$ y las de $[a - t_0, b - t_0]$ (restar t_0 conserva el orden, C1-003.T4), con $\ell(\eta, P - t_0) = \ell(\gamma, P)$. Los dos conjuntos de sumas son iguales. ■

Definición G2-018.D1 (curva en la esfera; curva más corta)

Una **curva en** S^2 de u a v es $\gamma : [a, b] \to S^2$ con componentes continuas (C1-022.D1), $\gamma(a) = u$ y $\gamma(b) = v$. Es **más corta** si $\ell(\gamma) \leq \ell(\eta)$ para toda curva η en S^2 de u a v.

Teorema G2-018.T2 (cuerda y arco)

Para $u, v \in S^2$: $|u - v| \leq d_S(u, v)$; para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ existe $\eta > 0$ con $|u - v| \geq (1 - \varepsilon) d_S(u, v)$ si $d_S(u, v) < \eta$; y para todo $\eta > 0$ existe $\eta' > 0$ con $d_S(u, v) < \eta$ si $|u - v| < \eta'$.

Demostración. Sea $\delta := d_S(u, v)$; por G2-017.T2, $|u - v| = 2\,\mathrm{sen}(\delta/2)$ con $\delta/2 \in [0, \pi/2]$.

1. *Cuerda ≤ arco.* En $(0, \pi/2)$, $\mathrm{sen}\, x < x$ (C2-014.T9); en $x = 0$ hay igualdad; en $x = \pi/2$, $\mathrm{sen}\, x = 1 < \pi/2$ (C2-014.C1, C2-014.C3). Así $2\,\mathrm{sen}(\delta/2) \leq \delta$.
2. *Casi igual si está cerca.* Como $\lim_{x \to 0} (\mathrm{sen}\, x)/x = 1$ (C2-014.C2), hay $\eta_0 > 0$ con $(\mathrm{sen}\, x)/x > 1 - \varepsilon$ si $0 < x < \eta_0$ (C1-017.D1). Con $\eta := 2\eta_0$: si $0 < \delta < \eta$, $|u - v| = 2\,\mathrm{sen}(\delta/2) \geq (1 - \varepsilon)\delta$; si $\delta = 0$, es $0 \geq 0$.
3. *Cerca en cuerda ⇒ cerca en arco.* Como $\mathrm{sen}(\delta/2) = |u - v|/2$ con $\delta/2 \in [0, \pi/2]$, $\delta = 2\,\mathrm{arcsen}(|u - v|/2)$ (C2-014.D6). arcsen es continua en 0 con $\mathrm{arcsen}\, 0 = 0$ (C2-014.T11): dado η, hay $\eta'' > 0$ con $\mathrm{arcsen}\, y < \eta/2$ si $0 \leq y < \eta''$ (C1-022.D1). Con $\eta' := 2\eta''$, si $|u - v| < \eta'$ entonces $\delta < \eta$. ■

Teorema G2-018.T3 (ninguna curva es más corta que el arco)

Si γ es una curva en S^2 de u a v, $\ell(\gamma) \geq d_S(u, v)$.

Idea de la demostración

Una poligonal sobre la esfera, medida con arcos, ya es al menos $d_S(u, v)$ (desigualdad del triángulo esférica). Si los tramos son cortos, cada cuerda es casi su arco (T2), y la continuidad uniforme garantiza tramos cortos con una partición fina.

Demostración. Si $\ell(\gamma) = \infty$ no hay nada que probar.

1. *Con arcos.* Para toda partición P, $\sum_i d_S(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \geq d_S(u, v)$: por inducción en el número de tramos (C1-005.T1) con G2-017.T3.

2. Sea $\varepsilon \in (0,1)$; sean η de T2 para ε y η' de T2 para ese η.
3. Cada componente γ_j es continua en $[a,b]$ (D1), luego uniformemente continua (Heine, C1-025.T1): hay $\delta_j > 0$ con $|\gamma_j(t) - \gamma_j(t')| < \eta'/3$ si $|t - t'| < \delta_j$ (C1-025.D1). Sea $\delta_0 := \min_j \delta_j$.
4. Si $|t - t'| < \delta_0$, $|\gamma(t) - \gamma(t')| \le \sum_j |\gamma_j(t) - \gamma_j(t')| < \eta'$ (G1-002.T6, G1-002.T3).
5. Sea N con $(b-a)/N < \delta_0$ (C1-007.C1) y P la partición regular en N partes (C2-001.D1). Por 4 y T2, cada tramo cumple $d_S(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) < \eta$ y entonces $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \ge (1-\varepsilon) d_S(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$.
6. Sumando (C1-005.T12) y con 1:

$$\ell(\gamma) \ge \ell(\gamma, P) \ge (1-\varepsilon) \sum_i d_S(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \ge (1-\varepsilon) d_S(u,v).$$

7. Así $d_S(u,v) \le \ell(\gamma) + \varepsilon\, d_S(u,v) \le \ell(\gamma) + \pi\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$, y C1-003.T9 da $d_S(u,v) \le \ell(\gamma)$. ■

Parte 2 · Las curvas más cortas

Teorema G2-018.T4 (las curvas más cortas)

Sean $u, v \in S^2$ con $v \neq -u$ y γ una curva en S^2 de u a v. Entonces $\ell(\gamma) = d_S(u,v) \iff \gamma([a,b]) \subset \mathrm{Arc}(u,v)$ y $t \mapsto d_S(u, \gamma(t))$ es no decreciente; en ese caso $\gamma([a,b]) = \mathrm{Arc}(u,v)$. Por tanto las curvas más cortas de u a v son exactamente las que recorren el arco menor sin regresar, y $d_S(u,v)$ es la longitud de una curva más corta.

Demostración. Sean $\delta := d_S(u,v)$ y $\theta(t) := d_S(u, \gamma(t))$.

1. $\Rightarrow$. Sea $s \in (a,b)$. Por T1 y T3 (aplicado a las restricciones, que son curvas en S^2) y G2-017.T3:

$$\delta = \ell(\gamma) = \ell(\gamma|[a,s]) + \ell(\gamma|[s,b]) \ge d_S(u, \gamma(s)) + d_S(\gamma(s), v) \ge \delta.$$

2. Todo es igualdad. Como $v \neq -u$, G2-017.T3 da $\gamma(s) \in \mathrm{Arc}(u,v)$; y como cada sumando es $\ge$ su distancia, $\ell(\gamma|[a,s]) = \theta(s)$. En $s = a$, $s = b$: $\gamma(a) = u$, $\gamma(b) = v$ están en el arco.
3. Si $a < s < s' < b$, por T1 $\theta(s') = \ell(\gamma|[a,s']) = \theta(s) + \ell(\gamma|[s,s']) \ge \theta(s)$; con $\theta(a) = 0$ y $\theta(b) = \delta$ el resto: θ es no decreciente.
4. $\Leftarrow$, *caso* $v = u$. $\mathrm{Arc}(u,u) = \{u\}$: γ es constante, todas las sumas valen 0 y $\ell(\gamma) = 0 = \delta$.
5. $\Leftarrow$, *caso* $v \neq \pm u$. El punto del arco de parámetro ϑ está a distancia ϑ de u (G2-017.T3, última frase),

así que $\gamma(t)$ es el de parámetro $\theta(t)$. Para una partición, con $\theta_i := \theta(t_i)$, por T2 y G2-017.T3:

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le d_S(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = \theta_i - \theta_{i-1}.$$

6. La suma es telescópica (C1-005.T12): $\ell(\gamma, P) \le \theta(b) - \theta(a) = \delta$. Así $\ell(\gamma) \le \delta$, y T3 da la igualdad.
7. *La traza es todo el arco.* $\theta(t) = \arccos(u \cdot \gamma(t))$ es continua (C1-022.T2, C2-014.T11, C1-022.T3), con $\theta(a) = 0$ y $\theta(b) = \delta$. Por el valor intermedio (C1-023.C1), cada $\vartheta \in [0, \delta]$ es un $\theta(t)$, y el punto del arco de parámetro ϑ es $\gamma(t)$ (5).
8. *Más cortas.* La curva $\vartheta \mapsto (\cos\vartheta)u + (\operatorname{sen}\vartheta)P_{uv}$, $\vartheta \in [0, \delta]$, es continua (C2-014.T5) y mide δ (G2-017.T4); si $v = u$, una curva constante mide 0. Por T3, δ es la menor longitud posible: una curva es más corta $\iff \ell(\gamma) = \delta \iff$ cumple la condición. ■

Teorema G2-018.T5 (antípodas: infinitas curvas más cortas)

Para $u \in S^2$ y cada $w \in S^2$ con $w \perp u$, la semicircunferencia $\gamma_w(\theta) := (\cos\theta)u + (\operatorname{sen}\theta)w$, $\theta \in [0, \pi]$, es una curva más corta de u a $-u$, con $\ell(\gamma_w) = \pi = d_S(u, -u)$; $w \neq w'$ dan trazas distintas, y hay infinitos w.

Demostración.

1. $|\gamma_w(\theta)| = 1$ (u, w ortonormales, G1-021.T1) y sus componentes son continuas (C2-014.T5): es una curva en S^2 de u a $-u$ ($\cos\pi = -1$, $\operatorname{sen}\pi = 0$, C2-014.C1).
2. En $[0, \pi/2]$ es el arco de u a w: $d_S(u, w) = \pi/2$ y $P_{uw} = w$ (G2-017.D3). Mide $\pi/2$ (G2-017.T4).
3. En $[\pi/2, \pi]$, con $\theta = \varphi + \pi/2$ y C2-014.T8, C2-014.C1: $\gamma_w(\theta) = (\cos\varphi)w + (\operatorname{sen}\varphi)(-u)$, $\varphi \in [0, \pi/2]$: el arco de w a $-u$ ($P_{w,-u} = -u$), trasladado en el parámetro. Mide $\pi/2$ (G2-017.T4, T1).
4. Por T1, $\ell(\gamma_w) = \pi$, y $d_S(u, -u) = \pi$ (G2-017.T2). Por T3 ninguna curva de u a $-u$ mide menos: es más corta.
5. *Trazas distintas.* $\gamma_w(\theta) \cdot u = \cos\theta = 0$ en $[0, \pi]$ solo para $\theta = \pi/2$ (C2-014.T4): el único punto de la traza ortogonal a u es w.
6. *Infinitos.* Los w admisibles forman el círculo máximo $S^2 \cap u^\perp$, en biyección con $(-\pi, \pi]$ (G2-017.T1, G1-021.T5). ■

Ejemplo G2-018.E1

La curva que va de e_1 a e_3 y de e_3 a e_2 por dos cuartos de círculo máximo mide $\pi/2 + \pi/2 = \pi > \pi/2 = d_S(e_1, e_2)$: no es la más corta; el cuarto de ecuador $\theta \mapsto (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\theta \in [0, \pi/2]$, sí.

1. Cada cuarto es un arco menor de longitud $\pi/2$ (G2-017.T4); por T1 la curva mide π.
2. $d_S(e_1, e_2) = \pi/2$ (G2-017.E1) $< \pi$: por T4 no es más corta (de hecho $e_3 \notin \mathrm{Arc}(e_1, e_2)$).
3. El cuarto de ecuador es el arco de e_1 a e_2 ($P_{e_1 e_2} = e_2$): mide $\pi/2$ y es más corta (T4).

Por qué cada hipótesis

⚠ Continuidad

Una «curva» que salta de u a v sin pasar por puntos intermedios ($\gamma = u$ en $[0, 1)$, $\gamma(1) = v$) tiene $\ell(\gamma, P) = |u - v| < d_S(u, v)$ para toda partición: T3 falla. Por eso D1 pide componentes continuas.

⚠ $v \neq -u$ en T4

Para antípodas hay infinitas curvas más cortas (T5), cada una en un semicírculo distinto: «el arco menor» no existe.

⚠ Sin regresar

Recorrer el arco de u a v, regresar a la mitad y volver a v tiene la traza correcta pero mide más: por eso T4 pide θ no decreciente.

Ejercicios

1. Calcula la longitud de la curva que recorre el paralelo $z = 1/2$ de $(\sqrt{3}/2, 0, 1/2)$ a $(0, \sqrt{3}/2, 1/2)$ y compárala con d_S.
2. Demuestra que si γ es más corta de u a v y $a < s < b$, entonces $\gamma|[a, s]$ es más corta de u a $\gamma(s)$.
3. ¿Es más corta la curva $\gamma(\theta) = (\cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta, 0)$, $\theta \in [0, \pi/4]$, de e_1 a e_2?
4. Da dos curvas más cortas distintas de e_3 a $-e_3$.
5. Demuestra que $\ell(\gamma) \geq |\gamma(b) - \gamma(a)|$ para toda curva de $\mathbb{R}^3$.

Respuestas

1. Radio $\sqrt{3}/2$, cuarto de vuelta: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \approx 1.360$; $d_S = \arccos(1/4) \approx 1.318$.

2. Por T4, θ no decrece y la traza está en $\mathrm{Arc}(u, v)$; la de la restricción está en $\mathrm{Arc}(u, \gamma(s))$ (G2-017.T3) y T4 otra vez.
3. Sí: recorre el arco de e_1 a e_2 y $\theta \mapsto 2\theta$ es creciente (T4).
4. γ_{e_1} y γ_{e_2} de T5.
5. T1 (cota inferior) y la definición de supremo.

G2-019 · Trigonometría esférica

Motivación

> **Tres ángulos rectos**
> Sal del polo norte hacia el sur hasta el ecuador, camina un cuarto de vuelta por el ecuador y regresa al polo por un meridiano. Diste tres vueltas de 90°: el triángulo tiene **tres ángulos rectos** y suma 270°. En la esfera la suma de los ángulos de un triángulo no es 180°. Y la fórmula de navegación para la distancia entre dos ciudades (G2-017) es una ley de cosenos con vértice en el polo.
> Dónde falla la analogía: caminar sobre la Tierra real no es seguir círculos máximos exactos; aquí los lados son arcos de S^2 y los ángulos se miden entre planos.

Parte 1 · Lados, ángulos y las leyes de cosenos y de senos

Definición G2-019.D1 (triángulo esférico)

Tres puntos $u, v, w \in S^2$ linealmente independientes ($[u, v, w] \neq 0$). **Lados**: $a := d_S(v, w)$, $b := d_S(w, u)$, $c := d_S(u, v)$, en $(0, \pi)$. **Ángulo** en u (entre los planos $\langle u, v\rangle$ y $\langle u, w\rangle$, medido con sus normales): $\cos A := (u \times v) \cdot (u \times w)/(|u \times v||u \times w|)$ y $A := \arccos(\cos A) \in [0, \pi]$; cíclicamente B (con $v \times w, v \times u$) y C (con $w \times u, w \times v$).

La definición tiene sentido: por la independencia, $v \neq \pm w$, así que $a \in (0, \pi)$ (G2-017.T2), y $u \times v \neq 0$ (G1-021.T2); el cociente está en $[-1, 1]$ (G1-002.T5).

Teorema G2-019.T1 (Binet–Cauchy y doble producto de normales)

Para $p, q, r, s \in \mathbb{R}^3$: $(p \times q) \cdot (r \times s) = (p \cdot r)(q \cdot s) - (p \cdot s)(q \cdot r)$ y $(p \times q) \times (p \times r) = [p, q, r]p$.

Demostración.

1. Por la simetría cíclica del triple producto (G1-022.T1, G1-022.D1), $(p\times q)\cdot(r\times s) = [r\times s, p, q] = [p, q, r\times s] = p\cdot(q\times(r\times s))$.
2. Por el doble producto (G1-021.T3), $q\times(r\times s) = (q\cdot s)r - (q\cdot r)s$; al multiplicar por p sale la primera fórmula.
3. Con $(x\times y)\times z = (x\cdot z)y - (y\cdot z)x$ (G1-021.T3) para $x = p, y = q, z = p\times r$:

$$(p\times q)\times(p\times r) = (p\cdot(p\times r))\,q - (q\cdot(p\times r))\,p = 0 - [q,p,r]\,p = [p,q,r]\,p,$$

pues $p \perp p\times r$ (G1-021.T2) y $[q,p,r] = -[p,q,r]$ (G1-022.T1). ■

Teorema G2-019.T2 (el ángulo con vectores tangentes)

Con $t_v := v - (u\cdot v)u$ y $t_w := w - (u\cdot w)u$: $(u\times v)\cdot(u\times w) = t_v\cdot t_w = \cos a - \cos b\cos c$, $|u\times v| = |t_v| = \operatorname{sen} c$ y $|u\times w| = \operatorname{sen} b$; por tanto $\cos A = \cos\angle(t_v, t_w)$.

Demostración. Recuerda $\cos a = v\cdot w$, $\cos b = w\cdot u$, $\cos c = u\cdot v$ (G2-017.D2).

1. Por T1 con $|u| = 1$: $(u\times v)\cdot(u\times w) = (u\cdot u)(v\cdot w) - (u\cdot w)(v\cdot u) = \cos a - \cos b\cos c$.
2. Desarrollando (G1-002.T1): $t_v\cdot t_w = v\cdot w - 2(u\cdot v)(u\cdot w) + (u\cdot v)(u\cdot w)|u|^2 = \cos a - \cos b\cos c$.
3. $|u\times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u\cdot v)^2 = 1 - \cos^2 c$ (G1-021.T2), y por 2 con $w = v$, $|t_v|^2 = 1 - \cos^2 c$. Como $c \in (0,\pi)$, $\operatorname{sen} c > 0$ y $\operatorname{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c$ (C2-014.T4): $|u\times v| = |t_v| = \operatorname{sen} c$. Igual $|u\times w| = |t_w| = \operatorname{sen} b$.
4. Por 1-3, $\cos A = t_v\cdot t_w/(|t_v||t_w|) = \cos\angle(t_v, t_w)$ (G1-006.D1). ■

Teorema G2-019.T3 (ley de cosenos de los lados)

$\cos a = \cos b\cos c + \operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A$, y cíclicamente.

Demostración.

1. Por D1 y T2, $\cos A\ \operatorname{sen} c\operatorname{sen} b = (u\times v)\cdot(u\times w) = \cos a - \cos b\cos c$.
2. Se despeja $\cos a$. Lo mismo en los vértices v y w, cíclicamente. ■

Teorema G2-019.T4 (ley de senos)

$\operatorname{sen} A = |[u,v,w]|/(\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c) > 0$, así que $A \in (0,\pi)$, y

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} = \frac{|[u,v,w]|}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Demostración.

1. $A \in [0,\pi]$, así que $\operatorname{sen} A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ (C2-014.T4), que es $\operatorname{sen} \angle(u \times v, u \times w)$ (G1-006.D1).
2. Por G1-021.T2, $|(u \times v) \times (u \times w)| = |u \times v||u \times w| \operatorname{sen} \angle(u \times v, u \times w)$.
3. Por T1, $(u \times v) \times (u \times w) = [u,v,w]u$, de norma $|[u,v,w]|$. Con T2: $\operatorname{sen} A = |[u,v,w]|/(\operatorname{sen} c \operatorname{sen} b)$.
4. $[u,v,w] \neq 0$ (D1): $\operatorname{sen} A > 0$, y como $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = 0$ (C2-014.T4), $A \in (0,\pi)$.
5. Al dividir entre $\operatorname{sen} a > 0$ sale $|[u,v,w]|/(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c)$, simétrico en u,v,w porque $|[u,v,w]| = |[v,w,u]| = |[w,u,v]|$ (G1-022.T1). ■

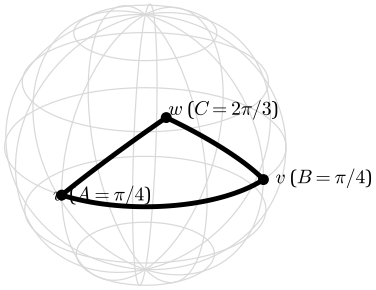


Figura 13: El triángulo de G2-019.E1: $u = e_1, v = e_2, w = (1,1,1)/\sqrt{3}$.

Parte 2 · El triángulo polar

Definición G2-019.D2 (triángulo polar)

Con $\varepsilon :=$ el signo de $[u,v,w]$: $u' := \varepsilon(v\times w)/|v\times w|, v' := \varepsilon(w\times u)/|w\times u|, w' := \varepsilon(u\times v)/|u\times v|$.

Teorema G2-019.T5 (propiedades del polar)

u', v', w' es un triángulo esférico; $u\cdot u' > 0, v\cdot v' > 0, w\cdot w' > 0$; $[u', v', w']$ tiene el signo ε; el polar de u', v', w' es u, v, w; y $a' = \pi - A, b' = \pi - B, c' = \pi - C, A' = \pi - a, B' = \pi - b, C' = \pi - c$.

Demostración.

1. $u\cdot u' = \varepsilon\, u\cdot(v\times w)/|v\times w| = \varepsilon[u,v,w]/|v\times w| = |[u,v,w]|/|v\times w| > 0$; cíclicamente para v, w (G1-022.T1).
2. $v'\cdot w' = \varepsilon^2(w\times u)\cdot(u\times v)/(|w\times u||u\times v|) = -\cos A$, pues $w\times u = -(u\times w)$ (G1-021.T2) y $\varepsilon^2 = 1$.
3. v', w' son unitarios, así que $a' = d_S(v', w') = \arccos(-\cos A) = \pi - A$: $\pi - A \in [0,\pi]$ y $\cos(\pi - A) = -\cos A$ (G1-013.T5, C2-014.D6). Cíclicamente $b' = \pi - B, c' = \pi - C$.
4. Por T1 (con $p = u, q = w, r = v$) y G1-021.T2, $(w\times u)\times(u\times v) = -(u\times w)\times(u\times v) = -[u,w,v]u = [u,v,w]u$, así que
$$v'\times w' = \frac{[u,v,w]}{|w\times u||u\times v|}\,u.$$
5. Entonces $[u', v', w'] = u'\cdot(v'\times w') = \varepsilon[u,v,w]^2/(|v\times w||w\times u||u\times v|)$: es $\neq 0$ y tiene el signo ε. Así u', v', w' son independientes (G1-022.T2): un triángulo esférico.
6. *El polar del polar.* Su signo es ε, y por 4, $\varepsilon(v'\times w')/|v'\times w'| = \varepsilon\,\frac{[u,v,w]}{|[u,v,w]|}\,u = \varepsilon^2 u = u$; cíclicamente v, w.
7. *Ángulos del polar.* Por 3 aplicado a u', v', w', cuyo polar es u, v, w (6): $a = \pi - A'$, es decir $A' = \pi - a$; igual B', C'. ■

Teorema G2-019.T6 (ley de cosenos de los ángulos)

$\cos A = -\cos B\cos C + \operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a$, y cíclicamente.

Demostración.

1. T3 en el polar: $\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'$.
2. Por T5, $a' = \pi - A$, $b' = \pi - B$, $c' = \pi - C$, $A' = \pi - a$.
3. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (G1-013.T5). Por C2-014.T8 con $y = -x$, la paridad (C2-014.T5) y $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ (C2-014.C1): $\operatorname{sen}(\pi - x) = 0 \cdot \cos x + (-1)(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$.
4. Sustituyendo: $-\cos A = \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$; se multiplica por -1. ■

Teorema G2-019.T7 (suma de ángulos)

$\pi < A + B + C < 3\pi$.

Demostración.

1. *Cota superior.* $A, B, C \in (0, \pi)$ (T4): la suma es $< 3\pi$.
2. *Cota inferior.* En el polar, $a' = d_S(v', w') \leq d_S(v', u') + d_S(u', w') = c' + b'$ (G2-017.T3).
3. La desigualdad es estricta: $w' \neq -v'$ (v', w' son independientes, T5), y la igualdad pondría $u' \in \operatorname{Arc}(v', w')$ (G2-017.T3), que está en $\langle v', w' \rangle$ (G2-017.D3); entonces u', v', w' serían dependientes, contra T5.
4. Por T5, $\pi - A < (\pi - B) + (\pi - C)$, es decir $A + B + C > \pi$. ■

Teorema G2-019.T8 (triángulos pequeños ≈ planos)

Sean $A \in (0, \pi)$, $\beta, \gamma > 0$ y, para $0 < t < \pi/(\beta+\gamma)$, $a(t) \in [0, \pi]$ con $\cos a(t) = \cos(t\beta)\cos(t\gamma) + \operatorname{sen}(t\beta)\operatorname{sen}(t\gamma)\cos A$ (el lado opuesto a A si los otros dos miden $t\beta$ y $t\gamma$, G2-019.T3). Entonces $\lim_{t\to 0^+} a(t)/t = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A}$: en el límite vale la ley de cosenos plana (G1-007.T1).

> **Idea de la demostración**
> $1 - \cos a(t)$ es una combinación de dos expresiones $1 - \cos(kt)$, cada una $\approx k^2 t^2/2$; y $1 - \cos a \approx a^2/2$. Al dividir, $a(t)^2/t^2$ tiende al lado derecho de la ley de cosenos plana.

Demostración. Sean $x := t\beta$, $y := t\gamma$ y $L := \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$.

1. Por C2-014.T8 y la paridad (C2-014.T5), $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ y $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y =$

$\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$. Así

$$1-\cos a(t)=\frac{1+\cos A}{2}\big(1-\cos t(\beta-\gamma)\big)+\frac{1-\cos A}{2}\big(1-\cos t(\beta+\gamma)\big).$$

2. *Está bien definido y* $a(t)>0$. $\cos a(t)$ es un promedio con pesos $\frac{1\pm\cos A}{2}\in(0,1)$ de dos cosenos, así que está en $[-1,1]$ y $a(t)=\arccos(\cdot)$ existe (C2-014.D6). Como $0<t(\beta+\gamma)<\pi$, $1-\cos t(\beta+\gamma)>0$ (C2-014.C1), y el otro término es ≥ 0: $1-\cos a(t)>0$, luego $a(t)>0$.
3. *Un límite básico.* Para $k\neq 0$, $(1-\cos kt)/t^2=2\,\mathrm{sen}^2(kt/2)/t^2=\frac{k^2}{2}\big(\mathrm{sen}(kt/2)/(kt/2)\big)^2\to k^2/2$ (G1-013.T5, C2-014.C2, C1-018.T1, C1-019.T1); para $k=0$ es 0.
4. Por 1 y 3 (C1-018.T1, C1-020.T2):

$$\frac{1-\cos a(t)}{t^2}\to\frac{1+\cos A}{4}(\beta-\gamma)^2+\frac{1-\cos A}{4}(\beta+\gamma)^2=\frac{L}{2},$$

y $L=(\beta-\gamma)^2+2\beta\gamma(1-\cos A)>0$.

5. $a(t)\to 0$. $\cos a(t)\to 1$ por la continuidad de sen y cos (C2-014.T5), y arc cos es continua en 1 con $\arccos 1=0$ (C2-014.T11, C1-022.T3).
6. Por 3 con $k=1$, $(1-\cos x)/x^2\to 1/2$ cuando $x\to 0^+$. Si $t_n\to 0^+$, $a(t_n)>0$ y $a(t_n)\to 0$, así que $(1-\cos a(t_n))/a(t_n)^2\to 1/2$ (C1-019.T1, C1-020.T2).
7. Al dividir (C1-018.T1; los numeradores son >0):

$$\frac{a(t_n)^2}{t_n^2}=\frac{(1-\cos a(t_n))/t_n^2}{(1-\cos a(t_n))/a(t_n)^2}\to\frac{L/2}{1/2}=L.$$

Por C1-019.T1 (versión lateral, C1-020.T2), $a(t)^2/t^2\to L$.

8. $\sqrt{\ }$ es continua (C2-014.T1) y $a(t)/t>0$: $a(t)/t=\sqrt{a(t)^2/t^2}\to\sqrt{L}$ (C1-022.T3). ■

Ejemplo G2-019.E1

Para $u=e_1, v=e_2, w=(1,1,1)/\sqrt{3}$: $c=\pi/2$, $a=b=\arccos(1/\sqrt{3})$, $A=B=\pi/4$, $C=2\pi/3$ y $A+B+C=7\pi/6>\pi$. El triángulo del octante e_1,e_2,e_3 tiene lados y ángulos $\pi/2$ (suma $3\pi/2$) y es su propio polar.

1. $u\cdot v=0$, $v\cdot w=w\cdot u=1/\sqrt{3}$: los lados.
2. $u\times v=e_3$, $u\times w=(0,-1,1)/\sqrt{3}$: $\cos A=(1/\sqrt{3})/(\sqrt{2}/\sqrt{3})=1/\sqrt{2}$, $A=\pi/4$; por la simetría $x\leftrightarrow y$, $B=\pi/4$.
3. $w\times u=(0,1,-1)/\sqrt{3}$, $w\times v=(-1,0,1)/\sqrt{3}$: $\cos C=(-1/3)/(2/3)=-1/2$, $C=2\pi/3$.
4. Comprobación con T3: $\cos c=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})=0$.
5. Octante: $[e_1,e_2,e_3]=1$, $e_2\times e_3=e_1$, etc.: el polar es el mismo triángulo, y por T5 sus

> ángulos son $\pi - \pi/2 = \pi/2$.

Por qué cada hipótesis

⚠ Independencia

Si w está en el círculo máximo de u y v, $[u, v, w] = 0$: el «triángulo» es un arco, $\operatorname{sen} A = 0$ y el polar no está definido.

⚠ El signo ε del polar

Sin ε, si $[u, v, w] < 0$ el vector $(v \times w)/|v \times w|$ apunta al hemisferio opuesto a u: $u \cdot u' < 0$ y las fórmulas $a' = \pi - A$ fallan. Con $u = e_1, v = e_3, w = e_2$ ($[u, v, w] = -1$), $v \times w = -e_1$.

⚠ La suma no es π

El exceso $A + B + C - \pi$ es positivo siempre y crece con el tamaño del triángulo ($\pi/6$ en E1, $\pi/2$ en el octante); T8 dice que tiende a 0 en triángulos pequeños.

Ejercicios

1. Calcula los ángulos del triángulo e_1, e_2, $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$.
2. Con la ley de cosenos de los lados, calcula la distancia entre dos puntos de colatitud 50° y 70° de diferencia de longitud (vértice en el polo). Compara con G2-017.
3. Demuestra que en un triángulo esférico equilátero los tres ángulos son iguales.
4. Usa T3 para demostrar que si $a = b = c = \pi/2$, entonces $A = B = C = \pi/2$.
5. Usa T6 para demostrar que si $A = B = C = \pi/2$, entonces $a = b = c = \pi/2$.

Respuestas

1. Lados $c = a = \pi/2$, $b = \pi/4$. $u \times v = e_3$ y $u \times w = (0, -1, 0)/\sqrt{2}$ dan $\cos A = 0$; por T3 en w, $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$ da $0 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos C$. Así $A = C = \pi/2$, y $\cos B = 1/\sqrt{2}$, $B = \pi/4$ (suma $5\pi/4$).
2. $\cos d = \cos^2 50° + \operatorname{sen}^2 50° \cos 70° \approx 0.6139$: $d \approx 0.9098$, lo mismo que en G2-017.

3. Por T3, $\cos A = (\cos a - \cos^2 a)/\operatorname{sen}^2 a$ es igual en los tres vértices.
4. $0 = 0 + 1 \cdot 1 \cdot \cos A$: $\cos A = 0$, $A = \pi/2$; cíclicamente.
5. $\cos A = 0 = -0 + 1 \cdot 1 \cdot \cos a$: $\cos a = 0$, $a = \pi/2$; cíclicamente.

G2-020 · Los complejos como geometría del plano

Motivación

> **Mover un personaje en un videojuego**
> En un videojuego, mover al personaje 3 casillas a la derecha y 1 arriba es sumar $(3, 1)$. Girarlo 90° y hacerlo el doble de grande alrededor del origen es otra operación. Si a los puntos del plano les damos un **producto**, esa segunda operación es «multiplicar por $2i$», y girar 90° dos veces es multiplicar por $i \cdot i = -1$: la media vuelta. Así $i^2 = -1$ deja de ser misterioso.
> Dónde falla la analogía: la pantalla del juego es finita y de píxeles; aquí $\mathbb{C}$ es todo $\mathbb{R}^2$.

Parte 1 · El campo $\mathbb{C}$ y su geometría

Definición G2-020.D1 (los números complejos)

$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ con la suma de $\mathbb{R}^2$ y el producto $(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc)$. Se escribe $a \equiv (a, 0)$ e $i := (0, 1)$, así que $(a, b) = a + bi$; $\mathrm{Re}(a + bi) := a$, $\mathrm{Im}(a + bi) := b$.

En efecto, $(a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$.

Teorema G2-020.T1 ($\mathbb{C}$ es un campo)

Con estas operaciones $\mathbb{C}$ cumple K1-K9, con $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ y $(a + bi)^{-1} = (a - bi)/(a^2 + b^2)$ si $a + bi \neq 0$; $a \mapsto (a, 0)$ es inyectiva y respeta la suma y el producto; $i^2 = -1$.

Demostración. Sean $z = (a, b)$, $w = (c, d)$, $v = (e, f)$.

1. *K1-K4.* Son las reglas de la suma de $\mathbb{R}^2$ (G1-001.T1), con $0 = (0, 0)$ y $-z = (-a, -b)$.

2. *K6.* $zw = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = wz$ (K2, K6 de $\mathbb{R}$).
3. *K5.* Desarrollando (K1, K2, K6, K9 de $\mathbb{R}$), ambos lados de $(zw)v = z(wv)$ dan

$$(ace - bde - adf - bcf,\ acf - bdf + ade + bce).$$

4. *K7.* $z(1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = z$, y $(1,0) \neq (0,0)$.
5. *K8.* Si $z \neq 0$, $a^2 + b^2 = z \cdot z \neq 0$ (G1-002.T1), y

$$(a,b)\Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big) = \Big(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\Big) = (1,0).$$

6. *K9.* $z(w + v) = (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) = zw + zv$ (K9 de $\mathbb{R}$).
7. $(a,0) + (c,0) = (a + c, 0)$, $(a,0)(c,0) = (ac, 0)$, y $(a,0) = (c,0) \Rightarrow a = c$.
8. $i^2 = (0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$. ■

Todo lo que se demostró en Cálculo I solo con K1-K9 (C1-002.T1-T5) vale, por tanto, en $\mathbb{C}$.

Definición G2-020.D2 (conjugado y módulo)

Para $z = a + bi$: $\bar{z} := a - bi$ y $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ (la norma de $\mathbb{R}^2$).

Teorema G2-020.T2 (propiedades)

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$; $z\bar{z} = |z|^2$; $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$; $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$; $|zw| = |z||w|$, $|\bar{z}| = |z|$, $|1/z| = 1/|z|$; $|z + w| \leq |z| + |w|$; y $\bar{z}w = z \cdot w + i \det(z, w)$ (producto punto y determinante de G1-002.D4).

Demostración. Sean $z = a + bi$, $w = c + di$.

1. *Conjugado.* $\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = \bar{z} + \bar{w}$. $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ y $\bar{z}\bar{w} = (ac - bd) + (-ad - bc)i$: son conjugados. $\bar{\bar{z}} = a + bi$.
2. $z\bar{z} = (a^2 + b^2) + (-ab + ba)i = |z|^2$.
3. $z + \bar{z} = 2a$ y $z - \bar{z} = 2bi$; se divide entre 2 y entre $2i$ (T1). $z = \bar{z} \iff 2bi = 0 \iff b = 0$.
4. *Módulo del producto.* Con $x := (a, -b)$ e $y := (c, d)$, $x \cdot y = ac - bd$ y $\det(x, y) = ad + bc$; la identidad de Lagrange (G1-002.T4) da $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, y G1-002.T2: $|zw| = |z||w|$.
5. $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |z|$. Por 4, $|z||1/z| = |1| = 1$.

6. $|z+w| \le |z| + |w|$ es G1-002.T6 en $\mathbb{R}^2$.
7. $\bar{z}w = (a-bi)(c+di) = (ac+bd) + (ad-bc)i = z \cdot w + i\det(z,w)$ (G1-002.D1, G1-002.D4). ■

Teorema G2-020.T3 (interpretación geométrica)

$z \mapsto z+b$ es la traslación τ_b; para $a \neq 0$, $z \mapsto az$ es $x \mapsto |a|R(c,s)x$ con $c+is := a/|a|$ (una **rotación-homotecia**: semejanza de razón $|a|$ que fija 0); $z \mapsto \bar{z}$ es la reflexión $S(x,y) = (x,-y)$.

Demostración.

1. La suma de $\mathbb{C}$ es la de $\mathbb{R}^2$: $z \mapsto z+b$ es τ_b.
2. $c + is = a/|a|$ tiene módulo 1 (T2): $c^2 + s^2 = 1$. Para $x = (x_1, x_2)$, $(c+is)(x_1 + ix_2) = (cx_1 - sx_2) + i(sx_1 + cx_2) = R(c,s)x$ (G1-011.D1), y $az = |a|(c+is)z$.
3. $|az - aw| = |a||z-w|$ (T2): es una semejanza de razón $|a|$ (G2-016.D2), y $a \cdot 0 = 0$.
4. $\overline{x_1 + ix_2} = x_1 - ix_2 = S(x_1, x_2)$. ■

Parte 2 · Forma polar, raíces y semejanzas

Teorema G2-020.T4 (forma polar y De Moivre)

Todo $z \neq 0$ es $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ con un único $\theta \in (-\pi, \pi]$ (el **argumento**); $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)$; para $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$.

Demostración. Sea $e(\theta) := \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

1. $z/|z|$ es unitario (T2), así que $z/|z| = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$ para un único $\theta \in (-\pi, \pi]$ (G1-013.T1).
2. $e(\theta)e(\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + i(\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) = e(\theta+\varphi)$ (C2-014.T8).
3. $n \ge 0$. Por inducción (C1-005.T1, potencias de C1-005.D2): $e(\theta)^0 = 1 = e(0)$, y si $e(\theta)^n = e(n\theta)$, por 2 $e(\theta)^{n+1} = e(n\theta)e(\theta) = e((n+1)\theta)$.
4. $n < 0$. Por 2 y la paridad (C2-014.T5), $e(\theta)e(-\theta) = e(0) = 1$, así que $e(\theta)^{-1} = e(-\theta)$; con $n = -m$, $e(\theta)^n = (e(\theta)^{-1})^m = e(-\theta)^m = e(-m\theta) = e(n\theta)$ por 3. ■

Teorema G2-020.T5 (raíces n-ésimas; polígonos regulares)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $w = |w|(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi) \neq 0$. Las soluciones de $z^n = w$ son exactamente los n números distintos $z_k := \sqrt[n]{|w|}\,\big(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\,\operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi k}{n}\big)$, $k = 0, \dots, n-1$. Las raíces n-ésimas de 1, $\zeta_k := \cos(2\pi k/n) + i\,\operatorname{sen}(2\pi k/n)$, son los vértices v_k del polígono regular de G2-010.T5 ($n \geq 3$), y $z \mapsto \zeta_1 z$ es la rotación ρ.

Demostración.

1. $z = 0$ no es solución ($w \neq 0$). Escribe $z = r\,e(\theta)$ (T4). Por T4 y T2, $z^n = r^n e(n\theta)$, con $|z^n| = r^n$.
2. $z^n = w \iff r^n = |w|$ y $e(n\theta) = e(\varphi)$ (tomar módulos y dividir) $\iff r = \sqrt[n]{|w|}$ (C1-023.C2) y $n\theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ (G1-013.T1). Así las soluciones son $r\,e((\varphi + 2\pi m)/n)$, $m \in \mathbb{Z}$.
3. Los valores m y m' dan el mismo número $\iff 2\pi(m-m')/n \in 2\pi\mathbb{Z}$ (G1-013.T1) $\iff m - m' \in n\mathbb{Z}$.
4. Todo m es $nq + k$ con $q = \lfloor m/n \rfloor$ y $0 \leq k < n$ (C1-007.T2, C1-007.T4), y dos k distintos de $\{0, \dots, n-1\}$ no difieren en un múltiplo de n: hay exactamente n soluciones, $z_0, \dots, z_{n-1}$.
5. *Polígono.* Con $\rho = R(2\pi/n) = R(\cos\frac{2\pi}{n}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n})$ (G1-013.D1), T3 dice que $z \mapsto \zeta_1 z$ es ρ ($|\zeta_1| = 1$). Entonces $v_k = \rho^k e_1$ es $\zeta_1^k \cdot 1 = \zeta_k$ (T4). ■

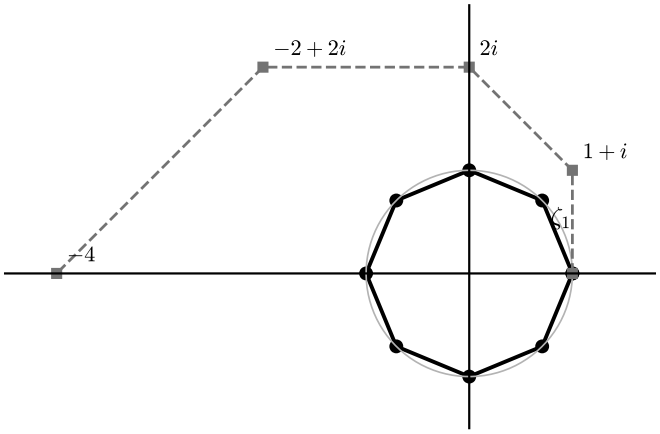


Figura 14: Las raíces octavas de 1 forman el octágono regular; las potencias de $1 + i = \sqrt{2}\,\zeta_1$ giran un octavo de vuelta y crecen $\sqrt{2}$ cada vez.

Teorema G2-020.T6 (las semejanzas del plano en $\mathbb{C}$)

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una semejanza $\iff f(z) = az + b$ o $f(z) = a\bar{z} + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$; las de la primera forma son las de parte lineal con $\det > 0$.

Demostración.

1. *Ida (⇒).* Por G2-016.T2, $f(x) = kAx + b$ con $k > 0$ y $A \in O(2)$; por G2-011.T1, $A = R(c,s)$ o $A = R(c,s)S$.
2. Si $A = R(c,s)$, por T3 $kR(c,s)x = az$ con $a := k(c + is) \neq 0$. Si $A = R(c,s)S$, $kR(c,s)Sx = a\bar{z}$ con el mismo a (T3).
3. *Vuelta (⇐).* $az+b = |a|R(c,s)x+b$ y $a\bar{z}+b = |a|R(c,s)Sx+b$, con $R(c,s)$ y $R(c,s)S$ ortogonales: son semejanzas de razón $|a|$ (G2-016.T2).
4. *Determinante.* $\det(|a|R(c,s)) = |a|^2(c^2 + s^2) > 0$ y $\det(|a|R(c,s)S) = -|a|^2 < 0$ (G2-008.T7, $\det S = -1$). Como la parte lineal es única (G2-014.T1), las de la forma $az + b$ son exactamente las de det > 0. ■

Ejemplo G2-020.E1
$(1 + i)^8 = 16$; las raíces cúbicas de 1 son 1 y $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$; $z \mapsto iz + 1$ es la rotación de un cuarto de vuelta con centro $(1 + i)/2$.

1. $|1 + i| = \sqrt{2}$ y $(1 + i)/\sqrt{2} = e(\pi/4)$ (G1-013.E1). Por T4, $(1 + i)^8 = 16\, e(2\pi) = 16$.
2. $\zeta_1 = e(2\pi/3)$ y $\zeta_2 = e(4\pi/3) = \bar{\zeta}_1$: $\cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$ (G1-013.T5, G1-013.E1) y $\operatorname{sen}(2\pi/3) = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$ (C2-014.T4).
3. $f(z) = iz + 1$: con $p = (1 + i)/2$, $f(p) = (i - 1)/2 + 1 = p$, y $f(z) = p + i(z - p)$; $i = e(\pi/2)$ es $R(0,1)$ (T3): rotación con centro p (G2-011.T2).

Por qué cada hipótesis

⚠ $a \neq 0$

$z \mapsto 0 \cdot z + b$ es constante: no es semejanza (ni biyectiva).

⚠ $w \neq 0$ **en las raíces**

$z^n = 0$ tiene una sola solución, $z = 0$: no hay n raíces distintas, y la forma polar de 0 no existe.

⚠ El conjugado no es «multiplicar por algo»

$z \mapsto \bar{z}$ tiene det $= -1$: invierte la orientación, y no es $z \mapsto az$ para ningún a (si lo fuera, $a = \bar{1} = 1$ y $\bar{i} = i$, falso).

Ejercicios

1. Calcula $(2 + i)(1 - 3i)$ y $1/(3 + 4i)$.
2. Demuestra que $|z|^2 + |w|^2 = \frac{1}{2}(|z + w|^2 + |z - w|^2)$.
3. Encuentra las raíces cuartas de -4.
4. ¿Qué semejanza es $z \mapsto (1 + i)\bar{z}$? Da su razón y su determinante.
5. Escribe la reflexión respecto a la recta $y = x$ en la forma $a\bar{z} + b$.

Respuestas

1. $5 - 5i$; $(3 - 4i)/25$.
2. Desarrolla $|z \pm w|^2 = (z \pm w)\overline{(z \pm w)}$ (T2) y suma.
3. $-4 = 4\,e(\pi)$: $z_k = \sqrt{2}\,e((\pi + 2\pi k)/4)$, es decir $\pm 1 \pm i$.
4. Es $a\bar{z}$ con $a = 1 + i$: razón $\sqrt{2}$, det $= -2$ (T6).
5. $(x, y) \mapsto (y, x)$ es $z \mapsto i\bar{z}$: $i(x - iy) = y + ix$.

G2-021 · El plano extendido y la proyección estereográfica

Motivación

> **La lámpara en el polo de una esfera de vidrio**
> Una esfera de vidrio de radio 1 está hundida a la mitad en una mesa: su ecuador queda al ras. En el polo norte hay un foco diminuto. Cada punto pintado en el vidrio proyecta su sombra en el plano de la mesa (donde el rayo del foco la atraviesa). Un anillo pintado a la altura $x_3 = 1/2$ hace una sombra circular de radio $\sqrt{3}$; un anillo que pasa por el foco hace una sombra recta. Ningún punto del vidrio cae en «el infinito»… salvo el foco mismo.
> Dónde falla la analogía: la mitad de abajo de la esfera está bajo la mesa (el rayo la cruza por el vidrio), y una mesa real es finita. Aquí la sombra es la proyección estereográfica π y el plano es $\mathbb{C}$ con un punto más, ∞. (Aviso de notación: este π es una función, no el número π.)

Parte 1 · El plano extendido y la proyección

Definición G2-021.D1 (plano extendido)

$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, con ∞ un elemento que no está en $\mathbb{C}$.

Definición G2-021.D2 (proyección estereográfica)

Con $N := (0,0,1)$ e identificando $\mathbb{C}$ con el plano $x_3 = 0$ por $x + iy \leftrightarrow (x,y,0)$: $\pi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$, $\pi(x_1,x_2,x_3) := (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$ si $x_3 \neq 1$, y $\pi(N) := \infty$ (en S^2, $x_3 = 1 \iff X = N$).

La última frase: si $X \in S^2$ y $x_3 = 1$, entonces $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = 0$, así que $X = N$ (G1-002.T1).

Teorema G2-021.T1 (es biyectiva)

π es biyectiva, con $\pi^{-1}(z) = (2\,\mathrm{Re}\,z, 2\,\mathrm{Im}\,z, |z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1)$ para $z \in \mathbb{C}$ y $\pi^{-1}(\infty) = N$. Para $X \in S^2 \setminus \{N\}$, $\pi(X)$ es el punto donde la recta NX corta al plano $x_3 = 0$.

Demostración. Sea $\sigma(z) := (2\,\mathrm{Re}\,z, 2\,\mathrm{Im}\,z, |z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1)$ y $\sigma(\infty) := N$.

1. $\sigma(z) \in S^2 \setminus \{N\}$. $|\sigma(z)|^2 = (4|z|^2 + (|z|^2 - 1)^2)/(|z|^2 + 1)^2 = 1$, y su tercera coordenada es < 1.
2. $\pi(\sigma(z)) = z$. $1 - \sigma(z)_3 = 2/(|z|^2 + 1)$, y $\pi(\sigma(z)) = \dfrac{2z/(|z|^2 + 1)}{2/(|z|^2 + 1)} = z$ (G2-020.T2: $\mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z = z$).
3. $\sigma(\pi(X)) = X$. Sea $X \in S^2 \setminus \{N\}$ y $w := \pi(X)$. Como $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$,

$$|w|^2 = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}, \qquad |w|^2 + 1 = \frac{2}{1 - x_3}, \qquad |w|^2 - 1 = \frac{2x_3}{1 - x_3},$$

   y $\sigma(w) = \big(2x_1, 2x_2, 2x_3\big)/(1 - x_3) \cdot (1 - x_3)/2 = X$.
4. Con $\sigma(\infty) = N = \pi^{-1}(\infty)$, 1-3 dicen que σ es la inversa de π: π es biyectiva (C1-011.T1).
5. *La recta.* $N + t(X - N)$ tiene tercera coordenada $1 + t(x_3 - 1)$, que es 0 en $t = 1/(1 - x_3)$; ahí el punto es $(x_1, x_2, 0)/(1 - x_3) \leftrightarrow \pi(X)$ (G1-001.D3). ■

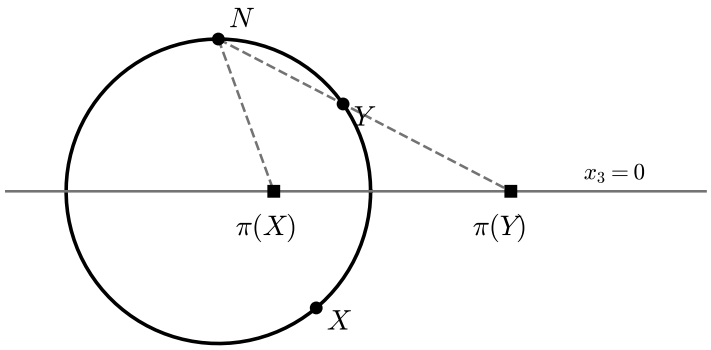


Figura 15: Corte por un plano vertical que contiene a N: la recta de N por X corta al plano $x_3 = 0$ en $\pi(X)$; los puntos del hemisferio de abajo caen dentro del disco unitario.

Definición G2-021.D3 (circunferencias generalizadas)

Para $(A, \beta, D) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ con $|\beta|^2 > AD$, el conjunto $C(A,\beta,D) := \{z \in \mathbb{C} : Az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + D = 0\}$, más el punto ∞ si $A = 0$, es una **circunferencia generalizada**, y (A, β, D) es un **vector de coeficientes** de ella ($\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 2\beta \cdot z$ es real). Por ejemplo, $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es $C(0, i, 0)$, pues con $\beta = i$, $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 2\operatorname{Im} z$.

En efecto, por G2-020.T2, $\bar{\beta}z = \beta \cdot z + i\det(\beta, z)$ y $\beta\bar{z}$ es su conjugado: la suma es $2\beta \cdot z$.

Teorema G2-021.T2 (son circunferencias o rectas)

Si $A \neq 0$, $C(A,\beta,D)$ es la circunferencia de centro $-\beta/A$ y radio $\sqrt{|\beta|^2 - AD}/|A|$; si $A = 0$ (y entonces $\beta \neq 0$), es la recta $\{z : \beta \cdot z = -D/2\}$ más ∞. Toda circunferencia de $\mathbb{C}$ y toda recta más ∞ es de esa forma, y dos vectores de coeficientes dan la misma circunferencia generalizada $\iff$ son proporcionales (con factor real $\neq 0$).

Demostración.

1. $A \neq 0$. Al dividir entre A y usar $|z + \beta/A|^2 = (z + \beta/A)(\bar{z} + \bar{\beta}/A)$ (G2-020.T2):

$$z\bar{z} + \frac{\bar{\beta}}{A}z + \frac{\beta}{A}\bar{z} + \frac{D}{A} = \left|z + \frac{\beta}{A}\right|^2 - \frac{|\beta|^2 - AD}{A^2}.$$

   La ecuación es $|z - (-\beta/A)|^2 = (|\beta|^2 - AD)/A^2 > 0$: la circunferencia indicada (G1-005.T2).
2. $A = 0$. $|\beta|^2 > 0$ da $\beta \neq 0$, y la ecuación es $2\beta \cdot z + D = 0$: la recta de normal β (G1-023.T1), más ∞ por D3.
3. *Toda circunferencia.* $|z - z_0|^2 = r^2 \iff z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0$: vector $(1, -z_0, |z_0|^2 - r^2)$, con $|\beta|^2 - AD = r^2 > 0$. *Toda recta* $\{n \cdot z = k\}$, $n \neq 0$: vector $(0, n, -2k)$.
4. *Proporcionales ⇒ la misma.* Multiplicar la ecuación por $\lambda \neq 0$ no cambia sus soluciones, ni si $A = 0$.
5. *La misma ⇒ proporcionales.* Una circunferencia no contiene a ∞ y una recta más ∞ sí, así que los dos vectores tienen $A, A' \neq 0$ o $A = A' = 0$.
6. Si $A, A' \neq 0$: la circunferencia determina su centro y su radio (tres de sus puntos no están alineados, porque una recta la corta en a lo más dos, G1-012.T6, y G1-010.T2 da la unicidad). Por 1, $\beta/A = \beta'/A'$ y $|\beta|^2/A^2 - D/A = |\beta'|^2/A'^2 - D'/A'$, de donde $D/A = D'/A'$: $(A', \beta', D') = (A'/A)(A, \beta, D)$.
7. Si $A = A' = 0$: las rectas $\beta \cdot z = -D/2$ y $\beta' \cdot z = -D'/2$ coinciden, y G1-023.T1 da $(\beta', -D'/2) =$

$\lambda(\beta, -D/2)$. ■

Teorema G2-021.T3 (por tres puntos pasa una sola)

Por tres puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$ pasa exactamente una circunferencia generalizada.

Demostración.

1. *Los tres en* $\mathbb{C}$*, no alineados.* Ninguna recta los contiene, así que una circunferencia generalizada que los contenga es una circunferencia (T2), y G1-010.T2 da que existe exactamente una.
2. *Los tres en* $\mathbb{C}$*, alineados.* La recta L que los contiene (G1-001.T4) más ∞ sirve. Ninguna circunferencia contiene tres puntos de una recta (G1-012.T6), y otra recta que contenga dos de ellos es L (G1-001.T4).
3. *Uno es* ∞*.* Solo las rectas más ∞ contienen a ∞ (T2), y por los otros dos, distintos, pasa una sola recta (G1-001.T4). ■

Parte 2 · La estereográfica lleva circunferencias en circunferencias

Definición G2-021.D4 (circunferencias de la esfera)

Una **circunferencia de** S^2 es $S^2 \cap \Pi$ con $\Pi = \{n \cdot X = k\}$ un plano a distancia < 1 del origen, es decir $|k| < |n|$ (G1-025.T3).

Teorema G2-021.T4 (la estereográfica lleva circunferencias en circunferencias generalizadas)

Para $\Pi = \{n \cdot X = k\}$ y $z \in \mathbb{C}$: $\pi^{-1}(z) \in \Pi \iff (n_3 - k)|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} - (n_3 + k) = 0$ con $\beta := n_1 + in_2$; $N \in \Pi \iff n_3 = k$; y $|\beta|^2 - (n_3 - k)(-(n_3 + k)) = |n|^2 - k^2$. Por tanto, si $|k| < |n|$, $\pi(S^2 \cap \Pi) = C(n_3 - k, n_1 + in_2, -(n_3 + k))$ (con $\infty \iff N \in \Pi$), las circunferencias de S^2 por N van a rectas más ∞, y toda circunferencia generalizada es la imagen de exactamente una circunferencia de S^2.

Idea de la demostración

Se sustituye la fórmula de π^{-1} en la ecuación del plano y se multiplica por $|z|^2+1$: sale una ecuación de circunferencia generalizada. Al revés, de (A,β,D) se despeja el plano.

Demostración. Sea $z=x+iy$.

1. Por T1, $\pi^{-1}(z)\in\Pi \iff 2n_1x+2n_2y+n_3(|z|^2-1)=k(|z|^2+1)$, es decir $(n_3-k)|z|^2+2(n_1x+n_2y)-(n_3+k)=0$, y $2(n_1x+n_2y)=2\beta\cdot z=\bar{\beta}z+\beta\bar{z}$ (D3).
2. $N\in\Pi \iff n\cdot N=n_3=k$. Y $|\beta|^2+(n_3-k)(n_3+k)=n_1^2+n_2^2+n_3^2-k^2$.
3. Si $|k|<|n|$, por 2 el vector $c:=(n_3-k,\beta,-(n_3+k))$ cumple $|\beta|^2>AD$ (D3). Como π es biyectiva (T1), por 1 $\pi((S^2\cap\Pi)\setminus\{N\})=C(c)\cap\mathbb{C}$; y $N\in\Pi \iff A=0 \iff \infty\in C(c)$, con $\pi(N)=\infty$. Así $\pi(S^2\cap\Pi)=C(c)$, una recta más ∞ si $N\in\Pi$ (T2).
4. *Toda circunferencia generalizada es imagen.* Dado (A,β,D) con $|\beta|^2>AD$, sean $n_3:=(A-D)/2$, $k:=-(A+D)/2$ y $(n_1,n_2):=(\operatorname{Re}\beta,\operatorname{Im}\beta)$. Entonces $n_3-k=A$, $-(n_3+k)=D$ y, por 2, $|n|^2-k^2=|\beta|^2-AD>0$: $n\neq 0$, $|k|<|n|$, y por 3 $\pi(S^2\cap\Pi)=C(A,\beta,D)$.
5. *Exactamente una.* Si $\pi(S^2\cap\Pi)=\pi(S^2\cap\Pi')$, por T2 los vectores de 3 son proporcionales: $(n_1',n_2')=\lambda(n_1,n_2)$, $n_3'-k'=\lambda(n_3-k)$, $n_3'+k'=\lambda(n_3+k)$; sumando y restando, $(n',k')=\lambda(n,k)$, y $\Pi'=\Pi$ (G1-025.T1). ■

Ejemplo G2-021.E1

$\pi^{-1}(0)=(0,0,-1)$, $\pi^{-1}(1)=e_1$, $\pi^{-1}(i)=e_2$; el ecuador $x_3=0$ va a la circunferencia unitaria $(A=1,\beta=0,D=-1)$ y los meridianos (planos $n_3=k=0$) a rectas por 0.

1. Por T1: $\pi^{-1}(0)=(0,0,-1)/1$, $\pi^{-1}(1)=(2,0,0)/2$, $\pi^{-1}(i)=(0,2,0)/2$.
2. Ecuador: $n=e_3$, $k=0$: $c=(1,0,-1)$, la ecuación $z\bar{z}-1=0$, es decir $|z|=1$.
3. Meridiano: $n_3=0=k$, $c=(0,\beta,0)$: la recta $\beta\cdot z=0$, que pasa por 0, más ∞.
4. El anillo de la Motivación, $x_3=1/2$: $c=(1/2,0,-3/2)$, la circunferencia $|z|^2=3$, de radio $\sqrt{3}$.

Por qué cada hipótesis

⚠ $|\beta|^2 > AD$

Con $(A, \beta, D) = (1, 0, 1)$ la ecuación es $|z|^2 = -1$: vacía. Con $|\beta|^2 = AD$, por ejemplo $(1, 0, 0)$, es el punto $\{0\}$: no son circunferencias generalizadas.

⚠ $|\bar{k}| < |\bar{n}|$

El plano $x_3 = 1$ toca a S^2 solo en N, y $x_3 = 2$ no la toca: no son circunferencias de S^2, y sus «imágenes» serían $\{\infty\}$ o el vacío.

⚠ **∞ es un solo punto**

Todas las rectas pasan por el mismo ∞: dos rectas paralelas son dos circunferencias generalizadas que se tocan solo en ∞, como dos circunferencias de S^2 tangentes en N.

Ejercicios

1. Calcula $\pi(3/5, 0, 4/5)$ y $\pi^{-1}(2i)$.
2. ¿Qué circunferencia de S^2 va a la recta $\operatorname{Re} z = 1$?
3. Escribe el vector de coeficientes de $C(1 + i, 2)$ y comprueba $|\beta|^2 - AD = 4$.
4. ¿Por cuántas circunferencias generalizadas pasan 0, 1 e ∞? ¿Cuál?
5. Demuestra que $\pi(-X) = -1/\overline{\pi(X)}$ para $X \in S^2$ con $x_3 \neq \pm 1$.

Respuestas

1. $\pi(3/5, 0, 4/5) = (3/5)/(1/5) = 3$; $\pi^{-1}(2i) = (0, 4, 3)/5$.
2. $\operatorname{Re} z = 1$ es $(0, 1, -2)$: $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 - k = 0, n_3 + k = 2$: el plano $x_1 + x_3 = 1$, que pasa por N.
3. $(1, -(1 + i), |1 + i|^2 - 4) = (1, -1 - i, -2)$; $|\beta|^2 - AD = 2 + 2 = 4$.
4. Una sola (T3): el eje real más ∞.
5. Con $w = \pi(X)$, $\pi(-X) = -(x_1 + ix_2)/(1 + x_3)$, y $1/\bar{w} = (1 - x_3)(x_1 + ix_2)/(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + ix_2)/(1 + x_3)$.

G2-022 · Transformaciones de Möbius

Motivación

> **El efecto «de adentro hacia afuera»**
> Una aplicación de fotos tiene un efecto que voltea la imagen «de adentro hacia afuera»: lo que estaba cerca del centro queda lejos y lo lejano queda cerca. Es $z \mapsto 1/z$. Las calles rectas de un plano cuadriculado se vuelven circunferencias que pasan por el centro… y siguen cruzándose en ángulo recto. Las transformaciones de Möbius, de la forma $(az+b)/(cz+d)$, hacen eso en general: llevan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas, y no cambian los ángulos entre ellas.
> Dónde falla la analogía: la foto no tiene un «punto al infinito» donde caiga el centro; aquí $1/0 = \infty$ en $\hat{\mathbb{C}}$ (G2-021).

Parte 1 · El grupo de Möbius y sus generadores

Definición G2-022.D1 (transformación de Möbius)

Para $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ con $ad-bc \neq 0$, $T = T_{a,b,c,d} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$: si $c = 0$, $T(z) := (az+b)/d$ para $z \in \mathbb{C}$ y $T(\infty) := \infty$; si $c \neq 0$, $T(z) := (az+b)/(cz+d)$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, $T(-d/c) := \infty$ y $T(\infty) := a/c$. Su **matriz** es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (2×2 compleja, producto como en G2-008.D1); Möb := las transformaciones de Möbius.

Está bien definida: si $c = 0$, $ad \neq 0$ da $d \neq 0$; si $c \neq 0$ y $cz+d \neq 0$, se divide en el campo $\mathbb{C}$ (G2-020.T1).

Lema G2-022.T7 (coordenadas homogéneas, sin casos)

Para $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sea $[z_1 : z_2] := z_1/z_2$ si $z_2 \neq 0$ y $[z_1 : z_2] := \infty$ si $z_2 = 0$. Entonces todo punto de $\hat{\mathbb{C}}$ es un $[z_1 : z_2]$ ($z = [z : 1]$, $\infty = [1 : 0]$); $[z_1 : z_2] = [w_1 : w_2] \iff$

$(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2)$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; y para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\det A \neq 0$ y $v = (z_1, z_2) \neq 0$, $Av \neq 0$ y $T_A([v]) = [Av]$, con $Av := (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)$. Para matrices complejas 2×2, $(AB)v = A(Bv)$.

Demostración.

1. $[z : 1] = z$ y $[1 : 0] = \infty$.
2. *Proporcionales ⇒ iguales.* $\lambda z_1/(\lambda z_2) = z_1/z_2$ si $z_2 \neq 0$, y $\lambda z_2 = 0 \iff z_2 = 0$.
3. *Iguales ⇒ proporcionales.* Si $[v] = [w] \in \mathbb{C}$, $z_2, w_2 \neq 0$ y $w_1 = w_2 z_1/z_2$: $w = (w_2/z_2)v$. Si $[v] = [w] = \infty$, $z_2 = w_2 = 0$, $z_1, w_1 \neq 0$ y $w = (w_1/z_1)v$.
4. $Av \neq 0$. $d(az_1 + bz_2) - b(cz_1 + dz_2) = (\det A)z_1$ y $-c(az_1 + bz_2) + a(cz_1 + dz_2) = (\det A)z_2$. Si $Av = 0$, ambos son 0, y como $\det A \neq 0$, $z_1 = z_2 = 0$.
5. $T_A([v]) = [Av]$. Como $A(\lambda v) = \lambda Av$, por 2-3 basta $v = (z, 1)$ y $v = (1, 0)$. Para $v = (z, 1)$, $Av = (az + b, cz + d)$: si $cz + d \neq 0$, $[Av] = (az + b)/(cz + d) = T_A(z)$ (con $c = 0$ es $(az + b)/d$); si $cz + d = 0$, entonces $c \neq 0$ (si no, $d = 0$ y $\det A = 0$), $z = -d/c$ y $[Av] = \infty = T_A(z)$ (por 4, $az + b \neq 0$).
6. Para $v = (1, 0)$, $Av = (a, c)$: $[Av] = a/c = T_A(\infty)$ si $c \neq 0$, e $\infty = T_A(\infty)$ si $c = 0$.
7. $(AB)v = A(Bv)$ es la cuenta de G2-008.T1 con las reglas de campo de $\mathbb{C}$ (G2-020.T1). ■

Teorema G2-022.T1 (grupo y matrices)

Para matrices complejas 2×2, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ y $T_A \circ T_B = T_{AB}$; $T_I = \mathrm{id}$; T_A es biyectiva con inversa $T_{A'}$, $A' := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; Möb es un grupo de transformaciones de $\hat{\mathbb{C}}$; y $T_A = T_B \iff A = \lambda B$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Idea de la demostración

Con coordenadas homogéneas, T_A es «multiplicar por A y leer la razón»; componer es multiplicar matrices, sin casos para ∞ ni para los polos.

Demostración. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

1. $\det(AB)$. $\det(AB) = (aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')$; los términos $aa'cb'$ y $bc'dd'$ se cancelan con $ab'ca'$ y $bd'dc'$, y queda $ada'd' + bcb'c' - adb'c' - bca'd' = (ad-bc)(a'd'-b'c')$ (G2-020.T1).
2. *Composición.* Si $\det A$, $\det B \neq 0$, por 1 $\det(AB) \neq 0$, y para todo $v \neq 0$, por T7,

$$T_A(T_B([v])) = T_A([Bv]) = [A(Bv)] = [(AB)v] = T_{AB}([v]).$$

   Como todo punto es un $[v]$, $T_A \circ T_B = T_{AB}$.
3. $T_I([v]) = [v]$. $AA' = A'A = (\det A)I$ y $\det A' = \det A \neq 0$; $T_{\lambda I}([v]) = [\lambda v] = [v]$, así que $T_A \circ T_{A'} = T_{A'} \circ T_A = \mathrm{id}$ y T_A es biyectiva con inversa $T_{A'}$ (C1-011.T1).
4. *Grupo.* $\mathrm{id} = T_I$; por 2 y 3, Möb es cerrado bajo composición e inversas (G2-010.D2).
5. $T_{\lambda B} = T_B$. $[\lambda Bv] = [Bv]$ (T7).
6. $T_C = \mathrm{id} \Rightarrow C = aI$. Si $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $T_C = \mathrm{id}$: $T_C(\infty) = \infty$ da $c = 0$; $T_C(0) = b/d = 0$ da $b = 0$; $T_C(1) = a/d = 1$ da $a = d$.
7. $T_A = T_B \Rightarrow A = \lambda B$. $T_{B'A} = T_{B'} \circ T_A = T_{B'} \circ T_B = T_{B'B} = \mathrm{id}$, así que $B'A = \mu I$ con $\mu \neq 0$ (6). Multiplicando por B: $(\det B)A = BB'A = \mu B$ (G2-008.T1), y $A = (\mu/\det B)B$. ■

Teorema G2-022.T2 (generadores)

Toda Möbius es composición de traslaciones $\tau_\beta(z) := z + \beta$, rotación-homotecias $M_\alpha(z) := \alpha z$ $(\alpha \neq 0)$ y $J(z) := 1/z$ $(J(0) = \infty, J(\infty) = 0)$. Explícitamente, si $c \neq 0$, $T = \tau_{a/c} \circ M_{-(ad-bc)/c^2} \circ J \circ \tau_{d/c}$; si $c = 0$, $T = \tau_{b/d} \circ M_{a/d}$.

Demostración.

1. Las matrices de τ_β, M_α, J son $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (D1; para J, $-d/c = 0$ y $a/c = 0$).
2. $c \neq 0$. Multiplicando de izquierda a derecha:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{ad-bc}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{ad-bc}{c^2} & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & -\frac{ad-bc}{c^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   y al multiplicar por $\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ queda $\begin{pmatrix} a/c & (ad-(ad-bc))/c^2 \\ 1 & d/c \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
3. $c = 0$. $ad \neq 0$, y $\begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

4. Por T1 ($T_{\lambda A} = T_A$ y composición = producto), T es esa composición; $\alpha = -(ad - bc)/c^2 \neq 0$ y $a/d \neq 0$. ■

Definición G2-022.D2 (inversión en una circunferencia)

Para $C(z_0, r)$: $\iota(z) := z_0 + r^2/(\bar{z} - \bar{z}_0)$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\iota(z_0) := \infty$, $\iota(\infty) := z_0$. Además $\kappa(z) := \bar{z}$ y $\kappa(\infty) := \infty$.

Teorema G2-022.T3 (propiedades de la inversión)

$\iota \circ \iota = \mathrm{id}$; ι fija exactamente los puntos de $C(z_0, r)$; para $z \neq z_0$, $\iota(z)$ está en el rayo desde z_0 por z y $|\iota(z) - z_0||z - z_0| = r^2$; $\iota = \kappa \circ T$ con $T(z) := \bar{z}_0 + r^2/(z - z_0) \in$ Möb; y $J = \kappa \circ \iota_0$ con ι_0 la inversión en $C(0, 1)$.

Demostración.

1. Para $z \neq z_0$, multiplicando por $(z - z_0)/(z - z_0)$ y con $(\bar{z} - \bar{z}_0)(z - z_0) = |z - z_0|^2$ (G2-020.T2):

$$\iota(z) - z_0 = \frac{r^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0).$$

   El factor es real positivo: $\iota(z)$ está en el rayo, y $|\iota(z) - z_0| = r^2/|z - z_0|$.
2. $\iota \circ \iota$. Para $z \neq z_0$, $\iota(z) \neq z_0$ e, iterando 1, $\iota(\iota(z)) - z_0 = \frac{r^2}{r^4/|z-z_0|^2} \cdot \frac{r^2}{|z-z_0|^2}(z - z_0) = z - z_0$. Y $\iota(\iota(z_0)) = \iota(\infty) = z_0$, $\iota(\iota(\infty)) = \infty$.
3. *Puntos fijos.* z_0 e ∞ no son fijos. Para $z \neq z_0$, por 1, $\iota(z) = z \iff r^2/|z-z_0|^2 = 1 \iff |z-z_0| = r$.
4. $\iota = \kappa \circ T$. $T(z) = (\bar{z}_0 z + r^2 - |z_0|^2)/(z - z_0)$ tiene matriz $\begin{pmatrix} \bar{z}_0 & r^2 - |z_0|^2 \\ 1 & -z_0 \end{pmatrix}$ de $\det = -|z_0|^2 - r^2 + |z_0|^2 = -r^2 \neq 0$. Para $z \neq z_0$, $\overline{T(z)} = z_0 + r^2/(\bar{z} - \bar{z}_0) = \iota(z)$ (G2-020.T2); $T(z_0) = \infty$ y $T(\infty) = \bar{z}_0$, con $\kappa(\infty) = \infty = \iota(z_0)$ y $\kappa(\bar{z}_0) = z_0 = \iota(\infty)$.
5. $J = \kappa \circ \iota_0$. $\iota_0(z) = 1/\bar{z}$ y $\overline{1/\bar{z}} = 1/z$; $\iota_0(0) = \infty$ y $\iota_0(\infty) = 0$, como J. ■

Parte 2 · Circunferencias generalizadas y ángulos

Definición G2-022.D3 (forma de los coeficientes)

Para $c = (A, \beta, D)$ y $c' = (A', \beta', D')$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}$: $\langle c, c'\rangle := \operatorname{Re}(\bar\beta\beta') - (AD' + A'D)/2$. Es bilineal y simétrica, y $\langle c, c\rangle = |\beta|^2 - AD$.

En efecto, $\operatorname{Re}(\bar\beta\beta') = \beta\cdot\beta'$ (G2-020.T2), que es bilineal y simétrico, y $AD' + A'D$ también.

Teorema G2-022.T4 (llevan circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas)

Si $\mathcal{C}$ es una circunferencia generalizada de vector c y $T \in$ Möb, $T(\mathcal{C})$ es una circunferencia generalizada, cuyo vector se obtiene de c por una lineal L_T de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ ($\cong \mathbb{R}^4$) con $\langle L_T c, L_T c'\rangle = \lambda_T\langle c, c'\rangle$ para un $\lambda_T > 0$. Para τ_t: $(A, \beta, D) \mapsto (A, \beta - At, D + A|t|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar\beta t))$, $\lambda = 1$; para M_α: $(A, \beta, D) \mapsto (A/|\alpha|^2, \beta/\bar\alpha, D)$, $\lambda = 1/|\alpha|^2$; para J: $(A, \beta, D) \mapsto (D, \bar\beta, A)$, $\lambda = 1$; y lo mismo vale para κ, $(A, \beta, D) \mapsto (A, \bar\beta, D)$, y por tanto para las inversiones.

Demostración. Sea $E_c(z) := Az\bar z + \bar\beta z + \beta\bar z + D$. Para un generador S (biyectivo, T1), $w \in S(\mathcal{C}) \cap \mathbb{C}$ con $S^{-1}(w) \in \mathbb{C} \iff E_c(S^{-1}(w)) = 0$.

1. τ_t. Con $z = w - t$:

$$E_c(w - t) = Aw\bar w + (\bar\beta - A\bar t)w + (\beta - At)\bar w + \big(D + A|t|^2 - \bar\beta t - \beta\bar t\big),$$

   y $\bar\beta t + \beta\bar t = 2\operatorname{Re}(\bar\beta t)$. ∞ queda fijo y A no cambia: $\infty \in \tau_t(\mathcal{C}) \iff \infty \in \mathcal{C}$.
2. M_α. Con $z = w/\alpha$: $E_c(w/\alpha) = \frac{A}{|\alpha|^2}w\bar w + \frac{\bar\beta}{\alpha}w + \frac{\beta}{\bar\alpha}\bar w + D$; el nuevo β es $\beta/\bar\alpha$ (su conjugado es $\bar\beta/\alpha$). ∞ fijo y $A/|\alpha|^2 = 0 \iff A = 0$.
3. J. Para $w \neq 0, \infty$, $z = 1/w$ y $w\bar w\, E_c(1/w) = A + \bar\beta\bar w + \beta w + Dw\bar w$: el vector $(D, \bar\beta, A)$. Puntos especiales: $0 = J(\infty) \in J(\mathcal{C}) \iff \infty \in \mathcal{C} \iff A = 0$, que es «0 cumple la nueva ecuación»; $\infty = J(0) \in J(\mathcal{C}) \iff 0 \in \mathcal{C} \iff D = 0$, que es «el nuevo A es 0».
4. κ. Con $z = \bar w$: $E_c(\bar w) = Aw\bar w + \beta w + \bar\beta\bar w + D$: el vector $(A, \bar\beta, D)$; ∞ fijo.
5. *Las formas.* Cada una de las cuatro funciones es lineal en (A, β, D), y una cuenta directa da $\langle Lc, Lc'\rangle = \lambda\langle c, c'\rangle$ con los λ del enunciado (por ejemplo, para J: $\operatorname{Re}(\beta\bar\beta') - (DA' + D'A)/2 = \langle c, c'\rangle$, pues $\operatorname{Re}\bar u = \operatorname{Re} u$; todas en `tools/checks/G2-022.py`).
6. Como $\lambda > 0$, $\langle Lc, Lc\rangle = \lambda(|\beta|^2 - AD) > 0$: Lc es un vector de coeficientes válido (D3 de G2-021),

y por 1-4 $S(\mathcal{C}) = C(Lc)$ (G2-021.D3, G2-021.T2).

7. *Toda Möbius.* Por T2, T es composición de generadores; la composición de lineales es lineal, y los factores se multiplican: $\lambda_T > 0$. Las inversiones son $\kappa \circ T$ (T3). ■

Definición G2-022.D4 (producto inversivo; ángulo entre circunferencias generalizadas)

Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tienen vectores c, c', su **producto inversivo** es $I(\mathcal{C}, \mathcal{C}') := |\langle c, c'\rangle|/(\sqrt{\langle c, c\rangle}\cdot\sqrt{\langle c', c'\rangle}) \geq 0$, que no depende de los vectores elegidos (G2-021.T2); son **ortogonales** si $\langle c, c'\rangle = 0$. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se cortan en un punto de $\mathbb{C}$, el **coseno del ángulo (no orientado)** entre ellas es $\cos\angle(\mathcal{C}, \mathcal{C}') := I(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ (G2-022.T5 prueba que es ≤ 1 y que es el de las normales). Si no se cortan, I puede ser > 1: para $C(0,1)$ y $C(3,1)$, $I = 7/2$.

No depende de los vectores: si se cambian por μc, $\mu' c'$ (G2-021.T2), el numerador se multiplica por $|\mu\mu'|$ y el denominador por $\sqrt{\mu^2}\sqrt{\mu'^2} = |\mu||\mu'|$. Para el ejemplo, $c = (1, 0, -1)$, $c' = (1, -3, 8)$: $\langle c, c'\rangle = 0 - (8-1)/2 = -7/2$ y $\langle c, c\rangle = \langle c', c'\rangle = 1$.

Teorema G2-022.T5 (es el ángulo entre las normales)

Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se cortan en $p \in \mathbb{C}$, $I(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = |\cos\angle(n, n')| \leq 1$, donde $n := p - z_0$ si $\mathcal{C} = C(z_0, r)$ y $n := \beta$ si $\mathcal{C}$ es la recta de vector $(0, \beta, D)$, e igual n' para $\mathcal{C}'$. Para dos circunferencias $C(z_0, r)$ y $C(z_1, s)$: $\langle c, c'\rangle = (r^2 + s^2 - |z_0 - z_1|^2)/2$ y $\langle c, c\rangle = r^2$.

Demostración.

1. *Dos circunferencias.* Con $c = (1, -z_0, |z_0|^2 - r^2)$ y $c' = (1, -z_1, |z_1|^2 - s^2)$ (G2-021.T2): $\langle c, c'\rangle = z_0 \cdot z_1 - (|z_0|^2 + |z_1|^2 - r^2 - s^2)/2 = (r^2 + s^2 - |z_0 - z_1|^2)/2$ (G1-002.T3), y $\langle c, c\rangle = r^2$.
2. Si se cortan en p: $|p - z_0| = r$, $|p - z_1| = s$ y $|z_0 - z_1|^2 = |(p - z_1) - (p - z_0)|^2 = s^2 + r^2 - 2(p - z_0) \cdot (p - z_1)$ (G1-002.T3). Así $\langle c, c'\rangle = n \cdot n'$, con $|n| = r$, $|n'| = s$.
3. *Circunferencia y recta.* Con $c' = (0, \beta', D')$: $\langle c, c'\rangle = -z_0 \cdot \beta' - D'/2$. Como $p \in \mathcal{C}'$, $2\beta' \cdot p + D' = 0$, así que $\langle c, c'\rangle = \beta' \cdot (p - z_0) = n' \cdot n$, con $\sqrt{\langle c', c'\rangle} = |\beta'|$.
4. *Dos rectas.* $\langle c, c'\rangle = \mathrm{Re}(\bar{\beta}\beta') = \beta \cdot \beta'$ (G2-020.T2), con $\sqrt{\langle c, c\rangle} = |\beta|$.
5. En los tres casos $I = |n \cdot n'|/(|n||n'|) = |\cos\angle(n, n')|$ (G1-006.D1), que es ≤ 1 (G1-002.T5). ■

Teorema G2-022.T6 (conformidad)

Las Möbius y las inversiones conservan el producto inversivo: $I(T\mathcal{C}, T\mathcal{C}') = I(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$; en particular conservan la ortogonalidad y, si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ se cortan en $p \in \mathbb{C}$ con $T(p) \in \mathbb{C}$, el ángulo entre ellas: $\cos \angle(T\mathcal{C}, T\mathcal{C}') = \cos \angle(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

Demostración.

1. Por T4, $T\mathcal{C}$ y $T\mathcal{C}'$ tienen vectores $L_T c$, $L_T c'$ con $\langle L_T c, L_T c' \rangle = \lambda_T \langle c, c' \rangle$, y lo mismo con $c' = c$ y con $c = c'$.
2. Como $\lambda_T > 0$, $\sqrt{\lambda_T a} = \sqrt{\lambda_T}\sqrt{a}$ y el factor se cancela:
$$I(T\mathcal{C}, T\mathcal{C}') = \frac{\lambda_T |\langle c, c' \rangle|}{\sqrt{\lambda_T}\sqrt{\langle c, c \rangle}\sqrt{\lambda_T}\sqrt{\langle c', c' \rangle}} = I(\mathcal{C}, \mathcal{C}').$$
3. $\langle c, c' \rangle = 0 \iff \langle L_T c, L_T c' \rangle = 0$: ortogonalidad.
4. Si se cortan en p y $T(p) \in \mathbb{C}$, $T(p) \in T\mathcal{C} \cap T\mathcal{C}'$ (T biyectiva, T1): los dos cosenos están definidos (D4) y son los productos inversivos, iguales por 2. Las inversiones, igual (T4). ■

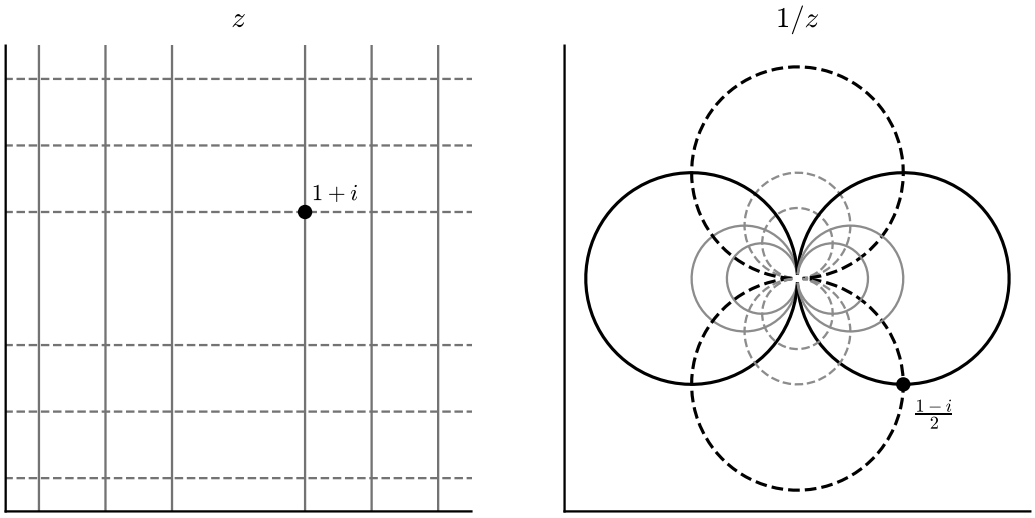


Figura 16: La cuadrícula $\operatorname{Re} z = k$ (continuas), $\operatorname{Im} z = k$ (punteadas) y su imagen por $J(z) = 1/z$: circunferencias por 0 que siguen cortándose en ángulo recto. En negro, las de $k = 1$, que se cortan en $J(1+i) = (1-i)/2$.

Ejemplo G2-022.E1 (transformada de Cayley)
$K(z) := (z-i)/(z+i)$ cumple $K(0) = -1$, $K(1) = -i$, $K(\infty) = 1$ y $K(i) = 0$; lleva $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sobre la circunferencia unitaria.

1. Su matriz $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ tiene det $= 2i \neq 0$ (D1).
2. $K(0) = -i/i = -1$; $K(1) = (1-i)/(1+i) = (1-i)^2/2 = -i$; $K(\infty) = 1/1$; $K(i) = 0$.
3. $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es la circunferencia generalizada $C(0, i, 0)$ (G2-021.D3), así que $K(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ también (T4), y pasa por $-1, -i, 1$. Por G2-021.T3 la única que pasa por esos tres es $C(0,1)$: son iguales.

Por qué cada hipótesis

⚠ $ad - bc \neq 0$

$T(z) = (2z+2)/(z+1)$ (det $= 0$) vale 2 en todo $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$: no es biyectiva.

⚠ **El producto inversivo no siempre es un coseno**

$C(0,1)$ y $C(3,1)$ tienen $I = 7/2 > 1$: no se cortan y no hay ángulo. El coseno del ángulo solo se define en un punto de corte (D4, T5).

⚠ κ **no es Möbius**

$\kappa(z) = \bar{z}$ fija 0, 1 e ∞ y no es la identidad; si fuera Möbius sería la identidad (T1, paso 6). Por eso las inversiones ($= \kappa \circ T$) tampoco son Möbius, aunque conservan I.

Ejercicios

1. Escribe $T(z) = (2z+1)/(z+3)$ como composición de generadores.
2. Calcula $T_A \circ T_B$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. ¿A qué va la recta Re $z = 1$ por J? Usa T4.
4. Demuestra que la inversión en $C(0,2)$ lleva $C(0,1)$ en $C(0,4)$.
5. Calcula $I(C(0,1), C(1,1))$ y el ángulo entre ellas.

Respuestas

1. $c = 1$: $\tau_2 \circ M_{-5} \circ J \circ \tau_3$, pues $-(ad - bc)/c^2 = -(6 - 1) = -5$.
2. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $z \mapsto (z + 1)/z = 1 + 1/z$.
3. $(0, 1, -2) \mapsto (-2, 1, 0)$: $-2|w|^2 + w + \bar{w} = 0$, la circunferencia de centro $1/2$ y radio $1/2$.
4. $|\iota(z)||z| = 4$ (T3): si $|z| = 1$, $|\iota(z)| = 4$, y ι es biyectiva.
5. Por T5, $\langle c, c' \rangle = (1 + 1 - 1)/2 = 1/2$, $I = 1/2$: se cortan en ángulo de coseno $1/2$, es decir $\pi/3$.

G2-023 · Razón cruzada

Motivación

> **¿Caben las cuatro mesas bajo un toldo redondo?**
> En un patio hay cuatro mesas, en los puntos 0, 2, $1+i$ y $1-i$ (en metros). Se quiere un toldo circular cuyo borde pase justo sobre las cuatro. Tres puntos siempre determinan una circunferencia (o una recta); la pregunta es si la cuarta mesa cae en ella. Hay un número, la **razón cruzada**, que lo decide de un golpe: es real exactamente cuando las cuatro están en una misma circunferencia o recta. Aquí vale -1. Si la cuarta mesa se mueve a $2i$, vale $1-i$: ya no caben.
> Dónde falla la analogía: las mesas tienen tamaño y el toldo una tela con holgura; aquí son puntos exactos de $\hat{\mathbb{C}}$.

La Möbius normalizada y la razón cruzada

Teorema G2-023.T1 (la Möbius normalizada)

Para $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos existe una única $S \in$ Möb con $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$ y $S(z_4) = \infty$: $S(z) = \dfrac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z-z_4)(z_2-z_3)}$ si los tres están en $\mathbb{C}$, y $S(z) = \dfrac{z-z_3}{z-z_4}$, $\dfrac{z_2-z_4}{z-z_4}$ o $\dfrac{z-z_3}{z_2-z_3}$ si z_2, z_3 o z_4 es ∞, respectivamente. Una Möbius que fija 0, 1 e ∞ es la identidad.

Demostración.

1. *Los tres en* $\mathbb{C}$. S tiene matriz $\begin{pmatrix} z_2-z_4 & -z_3(z_2-z_4) \\ z_2-z_3 & -z_4(z_2-z_3) \end{pmatrix}$, de determinante $(z_2-z_4)(z_2-z_3)(z_3-z_4) \neq 0$ (G2-020.T1, C1-002.T5 en el campo $\mathbb{C}$). Su polo es $-d/c = z_4$, así que $S(z_4) = \infty$; y $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0$ (G2-022.D1).
2. $z_2 = \infty$. Matriz $\begin{pmatrix} 1 & -z_3 \\ 1 & -z_4 \end{pmatrix}$, $\det = z_3 - z_4 \neq 0$; $S(\infty) = a/c = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = \infty$.

3. $z_3 = \infty$. Matriz $\begin{pmatrix} 0 & z_2 - z_4 \\ 1 & -z_4 \end{pmatrix}$, $\det = -(z_2 - z_4) \neq 0$; $S(z_2) = 1, S(\infty) = 0/1 = 0, S(z_4) = \infty$.
4. $z_4 = \infty$. Matriz $\begin{pmatrix} 1 & -z_3 \\ 0 & z_2 - z_3 \end{pmatrix}$, con $c = 0$: $S(\infty) = \infty, S(z_2) = 1, S(z_3) = 0$.
5. *Fija* $0, 1, \infty \Rightarrow$ *identidad.* Si $T = T_{a,b,c,d}$ fija ∞, $c = 0$ (si no, $T(\infty) = a/c \in \mathbb{C}$); si fija 0, $b/d = 0$, $b = 0$; si fija 1, $a/d = 1$. Así $T(z) = z$.
6. *Unicidad.* Si S' también cumple, $S' \circ S^{-1} \in$ Möb (G2-022.T1) fija 1, 0, ∞; por 5 es la identidad y $S' = S$. ■

Definición G2-023.D1 (razón cruzada)

Para $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos y $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$: $(z_1, z_2; z_3, z_4) := S(z_1)$, con S la de G2-023.T1.

Si los cuatro están en $\mathbb{C}$,

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Teorema G2-023.T2 (tres puntos en tres puntos)

Si $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ son distintos y w_1, w_2, w_3 también, existe una única $T \in$ Möb con $T(z_i) = w_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Toda $T \in$ Möb distinta de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$.

Demostración.

1. Sea S_z la de T1 con $z_1 \mapsto 1, z_2 \mapsto 0, z_3 \mapsto \infty$, y S_w la análoga para los w_i. $T := S_w^{-1} \circ S_z \in$ Möb (G2-022.T1) cumple $T(z_i) = w_i$.
2. *Tres puntos fijos* $\Rightarrow$ *identidad.* Si $R \in$ Möb fija z_1, z_2, z_3 distintos, $S_z \circ R \circ S_z^{-1}$ fija 1, 0, ∞, así que es la identidad (T1) y $R =$ id. Esto es la segunda frase.
3. *Unicidad.* Si T y T' sirven, $T'^{-1} \circ T$ fija z_1, z_2, z_3; por 2, $T' = T$. ■

Teorema G2-023.T3 (invariancia)

Para $T \in$ Möb: $(Tz_1, Tz_2; Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$.

Demostración.

1. Tz_2, Tz_3, Tz_4 son distintos (T es biyectiva, G2-022.T1).
2. Si S es la de T1 para z_2, z_3, z_4, $S \circ T^{-1} \in$ Möb lleva Tz_2, Tz_3, Tz_4 en $1, 0, \infty$: por la unicidad de T1, es la S de esos tres puntos.
3. Por D1, $(Tz_1, Tz_2; Tz_3, Tz_4) = (S \circ T^{-1})(Tz_1) = S(z_1) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$. ■

Teorema G2-023.T4 (concíclicos ⟺ razón cruzada real)

Cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ están en una misma circunferencia generalizada ⟺ $(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Idea de la demostración

S manda z_2, z_3, z_4 a $1, 0, \infty$, y por tanto la circunferencia generalizada por ellos a la «recta real más ∞». La cuarta está en la circunferencia si y solo si su imagen es real.

Demostración. Sea S la de T1 para z_2, z_3, z_4.

1. Por G2-021.T3 hay exactamente una circunferencia generalizada $\mathcal{C}$ por z_2, z_3, z_4; los cuatro están en una misma circunferencia generalizada ⟺ $z_1 \in \mathcal{C}$.
2. $S(\mathcal{C})$ es una circunferencia generalizada (G2-022.T4) que pasa por $1, 0, \infty$. También $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lo es: es $C(0, i, 0)$, pues $\bar{i}z + i\bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$ (G2-021.D3, G2-020.T2). Por la unicidad de G2-021.T3, $S(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$.
3. Como S es biyectiva, $z_1 \in \mathcal{C} \iff S(z_1) \in \hat{\mathbb{R}}$; y $S(z_1) \neq \infty$ porque $z_1 \neq z_4$. Así $z_1 \in \mathcal{C} \iff (z_1, z_2; z_3, z_4) = S(z_1) \in \mathbb{R}$ (D1). ■

Ejemplo G2-023.E1

$(2, 0; 1, -1) = -1/3$ (puntos alineados) y $(i, 1; -1, -i) = 1/2$ (en la circunferencia unitaria); la única Möbius con $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto -i$, $\infty \mapsto 1$ es la transformada de Cayley K.

1. $(2, 0; 1, -1) = \dfrac{(2-1)(0+1)}{(2+1)(0-1)} = -\dfrac{1}{3} \in \mathbb{R}$: $2, 0, 1, -1$ están en el eje real.
2. $(i, 1; -1, -i) = \dfrac{(i+1)(1+i)}{(i+i)(1+1)} = \dfrac{2i}{4i} = \dfrac{1}{2}$: los cuatro están en $C(0, 1)$.
3. K cumple esas tres condiciones (G2-022.E1); por T2 es la única.
4. Las mesas de la Motivación: $(0, 2; 1+i, 1-i) = \dfrac{(-1-i)(1+i)}{(-1+i)(1-i)} = \dfrac{-2i}{2i} = -1$; con $2i$ en lugar de $1-i$ sale $1 - i \notin \mathbb{R}$ (`tools/checks/G2-023.py`).

Por qué cada hipótesis

⚠ Puntos distintos

Si $z_3 = z_4$, la fórmula de S tiene $z - z_4$ arriba y abajo y su determinante es 0: no hay Möbius que mande el mismo punto a 0 y a ∞.

⚠ El orden importa

$(z_1, z_2; z_3, z_4)$ cambia si se permutan los puntos: $(2, 1; 0, -1) = \dfrac{(2-0)(1+1)}{(2+1)(1-0)} = \dfrac{4}{3}$. La propiedad «ser real» no depende del orden (T4).

⚠ Tres puntos fijos

$\kappa(z) = \bar{z}$ fija todos los reales y no es la identidad: no es Möbius. Para Möbius, tres puntos fijos ya obligan a la identidad (T2).

Ejercicios

1. Calcula $(0, 1; \infty, -1)$ con la fórmula para $z_3 = \infty$.
2. Encuentra la Möbius que lleva $1, i, -1$ en $0, 1, \infty$.
3. ¿Están 1, i, $1 + i$ y 0 en una misma circunferencia?
4. Calcula la Möbius S con $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$, $\infty \mapsto \infty$.
5. ¿Cuántos puntos fijos tiene $z \mapsto z + 1$? ¿Y $z \mapsto 2z$?

Respuestas

1. $(z_2 - z_4)/(z - z_4)$ con $z_2 = 1, z_4 = -1, z = 0$: $2/1 = 2$.
2. S con $z_2 = i \mapsto 1, z_3 = 1 \mapsto 0, z_4 = -1 \mapsto \infty$: $S(z) = \dfrac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)}$; en orden $1 \mapsto 0, i \mapsto 1, -1 \mapsto \infty$.
3. $(1, i; 1 + i, 0) = \dfrac{(1-1-i)(i)}{(1)(i-1-i)} = \dfrac{-i \cdot i}{-1} = -1 \in \mathbb{R}$: sí (son vértices de un cuadrado).
4. Por T1 con $z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = \infty$: $S(z) = (z-1)/(0-1) = 1 - z$.
5. $z + 1$: solo ∞. $2z$: 0 e ∞ (T2: a lo más dos).

G2-024 · Geometría hiperbólica: el semiplano superior

Motivación

> **La hormiga del piso frío**
> Imagina una hormiga que vive en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ y cuyo paso mide lo mismo que su altura: a altura 1 da pasos de 1 cm, a altura $1/10$ de 1 mm. Cerca del eje real todo se le encoge y nunca llega a tocarlo. Para ella, los caminos «rectos» no son los segmentos: son semicircunferencias que bajan perpendiculares al borde, o semirrectas verticales. En ese mundo, por un punto fuera de una recta pasan **infinitas** rectas que no la cortan: falla el quinto postulado de Euclides.
> Dónde falla la analogía: aquí las rectas hiperbólicas se **definen** con circunferencias ortogonales a $\hat{\mathbb{R}}$; que sean los caminos más cortos para la hormiga no se demuestra en este curso (TEMARIO, decisión 10). Lo que sí se demuestra es que se comportan como rectas: por dos puntos pasa una sola, y las Möbius reales las respetan.

El semiplano y sus rectas

Definición G2-024.D1 (el semiplano de Poincaré y sus rectas)

$H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es la circunferencia generalizada $C(0, i, 0)$ (G2-021.D3). Una **recta hiperbólica** es $H \cap \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ una circunferencia generalizada ortogonal a $\hat{\mathbb{R}}$ (G2-022.D4).

Con $\beta = i$: $\bar{i}z + i\bar{z} = -i(z - \bar{z}) = -i \cdot 2i \operatorname{Im} z = 2 \operatorname{Im} z$ (G2-020.T2), y la ecuación $2 \operatorname{Im} z = 0$, más ∞, es $\hat{\mathbb{R}}$ (G2-021.D3).

Teorema G2-024.T1 (cómo son)

$C(A,\beta,D)$ es ortogonal a $\hat{\mathbb{R}} \iff \beta \in \mathbb{R}$. Las rectas hiperbólicas son exactamente las semirrectas verticales $\{\operatorname{Re} z = x_0, \operatorname{Im} z > 0\}$ y las semicircunferencias $H \cap C(x_0, r)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Cada una corta a $\hat{\mathbb{R}}$ en exactamente dos puntos, sus **extremos** (x_0 e ∞, o $x_0 \pm r$).

Demostración.

1. Con $\beta = p+iq$: $\langle (A,\beta,D), (0,i,0)\rangle = \operatorname{Re}(\bar{\beta} i) - 0 = \operatorname{Re}(q+ip) = q = \operatorname{Im}\beta$ (G2-022.D3). Ortogonal $\iff \beta \in \mathbb{R}$.
2. $A \neq 0$, β *real.* Es la circunferencia de centro $x_0 := -\beta/A \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ (G2-021.T2); su parte en H es la semicircunferencia de arriba.
3. $A = 0$, $\beta \neq 0$ *real.* Es la recta $\beta \operatorname{Re} z = -D/2$ más ∞ (G2-021.T2, $\beta \cdot z = \beta \operatorname{Re} z$): la vertical $\operatorname{Re} z = x_0$ con $x_0 := -D/(2\beta)$.
4. *Recíproco.* $C(x_0, r)$ tiene vector $(1, -x_0, x_0^2 - r^2)$ y $\operatorname{Re} z = x_0$ tiene $(0, 1, -2x_0)$ (G2-021.T2): β real en ambos.
5. *Extremos.* Si $z \in \mathbb{R}$, $|z - x_0| = r \iff z = x_0 \pm r$: dos puntos; la vertical corta a $\hat{\mathbb{R}}$ en x_0 y en ∞. ■

Teorema G2-024.T2 (por dos puntos pasa una sola recta)

Por dos puntos distintos $z, w \in H$ pasa exactamente una recta hiperbólica.

Demostración.

1. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w =: x_0$. La vertical $\operatorname{Re} z = x_0$ los contiene, y es la única vertical que lo hace. Si una semicircunferencia de centro x_1 los contuviera, $|z - x_1|^2 = |w - x_1|^2$ daría $(\operatorname{Im} z)^2 = (\operatorname{Im} w)^2$ (G1-002.T3), es decir $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$ (ambos > 0, C1-002.T5), y $z = w$.
2. $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w$. Ninguna vertical los contiene. Una semicircunferencia de centro $x_0 \in \mathbb{R}$ los contiene $\iff |z - x_0|^2 = |w - x_0|^2 \iff |z|^2 - 2x_0 \operatorname{Re} z = |w|^2 - 2x_0 \operatorname{Re} w$ (G1-002.T3), que tiene la única solución
$$x_0 = \frac{|w|^2 - |z|^2}{2(\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} z)},$$
con radio $r := |z - x_0| > 0$. Por T1 no hay otras rectas hiperbólicas. ■

Teorema G2-024.T3 (falla el quinto postulado)

Sean $\ell := \{\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ y $P := 1 + i \notin \ell$. La semirrecta $\operatorname{Re} z = 1$ y, para cada $x_0 \geq 1$, la semicircunferencia por P de centro x_0 son rectas hiperbólicas por P que no cortan a ℓ, distintas dos a dos (infinitas); la de centro $x_0 < 1$ sí corta a ℓ.

Demostración.

1. La vertical $\operatorname{Re} z = 1$ pasa por P y no toca $\operatorname{Re} z = 0$.
2. La semicircunferencia de centro $x_0 \in \mathbb{R}$ por P tiene $r^2 = |P - x_0|^2 = (1 - x_0)^2 + 1$ (G1-002.T3).
3. Corta a $\ell \iff$ existe $y > 0$ con $x_0^2 + y^2 = r^2 \iff r^2 > x_0^2$ (G1-002.T2) $\iff 2 - 2x_0 > 0 \iff x_0 < 1$.
4. Así, para $x_0 \geq 1$ no la corta. Centros distintos dan semicircunferencias distintas: tres puntos de una semicircunferencia determinan su circunferencia (G1-010.T2) y con ella el centro. Y ninguna es la vertical (T2, paso 1 con P y otro punto). Hay tantas como $x_0 \in [1, \infty)$: infinitas. ■

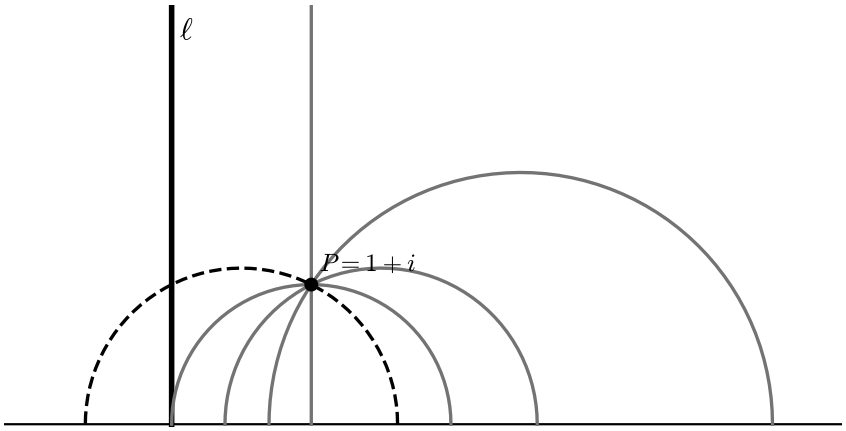


Figura 17: Por $P = 1 + i$ pasan infinitas rectas hiperbólicas que no cortan a ℓ (gris: la vertical y las de centro $x_0 = 1, 1.5, 2.5$); la de centro $1/2$ (punteada) sí la corta.

Las Möbius reales

Definición G2-024.D2 (Möbius reales)

$\text{Möb}_{\mathbb{R}}^{+} := \{T_{a,b,c,d} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc>0\}$.

Teorema G2-024.T4 (conservan H y sus rectas)

Para $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}^{+}$ y $z \in H$, $\operatorname{Im} T(z) = (ad-bc)\operatorname{Im} z/|cz+d|^2 > 0$. $\text{Möb}_{\mathbb{R}}^{+}$ es un subgrupo de Möb; $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}, T(H) = H$, T se restringe a una biyección de H, y lleva rectas hiperbólicas sobre rectas hiperbólicas.

Demostración.

1. Si $z \in H$, $cz+d \neq 0$: si $c \neq 0$, $cz+d=0$ daría $z = -d/c \in \mathbb{R}$; si $c=0$, $d \neq 0$.
2. $T(z) = (az+b)(c\bar{z}+d)/|cz+d|^2$ (G2-020.T2), y $(az+b)(c\bar{z}+d) = ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd$ tiene parte imaginaria $(ad-bc)\operatorname{Im} z$ (los coeficientes son reales). Se divide entre $|cz+d|^2 > 0$.
3. *Subgrupo. I* es real de det 1. El producto de matrices reales es real y $\det(AB) = \det A \det B > 0$ (G2-022.T1); la inversa de T_A es $T_{A'}$ con $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, real de det $ad-bc>0$.
4. $\hat{\mathbb{R}}$. Si $x \in \mathbb{R}$ y $cx+d \neq 0$, $T(x) \in \mathbb{R}$; $T(-d/c) = \infty$; $T(\infty) = a/c \in \mathbb{R}$ o ∞. Así $T(\hat{\mathbb{R}}) \subset \hat{\mathbb{R}}$, y lo mismo para T^{-1} (3): $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$.
5. *H.* Por 2, $T(H) \subset H$, y $T^{-1}(H) \subset H$: $T(H) = H$, y T restringida es una biyección de H.
6. *Rectas.* $T(H \cap \mathcal{C}) = T(H) \cap T(\mathcal{C}) = H \cap T(\mathcal{C})$ (T biyectiva, G2-022.T1), y $T(\mathcal{C})$ es una circunferencia generalizada (G2-022.T4) ortogonal a $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ (G2-022.T6). ■

Teorema G2-024.T5 (transitividad)

Para $z, w \in H$ existe $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}^{+}$ con $T(z) = w$. Toda recta hiperbólica ℓ es $T(\ell_0)$ con $\ell_0 := \{it : t > 0\}$ y $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}^{+}$: si ℓ tiene extremos $p < q$ en $\mathbb{R}$ sirve $T^{-1}(z) = (z-p)/(q-z)$, y si sus extremos son p e ∞, $T^{-1}(z) = z - p$; en ambos casos T^{-1} lleva p en 0 y el otro extremo en ∞.

Demostración.

1. *Transitividad.* $T_z(\zeta) := (\zeta - \operatorname{Re} z)/\operatorname{Im} z$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{Re} z \\ 0 & \operatorname{Im} z \end{pmatrix}$ de det $\operatorname{Im} z > 0$, y $T_z(z) = i$. $T := T_w^{-1} \circ T_z \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}^+$ (T4) lleva z en w.
2. *Extremos $p < q$.* $S(z) := (z-p)/(q-z)$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 1 & -p \\ -1 & q \end{pmatrix}$ de det $q - p > 0$; $S(p) = 0$ y $S(q) = \infty$ (su polo).
3. Si $\ell = H \cap \mathcal{C}$, $S(\mathcal{C})$ es una circunferencia generalizada ortogonal a $\hat{\mathbb{R}}$ (T4, paso 6) que pasa por 0 y por ∞: es una recta ($A = 0$) con β real (T1) por 0, es decir $\operatorname{Re} z = 0$ más ∞. Así $S(\ell) = H \cap \{\operatorname{Re} z = 0\} = \ell_0$ (T4), y $T := S^{-1}$ sirve.
4. *Extremos p, ∞.* ℓ es la vertical $\operatorname{Re} z = p$ (T1), y $z \mapsto z - p$ (det 1) la lleva en ℓ_0. ■

Ejemplo G2-024.E1

La recta hiperbólica por i y $1 + i$ es la semicircunferencia de centro $1/2$ y radio $\sqrt{5}/2$, con extremos $(1 \pm \sqrt{5})/2$.

1. $\operatorname{Re} i = 0 \neq 1 = \operatorname{Re}(1+i)$: por T2, $x_0 = (|1+i|^2 - |i|^2)/(2(1-0)) = (2-1)/2 = 1/2$.
2. $r = |i - 1/2| = \sqrt{1/4 + 1} = \sqrt{5}/2$, y $|1 + i - 1/2| = \sqrt{1/4+1}$ también.
3. Extremos $x_0 \pm r = (1 \pm \sqrt{5})/2$ (T1).

Por qué cada hipótesis

⚠ Ortogonal a $\hat{\mathbb{R}}$

$H \cap C(i, 1/2)$ es una circunferencia entera dentro de H, no ortogonal a $\hat{\mathbb{R}}$: no tiene extremos y no es recta hiperbólica.

⚠ $ad - bc > 0$

$T(z) = 1/z$ tiene coeficientes reales pero det $= -1$: $\operatorname{Im}(1/i) = -1 < 0$, así que manda H al semiplano de abajo.

⚠ «Paralela» no es «equidistante»

Las rectas de centro $x_0 \geq 1$ por P no cortan a ℓ, pero se acercan a ella o se alejan; no hay una «distancia constante» entre ellas (la distancia es la clase siguiente).

Ejercicios

1. Encuentra la recta hiperbólica por $2i$ y $2 + 2i$.
2. ¿Corta la recta de E1 a la recta $\operatorname{Re} z = 2$?
3. Da una $T \in \text{Möb}^+_{\mathbb{R}}$ con $T(i) = 3 + 2i$.
4. Demuestra que $z \mapsto -1/z$ está en $\text{Möb}^+_{\mathbb{R}}$ y lleva ℓ_0 en sí misma.
5. Por $P = 2 + i$, ¿qué semicircunferencias no cortan al eje imaginario?

Respuestas

1. $x_0 = (8 - 4)/(2 \cdot 2) = 1, r = |2i - 1| = \sqrt{5}$.
2. No: sus extremos son $(1 \pm \sqrt{5})/2 \approx -0.62, 1.62$, y $1.62 < 2$; la semicircunferencia no llega a $\operatorname{Re} z = 2$.
3. $T(z) = 2z + 3$ (matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, det 2): $T(i) = 3 + 2i$.
4. Matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, det 1; $-1/(it) = i/t$, con $t > 0 \iff 1/t > 0$.
5. $r^2 = (2 - x_0)^2 + 1 > x_0^2 \iff x_0 < 5/4$: las de centro $x_0 \geq 5/4$ no lo cortan.

G2-025 · Distancia hiperbólica

Motivación

> **La hormiga que cuenta pasos**
> La hormiga de G2-024 da pasos del tamaño de su altura. Para ir de i a $2i$ sube de altura 1 a altura 2; para ir de $2i$ a $4i$, de 2 a 4. Como sus pasos crecen con la altura, los dos viajes «le cuestan» lo mismo: la distancia hiperbólica de cada uno es $\log 2 \approx 0.693$. Y de i a $1+i$, en vez de caminar en horizontal (lo que intuitivamente costaría 1), le conviene subir un poco por la semicircunferencia: $d_H(i, 1+i) = \operatorname{arcosh}(3/2) \approx 0.962$.
> Dónde falla la analogía: la longitud hiperbólica de una curva no se define en este curso; «cuesta 1» es solo intuición. Aquí la distancia se **define** por una fórmula y se prueban sus propiedades: es una métrica invariante por las Möbius reales, y sobre cada recta hiperbólica se suma como la del eje real.

Parte 1 · La distancia y su invariancia

Definición G2-025.D1 (coseno y seno hiperbólicos)

$\cosh x := (\exp x + \exp(-x))/2$ y $\operatorname{senh} x := (\exp x - \exp(-x))/2$, con exp de C2-012.D1.

Teorema G2-025.T1 (propiedades)

$\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$; $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$; $\operatorname{senh} x \geq 0$ si $x \geq 0$; cosh es estrictamente creciente en $[0, \infty)$ y biyectiva de $[0, \infty)$ sobre $[1, \infty)$, con inversa $t \mapsto \log(t + \sqrt{t^2 - 1})$; $\cosh(\log s) = (s + 1/s)/2$ para $s > 0$, y cosh es par.

Demostración. Escribe $e^x := \exp x$; por C2-012.T2, $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ y $e^x e^y = e^{x+y}$.

1. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{4}\big((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\big) = \frac{1}{4} \cdot 4e^x e^{-x} = 1$.

2. $(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y}) = 2e^{x+y}+2e^{-x-y}$; al dividir entre 4 sale $\cosh(x+y)$.
3. Si $x \geq 0$, $x \geq -x$ y exp es creciente (C2-012.T1): $e^x \geq e^{-x}$, $\operatorname{senh} x \geq 0$.
4. *Creciente.* Si $0 \leq x < y$:

$$\cosh y - \cosh x = \frac{e^y - e^x}{2} - \frac{e^y - e^x}{2e^{x+y}} = \frac{(e^y - e^x)(1 - e^{-x-y})}{2} > 0,$$

   pues $e^y > e^x$ y $x + y > 0$ da $e^{-x-y} < 1$ (C2-012.T1).
5. *Sobre* $[1,\infty)$. $\cosh 0 = 1$. Si $t \geq 1$, sea $x := \log(t + \sqrt{t^2-1})$ (C2-014.D1); como $t + \sqrt{t^2-1} \geq 1$, $x \geq 0$ (C2-011.T1). Entonces $e^x = t+\sqrt{t^2-1}$ (C2-012.D1) y, como $(t+\sqrt{t^2-1})(t-\sqrt{t^2-1}) = 1$, $e^{-x} = t - \sqrt{t^2-1}$: $\cosh x = t$.
6. Por 4 y 5, $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ es biyectiva con esa inversa (C1-011.T1).
7. $\cosh(\log s) = (s + 1/s)/2$, pues $e^{\log s} = s$ y $e^{-\log s} = 1/s$. Y $\cosh(-x) = \cosh x$ por la definición. ■

Definición G2-025.D2 (argumento coseno hiperbólico)

$\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ es la inversa de cosh restringida a $[0,\infty)$: $\operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2-1})$.

Definición G2-025.D3 (distancia hiperbólica)

Para $z, w \in H$: $d_H(z,w) := \operatorname{arcosh}\left(1 + \dfrac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}\right)$.

Está bien definida: el argumento es ≥ 1 porque $\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} w > 0$.

Teorema G2-025.T2 (invariancia)

Para $T \in \text{Möb}^+_{\mathbb{R}}$ y $z, w \in H$: $d_H(Tz, Tw) = d_H(z,w)$.

Demostración. Sea $T(z) = (az+b)/(cz+d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$.

1. $cz + d \neq 0$ y $cw + d \neq 0$, porque $z, w \notin \mathbb{R}$ (G2-024.T4, paso 1).
2. Restando y simplificando el numerador:

$$Tz - Tw = \frac{(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)}{(cz+d)(cw+d)} = \frac{(ad-bc)(z-w)}{(cz+d)(cw+d)}.$$

3. Por G2-020.T2, $|Tz - Tw|^2 = (ad-bc)^2|z-w|^2/(|cz+d|^2|cw+d|^2)$, y por G2-024.T4,

$\operatorname{Im} Tz \operatorname{Im} Tw = (ad - bc)^2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w/(|cz + d|^2|cw + d|^2)$.

4. El cociente $|Tz - Tw|^2/(2 \operatorname{Im} Tz \operatorname{Im} Tw)$ es el de z, w: las distancias son iguales. ■

Teorema G2-025.T3 (el eje imaginario; aditividad)

$d_H(iy_1, iy_2) = |\log(y_2/y_1)|$ para $y_1, y_2 > 0$. Para toda recta hiperbólica ℓ existe una biyección $\gamma : \mathbb{R} \to \ell$ con $d_H(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ ($\gamma(s) := T(ie^s)$ con T de G2-024.T5); por tanto, si $s_1 \le s_2 \le s_3$, $d_H(\gamma(s_1), \gamma(s_3)) = d_H(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) + d_H(\gamma(s_2), \gamma(s_3))$.

Demostración.

1. $1 + \dfrac{(y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2} = \dfrac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1y_2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_2}{y_1} + \dfrac{y_1}{y_2}\right) = \cosh \log \dfrac{y_2}{y_1} = \cosh \left|\log \dfrac{y_2}{y_1}\right|$ (T1, con $s = y_2/y_1$; cosh es par).
2. Como $|\log(y_2/y_1)| \ge 0$ y arcosh es la inversa de cosh en $[0, \infty)$ (D2), $d_H(iy_1, iy_2) = |\log(y_2/y_1)|$.
3. *La biyección.* $s \mapsto ie^s$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\ell_0 = \{it : t > 0\}$ (C2-012.T1), y T lo es de ℓ_0 sobre ℓ (G2-024.T5, G2-024.T4).
4. Por T2 y 2, $d_H(\gamma(s), \gamma(t)) = d_H(ie^s, ie^t) = |\log(e^t/e^s)| = |t - s|$ (C2-011.C1, C2-012.T2).
5. Si $s_1 \le s_2 \le s_3$: $s_3 - s_1 = (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2)$, con los tres términos ≥ 0. ■

Teorema G2-025.T4 (es el logaritmo de una razón cruzada)

Si $z \ne w$ están en una recta hiperbólica de extremos p, q (en cualquier orden), $(z, w; p, q)$ es real y positivo y $d_H(z, w) = |\log(z, w; p, q)|$.

Demostración.

1. Por G2-024.T5 hay $U \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}^+$ (la T^{-1} de allí) que lleva la recta en ℓ_0, uno de los extremos en 0 y el otro en ∞; sean $Uz = iy_1$, $Uw = iy_2$, con $y_1 \ne y_2$.
2. Por G2-023.T3, $(z, w; p, q) = (Uz, Uw; Up, Uq)$.
3. Si $Up = 0$ y $Uq = \infty$, con la fórmula para $z_4 = \infty$ (G2-023.T1): $(iy_1, iy_2; 0, \infty) = \dfrac{iy_1 - 0}{iy_2 - 0} = \dfrac{y_1}{y_2}$.
4. Si $Up = \infty$ y $Uq = 0$, con la fórmula para $z_3 = \infty$: $(iy_1, iy_2; \infty, 0) = \dfrac{iy_2 - 0}{iy_1 - 0} = \dfrac{y_2}{y_1}$.
5. En ambos casos es real y positivo, y por T2 y T3, $d_H(z, w) = d_H(iy_1, iy_2) = |\log(y_2/y_1)| = |\log(y_1/y_2)|$ (C2-011.C1). ■

Teorema G2-025.T5 (primeras propiedades de métrica)

$d_H(z,w) \geq 0$, $d_H(z,w) = 0 \iff z = w$, y $d_H(z,w) = d_H(w,z)$.

Demostración.

1. arcosh toma valores en $[0,\infty)$ (D2).
2. $d_H(z,w) = 0 \iff$ el argumento es $\cosh 0 = 1$ (T1, inyectividad) $\iff |z-w|^2 = 0 \iff z = w$ (G1-002.T3).
3. La fórmula es simétrica en z, w. ■

Parte 2 · El disco de Poincaré y la desigualdad del triángulo

Definición G2-025.D4 (el disco de Poincaré)

$\mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, y K la transformada de Cayley de G2-022.E1.

Teorema G2-025.T6 (K lleva H sobre $\mathbb{D}$)

K es una biyección de H sobre $\mathbb{D}$, con $K^{-1}(w) = i(1+w)/(1-w)$ e $\operatorname{Im} K^{-1}(w) = (1-|w|^2)/|1-w|^2$. Con $d_{\mathbb{D}}(w_1,w_2) := d_H(K^{-1}w_1, K^{-1}w_2)$: $\cosh d_{\mathbb{D}}(w_1,w_2) = 1+2|w_1-w_2|^2/((1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2))$; $d_{\mathbb{D}}$ es invariante por las rotaciones $w \mapsto uw$ ($|u| = 1$); $\cosh d_{\mathbb{D}}(0,w) = (1+|w|^2)/(1-|w|^2)$ y $\operatorname{senh} d_{\mathbb{D}}(0,w) = 2|w|/(1-|w|^2)$.

Demostración.

1. Para $z = x+iy$: $|z-i|^2 - |z+i|^2 = (x^2+(y-1)^2) - (x^2+(y+1)^2) = -4y$. Si $z \in H$, $z+i \neq 0$ y $|K(z)| < 1 \iff |z-i| < |z+i| \iff y > 0$ (G2-020.T2, G1-002.T2): $K(H) \subset \mathbb{D}$.
2. K es biyectiva en $\hat{\mathbb{C}}$ (G2-022.T1) con $K(\infty) = 1$ y $K(-i) = \infty$, que no están en $\mathbb{D}$. Si $w \in \mathbb{D}$, $z := K^{-1}(w) \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ y $|K(z)| < 1$, así que $z \in H$ por 1. Luego $K : H \to \mathbb{D}$ es biyectiva.
3. La matriz de K es $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$; la de K^{-1}, $\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (G2-022.T1): $K^{-1}(w) = i(1+w)/(1-w)$.
4. $\operatorname{Im} K^{-1}(w) = \operatorname{Re} \dfrac{1+w}{1-w} = \dfrac{\operatorname{Re}\big((1+w)(1-\bar{w})\big)}{|1-w|^2} = \dfrac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$, porque $(1+w)(1-\bar{w}) = 1 - |w|^2 + (w-\bar{w})$ y $w-\bar{w}$ es imaginario puro (G2-020.T2).

5. Con $z_k := K^{-1}w_k$: $z_1 - z_2 = i\dfrac{(1+w_1)(1-w_2)-(1+w_2)(1-w_1)}{(1-w_1)(1-w_2)} = \dfrac{2i(w_1-w_2)}{(1-w_1)(1-w_2)}$.
6. Por D3, 4 y 5 (G2-020.T2), los factores $|1-w_k|^2$ se cancelan:

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(w_1,w_2) = 1 + \frac{4|w_1-w_2|^2}{2(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}.$$

7. *Rotaciones.* $|uw_1 - uw_2| = |w_1 - w_2|$ y $|uw_k| = |w_k|$ (G2-020.T2): la fórmula no cambia.
8. *Desde el centro.* Con $w_1 = 0$: $\cosh d_{\mathbb{D}}(0,w) = 1+2|w|^2/(1-|w|^2) = (1+|w|^2)/(1-|w|^2)$. Por T1, $\operatorname{senh}^2 = \cosh^2 - 1 = 4|w|^2/(1-|w|^2)^2$, y $\operatorname{senh} \geq 0$ en $[0,\infty)$: $\operatorname{senh} d_{\mathbb{D}}(0,w) = 2|w|/(1-|w|^2)$ (G1-002.T2). ■

Teorema G2-025.T7 (desigualdad del triángulo con vértice en el centro)

Para $w_1, w_3 \in \mathbb{D}$: $d_{\mathbb{D}}(w_1,w_3) \leq d_{\mathbb{D}}(w_1,0) + d_{\mathbb{D}}(0,w_3)$, con igualdad $\Leftrightarrow$ $w_1 = 0$, $w_3 = 0$ o $w_3 = -\lambda w_1$ con $\lambda > 0$ (0 en el diámetro entre ellos).

Idea de la demostración

$\cosh d_{\mathbb{D}}(w_1,w_3)$ solo depende de $|w_1 - w_3|$, que es máximo cuando w_1 y w_3 están en lados opuestos del centro. En ese caso extremo, el valor es exactamente $\cosh(r_1+r_3)$ por la fórmula de suma.

Demostración. Sean $\rho_k := |w_k|$ y $r_k := d_{\mathbb{D}}(0,w_k)$.

1. Por G1-002.T6 (con w_1 y $-w_3$), $|w_1 - w_3| \leq \rho_1 + \rho_3$, con igualdad $\Leftrightarrow$ $w_1 = 0$ o $-w_3 = \lambda w_1$ con $\lambda \geq 0$.
2. Por T6:

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(w_1,w_3) \leq 1 + \frac{2(\rho_1+\rho_3)^2}{(1-\rho_1^2)(1-\rho_3^2)} = \frac{(1+\rho_1^2)(1+\rho_3^2)+4\rho_1\rho_3}{(1-\rho_1^2)(1-\rho_3^2)},$$

   desarrollando el numerador: $(1-\rho_1^2)(1-\rho_3^2) + 2(\rho_1+\rho_3)^2 = 1 + \rho_1^2 + \rho_3^2 + \rho_1^2\rho_3^2 + 4\rho_1\rho_3$.
3. Por T6, el lado derecho es $\cosh r_1 \cosh r_3 + \operatorname{senh} r_1 \operatorname{senh} r_3 = \cosh(r_1 + r_3)$ (T1).
4. $d_{\mathbb{D}}(w_1,w_3)$ y $r_1 + r_3$ están en $[0,\infty)$, donde cosh es estrictamente creciente (T1): $d_{\mathbb{D}}(w_1,w_3) \leq r_1 + r_3 = d_{\mathbb{D}}(w_1,0) + d_{\mathbb{D}}(0,w_3)$ (T5).
5. *Igualdad.* Por 4, hay igualdad $\Leftrightarrow$ hay igualdad en 1 $\Leftrightarrow$ $w_1 = 0$, o $w_3 = -\lambda w_1$ con $\lambda \geq 0$; el caso $\lambda = 0$ es $w_3 = 0$. ■

Teorema G2-025.T8 (desigualdad del triángulo)

Para $z_1, z_2, z_3 \in H$: $d_H(z_1, z_3) \leq d_H(z_1, z_2) + d_H(z_2, z_3)$. Por tanto d_H es una métrica en H, invariante por $\mathrm{Möb}^+_{\mathbb{R}}$.

Demostración.

1. Por G2-024.T5 hay $T \in \mathrm{Möb}^+_{\mathbb{R}}$ con $T(z_2) = i$, y por T2 $d_H(z_j, z_k) = d_H(Tz_j, Tz_k)$.
2. Sean $w_k := K(Tz_k) \in \mathbb{D}$ (T6); $w_2 = K(i) = 0$ (G2-022.E1). Por la definición de $d_{\mathbb{D}}$ (T6), $d_H(Tz_j, Tz_k) = d_{\mathbb{D}}(w_j, w_k)$.
3. Por T7, $d_{\mathbb{D}}(w_1, w_3) \leq d_{\mathbb{D}}(w_1, 0) + d_{\mathbb{D}}(0, w_3)$, que por 1 y 2 es la desigualdad pedida.
4. Con T5, d_H es una métrica; T2 da la invariancia. ■

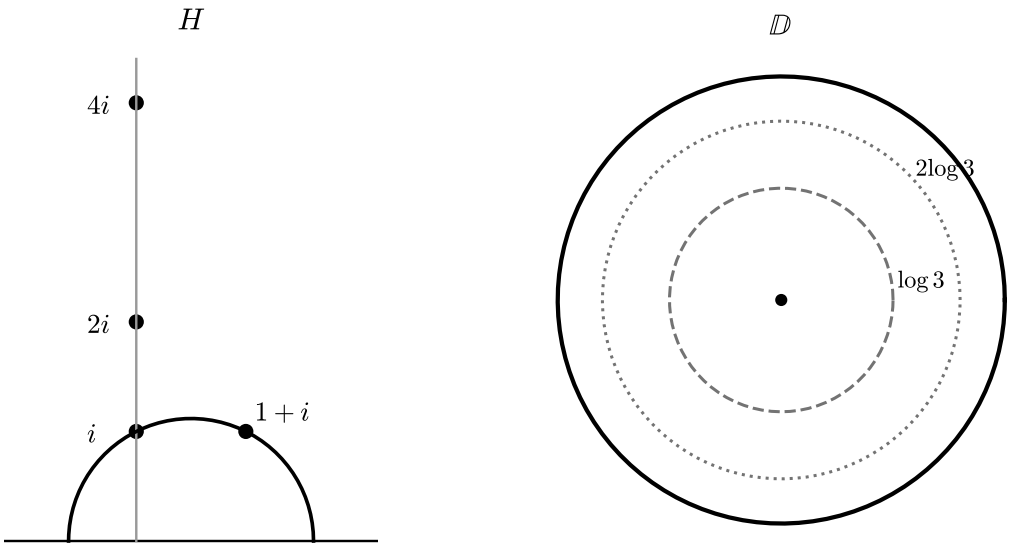


Figura 18: Izquierda: en H, i, $2i$, $4i$ están a distancia $\log 2$ uno del siguiente, y la recta por i y $1 + i$. Derecha: en $\mathbb{D}$, los círculos de centro 0 y radios hiperbólicos $\log 3$ y $2\log 3$ tienen radios euclidianos $1/2$ y $4/5$.

Ejemplo G2-025.E1

$d_H(i, 2i) = \log 2$; $d_H(i, 1+i) = \operatorname{arcosh}(3/2) = \log((3+\sqrt{5})/2)$, y con los extremos $(1\pm\sqrt{5})/2$ de la recta por i y $1+i$ (G2-024.E1), la razón cruzada $(i, 1+i; (1-\sqrt{5})/2, (1+\sqrt{5})/2) = (3-\sqrt{5})/2$, cuyo $|\log|$ es el mismo.

1. Por T3, $d_H(i, 2i) = |\log 2| = \log 2$.
2. Por D3, $d_H(i, 1+i) = \operatorname{arcosh}(1 + 1/2) = \log\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 1}\right) = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (D2).
3. La razón cruzada (G2-023.D1) da $(3-\sqrt{5})/2$ (`tools/checks/G2-025.py`), y como $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 4$, $|\log\frac{3-\sqrt{5}}{2}| = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (C2-011.C1), como dice T4.

Por qué cada hipótesis

⚠ Puntos en H

Si $\operatorname{Im} w = 0$, el denominador de D3 es 0: los puntos de $\mathbb{R}$ están «a distancia infinita» (por T3, $d_H(i, iy) = |\log y| \to \infty$ si $y \to 0^+$).

⚠ La invariancia es para $\mathrm{Möb}^+_{\mathbb{R}}$

$z \mapsto z + i$ es una traslación (Möbius, no real): manda $i, 2i$ (distancia $\log 2$) a $2i, 3i$, a distancia $\log(3/2)$.

⚠ Euclides no ayuda

$|i - 2i| = 1 = |2i - 3i|$, pero $d_H(i, 2i) = \log 2 > \log(3/2) = d_H(2i, 3i)$: cerca del borde todo está más lejos.

Ejercicios

1. Calcula $d_H(2i, 8i)$ y $d_H(-1+i, 1+i)$.
2. ¿Qué puntos iy están a distancia 1 de i?
3. Calcula $d_{\mathbb{D}}(0, 1/3)$.
4. Verifica la desigualdad del triángulo para i, $1+i$, $2i$.
5. Demuestra que $d_{\mathbb{D}}(0, w) = \log((1+|w|)/(1-|w|))$.

Respuestas

1. $\log 4$; $\operatorname{arcosh}(1 + 4/2) = \operatorname{arcosh} 3 = \log(3 + 2\sqrt{2})$.

2. $|\log y| = 1$: $y = e$ o $y = 1/e$.
3. $\cosh = (1 + 1/9)/(1 - 1/9) = 5/4$: $d = \log 2$.
4. $d_H(i, 2i) = \log 2 \approx 0.693 \leq \operatorname{arcosh}(3/2) + \operatorname{arcosh}(1 + 2/4) \approx 0.962 + 0.962$.
5. Con $s := (1+\rho)/(1-\rho)$, $\cosh \log s = (s+1/s)/2 = (1+\rho^2)/(1-\rho^2)$ (T1), que es T6; $\log s \geq 0$.

G2-026 · Cierre de Geometría Analítica

Motivación

> **El mapa de carreteras de dos semestres**
> En dos semestres hubo una ciudad con calles diagonales, una rampa de escuela, una calcomanía que se deformaba, vías de tren que se juntaban en una foto, un vuelo de Madrid a Nueva York, una liga sobre un balón, una esfera de vidrio con un foco y una hormiga que daba pasos del tamaño de su altura. Detrás de todo hubo dos listas de piezas: 259 en `TEOREMAS-G1.md` (255 con id G1 más 4 hechos de trigonometría citados) y 196 en `TEOREMAS-G2.md`, cada una demostrada con las anteriores.
> Este capítulo es el mapa: qué se demostró, por qué rutas, qué se citó sin demostrar y qué viene después.
> Dónde falla la analogía: en una carretera se puede ir y volver; en el curso cada pieza usa solo piezas anteriores, y eso evita los círculos viciosos.

Lo que se demostró en Geometría Analítica I

1. **Introducción (G1-001 a G1-005).** El plano es $\mathbb{R}^2$ y el espacio $\mathbb{R}^3$; producto punto, Cauchy–Schwarz (G1-002.T5) y la desigualdad del triángulo (G1-002.T6); Pitágoras (G1-003.T1); simetrías; lugares geométricos.
2. **Trigonometría (G1-006 a G1-016).** Primero sin medir ángulos (capa 1): coseno y seno algebraicos, leyes de cosenos (G1-007.T1) y de senos, congruencia (G1-008.T5), Tales (G1-009.T1), puntos notables (G1-010.T2), rotaciones y la suma de ángulos como media vuelta (G1-011.T4), ángulo inscrito (G1-012.T2) y potencia (G1-012.T7). Después, con el bloque ⚠ TR (capa 2): medida en radianes (G1-013.T1), polares, paramétricas, cilíndricas y esféricas.
3. **Espacios vectoriales (G1-017 a G1-022).** Subespacios, independencia, la dimensión bien definida (G1-020.T2) y los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (G1-020.T6); producto cruz (G1-021.T4, T5) y triple producto, $\det = 0 \iff$ dependientes (G1-022.T2).
4. **Rectas y planos (G1-023 a G1-027).** Ecuaciones paramétricas y cartesianas, semiplanos y semi-

espacios, Cramer (G1-026.T4) y transversalidad (G1-026.T6), sistemas de desigualdades.

5. **Cónicas (G1-028 a G1-035).** Ecuaciones canónicas (G1-029.T5), espectral 2×2 sin trigonometría (G1-031.T2), clasificación por el discriminante (G1-031.T3), excentricidad y secciones del cono (G1-032), propiedades focales (G1-033.T4-T6), cinco puntos determinan una cónica (G1-035.T4).

Lo que se demostró en Geometría Analítica II

1. **Cuádricas (G2-001 a G2-006).** Cilindros y superficies de revolución; la lista exhaustiva de las 17 formas sin términos mixtos (G2-003.T4, de existencia); simetrías y trazas; superficies regladas; plano tangente.
2. **Transformaciones (G2-007 a G2-016).** Matriz de una lineal, $\det(AB) = \det A \det B$ (G2-008.T7), vectores propios; toda isometría es $x \mapsto Ax + b$ con A ortogonal (G2-010.T2); isometrías del plano (G2-011.T2); eje de Euler (G2-012.T2) y Chasles (G2-012.T4); espectral 3×3 y reducción de toda cuádrica (G2-013.T1, T2); afines y su clasificación de cónicas con unicidad (G2-014.T5); perspectiva (G2-015.T4); programa de Klein (G2-016.T3).
3. **La esfera (G2-017 a G2-019).** Distancia esférica y su desigualdad del triángulo (G2-017.T3); geodésicas: ninguna curva es más corta que el arco (G2-018.T3, T4); leyes de cosenos y senos esféricas, triángulo polar y $\pi < A + B + C < 3\pi$ (G2-019.T7).
4. **Möbius (G2-020 a G2-025).** Los complejos como geometría (G2-020.T6); proyección estereográfica (G2-021.T4); Möbius: grupo, generadores, circunferencias generalizadas y conformidad (G2-022.T1, T2, T4, T6); razón cruzada (G2-023.T4); el semiplano de Poincaré, donde falla el quinto postulado (G2-024.T3); la distancia hiperbólica, una métrica invariante (G2-025.T8).

Las rutas principales

Cada flecha es un «usa:» de los inventarios.

1. *Álgebra lineal en dimensión* ≤ 3. Triple producto (G1-022.D1) → formas trilineales (G2-008.T6) → $\det(AB)$ (G2-008.T7) → eje de Euler (G2-012.T2) → espectral 3×3 (G2-013.T1), que se apoya en el espectral 2×2 (G1-031.T2) → reducción de las cuádricas (G2-013.T2).
2. *Isometrías y grupos.* Polarización (G1-002.T3) → isometría $= Ax + b$ (G2-010.T2) → clasificación del plano (G2-011.T2) → Chasles (G2-012.T4); grupos de transformaciones (G2-010.D2) → afines (G2-014.T1) → semejanzas (G2-016.T2) → Klein (G2-016.T3).

3. *La esfera.* Cauchy–Schwarz (G1-002.T5) y fórmulas de suma (C2-014.T8) → desigualdad esférica (G2-017.T3) → geodésicas (G2-018.T3, con Heine, C1-025.T1) → suma de ángulos (G2-019.T7, por el polar).
4. *De los complejos a la hiperbólica.* $\mathbb{C}$ es campo (G2-020.T1) → estereográfica (G2-021.T4) → Möbius y circunferencias generalizadas (G2-022.T4) → razón cruzada real (G2-023.T4) → rectas de H (G2-024.T1) → distancia hiperbólica y su desigualdad del triángulo (G2-025.T8).

Lo que se citó sin demostrar

⚠ El bloque ⚠ TR (solo en Geometría Analítica I)

En G1, sen, cos y π se citaron de Cálculo II (entonces posterior) en cuatro hechos, TR.1-TR.4, cada uno con las piezas de C2-014 que lo demuestran. 23 piezas de G1 llevan la marca «⚠ TR» (G1-013, G1-014, G1-016, G1-015.T3, G1-015.E1, G1-032.T2, G1-034.T5, G1-034.E1). En G2 no hay ⚠ TR: Cálculo II es del mismo semestre y sus 21 piezas usadas (de C2-001, C2-002, C2-011, C2-012, C2-014 y C2-020) se citan por id, sin marca.

⚠⚠ def: área y volumen

El área del paralelogramo ($|u \times v|$) y el volumen del paralelepípedo ($|[u, v, w]|$) se **definieron** donde se necesitaron: G1-021.D2, G1-021.T6, G1-022.D2, G1-022.T3 en G1, y G2-008.T8 (factor $|\det A|$) y G2-014.C1 (factor de áreas de una afín) en G2. Ningún teorema depende de ellas salvo los que calculan esa misma área o volumen; la teoría de área es de Cálculo IV.

No se citó ningún curso posterior en G2: no hay piezas «⚠ id». Álgebra Lineal I, que es posterior, no se usó; todo su material necesario (matriz de una lineal, $\det(AB)$, inversa por la adjunta, polinomio característico, espectral, eje de Euler) se demostró en dimensión ≤ 3.

Lo que no se enunció

Por decisión del temario (decisión 10) quedaron fuera: las esferas de Dandelin, el teorema de Girard (el exceso $A + B + C - \pi$ es el área del triángulo esférico), el plano proyectivo como objeto, «la recta hiperbólica es la curva más corta», la clasificación por rango de matrices $m \times n$ y la distinción completa de los 17 tipos de cuádricas (G2-003.T4 es una lista exhaustiva, y G2-005.C1 distingue solo algunos).

Afirmación	¿Demostrada?	Dónde
Cauchy–Schwarz, desigualdad del triángulo	sí	G1-002.T5, G1-002.T6
espectral 2×2 y 3×3	sí	G1-031.T2, G2-013.T1
$\det(AB) = \det A \det B$ $(n \leq 3)$	sí	G2-008.T7
toda rotación de $\mathbb{R}^3$ tiene eje	sí	G2-012.T2
clasificación afín de las cónicas (con unicidad)	sí	G2-014.T5
el arco máximo es la curva más corta en S^2	sí	G2-018.T3, G2-018.T4
d_H es una métrica	sí	G2-025.T8
propiedades de sen, cos, π	en G1 citadas (⚠ TR); en G2 de Cálculo II	TR.1-TR.4; C2-014
área $= \lvert u \times v \rvert$	definición (⚠ def)	G1-021.D2
Girard, Dandelin, geodésica hiperbólica más corta	no se enuncian	TEMARIO, decisión 10

Lo que sigue

1. **Álgebra Lineal I.** Espacios de dimensión n cualquiera, rango, determinantes $n \times n$ y el teorema espectral general: lo que aquí se hizo con 2×2 y 3×3 (G2-008, G2-013) con las mismas ideas.
2. **Cálculo III.** El vector polar $G_f(P)$ de una cuádrica (G2-005, G2-006) será el gradiente, y el plano tangente (G2-006) el de una superficie de nivel cualquiera.
3. **Geometría Diferencial.** Las geodésicas de la esfera (G2-018) y de H son el inicio: curvatura $+1$ en la esfera, -1 en el plano hiperbólico, 0 en el plano; ahí se demuestran Girard y que las rectas hiperbólicas son las curvas más cortas.

Ejercicios

1. Elige un teorema de G2 y sigue sus «usa:» hacia atrás hasta llegar a G1 o a Cálculo I. ¿Cuántos pasos hay?
2. ¿Qué piezas de G2 usan Heine (C1-025.T1)? ¿Por qué hace falta ahí?
3. Explica por qué G2-014.T5 no depende de la definición de área, aunque G2-014.C1 sí.

Respuestas

1. Por ejemplo G2-013.T1 → G2-009.T2 → C1-023.C3 (raíz de una cúbica), o → G1-031.T2.
2. G2-018.T3 (y por él G2-018.T4): una sola partición fina sirve para toda la curva gracias a la continuidad uniforme.
3. La unicidad usa número de puntos, rectas contenidas, acotación y semiplanos (G2-014.T2), ninguno es un área.